**آشنایی با مفهوم مشتق:** برای نوشتن معادله خط گذرنده ازدونقطه درمعادله کلی خط (یعنی y=ax+b) نقطه دهی می کردیم، اما با این روش نمای کلی خط گذرنده ازاین دو نقطه قبل از یافتن معادله، امکان پذیر نبود. برای بهبوداین مشکل مفهومی به اسم شیب خط تعریف شده است.

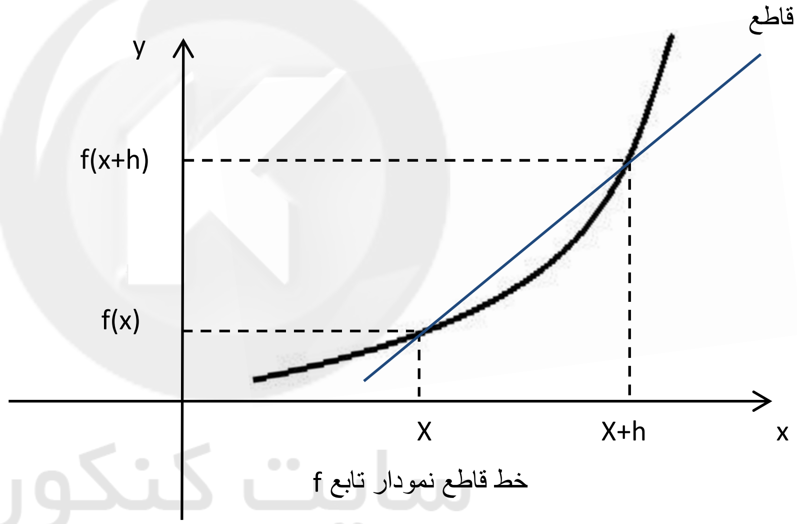
اگر(x,f(x)) نقطه ای ازنمودارتابع $y = f(x)$ و (x+h,f(x+h)) نقطه دیگری ازاین نمودارباشد آنگاه تغییرات مقادیر تابع بانماد $\Delta f(x)$ نشان داده شده و به فرم: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ تعریف می شود به طورمشابه با

نماد $\Delta x$ تغییرات مقادیر x را نشان می دهیم. لذا شیب خط قاطع عبارت است از:

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

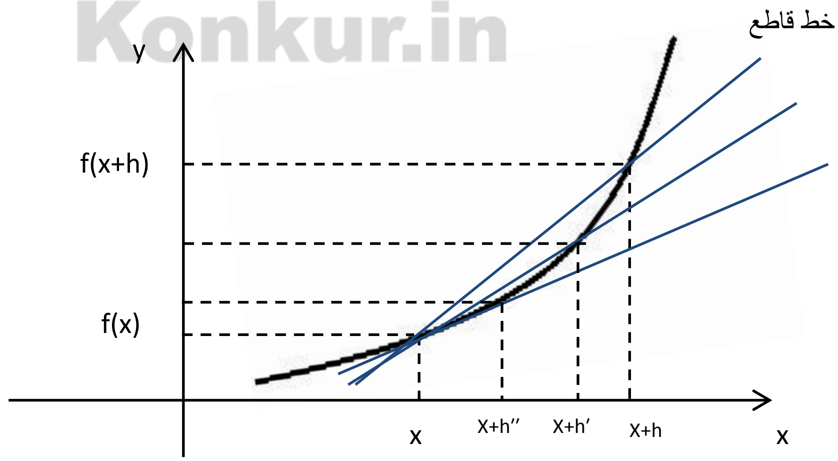
در کسربالااگرx ثابت نگه داشته شود ومقدارh (یعنی فاصله دونقطه) کم وکمترگردد وبه صفرنزدیک و نزدیکترشود در این صورت کسربالابه مقداری میل می کند که به آن شیب خط مماس گفته می شود. به عبارت دیگر، حاصل حدزیر(درصورت وجود)ضریب زاویه خط مماس نمودار f درx رابه دست می دهد:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



خط قاطع نمودار تابع f

از لحاظ هندسی با کوچکترشدن h خط قاطع منحنی به مماس برمنحنی تبدیل می گردد وداریم:



با میل کردن h به سمت صفر شیب خط قاطع به مقدار شیب خط مماس در نقطه x میل می کند.

**تعریف مشتق تابع:** برای تابع f که درهمسایگی نقطه a تعریف شده است، اگرحد زیر:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وجودداشته باشد، می گوییم f در a مشتق پذیراست. این حد یکتارا با $f'(a)$ نمایش داده وآن رامشتق تابع f در a می نامند. برطبق این تعریف، مقدارمشتق برابراست با نرخ تغییرات مقدارتابع، زمانی که این تغییرات به سمت صفرمیل می کند. با تبدیل h به x-a تعریف دوم مشتق به صورت زیرحاصل می شود:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

لذا در مجموع داریم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال: باکمک تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ را در نقطه x=2 به دست آورید.

جواب: روش اول:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2+1}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{2+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)}$$

روش دوم:

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(2+\Delta x)+1}-\sqrt{2+1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3+\Delta x}-\sqrt{3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+\Delta x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+\Delta x}+\sqrt{3}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{3+\Delta x}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3+\Delta x-3}{\Delta x\left(\sqrt{3+\Delta x}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{3+0}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)}$$

روش :سوم:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(2+h)+1} - \sqrt{2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+h} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3+h-3}{h\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)} \blacksquare$$

**نمادگذاری های مشتق:** مشتق تابع f را با $f'$ نیز می توان نشان داد. این نماد بر آن تاکید دارد که $f'$ تابع جدیدی است که با مشتق گیری از تابع f به دست آمده است و مقدارش در x با $f'(x)$ نموده می شود. می دانیم؛ مختصات yوx واقع برنمودارf به معادله y=f(x) به هم مربوط می شوند وعلامت $y'$ نیزبرای نمایش $f'(x)$ به کارمی رود که مقدارش در x به صورت $y'_x$ نوشته می شود ومشتق مراتب بالاتررا به صورت$f'$ (مشتق اول)، $f''$ (مشتق دوم)،$f'''$ (مشتق سوم)، ...$f^{(n)}$ (مشتق n ام) نشان می دهند.(با استفاده ازنمادگذاری دیگری می توان کسر $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ را با نماد $\frac{df(x)}{dx}$ معرفی کرد که به صورت $\frac{d}{dx}$ f(x) نیزنوشته می شود. این نماد نمایش دیفرانسیلی مشتق نامیده می شود و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مشتق مراتب بالاتربه شکل $\frac{d^n}{dx^n}$ f(x) نوشته می شود.)

**مشتق های یک طرفه:** از آنجایی که مطالعه رفتار تابع در همه ی نقاط امکان پذیرنمی باشد(یابه دلیل محدودیت دامنه ی تابع یامحدودیت فاصله ی تعریف شده برای تابع) همواره برای این مطالعه یک محدوده ی خاص در نظر گرفته می شود ولذا به تبع آن تعاریف جدیدی برای مشتق تابع حاصل می شود که عبارتند از:

**مشتق راست:** اگرتابع f در[a,b) تعریف شده باشد آنگاه حاصل حد زیر، در صورت وجود مشتق راست تابع در x=a می باشد:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

و $f'_+(a)$ با نماد نمایش داده می شود. به این مقدار شیب نیم مماس راست می گویند.

**مشتق چپ:** اگرتابع f در (c,a] تعریف شده باشد آنگاه حاصل حد زیردر؛ صورت وجود؛ مشتق چپ تابع درx=a می باشد:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

و $f'_{-}(a)$ با نماد نمایش داده می شود. به این مقدار شیب نیم مماس چپ می گویند.

مثال:مقدار مشتق تابع زیر را در نقطه x=3 بیابید:

$$\begin{cases} 2x+1 & x \neq 3 \\ 8 & x = 3 \end{cases}$$

حل: باتوجه به تعریف مشتق تابع، داریم:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)-8}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2x-7}{x-3}$$

حد صورت کسر برابر ۱- است و حد مخرج کسر برابرصفر. پس برای پیدا کردن حاصل حد باید از حدود یکطرفه استفاده گردد:

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 3^+}\frac{2x-7}{x-3} = -\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 3^-}\frac{2x-7}{x-3} = +\infty$$

بنابراین مقدار $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ موجود(ومتناهی) نیست. پس $f'(3)$ وجود ندارد.■

**مشتق پذیری:** تابع f در x=a مشتقپذیراست هرگاه دراین نقطه پیوسته باشد ومشتق چپ وراست تابع با هم برابرومساوی یک عدد حقیقی معین باشد.

**تعبیرهندسی مشتق پذیری:** تابع f در x=a مشتق پذیراست هرگاه بتوان دراین نقطه یک خط کامل (نه نیم مماس)

مماس وغیرموازی با محورy ها برمنحنی رسم کرد. اگرتابع f درنقطه a مشتق پذیرباشد، آنگاه درآن نقطه پیوسته نیزهست ولی عکس این مطلب صحیح نمی باشد؛ یعنی ممکن است تابع پیوسته باشد امامشتق پذیر نباشد؛ به عبارت بهتر، پیوستگی تابع در x=a شرط لازم برای مشتق پذیری تابع است، نه شرط کافی. پس اگرتابع f درx=a ناپیوسته باشد آنگاه مشتق پذیرنیست.

**توجه:** اگرتابع f در x=a پیوسته باشد و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ باشد آنگاه خط x=a را "مماس قائم" برمنحنی f در نقطه (a,f(a)) می نامیم. بدیهی است که $f'$ در این نقطه وجود ندارد.

**موارد مشتق ناپذیری:** مواردی که تابع درنقطه مفروض مشتق پذیر نیست:(اسم این نقاط نیزنوشته شده)

۱. **نقاط ناپیوسته:** تابع درنقاط ناپیوسته (نقاط بریدگی های شکل تابع) مشتق پذیرنمی باشد. ازدید هندسی نمی توان دراین نقاط مماس برمنحنی رسم کرد.

۲. **نقاط زاویه دار:** تابع درنقاط پیوسته ای که مشتق چپ و راست درآن ها دوعدد حقیقی نابرابر، یا یکی عددودیگری بی نهایت باشد، مشتق پذیرنیست. ازدیدهندسی، دراین نقاط دونیم مماس برمنحنی رسم می شود که با هم زاویه می سازند.(علت نامگذاری آنها هم همین زاویه ساختن نیم مماسهایشان است.)

۳. **نقاط عطف قائم:** تابع درنقاط پیوسته ای که مشتق چپ وراست درآن ها بی نهایت های هم علامت باشد، مشتق ناپذیراست. ازدید هندسی، دراین نقاط می توان یک خط کامل مماس به موازات محورyها رسم کرد.

**نکته:** نقطه عطف قائم تنها نقطه ای است که تابع درآن مشتق پذیر نیست ولی مماس کامل دارد.

۴. **نقاط بازگشت:** تابع درنقاط پیوسته ای که مقادیر مشتق چپ و راست در آنها بی نهایت های غیرهم علامت باشدمشتق ناپذیراست. از دید هندسی، دراین نقاط می توان یک نیم مماس، به موازات محورyها رسم کرد.

۵. تابع در نقاطی که پیوسته اند ولی مشتق درآنها به سمت عدد مشخصی میل نمی کند نیزمشتق ناپذیر است. ازدید هندسی، دراین نقاط نمی توان مماس مشخصی بر منحنی رسم کرد.

**دامنه تابع مشتق:** منظورازدامنه تابع مشتق، مجموعه نقاطی است که تابع درآنها مشتق پذیرمی باشد یعنی برای تابع (مثلا ) داریم:

$D_{f'} = D_f$ - {مجموعه نقاطی که $f'$ در آنها تعریف نشده است.}

**قواعد مشتق گیری:** فرض کنید c وm وp اعداد ثابت وu وv و t توابع دلخواهی باشند.در این صورت:

| | |
|---|---|
| $(c)' = 0$ | $(cu)' = cu'$ |
| $((u^m)') = mu^{m-1}u'$ | $(u+v)' = u' + v'$ |
| $(u \times v \times t)' = u' \times v \times t + u \times v' \times t + u \times v \times t'$ | $(\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{\lvert u\rvert} \times u$ |
| $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ |
| $(\sqrt[m]{u})' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$ | $(\sqrt[m]{u^p})' = \frac{p \times u'}{m \times \sqrt[m]{u^{m-p}}}$ |

**مشتق تابع نسبت به تابع:**

هرگاه بخواهیم مشتق یک تابع مانند f را نسبت به تابع دیگری مانند g به دست آوریم کافی است مشتق این توابع را نسبت به متغیرشان محاسبه نموده و سپس برهم تقسیم کنیم به عبارت بهتر:

$$f'_g = \frac{df}{dg} = \frac{df/_{dx}}{dg/_{dx}}$$

مثال: هرگاه $f(t) = t^3 + 2t$ و $g(t) = 5t^2 + 1$ باشد. در این صورت $(f_g)'$ رابنویسید.

حل: با فرمولهای مشتق نوشته شده در جدول مشتق توابع، داریم:

$$f_g{}' = \frac{df}{dg} = \frac{df/_{dt}}{dg/_{dt}} = \frac{3t^2+2}{10t} \blacksquare$$

**مشتق تابع مرکب(قاعده زنجیری):** اگرتابع g درنقطه a وتابع f در(g(a مشتق پذیرباشد، آنگاه تابع $fog$ نیزدر a مشتق پذیراست و داریم:

$$(fog)'(a) = (f(g(a)))' = g'(a)f'(g(a))$$

به بیان بهتر، هرگاه y تابعی ازu و u تابعی ازx باشد، برای به دست آوردن مشتق y نسبت به x، به صورت زیرعمل می کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

به شکل دیگر؛ برای توابع y،f وu که به صورت(y=f(u تعریف شده باشند، داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

مثال: مشتق تابع $y = \sin(x^4 + 5x)$ را بنویسید.

حل:

$$y = (x^4 + 5x)' \cos(x^4 + 5x) = (4x^3 + 5) \cos(x^4 + 5x) \blacksquare$$

**مشتق ضمنی:** درمقابل رابطه صریح تابع به شکل کلی (y=f(x رابطه ضمنی آن به صورت f(x,y)=0 قرارمی گیرد. برای محاسبه مشتق توابع ضمنی دو روش کلی وجود دارد:

**-استفاده ازقاعده زنجیری:** دراین روش ازطرفین رابطه نسبت به x مشتق می گیریم و بعد با استفاده از فاکتورگیری، $y'$ را می یابیم. (اگربخواهیم مشتق را نسبت به x حساب کنیم؛ قرار می دهیم :

$$(y'_x = 0, \quad x'_x = 1)$$

**-استفاده ازفرمول مشتق جزئی:** مشتق جزئی، پاره ای یا نسبتی، به مشتق تابع چند متغیره $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ نسبت به یکی ازمتغیرها، با ثابت درنظرگرفتن سایرمتغیرها گفته می شود. مشتق جزئی را به جای d با $\partial$ نمایش می دهند که "دِل"( "دِر" یا "پارشال" )خوانده می شود. برای مثال، مشتق جزئی تابع z=f(x,y) نسبت به x به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x, y)$$

به طورکلی حاصل حد زیر، درصورت وجود برابرمشتق جزئی تابع چند متغیره f نسبت به $x_i$ در $(x_1, x_2,\dots, x_n)$ است:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{f}(x_1, x_2,\dots, x_n)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f}(x_1,x_2,\dots,x_i+h,\dots,x_n)-\mathrm{f}(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)}{h}$$

برای مشتق گیری رابطه ی f(x,y)=0 ازفرمول زیر استفاده می شود:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}} = -\frac{\partial_x \mathrm{f}(x, y)}{\partial_y \mathrm{f}(x, y)}$$

مثال: مقدار $y_x{}'$ را برای رابطه ی $2x^2y^4t^3 + 5x^3y^2t^7 + \sqrt{x}y^6t = 0$ بیابید.

حل: با روش قاعده ی زنجیری مشتق ها را حساب می کنیم. در این صورت:

$$4xx_x{}'y^4t^3 + 8x^2y^3y_x{}'t^3 + 6x^2y^4t^2t_x{}'$$

$$+15x^2yx_x{}'y^2t^7 + 10x^3yy_x{}'t^7 + 35x^3y^2t^6t_x{}'$$

$$+\frac{x_x{}'x}{2\sqrt{x}}y^6t + 6\sqrt{x}y^5y_x{}'t + \sqrt{x}y^6t_x{}' = 0$$

حا با جایگذاری $(x_x{}' = 1,\ y_x{}' = 0\ ,\ t_x{}' = 0)$داریم:

$$2xy^4t^3 + 15x^2y^2t^7 + \frac{x}{2\sqrt{x}}y^6t = 0$$

روش دوم استفاده ازفرمول مشتق جزئی: برای مشتق گیری رابطه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\mathrm{f(x,y,t)} = 2x^2y^4t^3 + 5x^3y^2t^7 + \sqrt{x}y^6t$$

لذا رابطه به صورت f(x,y)=0 تبدیلازفرمول زمی شود و می توان از فرمول زیر استفاده کرد:

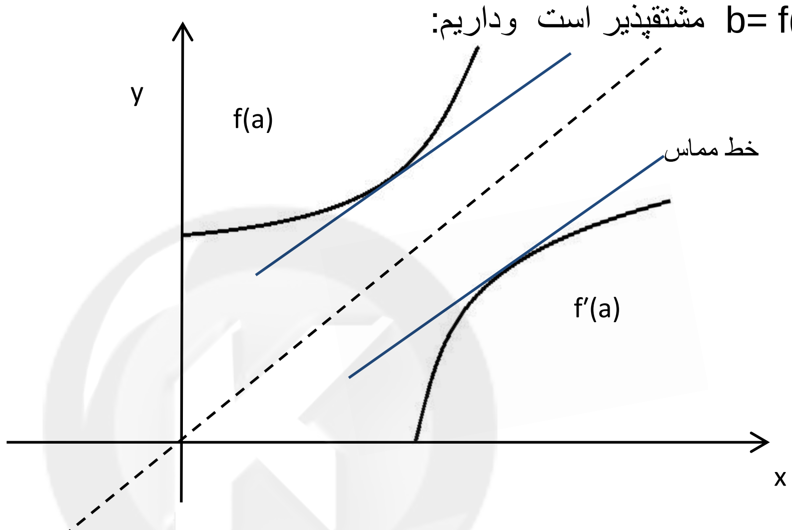
$$y'_x = -\frac{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}} = -\frac{\partial_x \mathrm{f}(x,y,t)}{\partial_y \mathrm{f}(x,y,t)} = -\frac{4xy^4t^3 + 15x^2y^2t^7 + \frac{1}{2\sqrt{x}}y^6t}{8x^4y^3t^3 + 10x^3yt^7 + 6\sqrt{x}y^5t}$$

$$= 2xy^4t^3 + 15x^2y^2t^7 + \frac{x}{2\sqrt{x}}y^6t \blacksquare$$

**مشتق تابع معکوس:**

اگرتابع f درهمسایگی نقطه a پیوسته ویک به یک بوده و$\mathrm{f}'(a)$ موجود و غیرصفر باشد، آنگاه تابع $\mathrm{f}^{-1}$ درنقطه b= f(a) مشتقپذیر است وداریم:

$$(\mathrm{f}^{-1})'(b) = \frac{1}{\mathrm{f}'(a)}$$




خط مماس نمودار تابع f که شیبب آن برابر مقدار مشتق تابع f در x است.

**تعبیر هندسی:** شیب خط مماس بر منحنی $\mathrm{f}^{-1}$ در نقطه $M' \Big|_a^b$ برابر است با عکس شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $M \Big|_b^a$ (نقاط و متناظرهستند.)



**مشتق مراتب بالاتر:**

اگرتابع f روی بازه ی I مشتقپذیرباشد، تابع $f'$ خود ممکن است در نقطه ای مثل a مشتقپذیر باشد به عبارتی اگر(مقدار حد زیر)

$$\mathrm{f}''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}'(a+h) - \mathrm{f}'(a)}{h}$$

موجود باشد، می گوییم مشتق مرتبه ی دوم تابع f در a موجود است و آن را با $\mathrm{f}''(a)$ نمایش می دهیم. مشتق مراتب بالاتریک تابع، ازتعریف اصلی مشتق به دست می آید( به طوری که با مشتق گرفتن ازمشتق اول تابع به مشتق دوم آن می رسیم و به همین ترتیب مشتق مراتب بالاتر نیز تعریف می شوند.) به صورت کلی $\mathrm{f}^{(n)}(a)$ برابر است با:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{h}$$

**مشتق n ام چند تابع مهم:**

مشتق n ام چند تابع مهم نسبت به x که a و b اعداد ثابت هستند:

| تابع | مشتق n ام تابع |
|---|---|
| $y=\sin ax$ | $y^{(n)}=a^n\sin(\frac{n\pi}{2}+ax)$ |
| $y=\cos ax$ | $y^{(n)}=a^n\cos(\frac{n\pi}{2}+ax)$ |
| $y=\frac{1}{ax+b}$ | $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ |
| $y=(ax+b)^n$ | $y^{(n)}=a^n n!$ $(y^{(n+1)}=0)$ |

**کاربرد مشتق:**

**- نوشتن معادله ی خط مماس و قائم:** مشتق به ازای مختصات نقطه تماس، برابراست با ضریب زاویه خط مماس در آن نقطه. پس برای تعیین شیب خط مماس یا قائم منحنی و تعیین معادله ی آنها می توان ازمشتق استفاده کرد.

**- معادله خط مماس در نقطه $(x_0,y_0)$ واقع بر منحنی** f(x):

$$\begin{cases} y-y_0=m(x-x_0)\\ m=f'(x_0)\end{cases}$$

**-معادله خط قائم در نقطه $(x_0,y_0)$ واقع بر منحنی** f(x) :

$$\begin{cases} y-y_0=m'(x-x_0) \\ m'=\dfrac{-1}{m} \end{cases}$$

مثال: معادله خط مماس در نقطه $(2,11)$ واقع بر منحنی $\mathrm{f}(x)=x^2+3x+1$ را بنوسید.

حل: ابتدا شیب منحنی $\mathrm{f}(x)=x^2+3x+1$ در نقطه $(2,11)$ را می یابیم بعد در فرمول داده شده برای مماس برمنحنی درنقطه ای روی منحنی جایگذاری می کنیم؛

$$m=\ \mathrm{f}'(x)=4x+3$$

حال مقدار نقطه $(2,11)$ را در معادله $m$ جایگذاری می کنیم و مقدار عددی $m$ را می یابیم که برابر است با:

$$m=4\times2+3=11$$

حال مقدار نقطه $(2,11)$ را در معادله ی خط مماس جایگذاری می کنیم . لذا داریم:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-11=11(x-2)$$

$$y=11(x-1)\blacksquare$$

**-معادله خط مماس برمنحنی از نقطه ای خارج از منحنی:**

اگر بخواهیم از نقطه $\mathrm{A}\Big|_{y_0}^{x_0}$ (واقع درخارج از منحنی) مماسی برمنحنی رسم کنیم؛ نقطه تماس را $M\Big|_{\mathrm{f(a)}}^{a}$ درنظرمی گیریم. چون نقطه M روی منحنی قرارگرفته ازمنحنی مشتق می گیریم و مختصات M را در تابع مشتق قرار می دهیم تا شیب معادله به دست آید. لذا داریم:

$$\begin{cases} m=\ \mathrm{f}'(a) \\ y-\mathrm{f}(a)=\mathrm{f}'(a)(x-a) \end{cases}$$

در نهایت چون نقطه $\mathrm{A}\Big|_{y_0}^{x_0}$ روی خط مماس قرار دارد؛ درمعادله ی مذکور جایگذاری می کنیم تا یک معادله ی یک مجهولی بر حسب a به دست آید.

**-آهنگ تغییر:** نسبت تغییرات دو کمیت را آهنگ تغییر یکی نسبت به دیگری می گویند.

**-آهنگ تغییرمتوسط:** آهنگ متوسط تغییرات f در فاصله [a,b] عبارت است از:

$$\frac{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}{b-a}$$

آهنگ متوسط تغییرات f نسبت به متغیر x عبارت است از:

$$\frac{\Delta \mathrm{f}}{\Delta x}=\frac{\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(x)}{\Delta x}=\frac{\mathrm{f}(x_2)-\mathrm{f}(x_1)}{x_2-x_1}$$

**-آهنگ تغییرلحظه ای:** اگر تغییرات نسبت به تغییرات را آهنگ آنی(لحظه ای) تغییر نسبت به گویند.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathrm{f}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(x)}{\Delta x}=\mathrm{f}'(x)$$

**-محاسبه حد توابع با کمک تعریف مشتق:** با استفاده ازتعریف مشتق برخی حدها قابل محاسبه می باشند.

مثالی برای روشنترشدن این روش؛ حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2\sqrt{x}-4x-16}{x-4}$$

حل مثال: با قراردادن مقدار x=4 دررابطه ی $(x^2\sqrt{x}-4x)$ متوجه می شویم که حاصل برابر 16 می گردد؛ از طرفی با کمک تعریف مشتق توابع می دانیم که:

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f(x)}-\mathrm{f(a)}}{x-a}$$

پس تابع f(x) را به شکل f(x) $=x^2\sqrt{x}-4x$ تعریف می کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2\sqrt{x}-4x-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\mathrm{f(x)}-\mathrm{f}(4)}{x-4}$$

$$=\mathrm{f}'(4)$$

$$=\frac{5}{2}4^2\sqrt{4}-4\times 4$$

$$=16\blacksquare$$

**محاسبه ی زاویه ی بین دو منحنی:**

**زاویه ی بین خط و منحنی:** زاویه ی بین یک خط و منحنی عبارت است از زاویه ی بین مماس رسم شده بر منحنی در نقطه تقاطع با خط. برای تعیین اندازه ی این زاویه به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱. خط را با منحنی قطع داده و مختصات نقطه تقاطع را بدست می آوریم.
۲. از منحنی مشتق گرفته و ضریب خط مماس بر منحنی در نقطه ی تقاطع را می یابیم.
۳. با کمک رابطه ی زیر مقدار عددی زاویه ی بین خط و منحنی( و همین طور جهت آنها) به دست می آید.

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

**زاویه بین دو منحنی:** برای یافتن زاویه بین دو منحنی ابتدا آنها را با هم تلاقی داده و طول نقطه ی تلاقی را می یابیم. سپس از دو منحنی مشتق گرفته و ضریب زاویه های به دست آمده (یعنی $m_1$,$m_2$ ) را دررابطه ی زیر قرارمی دهیم تا زاویه ی بین دو منحنی به دست آید( زاویه ی بین دو منحنی اصطلاحا زاویه ی بین دو مماس رسم شده بر منحنی ها در نقطه ی تقاطعشان است.)

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

**نقاط بحرانی:** نقطه ی درونی $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع گویند هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد. ریشه های مشتق، نقاط بازگشتی، زاویه دار، ناپیوستگی و عطف قائم همگی جزو نقاط بحرانی تابع محسوب می شوند و نقاط ابتدا و انتهای بازه (به دلیل اینکه نقاط درونی بازه نیستند )جزو نقاط بحرانی محسوب نمی شوند.

در ضمن اگر تابع f روی [a,b] تعریف شده باشد و نقطه c $\in (a,b)$ (درون این بازه) اکسترمم مطلق تابع در این بازه باشد، آنگاه نقطه بحرانی است. هر نقطه اکسترمم نسبی f نقطه بحرانی f نیزهست، در صورتیکه یک نقطه ی بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم نسبی نباشد.

اگرتابع f روی (a,b) پیوسته باشد برای به دست آوردن مقادیرماکسیمم ومینیمم مطلق ابتدا نقاط بحرانی را دربازه مشخص کرده و در تابع اصلی قرار می دهیم بعد مقادیر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)$ را نیزبه دست آورده و بامقادیر اعداد به دست آمده مقایسه می کنیم و کمترین مقدار را می نیمم تابع و بیشترین مقدار را ماکسیمم تابع می نامیم.

توجه: اگر دربازه فوق نقطه c وجود داشته باشد که تابع در آن نقطه ناپیوسته باشد آنگاه مقادیر $\lim_{x\to c^+} f(x)$ و $\lim_{x\to c^-} f(x)$ را نیزیافته ومانندموارد بالا با مقایسه ی مقادیر یافته شده مقدار نهایی مینیمم و ماکسیمم تابع رامشخص می کنیم.

**تشخیص یکنوایی تابع:** در تابع پیوسته f برای هرI $x\in$ اگر $f'(x) > 0$ آنگاه f روی I صعودی اکید است واگر $f'(x) < 0$ آنگاه f روی I نزولی اکید است؛ ولی اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، تابع f ممکن است صعودی غیراکید یا صعودی اکید باشد و اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، تابع f ممکن است نزولی غیر اکید یا نزولی اکید باشد. در این حالت برای تشخیص اکید یا غیر اکید بودن تابع f

ریشه های مشتق را به دست می آوریم. اگر ریشه های مشتق تمام نقاط روی یک بازه باشند، تابع صعودی غیر اکید است و در غیر این صورت صعودی اکید است. اگر تابع f پیوسته نباشد، دامنه تابع را به فاصله هایی که

تابع درآن ها پیوسته است تقسیم می کنیم و به کمک مشتق وضعیت یکنوایی تابع را در هربازه مشخص می کنیم. سپس نقاط انتهایی (یا حد انتهایی) هربازه را با نقاط ابتدایی(یا حد ابتدایی) بازه بعد مقایسه می کنیم.

**آزمون های مشتق:**

آزمون مشتق اول: با فرض اینکه c نقطه ی بحرانی تابع f است و $c \in (a,b)$ و f روی (a,b) پیوسته وبه جز احتمالا درc مشتق پذیر باشد:

- اگر $f'$ روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد، آنگاه f درc ماکزیمم نسبی دارد.
- اگر $f'$ روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد، آنگاه f درc مینیمم نسبی دارد.
- اگر $f'$ روی (a,c) و(c,b) هم علامت باشد، آنگاه f درc اکسترمم ندارد.

**آزمون مشتق دوم:** فرض کنید نقطه بحرانی تابع f و $f''$ موجود باشد:

- اگر$f''(c) < 0$ باشد آنگاه f درc دارای مینیمم نسبی است.
- اگر$f''(c) > 0$ باشد آنگاه f درc دارای ماکسیمم نسبی است.
- اگر$f''(c) = 0$ باشد آنگاه آزمون مشتق دوم بی نتیجه است.

**جهت تقعر و نقطه عطف:** اگر نمودار تابعی به صورت باشد تقعرآن به سمت بالاست. دراین حالت منحنی بالای هر خطی که بر آن مماس شود، قرارمی گیرد. به عبارت دیگر اگر $f'$ صعودی اکید باشد یا $f''$ روی بازه I موجود و همواره مثبت باشد آنگاه جهت تقعر نمودارf روی این بازه رو به بالاست.

اگر نمودار تابعی به صورت باشد تقعرآن به سمت پایی است. دراین حالت منحنی پایین هر خطی که بر آن مماس شود، قرارمی گیرد. به عبارت دیگر اگر $f'$ نزولی اکید باشد یا $f''$ روی بازه I موجود و همواره منفی باشد آنگاه جهت تقعر نمودارf روی این بازه رو به پایین است.

اگر جهت تقعر نمودارf در نقطه c تغییرکند و مماس نیز داشته باشد آنگاه c را نقطه عطف گویند. در بررسی نقطه عطف تابع، سه شرط زیر باید برقرار باشد:

۱. f درc پیوسته باشد.
۲. f درc فقط یک مماس داشته باشد.(مایل، افقی یا قائم)
۳. جهت تقعر f درc تغییر کند.

پس برای یافتن نقاط عطف نمودار تابع کافی است، نقاطی که $f''$ در آن ها وجود ندارد یا برابر صفر است را تعیین وعلامت $f''$ را قبل و بعد ازاین نقاط نیز وجود خط مماس را در این نقاط بررسی کنیم.

**قاعده هوپیتال:** از قاعده هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ درحد استفاده می شود به طوری که اگر f و g در x=a مشتق پذیر باشند و f(a)=g(a)=0 آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{g}'(x)} = L$$

اگرf وg درx=a از راست مشتق داشته باشد از قاعده هوپیتال برای وقتی $x \to a^+$ می توان استفاده کرد و به همین ترتیب، اگر مشتق چپ داشته باشد برای $x \to a^-$ .

**بهینه سازی:** بسیاری از مسائلی که در علوم تجربی و ریاضیات مطرح می شوند، در جستجوی یافتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم هستند که یک تابع مشتق پذیر می تواند در دامنه ی خاصی اختیار کند و مشتق ابزار مناسبی برای یافتن این مقادیر است.

برای حل مسائل بهینه سازلازم است که ابتدا کمیت هایی مانند حجم، مساحت، فاصله و...که بیشترین یاکمترین مقدارآن موردنیازاست، به صورت تابعی ازمتغیرهای دیگر نوشته شود و چنانچه معادله حاصل بیش از یک متغیرداشت با استفاده از فرضیات مسئله و ارتباط متغیرهاباهم، معادله را به معادله ای که با یک متغی مستقل تبدیل کرد و در انتها به کمک مشتق، نقاط بحرانی را یافت، تا بتوان ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را مشخص کرد.

**تمرینات و مثالهای بیشتر در جزوه ی حل تمرین نوشته شده.**