



# آزمون غیر حضوری

## دروس اختصاصی

### فارغ التحصیلان ریاضی

#### (۳ اسفند ۱۳۹۷)

#### (مباحث ۱۷ اسفند ۹۷)

گروه فنی و تولید:

محمد اکبری	مسئول تولید آزمون غیر حضوری
نرگس غنی زاده	مسئول دفترچه آزمون غیر حضوری
مدیر گروه: مریم صالحی مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری	گروه مستندسازی
حسن خرم‌جو	حروف‌چین
سوران نعیمی	ناظر چاپ

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»



## دیفرانسیل

مشق و کاربردهای آن  
صفحه‌های ۱۶۶ تا ۱۸۰

## دیفرانسیل

۱. مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که درون نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{2}$

۲. کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x^3}$ ، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{9}$  (۲)  $-\frac{1}{6}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴) صفر

۳. اگر  $f(x) = x|x^2 - 1|$  در بازه  $(-\infty, \alpha)$  دارای ۳ نقطه بحرانی باشد،  $\max(\alpha)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴) صفر

۴. تابع  $f(x) = 2x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$  در بازه  $[0, 2\pi]$  از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) همواره نزولی (۲) همواره صعودی  
(۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

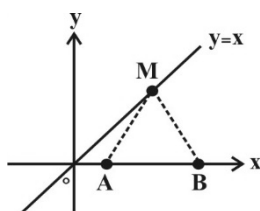
۵. اگر  $f(x) = \max\left\{x^2, \left|x - \frac{3}{4}\right|\right\}$  باشد، کم‌ترین مقدار تابع  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{4}{9}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۶. تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2} & , x \geq 8 \\ a2^x & , 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$  به ازای چند مقدار صحیح  $a$  صعودی اکید است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۷. دو نقطه  $A$  و  $B$  به طول‌های ۱ و ۷ روی محور طول‌ها واقع‌اند. طول نقطه  $M$  واقع بر نیمساز ناحیه اول و سوم به طوری که مجموع



مربعات فواصل  $M$  از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌نیمم باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $2\sqrt{5}$  (۳)  $\sqrt{5}$  (۴) ۲

۸. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ، کدام است؟

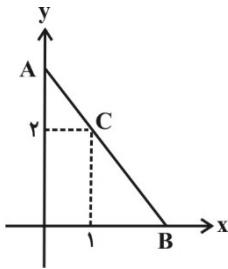
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۹. کم‌ترین فاصله نقاط منحنی  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$  از نقطه  $A(3, 0)$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $\sqrt{12}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۱۲



۱۰. اگر پاره خط  $AB$  کوتاه ترین پاره خطی باشد که دو سر آن روی دو محور مختصات قرار دارد و از نقطه  $C$  بگذرد، عرض نقطه  $A$



کدام است؟

(۱)  $2 + \sqrt{2}$

(۲)  $2 + \sqrt[3]{2}$

(۳) ۴

(۴) ۳

### هندسه تحلیلی

#### بردارها

صفحه های ۴ تا ۳۳

### هندسه تحلیلی

۱۱. اگر  $A''$  قرینه نقطه  $A = (-1, 2, 4)$  نسبت به محور  $z$ ها و  $A'$  تصویر نقطه  $A''$  روی صفحه  $xy$

باشد، طول پاره خط  $AA'$  کدام است؟

(۴)  $4\sqrt{2}$

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱)  $6\sqrt{2}$

۱۲. اگر بردارهای  $a = (-1, 2, 2)$  و  $b = (2, -1, -2)$  مفروض باشند، آنگاه مجموع مؤلفه های بردار جهت نیمساز زاویه بین  $a$  و  $b$  کدام

است؟

(۴)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۱)  $\sqrt{2}$

۱۳. اگر بردار  $a = (2, -2, 1)$  با محورهای مختصات، زوایایی به اندازه های  $\alpha, \beta, \gamma$  بسازد، آنگاه  $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$  کدام است؟

(۲)  $\frac{2}{3}$

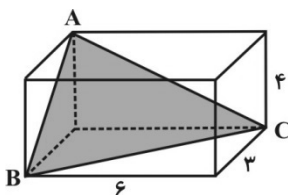
(۱)  $\frac{1}{3}$

(۴)  $-\frac{2}{3}$

(۳)  $-\frac{1}{3}$

۱۴. مطابق شکل، رئوس مثلث  $ABC$  بر سه کنج مکعب مستطیلی با ابعاد ۳ و ۴ و ۶ واقعند. کسینوس زاویه  $B$  در مثلث  $ABC$  کدام

است؟



(۲)  $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

(۱)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۴)  $\frac{3\sqrt{5}}{25}$

(۳)  $\frac{\sqrt{5}}{10}$

۱۵. اگر  $a$  و  $b$  دو بردار ناصفر باشند به طوری که  $b \cdot (a \times b) = 3(a \cdot b)^2 - |a \times b|^2$  آنگاه زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  کدام می تواند

باشد؟

(۲)  $\frac{\pi}{3}$

(۱)  $\frac{\pi}{6}$

(۴)  $\frac{\pi}{4}$

(۳)  $\frac{\pi}{2}$



۱۶. اگر بردار  $a' = (2, 1, m-1)$ ، تصویر قائم بردار  $a$  روی بردار  $b$  و بردار  $a'' = (2, -1, m+1)$ ، قرینه بردار  $a$  نسبت به بردار  $b$  باشد، اندازه بردار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$  (۲)  $\sqrt{6}$   
 (۳) ۳ (۴)  $\sqrt{14}$

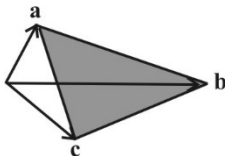
۱۷. اندازه بردارهای  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  به ترتیب ۵، ۳، ۴ و ۶ است و  $a + b + c + d = 0$ ، حاصل  $a \cdot c - b \cdot d$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲  
 (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸. حاصل عبارت  $((3j+k) \times (k-i)) \cdot (i-j+k)$  برابر کدام است؟ ( $i$ ،  $j$  و  $k$  بردارهای یک‌محوره‌ای مختصات‌اند).

- (۱) -۲ (۲) -۱  
 (۳) ۵ (۴) ۷

۱۹. سه بردار  $a = (0, 1, 1)$ ،  $b = (4, 5, -3)$  و  $c = (2, 5, 1)$ ، مطابق شکل زیر مفروض‌اند. مساحت مثلث هاشورزده کدام است؟



- (۱) ۱۰ (۲)  $8\sqrt{2}$   
 (۳)  $6\sqrt{3}$  (۴)  $4\sqrt{6}$

۲۰. دو بردار با تصاویر  $a = (1, -2, 3)$  و  $b = (2, 1, -1)$  مفروض هستند. حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار  $a$ ،  $b$  و  $a \times b$  ساخته می‌شود، کدام است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۷۲  
 (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

### ریاضیات گسسته

مباحثی دیگر از ترکیبیات  
 صفحه‌های ۶۴ تا ۷۲

### ریاضیات گسسته

۲۱. در چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۰، ۶، ۵ و ۸، هر دو رقم ۰ و ۸ وجود دارند؟

- (۱) ۵۷ (۲) ۱۱۱ (۳) ۷۳ (۴) ۵۴

۲۲. به چند طریق می‌توان ۵ سیب یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که به یکی از آن‌ها دقیقاً ۳ سیب برسد؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۲۳. در پرتاب ۳ تاس با هم، در چند حالت ممکن است مجموع اعداد رو شده برابر ۱۴ باشد؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۴۸ (۳) ۷۸ (۴) ۱۵

۲۴. اگر  $\phi(n)$ ، تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی  $n$  باشد که نسبت به آن اول هستند و  $n$  فاقد عامل اول یک رقمی باشد،

آن‌گاه کدام یک از مقادیر زیر برابر با  $\phi(n)$  است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

- (۱)  $\phi(2n)$  (۲)  $\phi(3n)$  (۳)  $\phi(5n)$  (۴)  $\phi(7n)$



۲۵. تعداد اعداد دو رقمی که نسبت به ۷۰ اول هستند کدام است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۳۱ (۳) ۳۹ (۴) ۳۶

۲۶. به چند طریق می توان ۴ جایزه مختلف را بین سه نفر تقسیم نمود طوری که به هر نفر دست کم یک جایزه برسد؟

- (۱) ۳ (۲) ۳۶ (۳) ۸۱ (۴) ۱۵

۲۷. چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که بر هیچ کدام از دو عدد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشد؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۱ (۳) ۷۲ (۴) ۷۱

۲۸. چند عدد از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  بر هیچ یک از اعداد ۲, ۳, ۵, ۷ بخش پذیر نیستند؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۱ (۳) ۳۰ (۴) ۲۶

۲۹. به چند طریق می توان ۱۰ سکه ۵۰ ریالی را بین سه نفر تقسیم کرد به طوری که به شخص اول حداکثر ۴ سکه و به شخص دوم حداکثر ۵ سکه برسد؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۳۰. چند عدد طبیعی دو رقمی نسبت به ۹۶ اول هستند؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰

### فیزیک پیش دانشگاهی

#### فیزیک پیش دانشگاهی

موج های الکترومغناطیسی

صفحه های ۱۶۶ تا ۱۸۲

۳۱. جرقه الکتریکی به عنوان چشمه تولید کدام یک از پرتوهای زیر محسوب می شود؟

- (۱) فرابنفش (۲) نور مرئی (۳) فرورسرخ (۴) رادیویی

۳۲. در یک آزمایش یانگ با استفاده از نور تک رنگ، در محل نقطه P واقع بر پرده، دومین نوار روشن تشکیل شده است. اگر طول موج نور را ۱۵۰ نانومتر افزایش دهیم، در محل نقطه P دومین نوار تاریک مشاهده خواهد شد. طول موج نور در حالت اول چند نانومتر بوده است؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۴۵۰ (۴) ۶۰۰

۳۳. اگر یک آزمایش یانگ را یک بار در هوا و بار دیگر در آب به ضریب شکست  $\frac{4}{3}$  انجام دهیم، نسبت فاصله چهارمین نوار روشن از نوار مرکزی در آب به فاصله سومین نوار روشن از نوار مرکزی در هوا چقدر است؟ (دیگر شرایط آزمایش در هر دو حالت یکسان است.)

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{9}{16}$  (۴)  $\frac{16}{9}$



۳۴. آزمایش ینگ را یک بار در هوا و بار دیگر در آب با ضریب شکست  $\frac{4}{3}$  تحت شرایط یکسان با یک پرتو نور تک‌رنگ انجام

می‌دهیم. چندمین نوار روشن در آب بر سومین نوار روشن در هوا منطبق می‌شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۵. جسم‌های گرم و داغ، چشمه تولید کدام یک از امواج زیر به حساب نمی‌آیند؟

- (۱) امواج فرسوخ (۲) فرابنفش (۳) نور مرئی (۴) پرتو ایکس

۳۶. در یک آزمایش ینگ، اگر فاصله وسط‌های شش نوار تاریک متوالی از یک‌دیگر برابر با ۴ میلی‌متر باشد، فاصله چهارمین نوار

روشن در یک طرف از سومین نوار تاریک در طرف دیگر نوار مرکزی، چند میلی‌متر است؟

- (۱)  $10/4$  (۲)  $5/2$  (۳)  $2/4$  (۴)  $1/2$

۳۷. آزمایش ینگ را بار اول با نوری به طول موج  $\lambda_1 = 6000 \text{ \AA}$  و بار دوم با نوری به طول موج  $\lambda_2 = 4800 \text{ \AA}$  انجام داده‌ایم. اگر

نوار روشن  $n$ ام از نور اول بر نوار تاریک  $m$ ام از نور دوم منطبق شود،  $n$  و  $m$  به ترتیب از راست به چپ کدام اعداد می‌توانند

باشند؟

- (۱) ۳, ۴ (۲) ۴, ۳ (۳) ۱, ۲ (۴) ۲, ۲

۳۸. اگر آزمایش ینگ را با نوری به طول موج  $6000 \text{ \AA}$  انجام دهیم، فاصله وسط سومین نوار روشن از وسط چهارمین نوار تاریک در

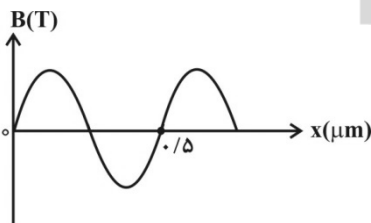
طرفین نوار روشن مرکزی برابر با  $13 \text{ mm}$  می‌شود. اگر همین آزمایش را با نوری به طول موج  $4800 \text{ \AA}$  انجام دهیم، پهنای هر نوار

چند میلی‌متر می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲)  $0/8$  (۳)  $0/6$  (۴)  $0/4$

۳۹. در شکل زیر، نمودار میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در خلأ در لحظه  $t = 0$  نشان داده شده است. این موج در چه

محدوده‌ای از موج‌های الکترومغناطیسی است و بسامد آن چند هرتز می‌باشد؟ ( $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ )



- (۱) رادیویی،  $6 \times 10^{14}$

- (۲) نور مرئی،  $6 \times 10^{14}$

- (۳) رادیویی،  $6 \times 10^9$

- (۴) نور مرئی،  $6 \times 10^9$

۴۰. در آزمایش ینگ، اگر اختلاف راه نوری وسط دومین نوار روشن از دو شکاف برابر با ۲ میکرون باشد، اختلاف راه نوری وسط

دومین نوار تاریک از دو شکاف چند میکرون خواهد بود؟

- (۱)  $0/5$  (۲) ۱ (۳)  $1/5$  (۴) ۲



شیمی پیش‌دانشگاهی: صفحه‌های ۶۰ تا ۱۰۴

۴۱- کدام یک از عوامل زیر باعث کاهش pH خاک و اسیدی شدن آن نمی‌شود؟

- (۱) افزودن آهک به خاک  
 (۲) بارش باران اسیدی  
 (۳) ورود آلاینده‌های  $SO_2$  و  $NO_x$  به هواکره  
 (۴) افزایش غلظت  $Al^{3+}$  در خاک

۴۲- کدام عبارت صحیح می‌باشد؟

- (۱)  $HCl(g)$  که هیدروکلریک اسید نامیده می‌شود یک اسید آرنیوس است، زیرا پس از انحلال در آب به  $H^+(aq)$  و  $Cl^-(aq)$  تبدیل می‌شود.  
 (۲) آلومینیم‌اکسید هم اسید و هم باز آرنیوس محسوب می‌شود.  
 (۳) از واکنش گاز آمونیاک با گاز هیدروژن کلرید، گاز سفید رنگی ایجاد می‌شود.  
 (۴)  $K_2O$  برخلاف  $CO_2$  باز آرنیوس می‌باشد.

۴۳- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) باز مزدوج هیپوکلرواسید پایدارتر از باز مزدوج هیپوبرمو اسید است.  
 (۲) یون هیدروکسید در آب به سرعت به یون‌های اکسید تبدیل می‌شود.  
 (۳) فسفریک اسید طی سه مرحله یونیده می‌شود که فقط مرحله اول آن کامل و یک طرفه است.  
 (۴) در دمای اتاق، ثابت یونش آب برابر  $10^{-14} \text{ mol.L}^{-1}$  است.

۴۴- اسید ضعیف HX در محلول  $10^{-2}$  مولار آن به میزان ۰/۱ درصد یونش می‌یابد. در صورتی که در محلول دیگری که از HX

در همان دما تهیه شده است،  $pH = 5/7$  باشد، غلظت تعادلی اسید در این محلول به تقریب، چند مول بر لیتر است؟  
 ( $\log 2 = 0/3$ )

- (۱)  $10^{-4}$  (۲)  $4 \times 10^{-2}$  (۳)  $4 \times 10^{-4}$  (۴)  $10^{-2}$

۴۵- کدام گزینه زیر درباره آمینواسیدهای طبیعی صحیح است؟

- (۱) در اغلب آمینواسیدهای طبیعی گروه آمینی روی همان کربنی قرار دارد که گروه کربوکسیل قرار می‌گیرد.  
 (۲) این ترکیبات، می‌توانند تبادل پروتون درون مولکولی داشته باشند.  
 (۳) ساده‌ترین آمینواسید دارای فرمول مولکولی  $C_2H_5NO_2$  می‌باشد.  
 (۴) گلی‌سین ساده‌ترین آمینواسید است که به دلیل قطبیت بالا، در حلال‌های قطبی مانند آب و اتانول در دمای اتاق به خوبی حل می‌شود.

۴۶- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- (آ) آبکافت نمک  $NH_4Cl$  محیط را بازی می‌کند.  
 (ب) نمک پتاسیم نیترات یک نمک خنثی است، زیرا در آن هم کاتیون و هم آنیون آبکافت می‌شوند.  
 (پ) اکسید نافلزها، اسید آرنیوس محسوب نمی‌شوند.

(ت) متیل‌اتانوات از واکنش متانوئیک اسید و اتانول تشکیل می‌شود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷- تمام عبارت‌های زیر درست هستند، به جز:

- (۱) هر چند آمین‌ها در ساختار خود فاقد عامل هیدروکسید هستند، اما با حل شدن در آب غلظت این یون را افزایش می‌دهند.  
 (۲) آمین‌ها در نتیجه حل شدن در آب، پذیرنده  $H^+$  بوده و نقش باز لوری - برونستد را دارند.  
 (۳) پایداری کاتیون دی‌متیل آمونیوم بیشتر از پایداری کاتیون اتیل آمونیوم است.  
 (۴) در دما و غلظت یکسان، pH محلول آمونیاک بیشتر از محلول متیل آمین است.



۴۸- با افزودن مقدار اندکی اسید قوی به بافر اسیدی تعادل مربوط به اسید ضعیف در جهت تولید ..... جابه‌جا می‌شود و ثابت یونش اسید ..... .

- (۱) باز مزدوج اسید ضعیف - ثابت می‌ماند.  
 (۲) اسید ضعیف - کاهش می‌یابد.  
 (۳) اسید ضعیف - ثابت می‌ماند.  
 (۴) باز مزدوج اسید ضعیف - افزایش می‌یابد.

۴۹- چند مورد از عبارتهای زیر درست هستند؟

(آ) حبس کردن نفس در سینه موجب افزایش اندک غلظت یون هیدرونیوم خون می‌شود.  
 (ب) pH مناسب خاک برای رشد گل آزالیا کم‌تر از pH شیر است.

(پ) در ساختار صابون‌های جامد، ۱۴ تا ۱۸ اتم با عدد اتمی ۶ به کار رفته است.

(ت) بین سه ماده گلی‌سین، بوتیل آمین و پروپانوئیک‌اسید، ماده‌ای که کم‌ترین تعداد کربن را دارد، بیشترین نقطه ذوب را نیز دارد.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۵۰- به ۲ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار  $\text{HNO}_3$ ، آب مقطر اضافه می‌کنیم و حجم محلول را به ۵۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم، سپس به ۱۰ میلی‌لیتر از محلول حاصل، چند گرم سدیم هیدروکسید اضافه کنیم تا pH محلول به ۱۳ برسد؟

( $\text{H} = 1, \text{O} = 16, \text{Na} = 23; \text{g.mol}^{-1}$ )

- (۱) ۰/۰۶۴ (۲) ۰/۰۳۲ (۳) ۰/۰۱۶ (۴) ۰/۰۵۶

۵۱- کدام مطلب درست است؟

(۱) حالت فیزیکی برم تولیدشده در هنگام قرار گرفتن فیلم عکاسی در برابر نور آفتاب، به صورت گازی است.

(۲) واکنش تشکیل آینه نقره‌ای در حضور کاتالیزگر و در دمای  $50^\circ\text{C}$  انجام می‌شود.

(۳) مهم‌ترین تفاوت میان آلدهیدها و کتون‌های هم کربن، وجود یک اتم هیدروژن بیش‌تر، در فرمول عمومی آلدهیدها است.

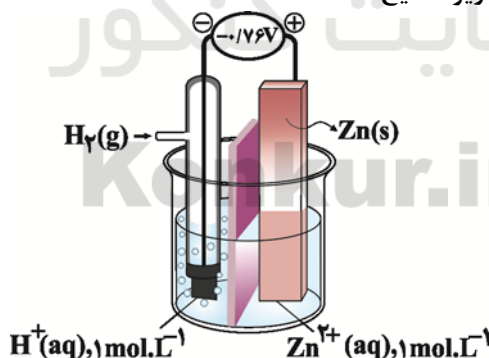
(۴) برای به‌دست آوردن عدد اکسایش یک اتم در یک مولکول یا یون باید تعداد الکترون‌های ظرفیتی آن را از تعداد الکترون‌های نسبت داده شده به آن کم کنیم.

۵۲- در واکنش موازنه نشده زیر، گونه کاهنده و گونه اکسنده کدام عنصرها می‌باشند؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید)



- (۱) منگنز - اکسیژن (۲) کلر - اکسیژن (۳) هیدروژن - منگنز (۴) کلر - منگنز

۵۳- با توجه به شکل زیر چند مورد از موارد زیر صحیح است؟



آ- همان الکترود استاندارد هیدروژن (SHE) می‌باشد که در نیم‌سلول کاتدی آن، نیم‌واکنش  $\text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Zn}(\text{s})$  انجام می‌شود.

ب- عدد منفی در نمایشگر بیانگر این است که قطب‌های ناهمنام سلول و ولت‌سنج به هم متصل شده است.

پ- محلول اسید به‌کار رفته در این سلول دارای  $\text{pH} = 1$  است.

ت- در سلول فوق، با انجام واکنش‌های اکسایش و کاهش به ترتیب در الکترودهای آند و کاتد، جرم آند کاهش و جرم کاتد افزایش می‌یابد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

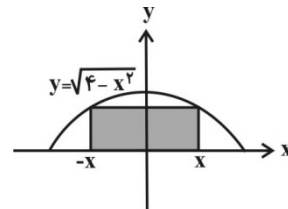




## دیفرانسیل

گزینه «۲» - ۱

فرض می‌کنیم محور  $y$  ها، محور تقارن نیم‌دایره باشد. معادله نیم‌دایره به صورت  $y = \sqrt{4-x^2}$  می‌تواند باشد. برای تعیین بیش‌ترین مقدار مساحت مستطیل به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$1) S_{\text{مستطیل}} = 2x \times \sqrt{4-x^2}$$

$$2) S' = 2x \times \sqrt{4-x^2} - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \times 2x = \frac{2(4-x^2) - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$3) S' = 0 \Rightarrow 8 - 2x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$4) x = \sqrt{2} \Rightarrow \max(S) = 2(\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 4$$

گزینه «۴» - ۲

می‌دانیم:

حال اگر به عبارت زیر رادیکال، عبارت  $x^2$  که یک عبارت همواره نامنفی است را اضافه کنیم، طرف راست، بزرگتر یا مساوی طرف چپ می‌شود (در  $x=0$  دو عبارت برابر می‌شوند). بنابراین:

$$-x \leq \sqrt{-x^3+x^2} \Rightarrow x + \sqrt{-x^3+x^2} \geq 0$$

پس می‌نیم عبارت برابر صفر است.

گزینه «۲» - ۳

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - x & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & ; -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 1 & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست در نقاط  $x = \pm 1$  برابر نیست، پس این دو نقطه مشتق‌ناپذیر و بحرانی هستند.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \pm(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

بحرانی:

بنابراین برای اینکه تابع در بازه  $(-3, \alpha)$  سه نقطه بحرانی داشته باشد بیش‌ترین مقدار  $\alpha$  برابر ۱ می‌باشد.

گزینه «۲» - ۴

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = 2x + \sqrt{2} \left( \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right) = 2x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow f'(x) = 2\left(1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 4$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ تابع صعودی است.}$$

گزینه «۱» - ۵

به تعریف  $\text{Max}\{a, b\}$  توجه کنید:

$$\text{Max}\{a, b\} = \begin{cases} a & , a \geq b \\ b & , a < b \end{cases}$$

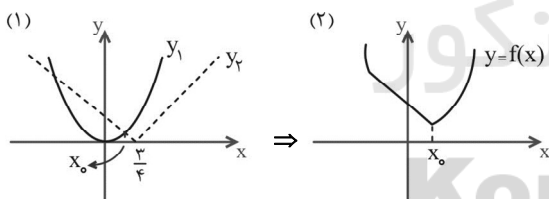
این تعریف را به تابع داده شده تعمیم می‌دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x^2 \geq \left|x - \frac{3}{4}\right| \\ \left|x - \frac{3}{4}\right| & , x^2 < \left|x - \frac{3}{4}\right| \end{cases}$$

برای رسم نمودار  $y = f(x)$  کافی است نمودار دو تابع  $y_1 = x^2$  و

$y_2 = \left|x - \frac{3}{4}\right|$  را رسم کنیم، در هر فاصله‌ای که  $y_1$  بالای  $y_2$  یا برابر آن بود

نمودار  $y_1$  و در غیر اینصورت  $y_2$  را رسم می‌کنیم:



توجه به نمودار (۲)، می‌نیم تابع  $f$  در  $x_0$  در بازه  $\left(0, \frac{3}{4}\right)$  اتفاق می‌افتد،

بنابراین کافی است معادله  $x^2 = \left|x - \frac{3}{4}\right|$  را برای این بازه حل کنیم و  $x_0$  را

بیابیم:

$$x^2 = \left|x - \frac{3}{4}\right| \xrightarrow{x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)} x^2 = -x + \frac{3}{4} \rightarrow x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 0 \xrightarrow{x_0 \in \left(0, \frac{3}{4}\right)} x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Max}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$$

بنابراین:



۶- گزینه «۲»

اگر  $a$  منفی یا صفر باشد ضابطه پایین صعودی اکید نیست. باید داشته باشیم:

$$a^{\sqrt{1}} < \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow 2a < 4 \Rightarrow a < 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \in \{1\}$$

۷- گزینه «۴»

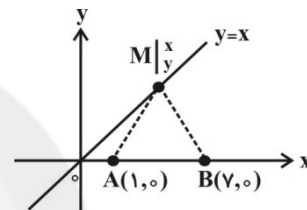
$$P = (MA)^2 + (MB)^2$$

$$P = (\sqrt{(x-1)^2 + x^2})^2 + (\sqrt{(x-7)^2 + x^2})^2$$

$$P = (x-1)^2 + x^2 + (x-7)^2 + x^2$$

$$P' = 2(x-1) + 2x + 2(x-7) = 0$$

$$P' = 8x - 16 = 0 \Rightarrow x = 2$$



۸- گزینه «۱»

باید نقاطی درونی از دامنه‌ی تابع را بیابیم که در آن‌ها،  $f'$  برابر صفر است یا وجود ندارد. دامنه‌ی تابع  $\{0, R\}$  است. همچنین تابع در دامنه‌ی خود پیوسته است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times x - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \neq 0$$

مخرج  $f'$  در  $x=0$  صفر می‌شود ولی از آن‌جا که این نقطه، عضو دامنه‌ی تابع نیست، بنابراین نقطه بحرانی نخواهد بود و تابع نقطه بحرانی ندارد.

۹- گزینه «۱»

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (2x^2 + 3)}$$

$$= \sqrt{3x^2 - 6x + 12}$$

$$d' = \frac{6x - 6}{2\sqrt{3x^2 - 6x + 12}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$d(1) = \sqrt{3 - 6 + 12} = 3$$

۱۰- گزینه «۲»

$$\overline{(AB)}^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{رابطه کمکی: } \frac{x-1}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \frac{y}{y-2}$$

$$\overline{(AB)}^2 = \frac{y^2}{(y-2)^2} + y^2 = \left(\frac{y}{y-2}\right)^2 + y^2$$

$$\text{مشتق: } (\overline{(AB)}^2)'_y = 2\left(\frac{-2}{(y-2)^2}\right)\left(\frac{y}{y-2}\right) + 2y = 0$$

$$\Rightarrow 2y\left(\frac{-2}{(y-2)^2} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \text{ غ ق ق} \\ \frac{2}{(y-2)^2} = 1 \Rightarrow y-2 = \sqrt[3]{2} \Rightarrow y = 2 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow y_A = 2 + \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

دقت کنید که می‌توان به جای مشتق گرفتن از  $\overline{AB}$  نسبت به  $y$ ، مشتق  $\overline{(AB)}^2$  را نسبت به  $y$  گرفت و برابر صفر قرار داد.

## هندسه تحلیلی

۱۱- گزینه «۳»

به طور کلی، قرینه نقطه یا بردار  $(a_1, a_2, a_3)$  نسبت به محور  $z$  ها، نقطه یا بردار  $(-a_1, -a_2, a_3)$  است.

$$A = (-1, 2, 4) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } z \text{ ها}} A'' = (1, -2, 4)$$

تصویر هر نقطه یا بردار  $(b_1, b_2, b_3)$  روی صفحه  $xy$ ، نقطه یا بردار  $(b_1, b_2, 0)$  است.

$$A'' = (1, -2, 4) \xrightarrow{\text{تصویر روی صفحه } xy} A' = (1, -2, 0)$$

$$AA' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2 + (0-4)^2} = 6$$

۱۲- گزینه «۱»

بردار  $e_a + e_b$ ، بردار نیمساز زاویه بین بردارهای  $a$  و  $b$  است. داریم:

$$|a| = 3 \Rightarrow e_a = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

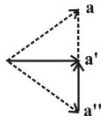
$$|b| = 3 \Rightarrow e_b = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$e_a + e_b = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \Rightarrow |e_a + e_b| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

بنابراین برای یافتن بردار جهت نیمساز زاویه بین بردارهای  $a$  و  $b$ ، کافی است

بردار  $e_a + e_b$  را بر اندازه آن یعنی  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  تقسیم کنیم. در نتیجه بردار مورد نظر

برابر است با  $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right)$  که مجموع مؤلفه‌های آن برابر  $\sqrt{2}$  است.



$$a' - a'' = (0, 2, -2)$$

$$a' \cdot (a' - a'') = 0 \Rightarrow 2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow a'' = (2, -1, 3)$$

بردارهای  $a$  و  $a''$  هم اندازه هستند بنابراین:

$$|a| = |a''| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

۱۷- گزینه «۲»

$$a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + c = -b - d \Rightarrow |a + c| = |-b - d|$$

$$\Rightarrow |a + c|^2 = |-b - d|^2 \Rightarrow |a|^2 + |c|^2 + 2a \cdot c = |b|^2 + |d|^2 + 2b \cdot d$$

$$\Rightarrow 5^2 + 2^2 + 2a \cdot c = 3^2 + 6^2 + 2b \cdot d$$

$$\Rightarrow 2a \cdot c - 2b \cdot d = 4 \Rightarrow a \cdot c - b \cdot d = 2$$

۱۸- گزینه «۴»

می‌دانیم که  $k \times i = j$  و  $j \times k = i$ ،  $i \times j = k$  داریم:

$$(3j + k) \times (k - i) = 3j \times k - 3j \times i + \underbrace{k \times k}_{=0} - k \times i = 3i - j + 3k \quad (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} (i - j + k) \cdot ((3j + k) \times (k - i)) = (i - j + k) \cdot (3i - j + 3k) = 3 + 1 + 3 = 7$$

۱۹- گزینه «۴»

مطابق شکل زیر مساحت مثلث هاشورزده برابر است با:

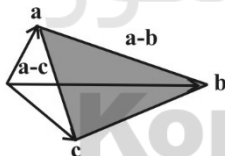
$$S = \frac{1}{2} |(a - b) \times (a - c)|$$

$$a - b = (0, 1, 1) - (4, 5, -3) = (-4, -4, 4)$$

$$a - c = (0, 1, 1) - (2, 5, 1) = (-2, -4, 0)$$

$$(a - b) \times (a - c) = (16, -8, 8)$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + (-8)^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \sqrt{48} = 2\sqrt{3}$$



۲۰- گزینه «۳»

با فرض  $c = a \times b$  داریم:

$$|c| = |a \times b| = |(a \times b) \cdot (a \times b)| = |a \times b|^2$$

$$a \times b = (-1, 7, 5) \Rightarrow |a \times b|^2 = (-1)^2 + 7^2 + 5^2 = 75$$

۱۳- گزینه «۳»

$$a = (2, -2, 1) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

چون  $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$  و  $\cos \alpha = -\cos \beta$  پس  $\alpha + \beta = \pi$  داریم:

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(\pi + \gamma) = -\cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

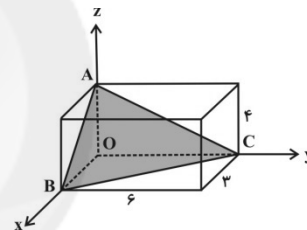
۱۴- گزینه «۴»

اگر دستگاه مختصات فضایی را بر یال‌های مکعب مستطیل منطبق کنیم، داریم:

$$A = (0, 0, 4), B = (3, 0, 0), C = (0, 6, 0)$$

پس  $\vec{BA}$  و  $\vec{BC}$  به صورت زیر هستند و با کمک آن‌ها می‌توان کسینوس زاویه  $B$

را محاسبه کرد.



$$\vec{BA} = (-3, 0, 4), \vec{BC} = (-3, 6, 0)$$

$$\cos B = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{9 + 0 + 0}{5 \times 3\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{25}$$

۱۵- گزینه «۲»

می‌دانیم بردار  $a \times b$  بر بردارهای  $a$  و  $b$  عمود است. پس:

$$b \cdot (a \times b) = a \cdot (a \times b) = 0$$

$$|a \times b|^2 - 2(a \cdot b)^2 = 0 \Rightarrow \frac{|a \times b|^2}{(a \cdot b)^2} = 2$$

$$\left( \frac{|a| |b| \sin \theta}{|a| |b| \cos \theta} \right)^2 = 2 \Rightarrow \tan^2 \theta = 2 \Rightarrow \tan \theta = \pm \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

۱۶- گزینه «۴»

بردار  $a'' - a'$  بر بردار  $a'$  عمود است بنابراین ضرب داخلی آن‌ها صفر می‌شود.



$$(6,6,2) \Rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \quad (6,4,4) \Rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \Rightarrow \text{حالت ۱۵}$$

$$(6,5,3) \Rightarrow 3! = 6 \quad (5,5,4) \Rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$$

۲۴- گزینه «۱»

اگر عدد اول P نسبت به n اول باشد، آن گاه داریم:

$$\phi(Pn) = Pn \times \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_k}\right) \left(1 - \frac{1}{P}\right)$$

که در این رابطه،  $P_1$  تا  $P_k$  عوامل اول عدد n هستند. با توجه به فرمول  $\phi(n)$  می توان نوشت:

$$\phi(Pn) = \phi(n) \times P \times \left(1 - \frac{1}{P}\right) = \phi(n) \cdot (P-1)$$

پس اگر  $P=2$  باشد، آنگاه  $\phi(2n) = \phi(n)$ .

۲۵- گزینه «۲»

اگر مجموعه اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ را A بنامیم و اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ که مضرب ۲ می باشند را  $A_1$  و مضرب ۵ را  $A_2$  و مضرب ۷ را  $A_3$  می نامیم. آنچه می خواهیم محاسبه کنیم اعدادی از A هست که نه مضرب ۲، نه مضرب ۵ و نه مضرب ۷ می باشند (زیرا تجزیه عدد ۷۰ به صورت  $2 \times 5 \times 7$  می باشد که ما می خواهیم اعدادی که نسبت به ۷۰ اولند را حساب کنیم).

یعنی بنابه اصل عدم شمول می خواهیم حاصل  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$  را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\ &\quad - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= 100 - \left( \left[ \frac{100}{2} \right] + \left[ \frac{100}{5} \right] + \left[ \frac{100}{7} \right] - \left[ \frac{100}{2 \times 5} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{100}{2 \times 7} \right] - \left[ \frac{100}{5 \times 7} \right] + \left[ \frac{100}{2 \times 5 \times 7} \right] \right) \end{aligned}$$

$$= 100 - (50 + 20 + 14 - 10 - 7 - 2 + 1) = 100 - 66 = 34$$

حال ۳ عدد یک رقمی ۱، ۳ و ۹ را که نسبت به ۷۰ اول هستند، از تعداد اعداد به دست آمده کم می کنیم. در این صورت  $34 - 3 = 31$  عدد دو رقمی وجود دارد که نسبت به ۷۰ اول هستند.

ریاضیات گسسته

۲۱- گزینه «۳»

A را مجموعه اعداد ۴ رقمی با ارقام ۰، ۵، ۶ و ۸ و  $A_1$  و  $A_2$  را مجموعه اعدادی از A در نظر می گیریم که به ترتیب رقم های ۰ و ۸ را ندارند. در این صورت داریم:

$$|A| = 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$$

$$|A_1| = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$|A_2| = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$$

$$|A_1 \cap A_2| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$|A_1 \cup A_2| = 81 + 54 - 16 = 119$$

$$|\overline{A_1 \cap A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |A| - |A_1 \cup A_2| = 192 - 119 = 73$$

۲۲- گزینه «۴»

جواب سؤال همان تعداد جواب های صحیح و نامنفی  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$  است با این شرط که یکی از  $x_i$  ها برابر ۳ باشد. پس به  $\binom{4}{1}$  طریق می توان متغیری که برابر ۳ است را به دست آورد فرض کنیم  $x_4 = 3$  پس معادله به صورت  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$  تبدیل می شود که تعداد جواب های صحیح و نامنفی آن برابر  $\binom{4}{2} = 6$  است لذا طبق اصل ضرب داریم:  $4 \times 6 = 24$

۲۳- گزینه «۴»

روش اول: باید تعداد جواب های صحیح معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 14$  با شرط  $1 \leq x_i \leq 6$  را به دست آوریم. تعداد جواب های این معادله برابر است با تعداد جواب های معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 11, 0 \leq x_i < 6 (i=1,2,3)$  نکته: تعداد جواب های معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = n, 0 \leq x_i < r$  برابر است با:

$$\binom{n+r}{r} - 3 \binom{n+r-r}{r} + 3 \binom{n+r-2r}{r} - \binom{n+r-3r}{r}$$

$$\binom{13}{2} - 3 \binom{13-6}{2} + 3 \binom{13-12}{2} - \binom{13-18}{2}$$

$$= 78 - 63 + 0 - 0 = 15$$

روش دوم: تمام حالات ممکن به صورت زیر است.



$$|B|: x+y+z=10 \xrightarrow{>5} x+y'+z=4 \Rightarrow \binom{6}{2}=15$$

$$|A \cap B|: x+y+z=10 \xrightarrow{>2, >5} x'+y'+z=-1$$

$$|\overline{A \cap B}| = 66 - 21 - 15 = 30$$

۳۰- گزینه «۴»

$\phi(96)$  تعداد اعداد طبیعی کوچک تر یا مساوی با ۹۶ را حساب می کند که نسبت

به ۹۶ اولند.

ما فقط دو رقمی ها را می خواهیم؛ پس یک رقمی ها را حذف کرده و از ۹۷ تا ۹۹

را هم در نظر می گیریم:

$$96 = 2^5 \times 3^1$$

$$\phi(96) = 96 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 96 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = 32$$

$\{1, 5, 7\}$  = یک رقمی ها که نسبت به ۹۶ اولند.

$\{97\}$  = اعداد از ۹۷ تا ۹۹ که نسبت به ۹۶ اولند.

پس باید از ۳۲ تا عدد، سه تا (یک رقمی) را کم و یکی (۹۷) را اضافه کرد:

$$32 - 3 + 1 = 30$$

### فیزیک پیش دانشگاهی

۳۱- گزینه «۱»

طبق جدول ۱-۶ کتاب درسی، جرقه الکتریکی جزء چشمه های تولید امواج

فرابنفش (UV) با طول موج در حدود ۱۰nm می باشد. علاوه بر جرقه

الکتریکی، خورشید، جسم های خیلی داغ و لامپ بخار جیوه نیز می توانند

پرتوهای فرابنفش تولید کنند.

۳۲- گزینه «۳»

در آزمایش ینگ، فاصله نوار روشن  $n$ ام از نوار روشن مرکزی از رابطه

$$x_n = \frac{n\lambda D}{a}$$

$$x_m = \frac{(m-1)\lambda D}{2a} \text{ به دست می آید.}$$

$$x_7 = x'_7 \Rightarrow \frac{7\lambda D}{a} = \frac{(2 \times 7 - 1)\lambda' D}{2a} \Rightarrow 2\lambda = \frac{3}{2}\lambda'$$

$$\lambda' = \lambda + 15 \cdot (nm) \rightarrow 2\lambda = \frac{3}{2}(\lambda + 15 \cdot 0) \Rightarrow \lambda = 45 \cdot nm$$

۲۶- گزینه «۲»

اگر جایزه ها را مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  و افراد را مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  در

نظر بگیریم هر مدل اختصاص جایزه ها به افراد تابعی است از  $A$  در  $B$  و چون

می خواهیم به هر نفر حداقل یک جایزه برسد، تعداد راه های مورد نظر برابر

تعداد توابع پوشا از  $A$  در  $B$  است.

$$3^6 = 3^4 - 3 \times 2^4 + 3 \times 1^4 = 81 - 48 + 3 = 36$$

۲۷- گزینه «۲»

$$|\overline{A \cap B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

تعداد آن ها که بر ۴ یا ۶ بخش پذیرند - تعداد کل اعداد دو رقمی =

$$= 90 - \left( \underbrace{\left( \left[ \frac{99}{4} \right] - \left[ \frac{9}{4} \right] \right)}_{\text{مضرب ۴}} + \underbrace{\left( \left[ \frac{99}{6} \right] - \left[ \frac{9}{6} \right] \right)}_{\text{مضرب ۶}} - \underbrace{\left( \left[ \frac{99}{12} \right] - \left[ \frac{9}{12} \right] \right)}_{\text{مضرب ۱۲ و ۶}} \right)$$

$$= 90 - (24 - 2 + 16 - 1 - 8) = 90 - (22 + 15 - 8) = 61$$

۲۸- گزینه «۴»

اعداد بخش پذیر بر ۵: C اعداد بخش پذیر بر ۳: B اعداد بخش پذیر بر ۲: A

$$|\overline{A \cap B \cap C}| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 100 - \left( \left[ \frac{100}{2} \right] - \left[ \frac{100}{3} \right] - \left[ \frac{100}{5} \right] + \left[ \frac{100}{6} \right] + \left[ \frac{100}{10} \right] + \left[ \frac{100}{15} \right] - \left[ \frac{100}{30} \right] \right) = 26$$

دقت کنید که تعداد اعداد بخش پذیر بر  $k$  در مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  برابر است

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

۲۹- گزینه «۳»

باید تعداد جواب های معادله  $x+y+z=10$  با شرط  $x \leq 4$  و  $y \leq 5$  را به دست

آوریم. اگر A حالاتی باشد که  $x > 4$  و B حالاتی باشد که  $y > 5$  باید تعداد

اعضای مجموعه  $A' \cap B'$  را به دست آوریم.

$$|\overline{A \cap B}| = |(A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$|S|: x+y+z=10 \rightarrow$$

$$\text{با } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ کل جواب ها } = \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$$

$$|A|: x+y+z=10 \xrightarrow{>4} x'+y+z=5 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$$



## ۳۳- گزینه ۱»

در هوا فاصله‌ی سومین نوار روشن از نوار مرکزی برابر است با:  $x_3 = 3 \frac{D\lambda}{a}$   
 اما در آب به ضریب شکست  $\frac{4}{3}$  طول موج برابر  $\lambda' = \frac{\lambda}{\frac{4}{3}} = \frac{3\lambda}{4}$  است.

بنابراین فاصله‌ی نوار چهارم روشن از نوار مرکزی در آب برابر است با:

$$x'_4 = 4 \frac{D\lambda'}{a} = \frac{4D}{a} \times \frac{3}{4} \lambda = \frac{3D\lambda}{a}$$

با تقسیم مقادیر  $x'_4$  و  $x_3$  خواهیم داشت:

$$\frac{x'_4}{x_3} = 1$$

## ۳۸- گزینه ۲»

با استفاده از رابطه‌های نوارهای روشن و تاریک، می‌توان نوشت:

$$x = x'_{\text{روشن}} + x''_{\text{تاریک}} \quad \begin{matrix} x'_{\text{روشن}} = \frac{nD\lambda}{a}, n=3 \\ x''_{\text{تاریک}} = \frac{(2m-1)D\lambda}{2a}, m=4 \end{matrix}$$

$$x = 3 \frac{D\lambda}{a} + 3/5 \frac{D\lambda}{a} \Rightarrow x = 6/5 \frac{D\lambda}{a}$$

از طرف دیگر می‌دانیم پهنای نوارها برابر  $W = \frac{D\lambda}{2a}$  است. بنابراین می‌توان

نوشت:

$$\begin{cases} W' = \frac{D\lambda'}{2a} \Rightarrow \frac{W'}{x} = \frac{D\lambda'}{2a} \cdot \frac{a}{x} = \frac{D\lambda'}{2x} \\ x = 6/5 \frac{D\lambda}{a} \Rightarrow \frac{W'}{x} = \frac{D\lambda'}{2 \cdot 6/5 \frac{D\lambda}{a}} = \frac{5}{12} \frac{D\lambda'}{D\lambda} \end{cases} \quad \begin{matrix} x=13mm, \lambda'=4800\text{\AA} \\ \lambda=6000\text{\AA} \end{matrix}$$

$$\frac{W'}{13} = \frac{4800}{12 \times 6000} \Rightarrow W' = 0.1mm$$

## ۳۹- گزینه ۲»

با توجه به شکل طول موج برابر با  $\lambda = 0.5 \mu m = 5 \times 10^{-7} m$  است. این طول موج مربوط به ناحیه نور مرئی است. دقت کنید گستره طول موج نور مرئی بین  $\lambda = 400 nm = 4 \times 10^{-7} m$  تا  $\lambda = 700 nm = 7 \times 10^{-7} m$  می‌باشد.

برای محاسبه بسامد داریم:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \begin{matrix} c=3 \times 10^8 \frac{m}{s} \\ \lambda=5 \times 10^{-7} m \end{matrix} \Rightarrow 5 \times 10^{-7} = \frac{3 \times 10^8}{f}$$

$$\Rightarrow f = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

## ۴۰- گزینه ۳»

در آزمایش ینگ، اختلاف راه نوری وسط نوار روشن  $m$ ام از دو شکاف برابر

$$n\lambda \quad \text{و} \quad (2m-1)\frac{\lambda}{2}$$

خواهد بود که در آن طول موج نور مورد آزمایش است.

$$\frac{\delta_{\text{روشن}}}{\delta_{\text{تاریک}}} = \frac{n\lambda}{(2m-1)\frac{\lambda}{2}} \Rightarrow \frac{\delta_{\text{روشن}}}{\delta_{\text{تاریک}}} = \frac{2n}{2m-1} \quad \begin{matrix} n=2, m=2 \\ \delta_{\text{روشن}}=2\mu m \end{matrix}$$

$$\frac{2}{\delta_{\text{تاریک}}} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 - 1} \Rightarrow \delta_{\text{تاریک}} = 1/5 \mu m$$

## ۳۴- گزینه ۳»

هنگامی که دو نوار معین بر روی پرده بر یک دیگر منطبق می‌شوند، فاصله هر دو نوار تا نوار روشن مرکزی یکسان است. اگر طول موج در آب را  $\lambda'$  بنامیم،

$$\text{داریم:} \quad n \Rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda f}{\lambda' f} \Rightarrow n = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{n}{n'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{3}{4}$$

$$x = x' \xrightarrow{\text{شماره نوار } n} \frac{n\lambda D}{a} = \frac{n'\lambda' D}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n'} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{3}{n'} = \frac{3}{4} \Rightarrow n' = 4$$

## ۳۵- گزینه ۴»

چشمه تولید پرتو ایکس (X)، لامپ پرتو X است، در صورتی که جسم‌های داغ چشمه تولید امواج فرابنفش، نور مرئی و فروسرخ می‌باشد.

## ۳۶- گزینه ۲»

در آزمایش ینگ، اگر عرض هر نوار تداخلی برابر با  $W$  باشد، فاصله  $n$  نوار تاریک (یا روشن) متوالی از یکدیگر از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\Delta x = (n-1) \times 2W \xrightarrow{\Delta x=4mm, n=6} 4 = (6-1) \times 2W \Rightarrow W = 0.4mm$$

از سوی دیگر، می‌دانیم فاصله نوار روشن  $n$ ام از نوار روشن مرکزی برابر با  $2nW$  و فاصله نوار تاریک  $n'$ ام از نوار روشن مرکزی برابر با  $(2n'-1)W$  است. در نتیجه با توجه به این که در این سؤال نوارهای تاریک و روشن در دو طرف نوار روشن مرکزی قرار دارند، داریم:

$$\Delta x = 2nW + (2n'-1)W \xrightarrow{n=4, n'=3, W=0.4mm} \Delta x = 2 \times 4 \times 0.4 + (2 \times 3 - 1) \times 0.4 \Rightarrow \Delta x = 5/2 mm$$

## ۳۷- گزینه ۴»

برای نوارهای روشن و تاریک در هر آزمایش ینگ داریم:

$$\lambda_1 = \frac{ax_1}{nD} \Rightarrow x_1 = \frac{n\lambda_1 D}{a}$$

روشن:

$$\lambda_2 = \frac{2ax_2}{(2m-1)D} \Rightarrow x_2 = (2m-1) \frac{\lambda_2 D}{2a}$$

تاریک:



## شیمی پیش دانشگاهی

## ۴۱- گزینه «۱»

افزودن آهک به خاک باعث کاهش میزان اسیدی بودن و افزایش pH خاک می گردد.

## ۴۲- گزینه «۴»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»:  $\text{HCl(aq)}$  هیدروکلریک اسید نامیده می شود نه  $\text{HCl(g)}$ .  
گزینه «۲»:  $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$  در آب انحلال پذیر نیست، بنابراین در نظریه آرنیوس بررسی نمی شود.  
گزینه «۳»: از واکنش گاز آمونیاک و هیدروژن کلرید، جامد سفید رنگ  $\text{NH}_4\text{Cl(s)}$  بوجود می آید.

گزینه «۴»:  $\text{K}_2\text{O}$  در اثر انحلال در آب یون  $\text{OH}^-(\text{aq})$  به وجود می آورد، بنابراین باز آرنیوس است.

## ۴۳- گزینه «۱»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: هر چه یک اسید قوی تر باشد، باز مزدوج حاصل از یونش آن پایدارتر است، در واقع باز مزدوج آن تمایل کمتری برای گرفتن پروتون دارد.

$\text{HOCl} > \text{HOBr}$ : مقایسه قدرت اسیدی

$\text{ClO}^- > \text{BrO}^-$ : مقایسه پایداری باز مزدوج  $\Rightarrow$

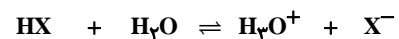
گزینه «۲»: یون اکسید در آب به سرعت به یون‌های هیدروکسید تبدیل می شود.

گزینه «۳»: در اسید چند پروتون دار فسفریک اسید، از دست دادن هر پروتون طی یک مرحله تعادلی انجام می شود.

گزینه «۴»: در دمای اتاق ثابت یونش آب برابر  $10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$  است.

## ۴۴- گزینه «۳»

این اسید مطابق واکنش زیر یونش می یابد.



غلظت اولیه	۰/۰۱	-	۰	۰
تغییر غلظت	$-\frac{0/1}{100} \times 0/01$		$\frac{0/1}{100} \times 0/01$	$\frac{0/1}{100} \times 0/01$
غلظت تعادلی	$0/01 - 10^{-5}$		$10^{-5}$	$10^{-5}$

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]} \Rightarrow K_a = \frac{10^{-5} \times 10^{-5}}{(10^{-2} - 10^{-5})} \approx \frac{10^{-10}}{10^{-2}} = 10^{-8}$$

در محلول دوم غلظت  $\text{H}_3\text{O}^+$  برابر غلظت  $\text{X}^-$  خواهد بود.

$$\text{pH} = 5/7 \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-5/7} = 2 \times 10^{-6} \text{ M}$$

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]} \Rightarrow 10^{-8} = \frac{2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{[\text{HX}]}$$

$$\Rightarrow [\text{HX}] = 4 \times 10^{-4} \text{ M}$$

## ۴۵- گزینه «۲»

گزینه «۱»: در همه آمینواسیدهای طبیعی گروه آمین روی همان کربنی قرار دارد که گروه کربوکسیل قرار می گیرد.

گزینه «۲»: آمینواسیدها به دلیل داشتن توام گروه اسید و آمین می توانند تبادل پروتون در داخل خود مولکول داشته باشند.

گزینه «۳»: ساده ترین آمینو اسید دارای فرمول مولکولی  $\text{C}_2\text{H}_5\text{NO}_2$  می باشد.

گزینه «۴»: گلی سین در اتانول نامحلول است.

## ۴۶- گزینه «۴»

همه موارد نادرست هستند. دلیل نادرستی موارد:

(آ) نمک  $\text{NH}_4\text{Cl}$  یک نمک اسیدی است و محیط را پس از آبکافت اسیدی می کند.

(ب) نمک  $\text{KNO}_3$  یک نمک خنثی است، زیرا در آن نه کاتیون و نه آنیون آبکافت نمی شوند.

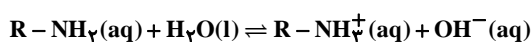
(پ) اکسید نافلزها اسید آرنیوس محسوب می شوند.

(ت) متیل اتانوات از واکنش اتانواتیک اسید و متانول ایجاد می شود.

## ۴۷- گزینه «۴»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: آمین‌ها در ساختار خود فاقد عامل هیدروکسید ( $\text{OH}^-$ ) هستند، اما با حل شدن در آب، یون هیدروکسید تولید می کنند و غلظت این یون را افزایش می دهند:

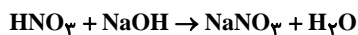


گزینه «۲»: آمین‌ها در آب، با جذب  $\text{H}^+$  به یون آلکیل آمونیوم تبدیل می شوند.

گزینه «۳»: پایداری کاتیون حاصل از یونش آمین‌ها با قدرت بازی آمین‌ها، رابطه مستقیم دارد:



مقدار مول اولیه  $\text{HNO}_3$  را دارد، بنابراین  $10\text{ mL}$  از این محلول  $0.0004$  مول  $\text{HNO}_3$  دارد. این مقدار  $\text{HNO}_3$  با  $\text{NaOH}$  به طور کامل واکنش داده و مقداری  $\text{NaOH}$  اضافه آمده است، زیرا  $\text{pH}$  محلول به  $13$  رسیده است.



چون ضریب  $\text{HNO}_3$  و  $\text{NaOH}$  برابر است، بنابراین برای خنثی کردن  $\text{HNO}_3$  به  $0.0004$  مول  $\text{NaOH}$  نیاز است، حال کافی است تعیین کنیم برای ایجاد محلول با  $\text{pH} = 13$  به چند مول  $\text{NaOH}$  نیاز است.

$$\text{pH} = 13 \Rightarrow \text{pOH} = 1 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{NaOH}] = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{molNaOH} = 0.1 \times 0.1 = 0.01 \text{ mol}$$

پس مجموعاً به  $0.01 + 0.0004$  مول  $\text{NaOH}$  نیاز است.

$$\text{NaOH} = 0.014 \text{ mol} \times 40 \text{ g.mol}^{-1} = 0.56 \text{ gNaOH}$$

#### ۵۱- گزینه «۱»

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۲»: واکنش اکسایش متانول توسط اکسیژن در چنین شرایطی انجام می‌شود نه اکسایش متانال که واکنش تشکیل آینه نقره‌ای است.

گزینه «۳»: فرمول عمومی آلدهیدها و کتون‌ها یکسان است.

گزینه «۴»: باید تعداد الکترون‌های نسبت داده شده را از تعداد الکترون‌های

ظرفیتی اتم یاد شده کم کنیم (نه برعکس).

#### ۵۲- گزینه «۴»

عدد اکسایش منگنز کاهش یافته و اکسند است و عدد اکسایش کلر افزایش یافته و کاهش یافته است.

#### ۵۳- گزینه «۱»

تنها مورد ب صحیح است. بررسی عبارت‌های نادرست:

آ - یک سلول الکتروشیمیایی است که شامل یک الکتروود استاندارد هیدروژن و یک نیم‌سلول استاندارد روی می‌باشد.

پ - در  $\text{SHE}$  محلول اسیدی با  $\text{pH} = 0$  به کار می‌رود.

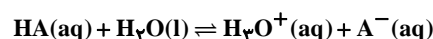
ت - در این سلول، با انجام نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، جرم کاتد ثابت مانده و تنها جرم آند کاهش می‌یابد.

اتیل آمین > دی‌متیل آمین: مقایسه قدرت بازی

اتیل آمونیوم > دی‌متیل آمونیوم: مقایسه پایداری کاتیون

گزینه «۴»: در دما و غلظت یکسان، قدرت بازی متیل آمین بیشتر از آمونیاک است، بنابراین  $\text{pH}$  محلول آمونیاک کمتر از محلول متیل‌آمین است.

#### ۴۸- گزینه «۳»



با افزودن اسید به بافر اسیدی طبق اصل لوشاتلیه تعادل مربوط به اسید ضعیف در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود (زیرا غلظت یون  $\text{H}_3\text{O}^+$  موجود در تعادل افزایش می‌یابد). از طرفی، از آنجایی که ثابت یونش تابعی از دماست، مقدار آن ثابت می‌ماند.

#### ۴۹- گزینه «۲»

عبارت‌های «آ»، «ب» و «ت» درست هستند.

عبارت «آ»: اگر نفس خود را برای مدت کوتاهی در سینه نگه دارید،  $\text{pH}$  خون

شما اندکی کاهش می‌یابد، یعنی  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  خون شما اندکی افزایش می‌یابد.

عبارت «ب»: گل آزالیا در خاک‌های اسیدی ( $5/5 - 4/5$   $\text{pH}$ ) بهترین رشد را دارد و  $\text{pH}$  شیر تقریباً  $6/5$  است.

عبارت «پ»: صابون‌های جامد را با فرمول همگانی  $\text{RCOONa}$  نمایش می‌دهند که در آن  $\text{R}$ ،  $14$  تا  $18$  کربن دارد، پس صابون‌های جامد  $15$  تا  $19$  کربن (عنصر با عدد اتمی  $6$ ) دارند.

عبارت «ت»: گلی‌سین  $2$  اتم کربن، پروپانوئیک‌اسید  $3$  اتم کربن و بوتیل‌آمین  $4$  اتم کربن در ساختار خود دارد که در بین آن‌ها، گلی‌سین با نقطه ذوب  $232^\circ\text{C}$ ، بیشترین نقطه ذوب را به خود اختصاص داده است.

#### ۵۰- گزینه «۴»

می‌دانیم  $2$  میلی‌لیتر از این محلول  $0.002$  مول  $\text{HNO}_3$  دارد.

$$? \text{ mol} = 2 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{1 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0.002 \text{ mol}$$

زمانی که به این محلول آب مقطر اضافه می‌کنیم و به حجم  $50 \text{ mL}$  می‌رسانیم تعداد مول‌های  $\text{HNO}_3$  تغییر نمی‌کند.  $10$  میلی‌لیتر از محلول جدید،  $\frac{1}{5}$