www.konkur.in

امین تداری

شناسایی و تعریف نقاط بحرانی:

تعریف نقاط بحرانی: نقطه‌ی $x=a$ یکی از نقاط میانی دامنه‌ی $f(x)$ در نظر بگیرید.

به این نقطه، نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه:

① $f(x)$ در $x=a$ ناپیوسته باشد ② $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌ناپذیر باشد

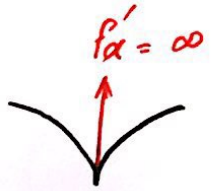
③ $f'(x)$ در $x=a$ برابر صفر شود ④ $f'(x)$ در $x=a$ بی‌نهایت شود: $f'(a)=\infty$

نقاط بحرانی معروف:

① نقاط ناپیوستگی تابع، ② نقاط زاویه‌دار ($f'_+ \neq f'_-$)، ③ ریشه‌های قدرمطلق

④ نقاط بازگشتی، ⑤ عطف قائم.

* نقاط بازگشتی:



$f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$ زوج $n-m$

* نقاط عطف قائم:

$f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$ فرد $n-m$

نکته مهم: ریشه‌های قدرمطلق اگر فرد باشند، بحرانی به حساب می‌آیند.

forum.konkur.in

www.konkur.in

کاربرد مشتق ۲

مجموعه جزوات جمع‌بندی پلاس

امین تداری

تست: تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x}$ چند تاست؟

۱) ۱ ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

حل: (۳)

① $\sqrt[3]{x} \longrightarrow x=0$ بازگشتی

② $f'=0 \longrightarrow f'=2x\sqrt[3]{x}+\dfrac{x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{7x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{1/7} \xrightarrow{1,2}$ ۳ تقعر

سراسری ۹۲ خارج ریاضی: اگر نقاط بحرانی $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی باشند، مساحت مثلث کدام است؟

۱) 4 ۲) 4,5 ۳) 6 ۴) 8

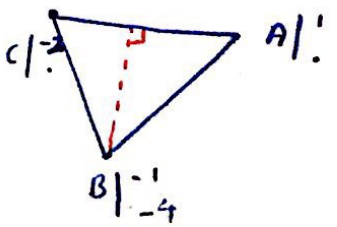
حل: (۲)

① ریشه قدرمطلق $\longrightarrow x^2+x-2=0 \begin{cases} \boxed{x=1} \\ \boxed{x=-2} \end{cases}$

② $f'=0 \longrightarrow ((x-1)(x^2+x-2))'=0 \Rightarrow \underbrace{(x^2+x-2)+(2x+1)(x-1)}_{3x^2-3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \boxed{x=-1} \end{cases}$

وقتی ریشه قدرمطلق را پیدا کردیم، علامت قدرمطلق را حذف می‌کنیم!

مثلث قائم‌الزاویه $\longrightarrow A\left|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ $B\left|\begin{smallmatrix}-1\\-4\end{smallmatrix}\right.$ $C\left|\begin{smallmatrix}-2\\0\end{smallmatrix}\right.$



$S=\frac{1}{2}\times(4)(3)=6$

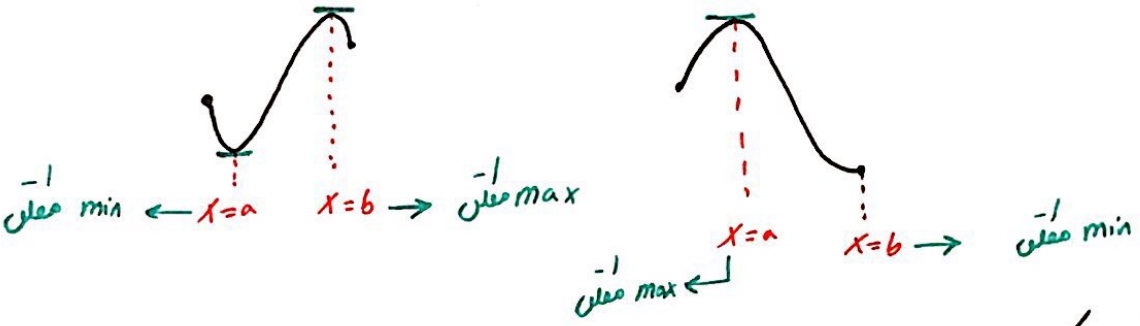
forum.konkur.in

www.konkur.in

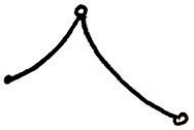
امین تداری

اکسترمم مطلق و بیشترین و کمترین مقدار تابع:

تعریف اکسترمم مطلق: اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای عرض بیشتر از عرض تمام نقاط دامنه باشد آن را max مطلق و اگر دارای عرض کمتر از عرض تمام نقاط دامنه باشد آن را min مطلق گوییم.



نکته ۱: ممکن است تابعی min و max مطلق نداشته باشد!



نکته ۲: بازه‌ی تابع تمام نقاط min و max مطلق به حساب می‌آیند!

روش محاسبه اکسترمم مطلق:

۱) محاسبه نقاط بحرانی ۲) رسم جدول شامل نقاط بحرانی و سر و ته دامنه

۳) بررسی مقدار تابع در این نقاط و مشخص نمودن بیشترین و کمترین مقدار

سراسری ۹۵ تجربی: مقادیر min و max مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ روی $[-4,3]$ به ترتیب کدام است؟

۱) $24,-18$ ۲) $27,-45$ ۳) $27,-36$ ۴) $36,-27$

حل: (۲)

$f'=0 \Rightarrow x^2-2x-15=0 \begin{cases} x=5 \ \times \\ x=-3 \ \checkmark \end{cases}$

x	-4	-3	3
$f(x)$			-45

مقدار کمترین

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

سراسری ۹۲ ریاضی: بیشترین مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) صفر

حل: (۴)

فرض کنیم: $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{-x^3} = 0$

$\xrightarrow{x^2 \text{ را به رادیکال اضافه می‌کنیم}} x + \sqrt{x^2 - x^3} \geq 0 \Rightarrow \min f(x) = 0$

همواره + است پس به مقدار رادیکال اضافه می‌کند!

سراسری ۸۸ ریاضی خارج: بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $1/3$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) فاقد max

حل: (۱)

فرض کنیم: $-x + \sqrt[3]{x^3} = 0$

$\xrightarrow{-x^2 \text{ را به رادیکال اضافه کنیم}} -x + \sqrt{x^3 - x^2} \leq 0 \Rightarrow \max = 0$

همواره − پس از مقدار رادیکال کم می‌کند

تست: بیشترین مقدار تابع $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 3 ۴) 4

حل: (۳)

نقاط بحرانی: $f' = 0 \Rightarrow \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	1	3	$1/3$	1

$D_f = (-\infty, +\infty)$

حد بالای نیست — max — حد بالای نیست

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

تعیین یکنوایی به کمک مشتق:

$f'(x) > 0 \longrightarrow$ تابع اکیداً صعودی

$f'(x) \geq 0 \longrightarrow$ تابع صعودی

$f'(x) < 0 \longrightarrow$ تابع اکیداً نزولی

$f'(x) \leq 0 \longrightarrow$ تابع نزولی

نکته ۱: وقتی $f'(x) \geq 0$ یا $f'(x) \leq 0$ باشد و در نقاطی که $f'(x) = 0$ محدود باشد تابع اکیداً یکنوا به حساب می‌آید.

مثال: اگر $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید ←

$f'(x) = 3x^2 \longrightarrow$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$

چون تابع فقط در $x=0$ مشتق‌اش صفر می‌شود ⇐ اکیداً صعودی است!

نکته ۲: اگر تابع دارای مجانب قائم باشد ← نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) به حساب می‌آید

تست: تابع $f(x) = x^2 - 8\sqrt{x+3}$ در بازه‌ی $[-3, a]$ نزولی است، حداکثر a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $1/3$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل: (۱)

$$f' = 2x - \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}\sqrt{x+3}} = 0 \rightarrow 2x = \frac{4}{\sqrt{x+3}} \rightarrow x\sqrt{x+3} = 2$$

$$\rightarrow x^2(x+3) = 4 \rightarrow \boxed{x=1} \xrightarrow{D_f : x \geq -3} \boxed{-3 \leq x \leq 1}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

سراسری ۹۷ تجربی با تغییر: نمودار تابع $f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-\infty,2)$ ۴) $(-\infty,-1)$

حل: (۴)

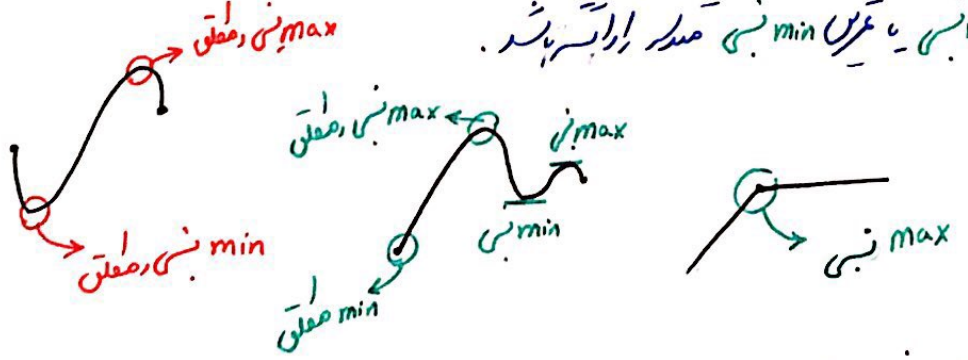
$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

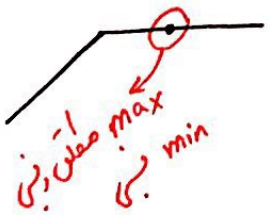
x		1	
f'	$-$	0	$+$

اکسترمم نسبی:

نقطه‌ی $x=c$ را در بازه $[a,b]$ اکسترمم نسبی گوییم هرگاه نسبت به نقاط اطراف خود یک همسایگی بیشترین max نسبی یا کمترین min نسبی قدر را داشته باشد.



نکته: نقاط مینیمم ثابت، هم min نسبی هستند و هم max نسبی!



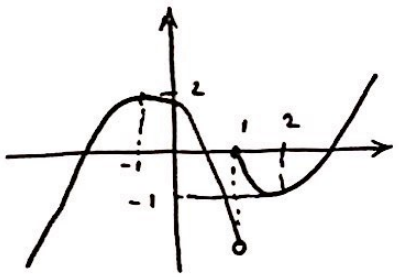
forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & x\geq 1 \\ -x^2-2x+1 & x<1 \end{cases}$ چند min ، max نسبی وجود دارد؟

نکته: برای یافتن تعداد اکسترمم نسبی در تابع قدرمطلقی، چندضابطه‌ای و جزءصحیح باید رسم کنیم!



$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 : \text{max نسبی} \\ x=1 : \text{max نسبی} \\ x=2 : \text{min نسبی} \end{cases}$

آزمون اول مشتق در تعیین اکسترمم نسبی:

اگر $f'(a)=0$ شود، آن نقطه اکسترمم نسبی تابع f است اما عکس این قضیه درست نیست در حالت کلی، یعنی لزوماً در تمام اکسترمم‌های نسبی، f' برابر صفر نیست!

سراسری ۹۱ ریاضی: اگر $f(x)=x-[x]$ باشد، $g(x)=2^x$ ، gof از نظر اکسترمم نسبی چگونه است؟

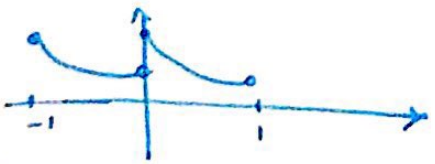
۱) دارای max و min ۲) دارای max و فاقد min ۳) فاقد max و دارای min ۴) فاقد max و min

حل: (۲) در یک بازه بررسی نمودار این تابع می‌پردازیم:

$gof = 2^{x-[x]}$

$-1\leq x<0 : 2^{-x-1}$

$0\leq x<1 : 2^{-x}$



دارای max نسبی و فاقد min نسبی

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

سراسری ۹۵ خارج کشور: طول نقطه کمینه نسبی $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل: (۱)

$$f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2} \rightarrow f'=2(x-1)\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}=0$$

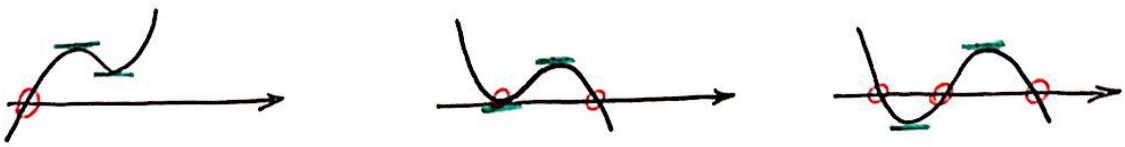
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x-1)(3x+(x-1))}{3\sqrt[3]{x}}=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

در گزینه هست

$\xrightarrow{\text{محل ها}}$

x		0		1/4		1	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘		↗	max	↘	min	↗

تحلیل تعداد ریشه منفی درجه سوم به کمک اکسترمم نسبی:



$y_{min}\cdot y_{max}>0$ یک ریشه

$y_{min}\cdot y_{max}=0$ دو ریشه

$y_{min}\cdot y_{max}<0$ سه ریشه

پس در تحلیل تعداد ریشه منفی درجه سوم، y_{min} و y_{max} را می‌یابیم و ضرب آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

forum.konkur.in

www.konkur.in

کارآمتش ۹ مجموعه جزوات جمع‌بندی پلاس

امین تداری

سراسری ۹۷ تجربی: با توجه به نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ ، به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی $f(x)=m$ فقط دارای یک ریشه حقیقی است؟

۱) $m<2$ یا $m>7$ ۲) $m<3$ یا $m>6$ ۳) $m<3$ یا $m>7$ ۴) $m<2$ یا $m>6$

حل: (۴)

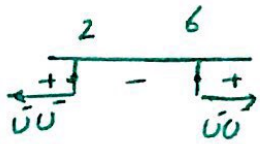
$$f(x)=m \Rightarrow \underbrace{x^3-6x^2+9x+2-m}_{\text{معادله برخورد}}=0$$

$$\xrightarrow{\text{یک ریشه}} y_{min}\cdot y_{max}>0 \Rightarrow y'=3x^2-12x+9=0 \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$f(1)=6-m$ (مقدار به ازای $x=1$)

$f(3)=2-m$ (مقدار به ازای $x=3$)

$$\longrightarrow (6-m)(2-m)>0$$

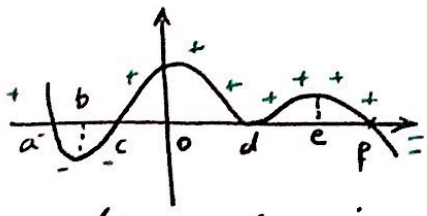


مقایسه نمودار f و f':

① در نقاطی که منحنی $y=f'(x)$ مثبت است ← تابع f صعودی است.

② در نقاطی که منحنی $y=f'(x)$ منفی است ← تابع f نزولی است.

③ در نقاطی $y=f'(x)$ تغییر علامت می‌دهد ← تابع f دارای Ext است



نمودار $y=f'(x)$ به شکل بالا

$(-\infty,a) \longrightarrow$ f ابتدا صعودی

$(a,c) \longrightarrow$ f ابتدا نزولی

$(c,f) \longrightarrow$ f ابتدا صعودی

$(f,+\infty) \longrightarrow$ f ابتدا نزولی

$x=a \longrightarrow$ f نسبی max

$x=c \longrightarrow$ f نسبی min

$x=f \longrightarrow$ f نسبی max

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

بهینه‌سازی: بهینه‌سازی یعنی یافتن بیشترین و کمترین مقدار یک کمیت برای حداکثر بهره‌وری. در حل مسایل بهینه‌سازی به ترتیب زیر عمل می‌نماییم.

① تشکیل تابع هدف ← گام اول باید ضابطه تابعی را که می‌خواهیم مقدار آن را max یا min نماییم تشکیل دهیم.

② تبدیل تابع هدف به تک متغیره ← با استفاده از اطلاعات درون مسئله باید تابع هدف را تک متغیره نماییم.

③ مقادیر min ، max تابع هدف را محاسبه می‌نماییم.

چند نکته در بهینه‌سازی:

① اگر عبارتی به صورت $ax+by=c$ داده شد و خواستیم عبارت به صورت xy را بهینه نماییم کافی است $ax=by=\frac{c}{2}$ باشد!

تست: بیشترین مساحت ذوزنقه‌ای که مجموع قاعده و دو برابر ارتفاع آن برابر 24 است، کدام است؟

۱) 12 ۲) 24 ۳) 36 ۴) 48

حل: (۳)

گام اول ① $S=\frac{1}{2}ah$ $\xrightarrow{\text{تک متغیره}}$ $S=\frac{1}{2}(24-2h)(h)$

گام دوم ② $a+2h=24 \Rightarrow a=24-2h$

$\Rightarrow S=-h^2+12h \xrightarrow{\text{مشتق}} S'=-2h+12=0 \xrightarrow{Ext} h=6$

$\Rightarrow a=24-2(6)=12 \Rightarrow S=\frac{1}{2}(12)(6)=36$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

تست: اگر محیط یک زمین مستطیل شکل 240 متر باشد، حداکثر مساحت آن چقدر است؟

۱) 1200 ۲) 2400 ۳) 3600 ۴) 4800

حل: (۳)

$P = 2x + 2y = 240$

$\Rightarrow x + y = 120 \Rightarrow xy = ?$

نکته ضد بیل $\longrightarrow$ $x = y = 60 \Rightarrow \max xy = 60 \times 60 = 3600$

تست: حجم بزرگترین مخروطی که می‌توان در کره‌ای به شعاع 12 محاط نمود، چقدر است؟ ($\pi \simeq 3$)

۱) 2034 ۲) 2024 ۳) 2014 ۴) 2044

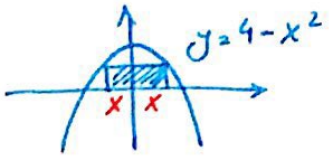
حل: (۱) نکته مهم: ارتفاع بزرگترین مخروطی که می‌توان در کره‌ای به شعاع R محاط نمود: $h = 4/3 R$

$\Rightarrow h = 4/3 \times 12 = 16 \Rightarrow V_{max} = 1/3 \pi R^2 h = \underbrace{1/3 \times \pi \times 144 \times 16}_{2034}$

تست: بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگر روی منحنی $y = 4 - x^2$ قرار دارد کدام است؟

۱) $16\sqrt{3}$ ۲) $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ ۳) $32\sqrt{3}$ ۴) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

حل: (۲)



$S = 2xy \xrightarrow{y=(4-x^2)} y = 2x(4 - x^2)$

$\Rightarrow y = 8x - 2x^3 \longrightarrow y' = -6x^2 + 8 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \longrightarrow y = \frac{8}{3}$

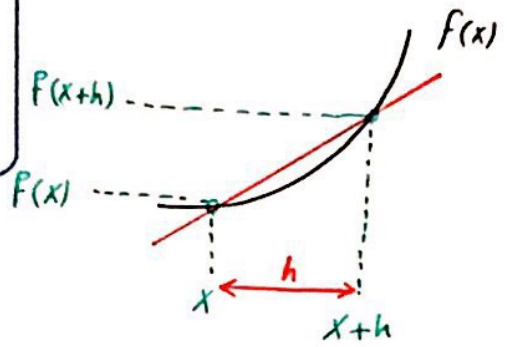
$\Rightarrow S_{max} = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9}$

forum.konkur.in

www.konkur.in

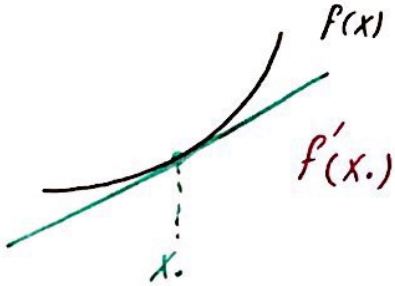
امین تدارک

◀ مفهوم مشتق:



شیب خط : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

حال اگر بخواهیم این خط در یک نقطه بر منحنی $f(x)$ مماس شود باید اختلاف بین دو نقطه (h) را به صفر میل دهیم، داریم:



$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

◀ تعریف مشتق: شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه را، مشتق نام دارد و آن نقطه را می‌گوییم

دو تعریف حدی مشتق:

① $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$: تعریف مشتق به کمک غوتا نام

② $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$: تعریف مشتق در یک نقطه

نکته مهم: به طور کلی داریم ←

$$\left(\frac{m-n}{k}\right) f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+mh)-f(x+nh)}{kh}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

مشتق ۲

مجموعه جزوات جمع‌بندی پلاس

امین تداری

مشتق انواع توابع جبری:

تابع	مشتق	مثال
① $y=K$	$y'=0$	$y=3 \rightarrow y'=0$
② $y=Kx$	$y'=K$	$y=-2x \rightarrow y'=-2$
③ $y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=x^4 \rightarrow y'=4x^3$
④ $y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$	$y=(x^2+x)^3 \rightarrow y'=3(2x+1)(x^2+x)^2$
⑤ $y=f\pm g$	$y'=f'\pm g'$	$y=x^2+x \rightarrow y'=2x+1$
⑥ $y=f\times g$	$y'=f'\times g+g'\times f$	$y=x^2(x-1) \rightarrow y'=2x(x-1)+1(x^2)$
⑦ $y=\frac{f}{g}$	$y'=\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$	$y=\frac{x^2+1}{2x} \rightarrow y'=\frac{2x(2x)-2(x^2+1)}{(2x)^2}$
⑧ $y=\frac{a}{x}$	$y'=-\frac{a}{x^2}$	$y=\frac{3}{x} \rightarrow y'=-\frac{3}{x^2}$
⑨ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$	$y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$y=\frac{3x+1}{2x-1} \rightarrow y'=\frac{-5}{(2x-1)^2}$
⑩ $y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=\sqrt[3]{x} \rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
⑪ $y=\sqrt[n]{u}$	$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y=\sqrt[4]{(2x)^2} \rightarrow y'=\frac{4x}{4\sqrt[4]{(2x^2)^3}}$
⑫ $y=\sqrt[n]{u^m}$	$y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y=\sqrt[3]{(x^2+x)^2} \rightarrow y'=\frac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{x^2+x}}$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

سراسری ۹۵ تجربی خارج: تربیع $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{48}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{16}$

حل: (۱)

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \Rightarrow f'_x=\frac{\frac{7}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \xrightarrow{x=1} f'(1)=\frac{7}{48}$$

سراسری ۹۵ تجربی: اگر $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

۱) -21 ۲) -18 ۳) 12 ۴) 15

حل: (۱)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2) \Rightarrow f(x)=\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\longrightarrow f'_x=\underbrace{\frac{3}{2}}_{n}\times\underbrace{\frac{-7}{(2x-3)^2}}_{u'}\times\underbrace{\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{1/2}}_{u^{n-1}}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{3}{2}\times -7\times\sqrt{4}=-21$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

نکته مهم: محاسبه مشتق به کمک تغییر متغیر

① $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+2x-3} \xrightarrow{x^2+2x=t} f(x) = \dfrac{t+4}{t-3}$

$\longrightarrow f' = \dfrac{-7}{(t-3)^2} \xrightarrow{t=x^2+2x} f' = \dfrac{-7}{(x^2+2x-3)^2} \times (2x+2)$

مشتق عبارت تغییر متغیر یافته

روش حل: قسمت مشترک را t فرض کرده و مشتق می‌گیریم
سپس به جای t عبارت را قرار داده
و در مشتق عبارت تغییر یافته ضرب می‌نماییم.

② $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \longrightarrow f'(x) = ?$

حل

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} \longrightarrow f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

نکته مهم: اگر عبارت ساده می‌شود، اول عبارت را ساده کرده و سپس مشتق می‌گیریم.

◀ مشتق عامل صفر:

$$\begin{cases} y = f(x)\cdot g(x)\cdot \ldots \cdot h(x) \\ f(a) = 0 \longrightarrow f \text{ عامل صفر است} \\ y'(a) = ? \end{cases} \Rightarrow y'(a) = f'(a)\cdot g(a) \cdots h(a)$$

از عامل صفر مشتق می‌گیریم

در بقیه عبارت‌ها خود $x=a$ قرار می‌دهیم.

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

تست: اگر $f(x) = (x^2-x)\sqrt[3]{\frac{7x+1}{2x-1}}$ باشد، $f'(1)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

حل: (۲)

$$f(x) = x(x-1)\sqrt[3]{\frac{7x+1}{2x-1}} \longrightarrow f'(1) = ?$$

در $x=1$ صفر می‌شود پس عامل صفر است

$$\longrightarrow f'(1) = (1)(1)\sqrt[3]{\frac{8}{1}} = 2$$

به جای x، ۱ گذاشتیم

مشتق $(x-1)$ که عامل صفر بود

به جای x، ۱ گذاشتیم

سراسری ۹۴ ریاضی: اگر $f(x) = (x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -3 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

حل: (۱)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = f'(-1)$$

در $x=1$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{(x^2-x-2)}_{\text{عامل صفر}}\sqrt[3]{x^2-7x} \longrightarrow f'(-1) = (2x-1)(\sqrt[3]{8})$$

$$\Rightarrow f'(-1) = (-3)(2) = -6$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

مشتق تابع مرکب:

اگر $g(x)$ در $x=a$ و تابع $f(x)$ در $x=g(a)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $y=f(g(x))$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$y=f(g(x)) \longrightarrow y'=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

نکته: در عبارتی به صورت $y=f(u)$ که در آن u تابعی برحسب x است، داریم:

$$y=f(u) \longrightarrow y'=u'\cdot f'(u)$$

سراسری ۹۶ ریاضی: اگر تابع f در $x=4$ مشتق‌پذیر باشد، $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac{3}{2}$

مقدار مشتق تابع $y=\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: (۳)

تعریف مشتق: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مقایسه با رابطه داده شده $\longrightarrow$ $\begin{cases} f(4)=-7 \\ f'(4)=-\frac{3}{2} \end{cases}$

مشتق صورت

$$y=\frac{f(2x)}{x} \longrightarrow y'=\frac{2f'(2x)(x)-f(2x)}{x^2} \xrightarrow{x=2} y'(2)=\frac{2f'(4)(2)-f(4)}{4}$$

$$\longrightarrow y'(2)=\frac{4\times(-\frac{3}{2})+7}{4}=\frac{1}{4}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

تست: اگر $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x)=f(\frac{1}{x})$ باشد، مقدار $g'(\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{15}$ ۲) $\frac{15}{16}$ ۳) $-\frac{15}{16}$ ۴) $-\frac{16}{15}$

حل: (۴)

از طرفین مشتق می‌گیریم $\longrightarrow g'(x)=\underbrace{(\frac{-1}{x^2})}_{u'}\underbrace{f'(\frac{1}{x})}_{f'(u)}$

$\xrightarrow{x=\frac{3}{4}} g'(\frac{3}{4})=(-\frac{16}{9})f'(4/3) \longrightarrow g'(\frac{3}{4})=(-\frac{16}{9})(\frac{3}{5})=-\frac{16}{15}$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{x=4/3} f'(4/3)=\frac{3}{5}$

تست: اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، $2f(4x)-xf(2x)=10$ باشد، $f'(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $-\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

حل: (۱)

از طرفین مشتق می‌گیریم $\longrightarrow 2\times 4f'(4x)-(f(2x)+2xf'(2x))=0$

$\xrightarrow{x=0} 2\times 4f'(0)-(f(0)+0)=0 \rightarrow$ برای حل سوال به $f(0)$ نیاز داریم.

$\xrightarrow[x=0]{\text{در عبارت اصلی}} 2f(0)=10 \Rightarrow f(0)=5 \Rightarrow 8f'(0)-5=0 \Rightarrow f'(0)=\frac{5}{8}$

مشتق تابع $y=|u|$:

تابع $|u|$ در نقطه‌ای که $u=0$ است، مشتق‌ناپذیر است و در سایر نقاط. برای بررسی مشتق، درون قدرمطلق را تعیین علامت کرده و از آن مشتق می‌گیریم!

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

تست: اگر $y = |x^2 - 2x|$ باشد، حاصل $2f'(1) + f'(-1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۰ ۴) ۲

حل: (۲)

ابتدا درون قدر مطلق تعیین علامت $\longrightarrow$ ۰ ۲ ، + − +

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow - \text{ درون قدر} : y = -(x^2-2x) \longrightarrow y' = -2x+2 \xrightarrow{x=1} 0 \\ x=-1 \Rightarrow + \text{ درون قدر} : y = x^2-2x \longrightarrow y' = 2x-2 \xrightarrow{x=-1} -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2f'(1) + f'(-1) = 0 - 4 = -4$$

سراسری ۹۴ تجربی: اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشد، مشتق $f \circ g$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) مشتق ندارد

حل: (۲)

ابتدا تعیین علامت :

$$\begin{cases} x \geq 0 : \begin{cases} f(x) = \frac{3}{5}x \\ g(x) = 5x \end{cases} \longrightarrow f(g(x)) = 3x \\ x < 0 : \begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = 3x \end{cases} \longrightarrow f(g(x)) = 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : (f(g(x)))' = 3 \\ x < 0 : (f(g(x)))' = 3 \end{cases}$$

مشتق تابع جزء صحیح: تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ عدد صحیح شود، مشتق‌پذیر و در سایر نقاط برای مشتق‌گیری به جای آن عدد می‌گذاریم!

مثال) مشتق تابع $y = x^2[2x]$ در $x = \frac{4}{3}$ کدام است؟

حل:

$$\xrightarrow{x=4/3} y = x^2[8/3] \longrightarrow y = 2x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 4x$$

$$\xrightarrow{x=4/3} y' = \frac{16}{3}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

مشتق ۹

مجموعه جزوات جمع‌بندی پلاس

امین تدارک

نکته: در توابعی که جزءصحیح و قدرمطلق وجود دارد، مانند حد، ابتدا جزءصحیح را به عدد سپس قدرمطلق را تعیین علامت و در آخر مشتق می‌گیریم.

تست: مشتق عبارت $y = 2x|x-2|\lfloor x \rfloor$ در $x = 7/2$ کدام است؟

۱) 30 ۲) 15 ۳) 5 ۴) مشتق ندارد

حل: (۱)

$$\begin{cases} x = 7/2 \xrightarrow{\text{جزءصحیح}} \lfloor 7/2 \rfloor = 3 \\ x = 7/2 \xrightarrow{\text{قدر}} (x-2) \end{cases} \longrightarrow y = 2x(x-2)(3) = 6x^2 - 12x$$

به جای قدر

به جای جزءصحیح

$$\longrightarrow y' = 12x - 12 \xrightarrow{x = 7/2} y'(7/2) = 30$$

مشتق چپ و راست:

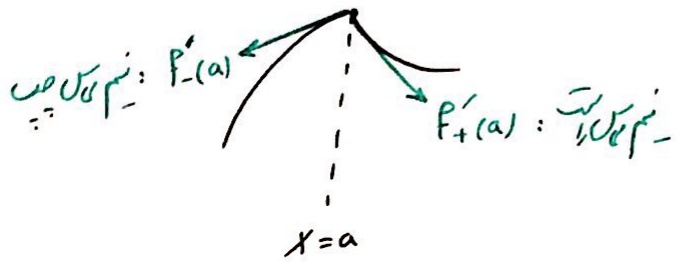
تعریف مشتق چپ:

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعریف مشتق راست:

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعبیر هندسی:



forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

تست: حاصلضرب مشتق چپ و راست تابع $f(x)=|x-1|\sqrt{x+8}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -9 ۳) 9 ۴) 12

حل: (۲)

$$f(x)=|x-1|\sqrt{x+8}$$

1^+: $\underbrace{(x-1)}_{\text{عامل منفی}}\sqrt{x+8}$

1^-: $-\underbrace{(x-1)}_{\text{عامل منفی}}\sqrt{x+8}$

تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر چون ریشه ساده قدرمطلق

مشتق

1^+: $(1)(3)=3$

1^-: $-(1)(3)=-3$

$\longrightarrow f'_+(1)\cdot f'_-(1)=-9$

سراسری ۸۹ ریاضی: مشتق چپ تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

حل: (۱) در این سبک سوالات نمی‌توان از عبارت مشتق گرفت و حتماً باید از تعریف حد مشتق کمک گرفت!

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$$

$$\xrightarrow[\text{صورت رخ}]{\times\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{x\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2}x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{\sqrt{2}x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

تست: اگر $f(x)=\begin{cases}1-x^3 & x>1\\ x-1 & x\leq 1\end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2f(1+h)-3f(1-h)}{h}$ کدام است؟

۱) 3 ۲) 5 ۳) -5 ۴) -3

حل: (۴) در این سوال با نگاه به حد داده شده، متوجه می‌شویم که مشتق در $x=1$ خواسته شده که این نقطه، نقطه شکستگی دامنه است. پس باید با دقت زیادی سوال را بررسی نماییم.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{2f(1+h)-3f(1-h)}{h}=\underbrace{\lim_{h\to 0^+}\frac{2f(1+h)}{h}}_{2f'_+(1)}-\underbrace{\lim_{h\to 0^+}\frac{3f(1-h)}{h}}_{-3f'_-(1)}$$

$$f'_+(1)=-3x^2\xrightarrow{x=1}-3$$

$$f'_-(1)=1 \longrightarrow =2(-3)+3(1)=-3$$

+ **نکته:** در نقاط شکستگی دامنه، ریشه‌ی رادیکال زوج، ریشه در مخرج، نقاطی که درون جزء صحیح عدد صحیح می‌شود، خیلی با دقت مشتق چپ و راست را بررسی نمایید، چون معمولاً تو این نقاط مشتق نمی‌گیرند!

تعریف حدی مشتق ← رادیکال ③

چند ضابطه‌ای ← ضابطه مورد نظر را نوشته و مشتق می‌گیریم یا تعریف حدی ④

جزء صحیح ① ← عدد می‌گیریم و مشتق

قدرمطلق ② ← تعیین علامت و مشتق

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

مشتق پذیری: تابع $f(x)$ را در $x=a$ مشتق پذیر می‌گوییم هرگاه:

$f(x)$ در $x=a$ پیوسته

اولاً: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

ثانیاً: $f'_+(a) = f'_-(a)$

سراسری ۹۷ تجربی: اگر $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+4 & x\geq -2 \\ x^3-x & x<-2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

حل: (۲)

شرط اول پیوستگی:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 4a-2b+4 = f(-2) \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -6 \end{cases} \longrightarrow 4a-2b=-10 \longrightarrow 2a-b=-5 \quad (1)$$

شرط دوم:

$$\begin{cases} f'_+(-2) = 2ax+b \xrightarrow{x=-2} -4a+b \\ f'_-(-2) = 3x^2-1 \xrightarrow{x=-2} 11 \end{cases} \longrightarrow -4a+b=11 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2a-b=-5 \\ -4a+b=11 \end{cases} \xrightarrow{+} \boxed{a=-3} \quad \boxed{b=-1} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2-x+4 & x\geq -2 \\ x^3-x & x<-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(1)=0}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

نقاط مشتق ناپذیر معروف و توقفیه در مشتق پذیری:

۱) نقاط زیر همواره مشتق در آنها وجود ندارد!

الف) نقاط ناپیوستگی تابع، ب) نقاطی که $f'_+ \neq f'_-$ می‌باشد (به این نقاط، نوشته می‌گوییم)

ج) نقاط توقف (این نقاط ابتدا و انتهای دامنه تابع می‌باشند)

د) ریشه‌های ساده قدرمطلق (زیرا در این نقاط $f'_+ \neq f'_-$ هستند)

۲) توقفیه هم در مشتق پذیری:

① اگر تابع f در $x=a$ ناپیوسته باشد ⇐
- ۱) در $(x-a)f(x)$ ← پیوسته است
- ۲) در $(x-a)^n f(x)$ $\xrightarrow{n\geq 2}$ مشتق پذیر

② اگر تابع f در $x=a$ پیوسته و مشتق ناپذیر باشد ⇐ $(x-a)f(x)$ مشتق پذیر است.

تست: اگر تابع $f(x)=(x^2-3x+a)|x^2-2x|$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -4 ۴) صفر

حل: (۲)

$|x^2-2x| = |x(x-2)|$ $\xrightarrow[\text{ضرب شود}]{\text{کافی است در}}$ $(x-2)$ $x=2$ باید ریشه عبارت پشت قدرمطلق باشد

$(2)^2-3(2)+a=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$

در $x=2$ مشتق ناپذیر اما پیوسته است

توضیح بیشتر: چون تابع در $x=2$ پیوسته و مشتق ناپذیر است، کافی است عامل $(x-2)$ در عبارت ضرب شود، یعنی به بیانی پشت قدرمطلق در $x=2$ برابر صفر شود!

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

تست: اگر سه تابع زیر در $x=0$ مشتق‌پذیر باشند، در مورد m، n، K حداقل کدام درست است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x^m \lfloor x \rfloor & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$h(x)=x^K |x|$$

۱) $m=n=K=1$

۲) $m=n=K=2$

۳) $\begin{cases} m=n=2 \\ K=1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} m=n=1 \\ K=2 \end{cases}$

حل: (۳)

① $\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{پیوسته است}]{\text{در } x=0 \text{ صفر دارد}} x^{②}$ حداقل باید در $x^{②}$ ضرب شود $\Rightarrow \boxed{n\geq 2} \rightarrow \min(n)=2$

② $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[\text{پیوسته است}]{\text{در } x=0 \text{ صفر دارد}} x^{②}$ حداقل باید در $x^{②}$ ضرب شود $\Rightarrow \boxed{m\geq 2} \rightarrow \min(m)=2$

③ $|x| \xrightarrow[\text{اما مشتق‌ناپذیر است}]{\text{در } x=0 \text{ پیوسته است}} x^{①}$ حداقل باید در $x^{①}$ ضرب شود $\Rightarrow \boxed{K\geq 1} \rightarrow \min(K)=1$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

نکته: اگر $f(x)$ تابع درجه دوم باشد، آهنگ تغییر متوسط در $[a,b]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=\frac{a+b}{2}$ برابر است!

تست: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)=2x^2+x-1$ در $x=3$ چقدر با آهنگ تغییرات متوسط این تابع در بازه $[1,7]$ اختلاف دارد؟

۱) 2 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 8

حل: (۲) چون تابع درجه دوم است، آهنگ متوسط در $[1,7]$ با لحظه‌ای در $x=4$ برابر است!

لحظه‌ای در $x=3$ $\rightarrow f'=4x+1 \xrightarrow{x=3} f'(3)=13$

لحظه‌ای در $x=4$ $\rightarrow f'=4x+1 \xrightarrow{x=3} f'(4)=17$

$\xrightarrow{\text{اختلاف}} 4$

تست (خارج از محدوده کتاب): یک بادکنک خالی را باد می‌کنیم. با دمیدن هوا در آن در ثانیه 3cm به شعاع بادکنک کروی اضافه می‌شود. آهنگ لحظه‌ای افزایش مساحت بادکنک در ثانیه پنجم کدام است؟

۱) 90π ۲) 720π ۳) 360π ۴) 540π

حل: (۳) آهنگ تغییر شعاع برحسب زمان: $r'_t = 3\,cm/s$

مساحت کره $S=4\pi r^2 \xrightarrow{\text{آهنگ لحظه‌ای}} S'_t = 8\pi r\, r'_t$

در آهنگ لحظه‌ای تغییر شعاع ضرب می‌کنیم

ثانیه پنجم: $r = 5\times 3 = 15$

در پنجم شعاع ۳ سانتی‌متر اضافه شده

$\Rightarrow S' = 8\pi\times(15)(3) = 360\pi$

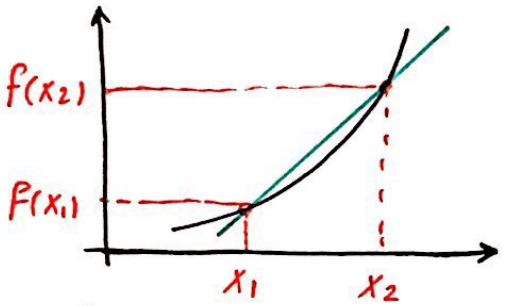
forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تداری

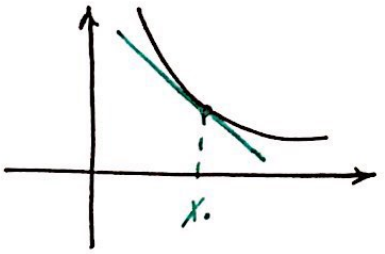
آهنگ تغییرات:

در ریاضی آهنگ تغییر تابع $f(x)$، نسبت تغییرات عرض تابع به طول تابع است.



$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

در بحث آهنگ تغییر لحظه‌ای می‌خواهیم نسبت تغییرات را در یک لحظه به دست آوریم و برای این کار کافی است، مشتق تابع در آن لحظه را محاسبه نماییم.



$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x_0)$$

سراسری ۹۴ تجربی: در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ تغییرات متوسط تابع در بازه $[1, 1.21]$ چقدر کمتر از آهنگ لحظه‌ای در $x=1$ است؟

۱) $\frac{1}{42}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{3}{42}$ ۴) $\frac{2}{21}$

حل: (۱)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\sqrt{1.21}-\sqrt{1}}{0.21} = \frac{0.1}{0.21} = \frac{10}{21}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{2}$$

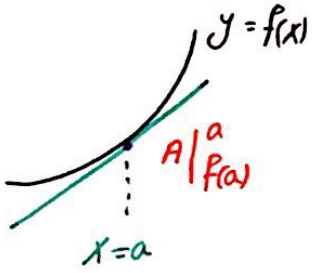
$$\rightarrow \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{21-20}{42} = \frac{1}{42}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

خط مماس و قائم بر منحنی:



می‌دانیم: $m = f'(a)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

نکته: اگر معادله‌ی خط قائم خواسته شد، شیب خط مماس را به دست آورده $(m = f'(a))$ و سپس آن را قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب خط قائم به دست آید.

تست: اگر $f(x) = (x^2+x)\sqrt{2x+6}$ باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول $x = -1$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 0 ۳) -2 ۴) -4

حل: (۳)

ابتدا می‌باید عرض نقطه $\rightarrow x = -1 : f(-1) = 0 \Rightarrow A|^{-1}_{0}$

می‌باید شیب خط $\rightarrow f'(-1) = ? \Rightarrow f(x) = \underbrace{(x^2+x)}_{\text{عامل صفر}}\sqrt{2x+6}$

$$\Rightarrow f'(-1) = (2x+1)(2) \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = -2 = m$$

$$\xrightarrow[A|^{-1}_{0}]{\text{معادله خط}} y - 0 = -2(x+1) \Rightarrow y = -2x \underbrace{-2}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

نکته مهم: گاهی در سوالات نقطه تماس مجهول است؛ در این سوالات باید از عبارت مشتق گرفته و با شیب خط داده شده برابر بگذاریم تا نقطه تماس به دست آید!

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

سراسری ۹۵ ریاضی: به ازای کدام مقدار m، خط به معادله $(m+2)y = mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{1+x^2}$ است؟

۱) $m>-1$ ۲) $m<-1$ ۳) $m>1$ ۴) $m<1$

حل: (۱) وقتی خط مماس بر منحنی $y=\sqrt{1+x^2}$ موازی خط داده شده است، پس شیب دو خط برابر است، داریم:

$$y=\left(\frac{m}{m+2}\right)x \xrightarrow{\text{شیب خط}} \frac{m}{m+2} \quad ①$$

$$y=\sqrt{1+x^2} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad ②$$

$$\xrightarrow{①=②} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{m}{m+2} \Rightarrow (m+2)x=m\sqrt{1+x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان 2}} (m+2)^2x^2=m^2(1+x^2) \Rightarrow m^2x^2+4mx^2+4x^2=m^2x^2+m^2$$

$$\longrightarrow (4m+4)x^2=m^2 \Rightarrow x^2=\frac{m^2}{4m+4} \geq 0$$

چون x^2 عبارتی نامنفی است

$$\Rightarrow \frac{m^2}{4m+4}>0 \Rightarrow 4m+4>0 \Rightarrow \boxed{m>-1}$$

forum.konkur.in

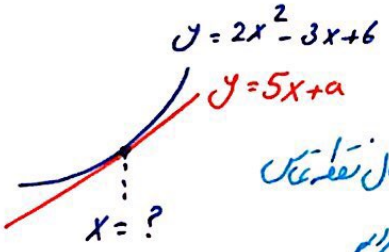
www.konkur.in

امین تداری

سراسری ۹۷ خارج تجربی: به ازای کدام مقدار a، خط $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

حل: (۲)



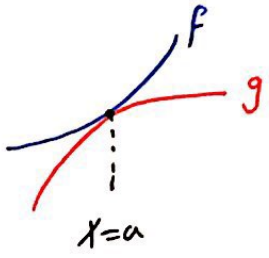
چون به دنبال نقطه تماس گشتیم $\longrightarrow m = f'$

$\Rightarrow \underbrace{4x - 3}_{\text{مشتق منحنی}} = \underbrace{5}_{\text{شیب خط}} \Rightarrow \boxed{x = 2}$ اول نقطه تماس

$x = 2$ در منحنی صدق می‌کند $\longrightarrow y = 2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right.$ نقطه تماس

$A\left|\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right.$ در خط صدق می‌کند $\longrightarrow 8 = 5(2) + a \Rightarrow \boxed{a = -2}$

شرط تماس دو منحنی: دو منحنی f و g بر هم مماس هستند هرگاه داشته باشیم:



1) $f(a) = g(a)$

2) $f'(a) = g'(a)$

* نکته بسیار مهم: اگر در تشکیل معادله $f(x) = g(x)$، معادله به درجه دوم تبدیل شد به جای تشکیل $g'(x) = f'(x)$، Δ معادله‌ی $f(x) = g(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم!

forum.konkur.in

www.konkur.in

امین تدارک

سراسری ۹۱ ریاضی: در منحنی $y=x^2+\frac{a^2}{2}$ و $y=\frac{1}{2}x^2+ax$ به ازای کدام مقدار a، بر هم مماس هستند؟

۱) فقط $a=2$ ۲) فقط $a=-2$

۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

حل: (۳)

$$y_1=y_2 \quad : \quad \frac{1}{2}x^2+ax=x^2+\frac{a^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} x^2+2ax=2x^2+a^2 \Rightarrow \underbrace{x^2-2ax+a^2=0}_{\text{مدرج دوم}}$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} 4a^2-4a^2=0 \xrightarrow{\text{همواره برقرار}} \text{هر مقدار } a$$

سراسری ۹۳ خارج تجربی: به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ بر نیمساز ربع اول مماس است؟

۱) -4 ۲) 4 یا -12 ۳) -4 یا 12 ۴) 12

حل: (۱)

$$y_1=y_2 \Rightarrow 2x^2+(m+1)x+m+6=x$$

$y=x$ نیمساز ربع اول و سوم

$$\Rightarrow \underbrace{2x^2+mx+m+6}_{\text{مدرج دوم}}=0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2-4(2)(m+6)=0$$

$$\Rightarrow m^2-8m-48=0 \Rightarrow (m-12)(m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ m=-4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در ربع اول باشد}} \begin{cases} m=12 \longrightarrow 2x^2+12x+18=0 \Rightarrow x^2+6x+9=0 \Rightarrow x=-3 \ \text{✗} \quad \text{در ربع اول نیست} \\ m=-4 \longrightarrow 2x^2-4x+2=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1 \ \checkmark \quad \text{در ربع اول است} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=-4}$$

forum.konkur.in