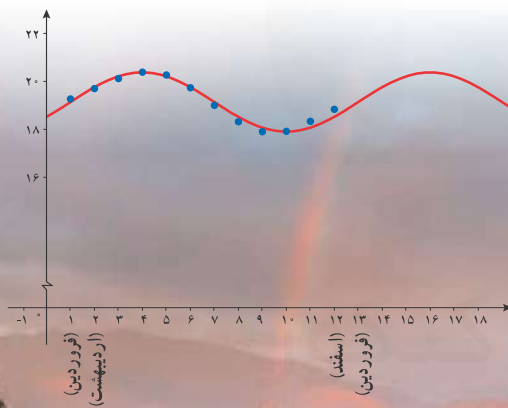


## تابع

# ۱

## فصل

- ۱ تبدیل نمودار توابع
- ۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم



پل طبیعت (تهران)

بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل سازی می شوند. تبدیل نمودار تابع  $y = \sin x$  به صورت  $y = 1/24 \sin(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{6}) + 19/14$ ، مدل ریاضی زمان های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

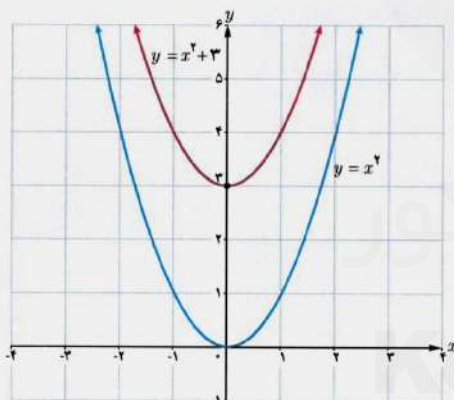
## تبدیل نمودار توابع

درس

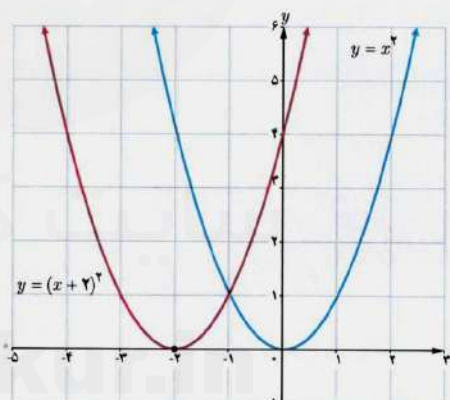
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

## انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع  $y = (x+2)^2$  و  $y = x^2 + 3$  را به کمک نمودار تابع  $y = x^2$  رسم کنید.



(ب)



(الف)

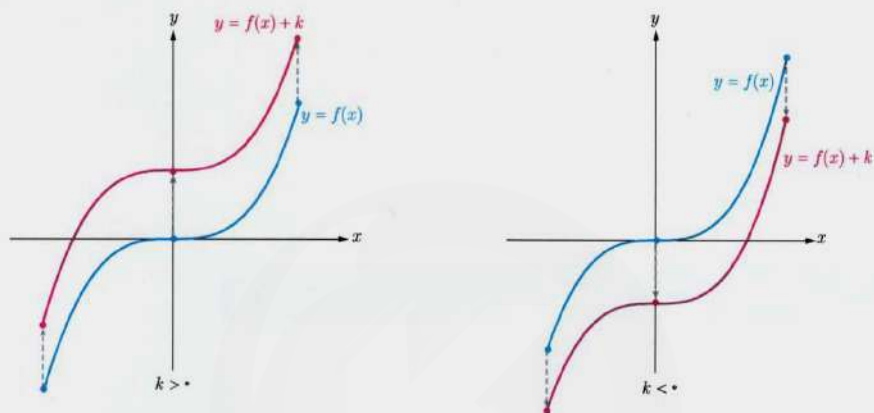
در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر  $(x, y)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x) + k$  تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x) = f(x) + k = y + k$$

بنابراین نقطه  $(x, y+k)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x, y)$  از نمودار  $f$  است.

## فصل اول: تابع ۳

برای رسم نمودار  $y = f(x) + k$ ، اگر  $k > 0$  باشد، کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای  $k < 0$  این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

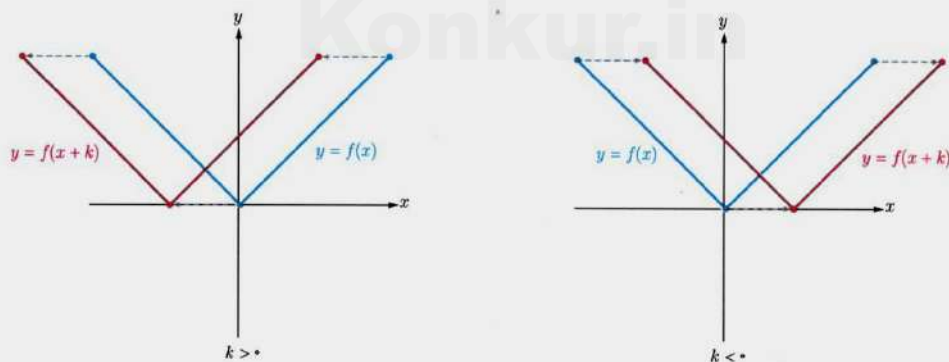


به روش مشابه، اگر یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $h$  به صورت  $h(x) = f(x+k)$  تعریف شده باشد، آنگاه:

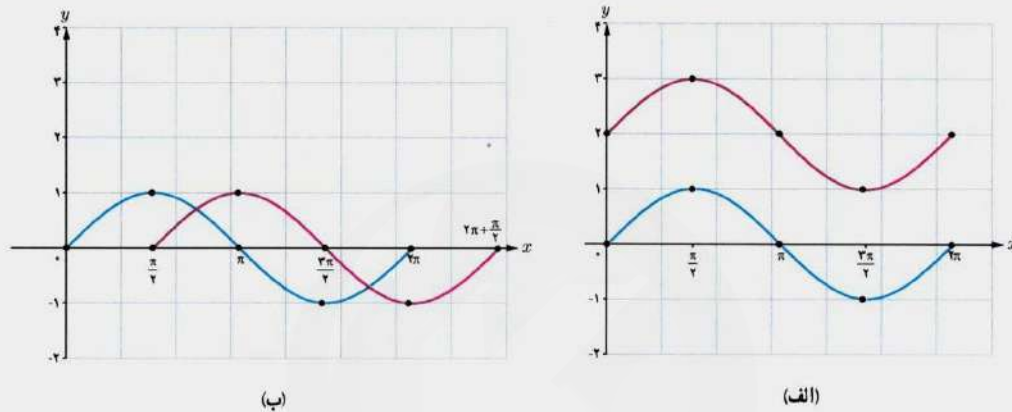
$$h(x, -k) = f(x, -k+k) = f(x, 0) = y.$$

بنابراین نقطه  $(x, -k)$  از نمودار تابع  $h$  متناظر با نقطه  $(x, y)$  از نمودار تابع  $f$  است.

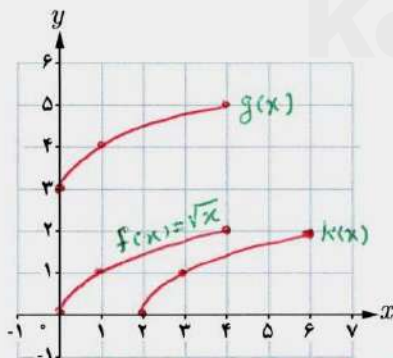
برای رسم نمودار  $y = f(x+k)$ ، اگر  $k > 0$  باشد، کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای  $k < 0$  این انتقال به اندازه  $|k|$  واحد به سمت راست انجام می‌شود.



❖ **مثال:** نمودار تابع  $y = \sin x$  با دامنه  $[0, 2\pi]$  رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع  $f(x) = \sin x + 2$  و  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$  را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع  $y = \sin x$  را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا  $f(x)$  رسم شود (شکل الف) و اگر آن را  $\frac{\pi}{4}$  واحد به راست انتقال دهیم،  $g(x)$  رسم می‌شود. (شکل ب)



الف) نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را با دامنه  $[0, 4]$  رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.  
 ب) نمودار توابع  $k(x) = f(x-2)$  و  $g(x) = f(x)+3$  را به کمک انتقال رسم کنید.  
 ج) دامنه و برد توابع  $k$  و  $g$  را محاسبه و با دامنه و برد تابع  $f$  مقایسه کنید.



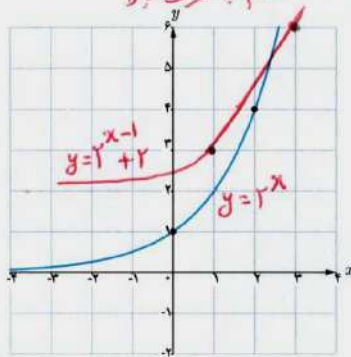
	$f(x) = \sqrt{x}$	$k(x) = f(x-2)$	$g(x) = f(x)+3$
دامنه	$[0, 4]$	$[2, 4]$	$[0, 4]$
برد	$[0, 2]$	$[0, 2]$	$[3, 5]$

ج) بازه دامنه تابع  $k$  از انتقال بازه دامنه  $f$  در راستای افقی به اندازه ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید و برد تابع  $k$  همان برد تابع  $f$  می‌باشد.  
 بازه دامنه  $g$  همان بازه دامنه تابع  $f$  است و بازه برد تابع  $g$  از انتقال ۳ واحد برد  $f$  در راستای قائم به سمت بالا به دست می‌آید.

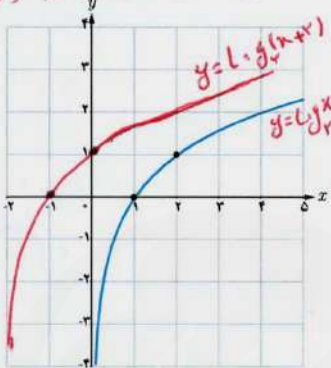
فصل اول: تابع ۵

۲ در زیر، نمودار توابع  $y = \cos x$  و  $y = \log_2 x$ ،  $y = 2^x$  و  $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$  رسم شده اند. نمودار توابع  $y = 2^{x-1} + 2$ ،  $y = \log_2(x+2)$  و  $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$  را به کمک انتقال رسم کنید.

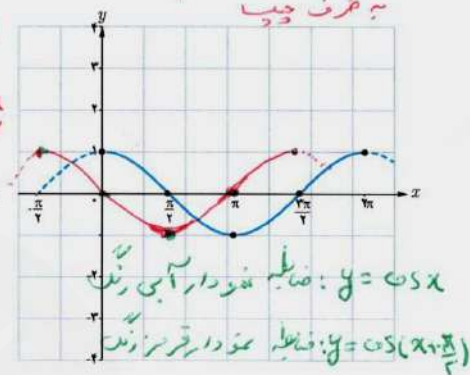
رسم: با انتقال یک واحد در راستای افقی به طرف راست و دو واحد در راستای عمودی به طرف بالا



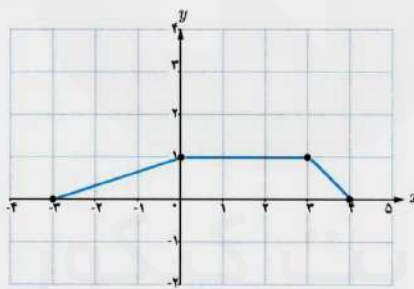
رسم: با انتقال ۲ واحد در راستای افقی به طرف چپ



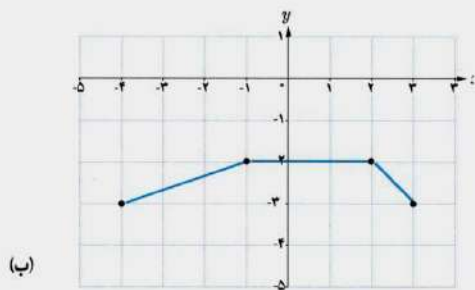
رسم: با انتقال  $\frac{\pi}{2}$  در راستای افقی به طرف چپ



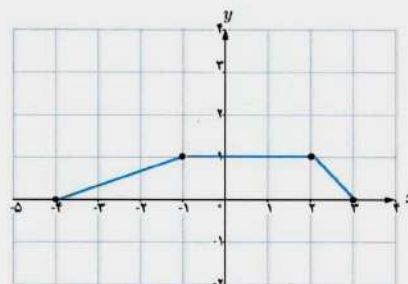
❖ مثال: نمودار تابع  $f$  به صورت زیر داده شده است. با انتقال های افقی و عمودی، نمودار تابع  $y = f(x+1) - 3$  را رسم می کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ انتقال می دهیم تا نمودار تابع  $y = f(x+1)$  رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می کنیم تا نمودار تابع  $y = f(x+1) - 3$  رسم شود (شکل ب).



(ب)



(الف)

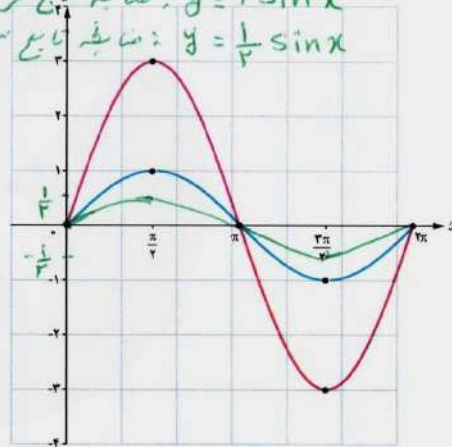
## انبساط و انقباض عمودی

### فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع  $y = \sin x$  و  $y = 3 \sin x$  را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع  $y = \frac{1}{3} \sin x$  را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

$y = \sin x$  : ضرایب تابع آبی رنگ  
 $y = 3 \sin x$  : ضرایب تابع قرمز رنگ  
 $y = \frac{1}{3} \sin x$  : ضرایب تابع سبز رنگ

$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \sin x$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$
$y = 3 \sin x$	$0$	$3$	$0$	$-3$	$0$
$y = \frac{1}{3} \sin x$	$0$	$\frac{1}{3}$	$0$	$-\frac{1}{3}$	$0$



۲ با مقایسه نمودارهای بالا، نمودارهای توابع  $y = \frac{1}{3} \sin x$  و  $y = 3 \sin x$  چه تفاوتی با نمودار تابع  $y = \sin x$  دارند؟  
 نمودار تابع  $y = 3 \sin x$  نسبت به نمودار تابع  $y = \sin x$  ، انبساط عمودی با ضریب ۳ داشته است.  
 نمودار تابع  $y = \frac{1}{3} \sin x$  نسبت به نمودار تابع  $y = \sin x$  ، انقباض عمودی با ضریب  $\frac{1}{3}$  داشته است.

۳ دامنه و برد توابع  $y = 3 \sin x$  و  $y = \frac{1}{3} \sin x$  چه تفاوتی با دامنه و برد تابع  $y = \sin x$  دارند؟  
 دامنه تابع  $y = \sin x$  همان دامنه تابع  $y = 3 \sin x$  است. ولی برد تابع  $y = 3 \sin x$  نسبت به برد تابع  $y = \sin x$  انبساط عمودی با ضریب ۳ داشته است به این صورت در حالت کلی اگر  $(x, y)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = kf(x)$  تعریف شده باشد، آنگاه:  $y = \sin x$  ، برد آن  $[-1, 1]$  می‌باشد و برد تابع  $y = 3 \sin x$  ،  $[-3, 3]$  می‌باشد.

$$g(x) = kf(x) = ky.$$

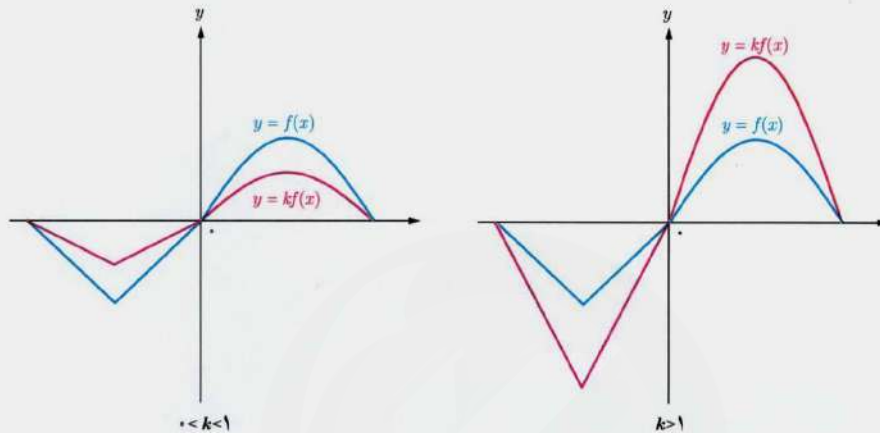
بنابراین  $(x, ky)$  یک نقطه از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x, y)$  از نمودار تابع  $f$  است.

ارائه جدول ۳: دامنه تابع  $y = \frac{1}{3} \sin x$  همان دامنه تابع  $y = \sin x$  است ولی

برد تابع  $y = \frac{1}{3} \sin x$  نسبت به برد تابع  $y = \sin x$  انقباض عمودی با ضریب  $\frac{1}{3}$  داشته است به این صورت که برد تابع  $y = \sin x$  ،  $[-1, 1]$  می‌باشد و برد تابع  $y = \frac{1}{3} \sin x$  ،  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  می‌باشد.

## فصل اول: تابع

برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $k$  ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع  $y = kf(x)$  برای دو حالت  $k > 1$  و  $0 < k < 1$  رسم شده است.

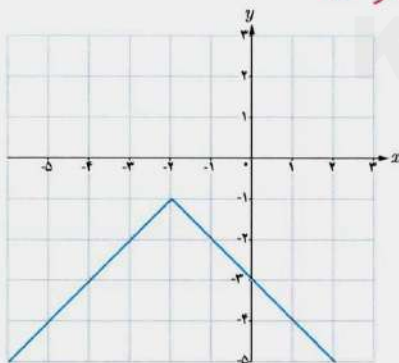


اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود و اگر  $0 < k < 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار  $y = f(x)$  به دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط تابع  $y = -f(x)$  به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = -f(x)$  قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $x$  است.

## کاردکلاس

## \* حل این کاردکلاس در صفحه بعد \*



۱ اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد تابع  $y = kf(x)$  را برای  $k > 0$  و  $k < 0$  تعیین کنید.

۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع  $y = x^2$  رسم کنید.

الف)  $y = -x^2$

ب)  $y = 2x^2 - 1$

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = |x|$  به دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حل کار در کلاس صفحه ۱۷ :

حل کار در کلاس ۱ :

حالت  $k > 0$  :

دامنه تابع  $y = kf(x)$  (برای  $k > 0$ ) همان دامنه تابع  $y = f(x)$  یعنی  $[a, b]$  می

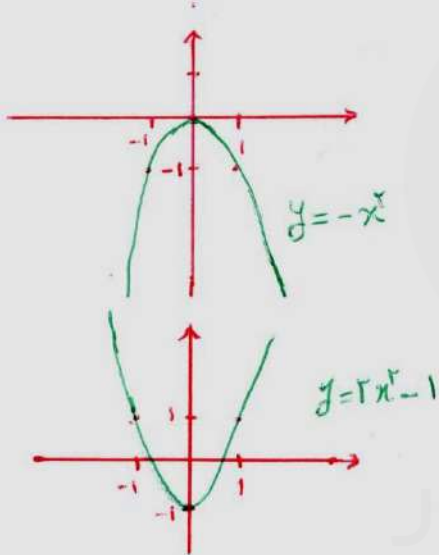
باشد و برد تابع  $y = kf(x)$  (برای  $k > 0$ ) برابر  $[kc, kd]$  می باشد.

حالت  $k < 0$  :

دامنه تابع  $y = kf(x)$  (برای  $k < 0$ ) همان دامنه تابع  $y = f(x)$  یعنی  $[a, b]$  می

باشد و برد تابع  $y = kf(x)$  (برای  $k < 0$ ) برابر  $[k \cdot d, k \cdot c]$  می باشد.

حل کار در کلاس ۲ :



الف) برای رسم نمودار تابع  $y = -x^2$ ، کافی است نمودار  $y = x^2$  را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کنیم.

ب) برای رسم نمودار تابع  $y = 2x^2 - 1$ ، ابتدا نمودار

تابع  $y = x^2$  را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کنیم و

خواهد داشت پس نمودار حاصل  $\perp$  واحد در

دامنه‌ای قائم به طرف پایین منتقل می‌شود.

ب)  $y = -|x+2| - 1$

توضیح قسمت ب) در نمودار تابع رسم شده، ابتدا نمودار تابع  $y = |x|$  دو واحد در

راستی افقی به طرف چپ منتقل می‌شود که ضابطه آن  $y = |x+2|$  تبدیل می‌شود

سپس نسبت به محور  $x$ ها قرینه شده است که ضابطه آن تبدیل به  $y = -|x+2|$

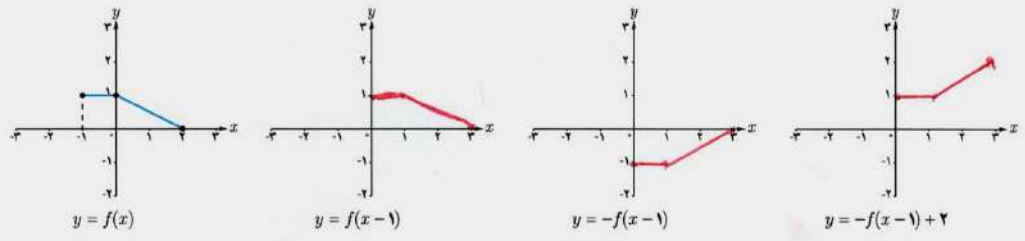
می‌شود و در آخرین واحد در راستای قائم به طرف پایین منتقل می‌شود که

ضابطه آن را به  $y = -|x+2| - 1$  تبدیل می‌کند.

۳ پاسخ کار در کلاس ۲ در دستگاه‌های مختصات موجود در سؤال داده شده است.



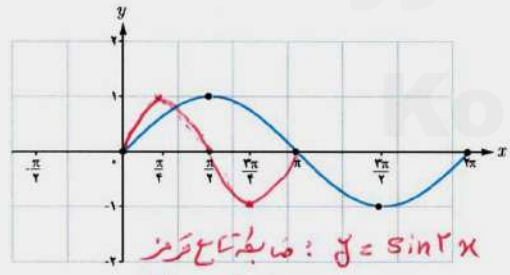
۲ نمودار تابع  $y = f(x)$  در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع  $y = -f(x-1) + 2$  را رسم کنید.



انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع  $y = \sin x$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  رسم شده است. با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع  $y = \sin 2x$  مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله  $[0, \pi]$  رسم کنید.



$x$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$y = \sin 2x$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$

۲ با مقایسه نمودارهای توابع  $y = \sin x$  و  $y = \sin 2x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

\* نمودار تابع  $y = \sin 2x$  نسبت به نمودار تابع  $y = \sin x$  انقباض افقی با ضریب ۲ دارد  
 \* دوره تناوب تابع  $y = \sin x$   $T = 2\pi$  می‌باشد و دوره تناوب تابع  $y = \sin 2x$   $T = \pi$  می‌باشد.

## فصل اول: تابع ۹

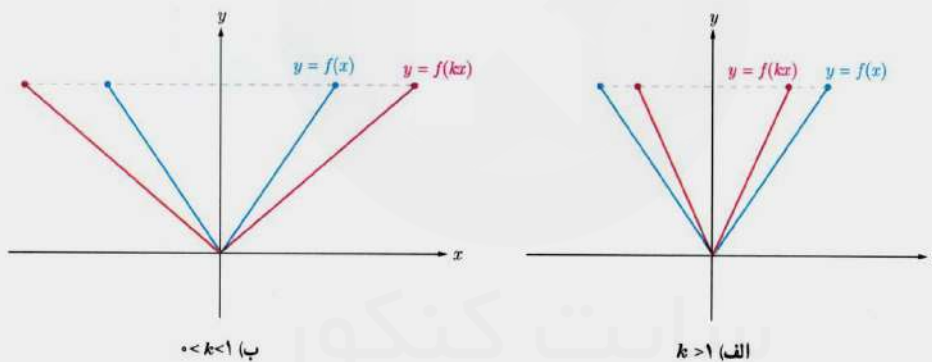
در حالت کلی اگر  $(x, y)$  یک نقطه دلخواه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(kx)$  تعریف شده باشد،

$$g\left(\frac{x_0}{k}\right) = f\left(k \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y. \quad \text{آنگاه:}$$

بنابراین نقطه  $\left(\frac{x_0}{k}, y\right)$  یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه  $(x_0, y)$  از نمودار تابع  $f$  است.

برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کنیم.

در شکل های زیر، نمودار تابع  $y = f(kx)$  برای دو حالت  $k > 1$  و  $0 < k < 1$  رسم شده است.



اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = f(kx)$  از انقباض افقی نمودار  $y = f(x)$  در راستای محور  $x$  ها به دست می آید و اگر  $0 < k < 1$  باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.

اگر طول نقاط تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط تابع  $y = f(-x)$  به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = f(-x)$  قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $y$  است.

**تهیه کننده:**

**گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان**

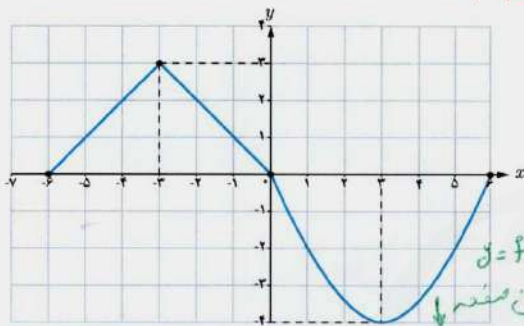
حل ۱:  $y = f(kx)$  دامنه تابع  $y = f(x)$  (برای  $k > 0$ ) برابر  $[\frac{1}{k}a, \frac{1}{k}b]$  می باشد دردتابع  $y = f(kx)$   $k < 0$  برای  $k < 0$  : دامنه تابع  $y = f(kx)$  (برای  $k < 0$ ) برابر  $[\frac{1}{k}b, \frac{1}{k}a]$  می باشد

(برای  $k < 0$ ) همان بردتابع  $y = f(x)$  یعنی  $[c, d]$  می باشد.

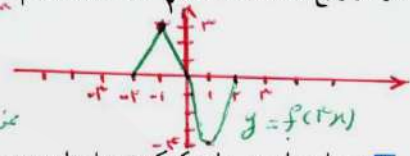
۱۰:  $y = f(kx)$  دامنه تابع  $y = f(x)$  (برای  $k < 0$ ) برابر  $[\frac{1}{k}b, \frac{1}{k}a]$  می باشد

بردتتابع  $y = f(kx)$  (برای  $k < 0$ ) همان بردتابع  $y = f(x)$  یعنی  $[c, d]$  می باشد. **کاردکلاس**

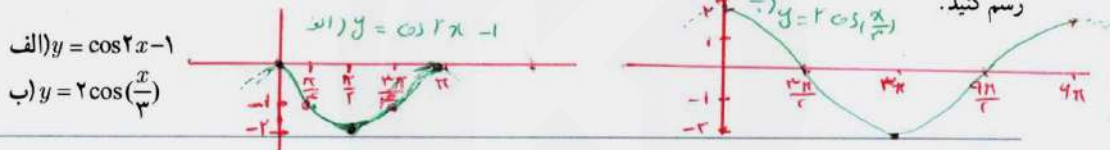
۱ اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب بازه های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد تابع  $y = f(kx)$  را برای  $k > 0$  و  $k < 0$  تعیین کنید. **حل این کاردکلاس در بالای صفحه**



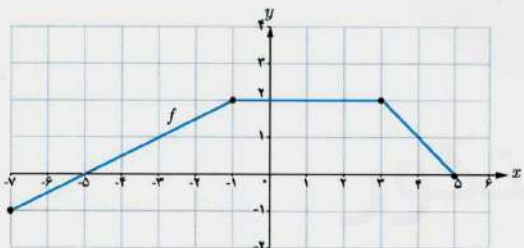
۲ اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار توابع  $y = f(3x)$  و  $y = f(-\frac{x}{2})$  را رسم کنید.



۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع  $y = \cos(x)$  یا فن مستقیم رسم کنید.

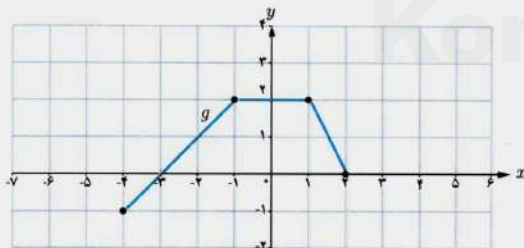


مثال: اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $g(x) = f(2x+1)$  را به کمک آن رسم می کنیم.



اگر  $A = (x, y)$  یک نقطه از نمودار تابع  $f$  باشد، آنگاه نقطه متناظر آن روی نمودار تابع  $g = f(2x+1)$  است، زیرا:

$$g\left(\frac{x-1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{x-1}{2}\right)+1\right) = f(x-1+1) = f(x) = y.$$

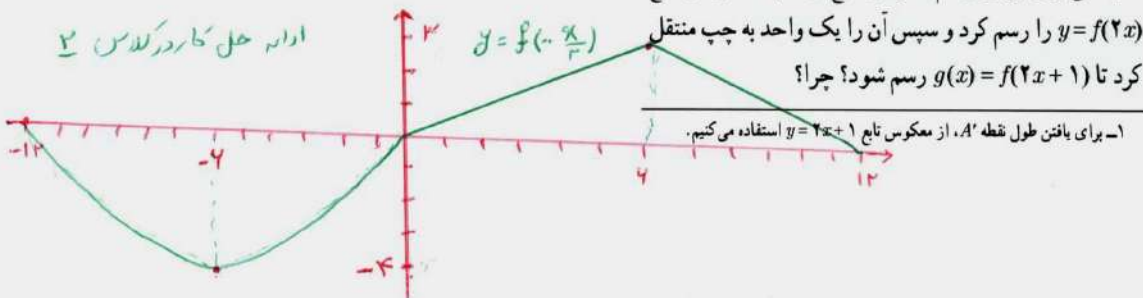


بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار  $f$  را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می کنیم تا نقاط متناظر از  $g$  به دست آیند.

با توجه به اینکه  $\frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ ، آیا می توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع  $g$  پیشنهاد کنید؟

آیا می توان برای رسم نمودار تابع  $g$ ، ابتدا نمودار تابع  $y = f(2x)$  را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا  $g(x) = f(2x+1)$  رسم شود؟ چرا؟

ادامه حل کاردکلاس ۲



۱- برای یافتن طول نقطه  $A'$ ، از معکوس تابع  $y = 2x+1$  استفاده می کنیم.

هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع  $y = \sqrt{x}$  هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف)  $y = \sqrt{2+x} \rightarrow a$

ب)  $y = 2 + \sqrt{x} \rightarrow d$

پ)  $y = -2\sqrt{x} \rightarrow e$

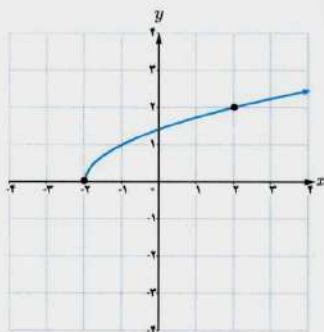
ت)  $y = \sqrt{\frac{x}{2}} \rightarrow c$

ث)  $y = 2 + \sqrt{x-2} \rightarrow b$

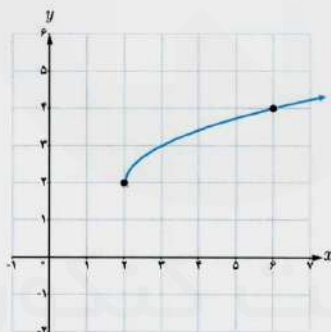
ج)  $y = \sqrt{-2x} \rightarrow f$

تهیه کننده:

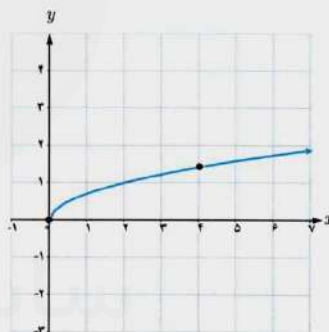
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



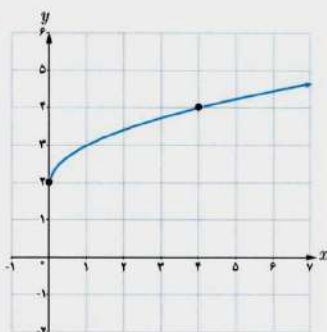
(a)



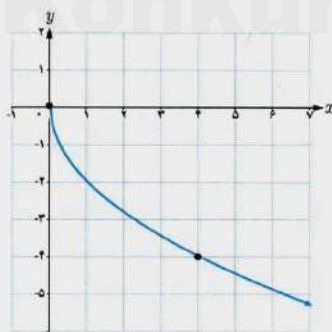
(b)



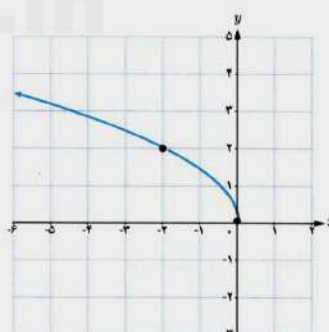
(c)



(d)



(e)



(f)

■ نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

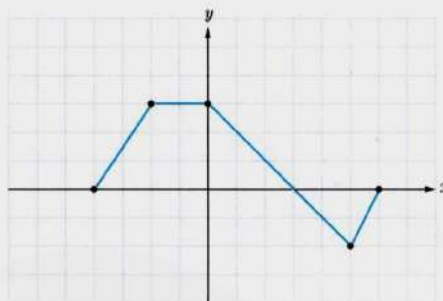
الف)  $y = f(-x)$

ب)  $y = 2f(x-1)$

پ)  $y = -f(x) + 2$

ت)  $y = f(2x-1)$

ث)  $y = f(3-x)$

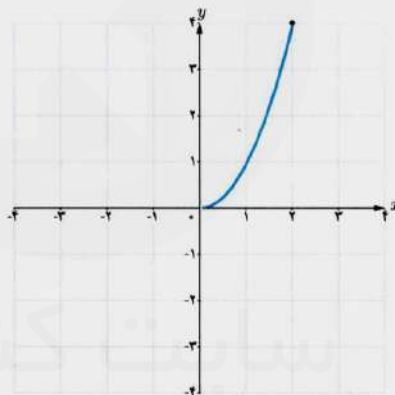


■ نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار  $f$  مقایسه کنید.

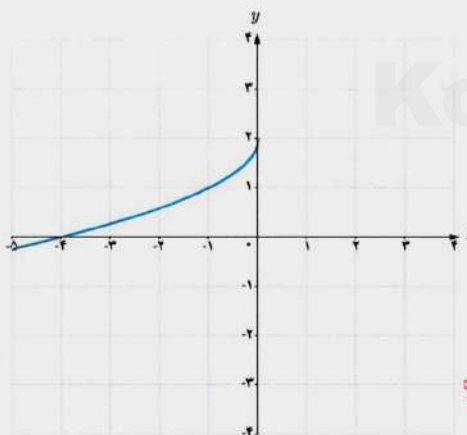
الف)  $y = f(-x)$

ب)  $y = -f(x)$

پ)  $y = -f(-x)$



■ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌بایی و انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.

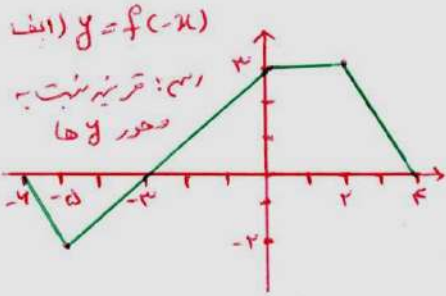


نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  هم نسبت به محور  $y$  ها قرینه شده است  
و هم نسبت به محور  $x$  ها قرینه شده است  
و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده  
است بنابراین ضابطه این تابع به صورت زیر می باشد:

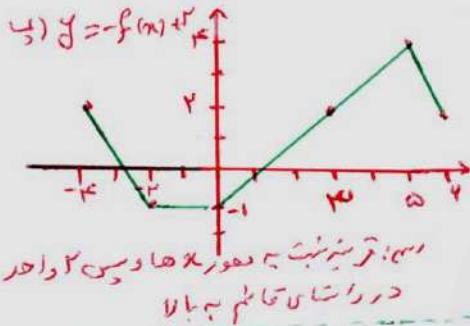
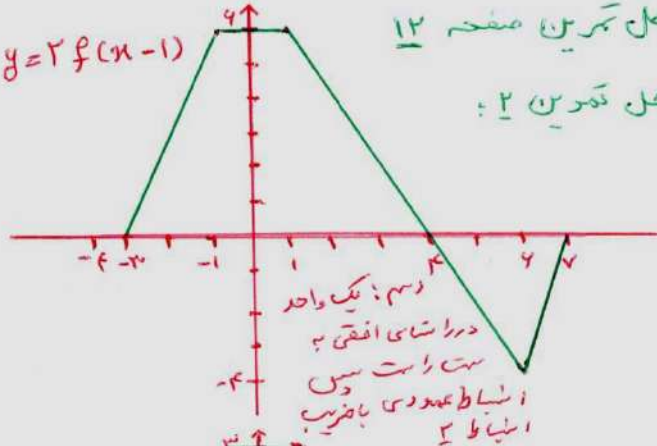
$$y = -\sqrt{-x} + 2$$

حل تمرین صفحه ۱۲

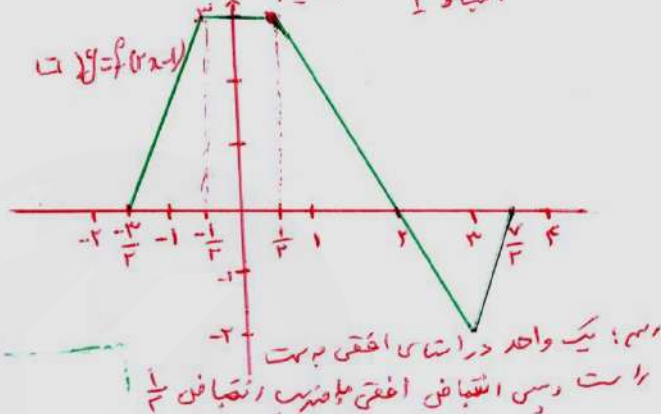
حل تمرین ۲:



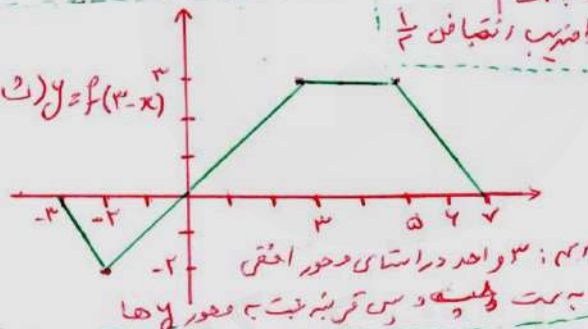
ب)  $y = 2f(x-1)$



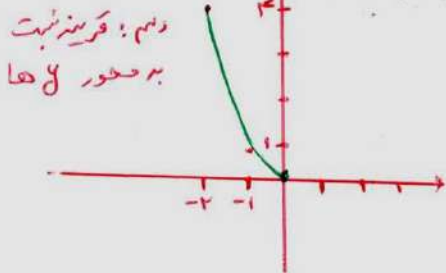
د)  $y = f(2x)$



ه)  $y = f(3-x)$

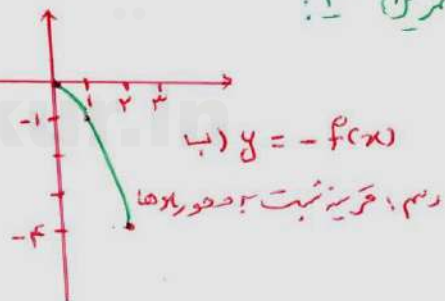


و)  $y = f(-x)$



حل تمرین ۳:

ب)  $y = -f(x)$



ج)  $y = -f(-x)$

رسم: هم نسبت به محور  $x$  ها قرینه پس از هم نسبت به محور  $y$  ها قرینه می کنیم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲

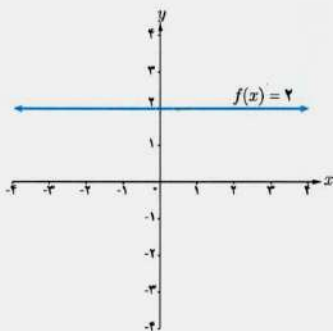
درس

## تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

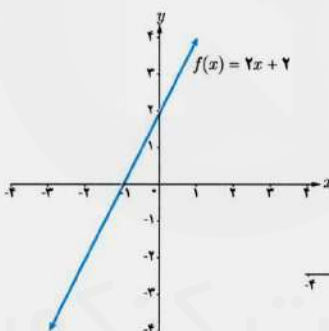
فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  اعداد حقیقی باشند که  $a_n \neq 0$ . تابع  $f(x)$  که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چند جمله‌ای از درجه  $n$  نامیده می‌شود.<sup>۱</sup>

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

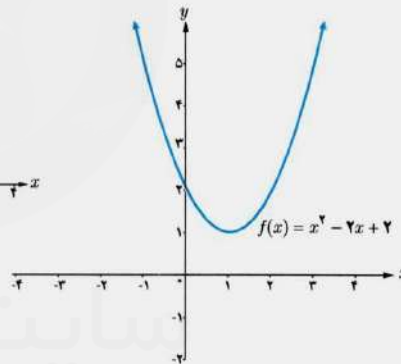
تابع ثابت  $f(x) = c$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی  $f(x) = mx + b$  که  $m \neq 0$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله  $f(x) = ax^2 + bx + c$  یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

کارد در کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

درجه ۱:  $f(x) = 2x - 3$  ، درجه ۳:  $h(x) = x^3 + x - 4$  ، درجه ۴:  $n(x) = 2x - x^4$

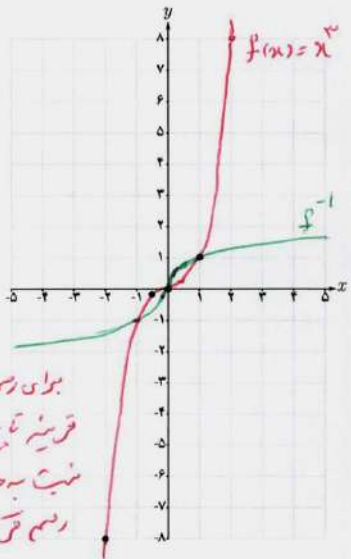
درجه ۲:  $g(x) = (x-1)^2 + 3$  ، درجه صفر:  $m(x) = 5$  ، درجه ۵:  $p(x) = x^5(1-x)^2$

۱- برای  $f(x) = 0$ ، درجه تعریف نمی‌شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت



x	y = x <sup>3</sup>
-۲	(-۲) <sup>۳</sup> = -۸
-۱	(-۱) <sup>۳</sup> = -۱
-۱/۲	(-۱/۲) <sup>۳</sup> = -۱/۸
۰	۰
۱/۲	(۱/۲) <sup>۳</sup> = ۱/۸
۱	۱
۲	۲ <sup>۳</sup> = ۸

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع  $f(x) = x^3$  است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع  $f(x) = x^3$  را رسم کنید.

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع  $f(x) = x^3$ ، نشان دهید که این تابع وارون پذیر است.

این تابع یک تابع یک به یک است چون هر خط عمودی محور y حداکثر یک بار آن را در یک نقطه قطع می‌کند پس وارون پذیر است. نمودار آن را در یک تابع  $f^{-1}$  را رسم کنید و ضابطه  $f^{-1}$  را تعیین کنید.

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$   
 $\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

کاردر کلاسی

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع  $y = x^3$  رسم کنید.

الف)  $y = (x+1)^3$

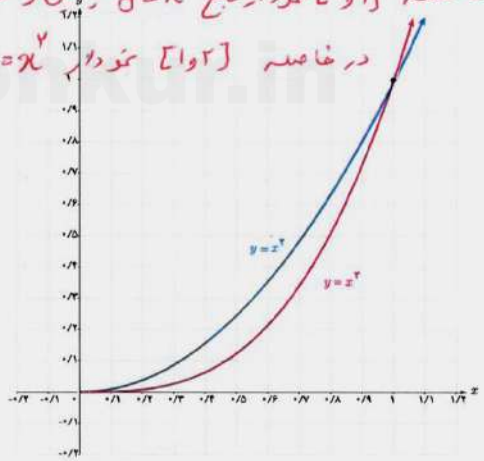
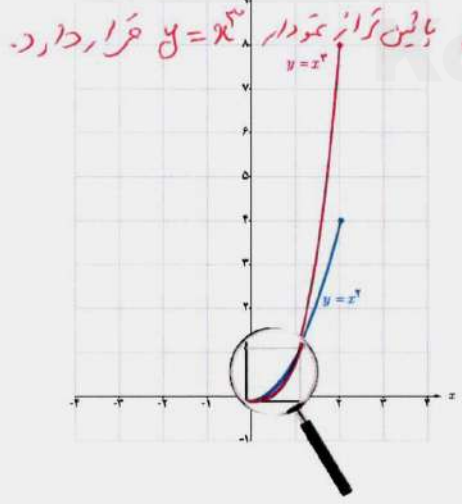
ب)  $y = -x^3 + 1$

پ)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

۲ نمودار هر یک از توابع  $y = x^3$  و  $y = x^2$  در فاصله  $[0, 2]$  رسم شده است.

در فاصله  $[0, 1]$ ، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله  $[1, 2]$  چگونه؟

در فاصله  $[0, 1]$  نمودار تابع  $y = x^3$  پایین‌تر از نمودار  $y = x^2$  قرار دارد.



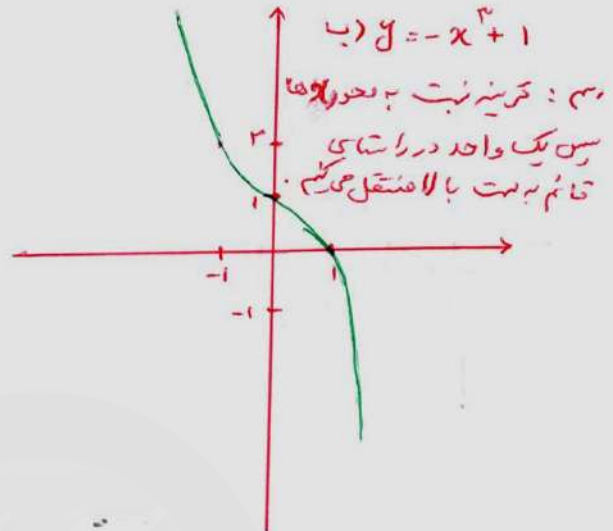
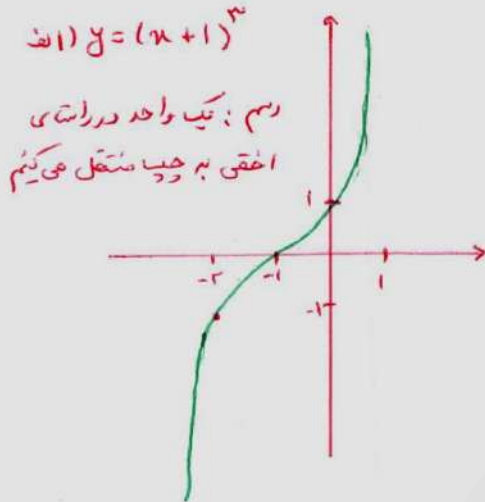
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



حل کار در کلاس صفحه ۱۱۱:

حل ۱:

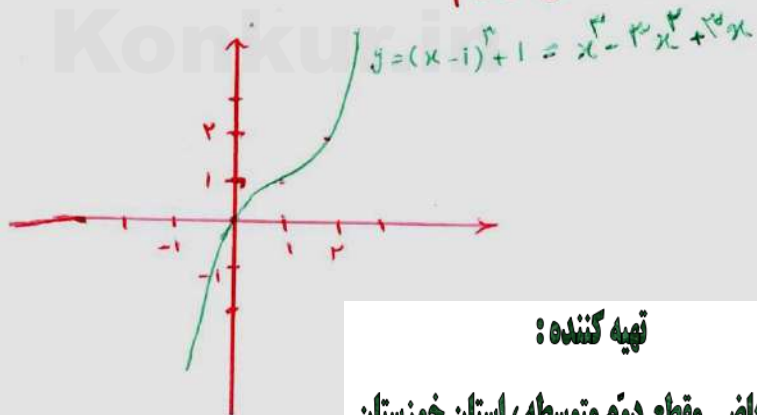


پ)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

ابتدا تابع قیمت را به صورت  $y = (x+a)^3 + b$  می‌نویسیم:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{\text{اتحاد متکعب تفاصل درجه در ۱}} + 1 = (x-1)^3 + 1$$

اکنون برای رسم: یک واحد در راستای افقی به راست و یک واحد در راستای قائم به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



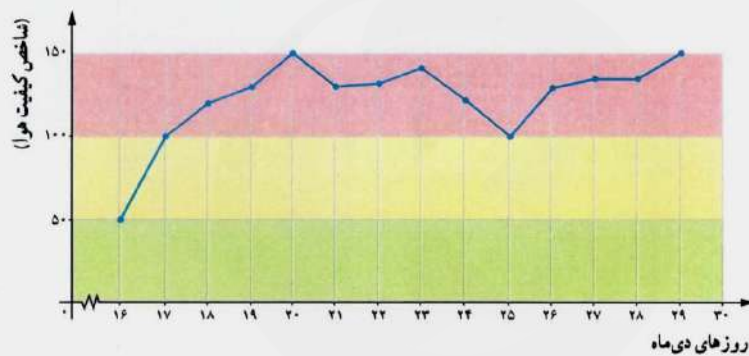
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

## توابع صعودی و توابع نزولی

## فعالیت

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. بر اساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه، یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.

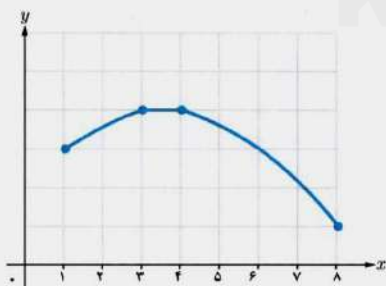


د [۲۸, ۲۹]

الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه افزایش بوده است؟ در فاصله‌های زمانی [۱۶, ۲۰]، [۲۱, ۲۳] و [۲۸, ۲۹]

ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه کاهش بوده است؟ در فاصله‌های زمانی [۲۰, ۲۱] و [۲۳, ۲۵]

پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟ در فاصله زمانی [۲۷, ۲۸]



دامنه تابع  $f$  که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه  $[۱, ۸]$  است. در بازه  $[۱, ۳]$ ، هم‌زمان با افزایش  $x$ ، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع  $f$  در بازه  $[۱, ۳]$  صعودی می‌گوییم. در بازه  $[۳, ۴]$  مقدار تابع ثابت است.

در ادامه و در بازه  $[۴, ۸]$ ، هم‌زمان با افزایش  $x$ ، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع  $f$  در بازه  $[۴, ۸]$  نزولی گفته می‌شود.

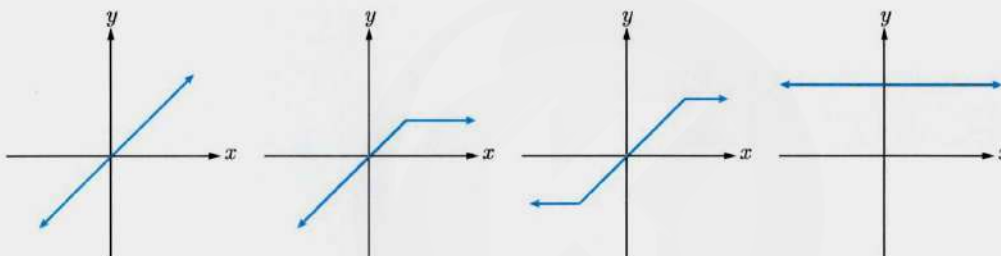
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

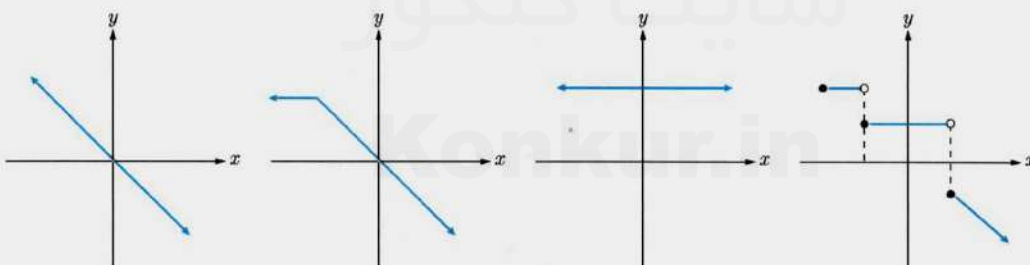
## توابع صعودی و توابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه  $a$  و  $b$  از دامنه تابع  $f$  که  $a < b$ ، داشته باشیم  $f(a) \leq f(b)$ ، آنگاه  $f$  را تابعی صعودی می‌نامیم. از آنجائی که معمولاً رفتار تابع را در بازه‌هایی از اعداد حقیقی بررسی می‌کنیم، بنابراین می‌توان گفت:

تابع  $f$  را در یک بازه، صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  در این بازه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) \leq f(b)$ . در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.



تابع  $f$  را در یک بازه، نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  در این بازه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) \geq f(b)$ . در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.



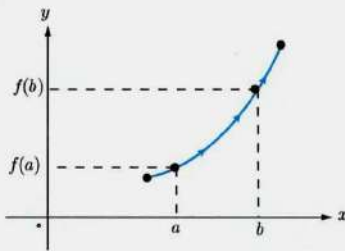
به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گوییم.

☛ تابع  $f$  را در یک بازه، ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر  $x$  در این بازه، مقدار  $f(x)$  ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

**نهیة کننده:**

**گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان**

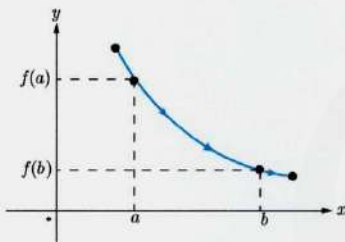
فصل اول: تابع ۱۷



الف) تابع اکیداً صعودی

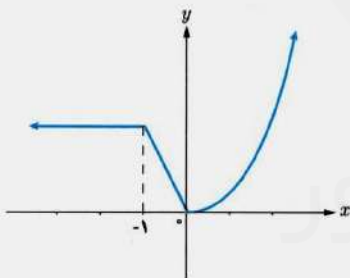
توابع اکیداً صعودی و توابع اکیداً نزولی

❖ تابع  $f$  را در یک بازه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  در این بازه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) < f(b)$  در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت. (شکل الف)



ب) تابع اکیداً نزولی

❖ تابع  $f$  را در یک بازه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  در این بازه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) > f(b)$  در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. (شکل ب)



به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گوییم.  
❖ مثال: نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله  $(-\infty, -1]$  تابع  $f$  ثابت است. همچنین در فاصله  $[-1, 0]$  تابع اکیداً نزولی و در فاصله  $[0, +\infty)$  تابع اکیداً صعودی است.

کارد کلاسی

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) تابع  $f$  در بازه  $[-1, +\infty)$  اکیداً نزولی و در بازه  $(-\infty, -1]$  اکیداً صعودی است.  
 تابع  $g$  در بازه  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  اکیداً نزولی است.  
 الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟  
 تابع  $h$  در بازه  $[-2, +\infty)$  اکیداً نزولی و در بازه  $(-\infty, -2]$  اکیداً صعودی می‌باشد.

ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟

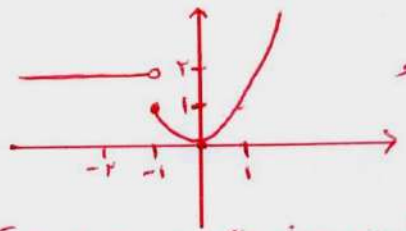
$f(x) = x^2 + 2x$  ,  $g(x) = 2^{-x}$  ,  $h(x) = |x+2|$

$f(x) = x^2 + 2x$

$g(x)$

$h(x) = |x+2|$

نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$  را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



تابع  $f$  در بازه‌های  $(-\infty, -1)$  و  $(-\infty, +\infty)$  صعودی و در بازه  $[-1, +\infty)$  نزولی است.

جواب ۳: الف) بله، چون اگر تابع  $f$  در یک فاصله صعودی باشد آنگاه برای هر  $a, b$  در آن فاصله که  $a < b$  آنگاه  $f(a) < f(b)$  است. واضح است از  $f(a) < f(b)$  می‌توان نتیجه گرفت  $f(a) \leq f(b)$  بنابراین تابع  $f$  صعودی است. الف) اگر تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

ب) اگر تابع  $f$  در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید. **خیر:** طبق نمودار تابع  $f$  یک تابع صعودی در بازه  $[1, +\infty)$  است و در بازه  $(-\infty, 1)$  صعودی نیست. مثال نقض:  $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \geq 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$

الف) فرض کنید تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این فاصله باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \leq b$ .

ب) اگر  $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود  $x$  را به دست آورید. **حل قسمت ب) (با این صفت)** الف) اثبات (برهان خلف): فرض  $a < b$  بنا بر این  $a < a$  و چون  $f$  در این فاصله صعودی است پس طبق تعریف تابع اکیداً صعودی می‌توان نوشت:  $f(b) < f(a)$  تقسیم و بخش پذیری

که این خلاف فرض صورت سوال یعنی  $f(a) \leq f(b)$  می‌باشد بنا بر این فرض برهان خلف باطل است و  $a \leq b$  فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  و  $p(x) = x^2 - 2$  را در نظر می‌گیریم. الف) اگر  $q(x)$  و  $r(x)$  به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $p(x)$  باشند. نشان دهید که  $q(x) = x - 3$  و  $r(x) = 2x - 5$ . ب) درستی تساوی  $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$  را بررسی کنید.  $q(x) = x - 3$  و  $r(x) = 2x - 5$

**تقسیم تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها** اگر  $f(x)$  و  $p(x)$  توابع چند جمله‌ای باشند و درجه  $p(x)$  از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد  $q(x)$  و  $r(x)$  وجود دارند به طوری که: **حل قسمت ب) فعالیت:** از طرف راست به طرف چپ می‌ریسیم:  $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$   $x^3 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 2)(x - 3) + 2x - 5$  که در آن  $r(x) = 0$  یا درجه  $r(x)$  از درجه  $p(x)$  کمتر است.

اگر  $r(x) = 0$  باشد، چندجمله‌ای  $f$  بر چندجمله‌ای  $p$  بخش پذیر است.

**حل قسمت ب) کاربرد کلاس با 0:** می‌دانیم تابع  $f$  با  $r$  به  $f$  یک تابع اکیداً صعودی می‌باشد بنا بر این به کمک صفت الف می‌توان نوشت:  $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$   $\Rightarrow -x \leq -4 \Rightarrow x \geq +4$  **مجموعه جواب:  $[4, +\infty)$**

## کاردرکلاس

اگر  $f(x) = x^2 - 16$  و  $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که  $f(x)$  بر  $p(x)$  بخش پذیر است.

$$f(x) = x^2 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = \underbrace{(x^2 + 4)}_{q(x)} \underbrace{(x - 2)(x + 2)}_{p(x)} + 0_{r(x)}$$

چون  $r(x) = 0$  بنابراین  $x^2 - 16$  بر  $x + 2$  بخش پذیر است.

## فعالیت

در تقسیم  $f(x) = x^2 + 2$  بر  $p(x) = 2x - 1$ ،  $q(x)$  و  $r(x)$  به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده اند.

الف) نشان دهید که  $r(x)$  از درجه صفر است. می دانیم در تقسیم جدید  $f(x)$  بر  $q(x)$  بر  $p(x)$  درجه یا همان  $r(x)$  از درجه مقوم  $p(x)$  کمتر است و چون درجه  $p(x)$  یک می باشد پس درجه  $r(x)$  صفر است.

$$f(x) = (2x - 1)q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله ای  $p(x) = 2x - 1$  را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که  $r(x) = f(\frac{1}{2})$ . به طور کلی

$$p(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

می توان گفت:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (2\left(\frac{1}{2}\right) - 1) \cdot q\left(\frac{1}{2}\right) + r\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \cdot q\left(\frac{1}{2}\right) + r\left(\frac{1}{2}\right) = r\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

**قضیه:** باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $f(x)$  بر  $ax + b$  عبارت است از  $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$ .

Konkur.in

## کاردرکلاس

۱ باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $x^2 + x - 2$  را بر  $2x + 1$  به دست آورید.

$$r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{7}{4}$$

۲ اگر چند جمله ای  $x^2 + ax - 2$  بر  $x - a$  بخش پذیر باشد، مقدار  $a$  را تعیین کنید.

$$f(x) = x^2 + ax - 2$$

$x - a$  بخش پذیر است بنابراین:

$$r(x) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow a^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 0$$

$$2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تهیه کننده:

$$\begin{array}{r} x^k - a^k \quad | \quad x-a \\ -x^k + ax^k \\ \hline ax^k - a^k \\ -ax^k + a^k x \\ \hline a^k x - a^k \\ -a^k x + a^k \\ \hline 0 \end{array}$$

حل سوال 1 فعالیت:

$$\begin{array}{r} ax^k - a^k \\ -ax^k + a^k x \\ \hline a^k x - a^k \\ -a^k x + a^k \\ \hline 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{از تقسیم انصاف شد}} \quad x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + a^2x^{k-3} + \dots + a^{k-2}x + a^{k-1})$$

نتیجه بگیریم

فعالیت

با اتحادهای زیر از سال های قبل، آشنا هستید.

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \quad \text{و} \quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

1 از تقسیم  $x^3 - a^3$  بر  $x-a$  نشان دهید که:

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

2 آیا  $x^n - a^n$  بر  $x-a$  بخش پذیر است؟ بنده چون:  $f(x) = x^n - a^n$  باشد داریم:  $r(x) = f(a)$

$$r(x) = x^n - a^n = 0$$

3 از تقسیم  $x^n - a^n$  بر  $x-a$  نشان دهید که  $x^n - a^n$  به صورت زیر تجزیه می شود.

$$\begin{array}{r} x^n - a^n \quad | \quad x-a \\ -x^n + ax^{n-1} \\ \hline ax^{n-1} - a^n \\ -ax^{n-1} + a^n x^{n-2} \\ \hline a^n x^{n-2} - a^n \\ -a^n x^{n-2} + a^n x^{n-3} \\ \hline \vdots \\ a^n x - a^n \\ -a^n x + a^n \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

4 چند جمله ای های  $x^0 - 1$  و  $x^6 - 64$  را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

$$\begin{array}{r} ax^{n-1} - a^n \\ -ax^{n-1} + a^n x^{n-2} \\ \hline a^n x^{n-2} - a^n \\ -a^n x^{n-2} + a^n x^{n-3} \\ \hline \vdots \\ a^n x - a^n \\ -a^n x + a^n \\ \hline 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{از تقسیم}} \quad x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

نتیجه برود

جواب فعالیت 4

$$\begin{aligned} x^0 - 1 &= (x-1)(x^0 + x^0 + \dots + x^0 + 1) \\ x^6 - 64 &= x^6 - 2^6 = (x-2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32) \end{aligned}$$

1 در اتحاد بالا، اگر  $n$  فرد باشد، با تغییر  $a$  به  $-a$  اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

اگر  $n$  فرد باشد در فعالیت بالا با تبدیل  $a$  به  $-a$  داریم:

$$x^n - (-a)^n = (x - (-a))(x^{n-1} + (-a)x^{n-2} + (-a)^2x^{n-3} + \dots + (-a)^{n-2}x + (-a)^{n-1})$$

2 در فعالیت بالا، اگر  $n$  زوج باشد، با تغییر  $a$  به  $-a$  اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله ای  $x^1 - 16$  را طوری تجزیه کنید که  $x+2$  یک عامل آن باشد.

در فعالیت بالا اگر  $n$  زوج باشد با تبدیل  $a$  به  $-a$  داریم:

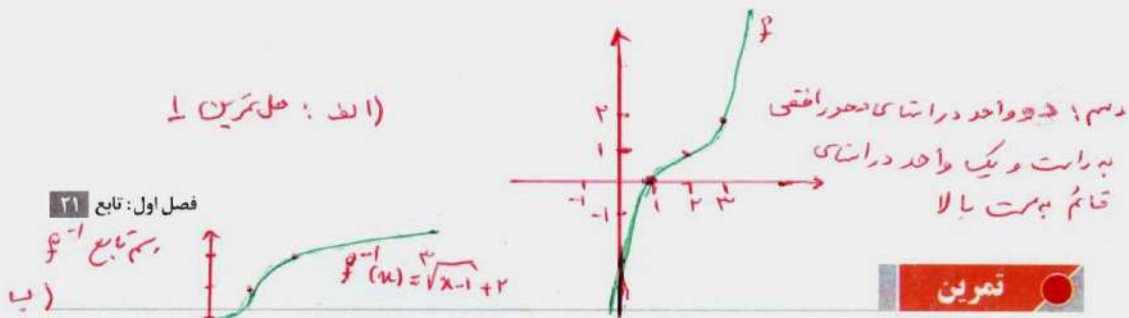
$$x^n - (-a)^n = (x - (-a))(x^{n-1} + (-a)x^{n-2} + (-a)^2x^{n-3} + \dots + (-a)^{n-2}x + (-a)^{n-1})$$

نتیجه

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

بنابراین:

$$x^1 - 16 = x^1 - 2^4 = (x+2)(x - 2x^0 + 4x^0 - 8x^0 + 16x^0)$$



تابع  $f(x) = (x-2)^2 + 1$  را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع  $f$  را به کمک نمودار تابع  $y = x^2$  رسم کنید. بالا

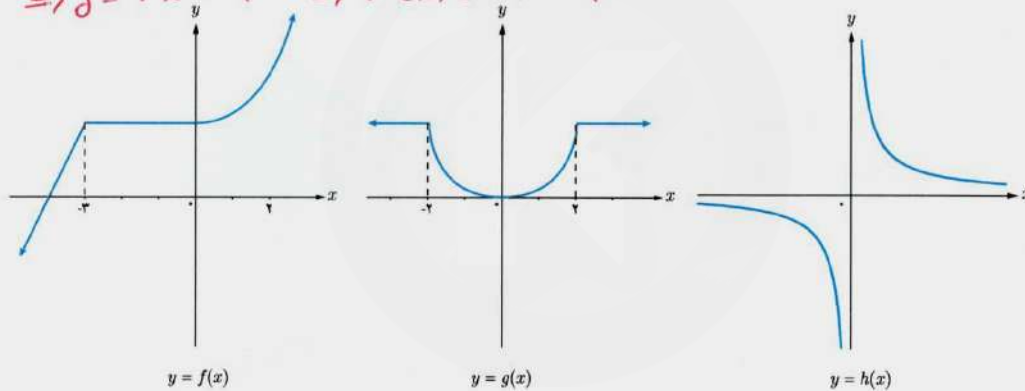
ب) نشان دهید که  $f$  وارون پذیر است و نمودار  $f^{-1}$  را رسم کنید. تابع  $f^{-1}$  تابع یک به یک است چون هر خط موازی محور  $x$  ها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

پ) ضابطه  $f^{-1}$  را به دست آورید.

نمودار توابع  $f$ ,  $g$  و  $h$  در زیر رسم شده اند.

$$y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow (x-2)^2 = y-1 \Rightarrow x-2 = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

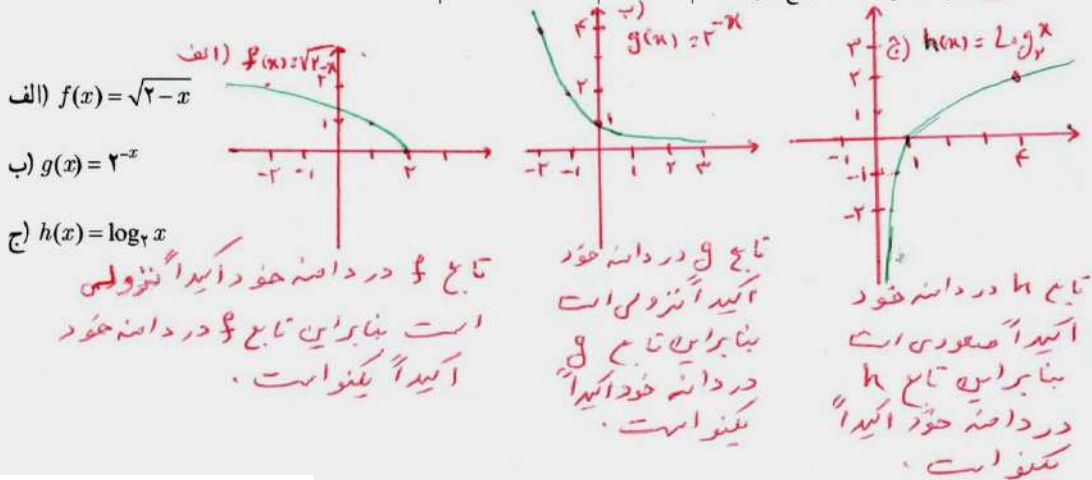


الف) تابع  $f$  در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟ تابع  $f$  در بازه‌های  $(-\infty, -3]$  و  $(3, \infty)$  اکیداً صعودی و در بازه  $(-3, 3)$  نزولی است.

ب) تابع  $g$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟ تابع  $g$  در بازه  $(-3, 3)$  اکیداً نزولی و در بازه  $(3, \infty)$  نزولی است.

پ) تابع  $h$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟ تابع  $h$  در بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, \infty)$  اکیداً نزولی است.

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟



تهیه کننده:

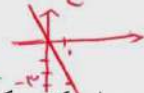


حل سئت دوم سوال ۵: ضمیر: آر  $f$  و  $g$  روی یک فاصله اکیدا صعودی باشند؛ ادامه حل ۵:

نمی توان گفت همواره  $f-g$  نیز اکیدا صعودی است. مثال نطن: توابع  $f(x)=2x+4$  و  $g(x)=5x+4$  روی دامنه خود اکیدا صعودی هستند ولی:

$$(f-g)(x) = 2x+4 - (5x+4) = -3x$$

که یک تابع اکیدا نزولی می باشد



آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟ **بله** - مثال تابع  $f(x)=2$  در فاصله  $[-2, 4]$



هم صعودی است هم نزولی

حل سئت ۶: اگر توابع  $f$  و  $g$  در یک فاصله اکیدا صعودی باشند، نشان دهید که تابع  $f+g$  نیز در این فاصله اکیدا صعودی است. برای

دلیل: تابع  $f-g$  چه می توان گفت؟ **حل سئت اول سوال:**

$$\left. \begin{aligned} \forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \\ \forall a, b \in I, a < b \Rightarrow g(a) < g(b) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} f(a)+g(a) < f(b)+g(b)$$

بنابراین  $f+g$  نیز اکیدا صعودی است (این روی قلمه  $I$ )  
 اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $x^2+kx+2$  بر  $x-2$  برابر با  $k$  باشد،  $k$  را تعیین کنید

$$r(x) = 4 \Rightarrow r(x) = f(2) = 4 \Rightarrow 2^2 + k(2) + 2 = 4 \Rightarrow 4k = 4 - 1 - 0 = -3$$

$$\Rightarrow k = \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که چند جمله ای  $x^2+ax^2+bx+1$  بر  $x-2$  و  $x+1$  بخش پذیر باشد.

$$\left. \begin{aligned} r(x) = f(2) = 0 \Rightarrow 2^2 + a(2)^2 + b(2) + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \\ r(x) = f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^2 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2a = -9 \\ 2a = -9 \\ a = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{9}{2}}, \quad a - b = 0 \Rightarrow -\frac{9}{2} - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{9}{2}}$$

هر یک از چند جمله ای های زیر را بر حسب عامل های خواسته شده تجزیه کنید.

الف)  $x^4 - 1 = x^4 - 1^2 = (x-1)(x^3 + 1x^2 + 1x + 1)$   $x-1$  با عامل  $x^3 + 1x^2 + 1x + 1$

ب)  $x^4 - 1 = x^4 - 1^2 = (x+1)(x^3 - 1x^2 + 1x - 1)$   $x+1$  با عامل  $x^3 - 1x^2 + 1x - 1$

پ)  $x^4 + 32 = (x^2 + 2)^2 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$   $x+2$  با عامل  $x^2 - 2x + 2$

الف) فرض کنید تابع  $f$  در یک بازه اکیدا نزولی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این بازه باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \geq b$ .

ب) اگر  $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ ، حدود  $x$  را به دست آورید. **حل سئت اول سوال:** انبساط برهان خلف: فرض

$a < b$  بنا بر این  $a < b$  می باشد از فرضی چون  $f$  روی فاصله مذکور اکیدا نزولی است بنابراین

برای هر  $a$  و  $b$  عضو این فاصله  $a < b$  نتیجه می شود  $f(a) > f(b)$  و این خلاف

فرض  $f(a) \leq f(b)$  موجود در صورت سوال می باشد. از این تناقض نتیجه می شود

فرض برهان خلف است و  $a \geq b$  می باشد.

حل سئت ۹ سوال ۹: می دانیم در تابع  $f(x) = a^x$ ، آر  $a < 1$  باشد این تابع اکیدا نزولی

است بنا بر این طبق سئت اول نتیجه می گیریم:  $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \Rightarrow 2 \leq x-2 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$

نتیجه کننده:

## مثلثات

# ۲

## فصل

- ۱ تناوب و تنازانت
- ۲ معادلات مثلثاتی

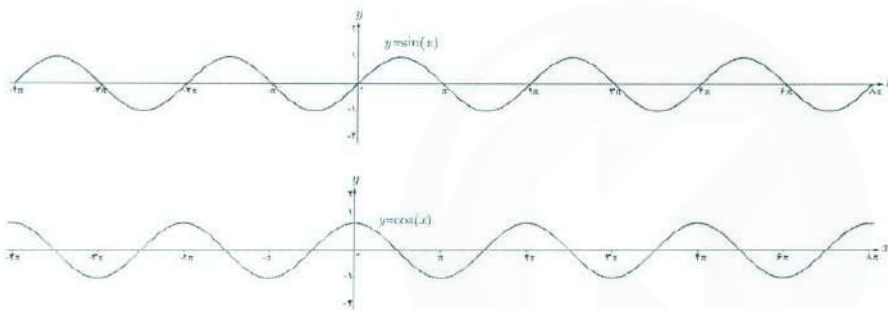


انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

## تناوب و تناوبات

درس

با توابع مثلثاتی  $f(x) = \sin x$  و  $f(x) = \cos x$  در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله  $2\pi$  روی محور  $x$  ها یکسان است  $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$  و  $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$  (به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول  $2\pi$  داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول  $2\pi$ ،  $4\pi$ ،  $6\pi$  و... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان  $2\pi$  است. چنین توابعی را توابع متناوب و  $2\pi$  را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف:

تابع  $f$  را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم  $f(x \pm T) = f(x)$  و  $x \pm T \in D_f$ . کوچک‌ترین عدد مثبت  $T$  با این خاصیت را دوره تناوب  $f$  می‌نامیم.

فعالیت

1 می‌دانیم دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin x$  و  $f(x) = \cos x$  برابر  $2\pi$  و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب 1 و -1 است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب  $a$  را در تابع  $f(x) = a \sin x$  بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

# گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۲۵

تابع	نمودار تابع	دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم
$y = \sin x$		$2\pi$	-1	1
$y = 2 \sin x$		$2\pi$	-2	2
$y = -2 \sin x$		$2\pi$	-2	2
$y = \frac{1}{2} \sin x$		$2\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2} \sin x$		$2\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = a \sin x$  را مشخص نمایید.

*اگر دوره تناوب  $2\pi$  و ماکزیمم  $a$  و مینیمم  $-a$*

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = a \sin x + c$  چگونه است. با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع  $y = a \cos x$  و

$y = a \cos x + c$  نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-a \leq a \sin x \leq a$$

$$-a + c \leq a \sin x + c \leq a + c$$

$$-a + c \leq y \leq a + c$$

↓  
MIN

↓  
MAX

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-a \leq a \cos x \leq a$$

$$-a + c \leq a \cos x + c \leq a + c$$

$$-a + c \leq y \leq a + c$$

↓  
MIN

↓  
MAX

## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۶

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب  $b$  در تابع  $y = \sin bx$  را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	$2\pi$
$y = \sin 2x$		۱	-۱	$\pi$
$y = \sin(-3x)$		۱	-۱	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \sin \frac{x}{4}$		۱	-۱	$4\pi$
$y = \sin(-\frac{x}{4})$		۱	-۱	$4\pi$

## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

مثلهات ۲۷

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = \sin bx$  را مشخص نمایید.

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = \sin bx + c$  چگونه است.

$$-1 \leq \sin bx \leq 1$$

$$-1+c \leq \sin bx + c \leq 1+c$$

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع  $y = a \cos x + c$  و  $y = a \cos x$  نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  ضرب  $a$  در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضرب  $b$  در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار  $c$  نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$  دارای مقدار ماکزیمم  $|a| + c$  و مقدار مینیمم  $-|a| + c$  و دوره تناوب

$$\frac{2\pi}{|b|}$$

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.

❁ مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف)  $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب)  $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ)  $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت)  $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

❁ حل:

الف)  $\max = |3| - 2 = 1$       $\min = -|3| - 2 = -5$       $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

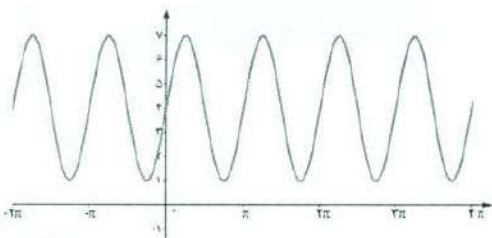
ب)  $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$       $\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$       $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ)  $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$       $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$       $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ت)  $\max = |8| = 8$       $\min = -|8| = -8$       $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

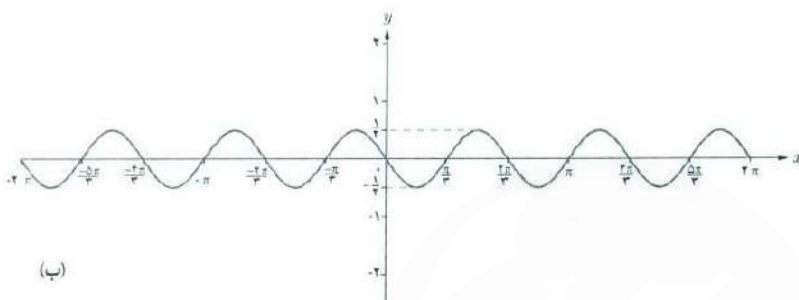
## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۸

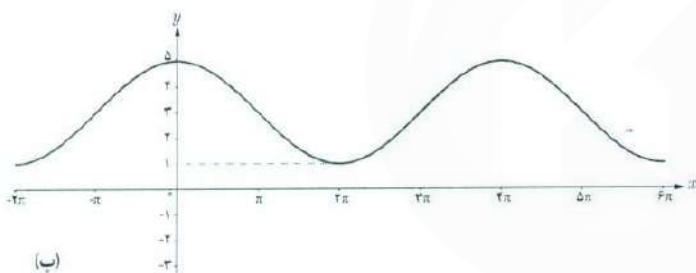


(الف)

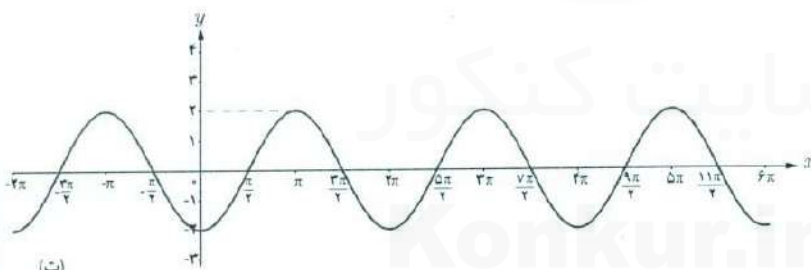
❖ مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه  $f(x) = a \cos bx + c$  یا  $f(x) = a \sin bx + c$  است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



(ب)



(ب)



(ت)

❖ حل:

الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت  $y = a \sin bx + c$  باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره تناوب برابر  $\pi$  است. لذا  $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$  و بنابراین  $|b| = 2$ .  
از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب  $|a| + c$  و  $-|a| + c$  است، بنابراین همواره مقدار  $c$  میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم  $c = 4$  و در نتیجه  $|a| = 3$ .

## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

م.م. مثلثات ۲۹

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از  $a$  و  $b$  بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  دارد، هر دوی  $a$  و  $b$  باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

(ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت  $y = a \sin bx + c$  باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار،  $c = 0$  و  $|a| = \frac{1}{4}$  و  $|b| = 3$  به دست می‌آید که در آن علامت  $a$  منفی و  $b$  مثبت است.

$$y = -\frac{1}{4} \sin 3x$$

بنابراین داریم:

(پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت  $y = a \cos bx + c$  باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر  $4\pi$  است. بنابراین  $c = 3$  و  $|b| = \frac{1}{4}$  و  $|a| = 2$  که در آن علامت  $a$  مثبت و علامت  $b$  منفی است. لذا  $a = 2$  و  $b = -\frac{1}{4}$  و بنابراین داریم  $y = 2 \cos(-\frac{x}{4}) + 3$

(ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت  $y = a \cos bx + c$  باشد و  $c = 0$  و  $|a| = 2$  و  $|b| = 1$  و  $a$  منفی و  $b$  مثبت است. بنابراین داریم:

$$y = -2 \cos x$$

### تابع تانژانت

#### فعالیت

در دایره مثلثاتی رویه‌رو خط  $TAT'$  در نقطه  $A$  بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویه  $\alpha$  را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و باره خط  $OM$  را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه  $M'$  قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

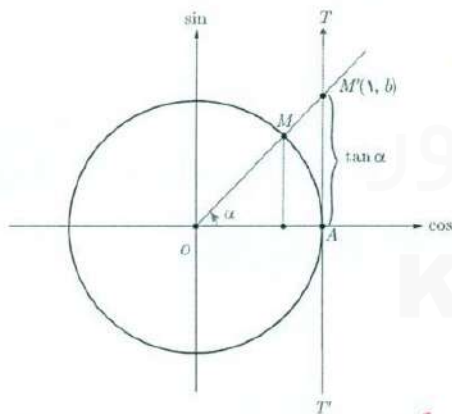
می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند  $\alpha$ ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط  $TAT'$  تعیین می‌شود.

بنابراین خط  $TAT'$  را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه  $A$  مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

(ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع

دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

(پ) آیا مقدار  $\tan \frac{\pi}{4}$  عددی حقیقی است؟  $\tan \frac{3\pi}{4}$  چگونه؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



چون تانژانت زاویه‌هایی که در ربع اول و سوم هستند مثبت است و تانژانت زاویه‌هایی که در ربع دوم و چهارم هستند منفی است. تانژانت زاویه‌هایی که در ربع اول و سوم هستند مثبت است و تانژانت زاویه‌هایی که در ربع دوم و چهارم هستند منفی است. تانژانت زاویه‌هایی که در ربع اول و سوم هستند مثبت است و تانژانت زاویه‌هایی که در ربع دوم و چهارم هستند منفی است.

چون برای  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{3\pi}{4}$  خط  $OM$  مولد می‌شود و تانژانت‌ها منتهی به خط  $TAT'$  می‌شوند و در ربع اول و سوم تانژانت مثبت است و در ربع دوم و چهارم تانژانت منفی است.



## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۰

## تغییرات تانژانت

## فعالیت

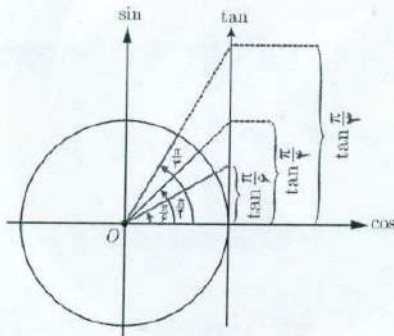
با تغییر زاویه  $\alpha$  مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می کنیم. اگر  $\alpha = 0^\circ$ ، مقدار  $\tan \alpha$  نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه  $\alpha$ ، مقدار  $\tan \alpha$  نیز افزایش می یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه  $\alpha$  در ربع اول و نزدیک شدن آن به  $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می یابد؟ **بی نهایت (توضیح در ستون اولاد صحتی یا در ستون اولاد صحتی بی نهایت تقریب نشده است)**

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت  $a$  را داشته باشیم، چگونه می توان زاویه ای مانند  $\alpha$  یافت، به طوری که  $\tan \alpha = a$ .



$$\tan \alpha = \frac{a}{1} = a$$



**در اندازه  $\alpha$  روی محور تانژانت ها جدا می کنیم و مرکز  $0$  وصل می کنیم**

## کاردکلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهش؟

**در ربع دوم: افزایشی (از  $0$  تا  $-\infty$ )**  
**در ربع سوم: افزایشی (از  $-\infty$  تا  $0$ )**  
**در ربع چهارم: افزایشی (از  $0$  تا  $-\infty$ )**

ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

**در ربع اول تغییرات تانژانت از  $0$  تا  $+\infty$  افزایشی**  
**در ربع دوم تغییرات تانژانت از  $0$  تا  $-\infty$  افزایشی**  
**در ربع سوم تغییرات تانژانت از  $-\infty$  تا  $0$  افزایشی**  
**در ربع چهارم تغییرات تانژانت از  $-\infty$  تا  $0$  افزایشی**

# گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

مشکلات ۳۱

ربع	دوم	سوم	چهارم
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازه تغییرات	$(-\infty, 0)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت  $\uparrow$  به معنی افزایش یافتن و علامت  $\downarrow$  به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$ $\pi$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$ $2\pi$
$\downarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\downarrow 1$ $\downarrow \sqrt{3}$ $\uparrow +\infty$	$\downarrow -\sqrt{3}$ $\downarrow -1$ $\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\uparrow 0$	$\uparrow \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\uparrow 1$ $\uparrow \sqrt{3}$ $\uparrow +\infty$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\downarrow -1$ $\downarrow -\sqrt{3}$ $\downarrow -\infty$

# گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۱۳۲

## تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), عددی حقیقی به عنوان  $\tan \alpha$  داریم و تابعی با ضابطه  $y = \tan \alpha$  مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$  است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع  $y = \tan \alpha$ , تابعی متناوب است و دوره تناوب آن  $\pi$  است. زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

### کاردرکلاس

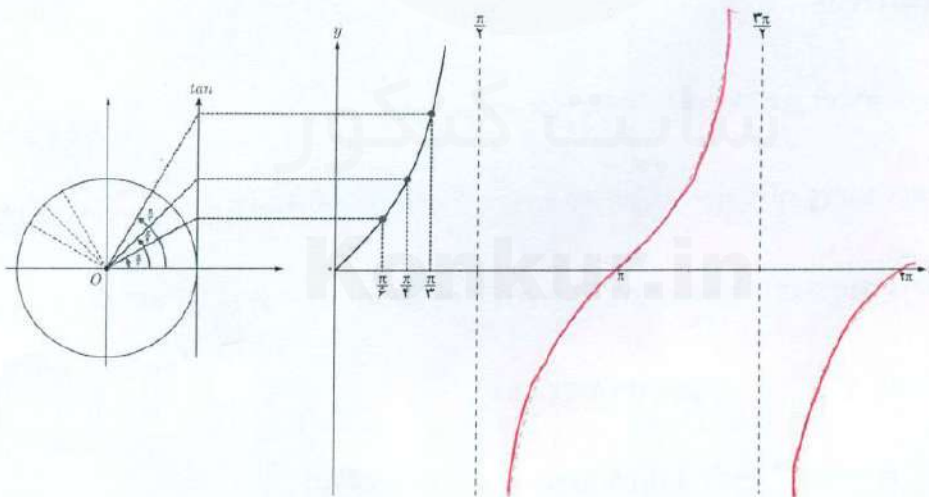
صعودی یا نزولی بودن تابع  $y = \tan \alpha$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  بررسی کنید.

در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  صعودی  
 در بازه  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  صعودی  
 در بازه  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$  صعودی

رسم تابع  $y = \tan \alpha$

### فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع  $y = \tan \alpha$  در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل  $\tan$  مدنظر نیست.

## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان ۳۳

تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف)  $y = 1 + 2 \sin 7x$

$T = \frac{2\pi}{7}$

ماکزیمم: ۳

مینیمم: -۱

ب)  $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

$T = 4$

ماکزیمم:  $\sqrt{3} + 1$ مینیمم:  $\sqrt{3} - 1$ 

پ)  $y = -\pi \sin \frac{1}{4}(x-2)$

$T = 4\pi$

ماکزیمم:  $\pi$ مینیمم:  $-\pi$ 

ت)  $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

$T = \frac{2\pi}{3}$

ماکزیمم:  $1 + \frac{3}{4}$ مینیمم:  $-\frac{3}{4}$ 

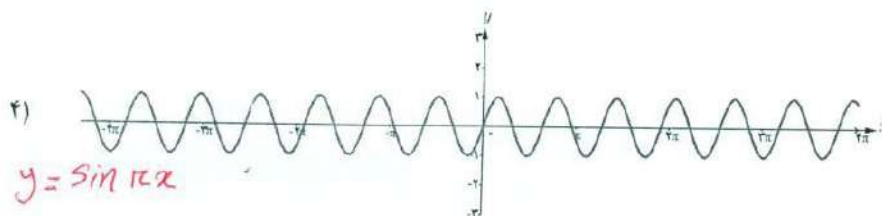
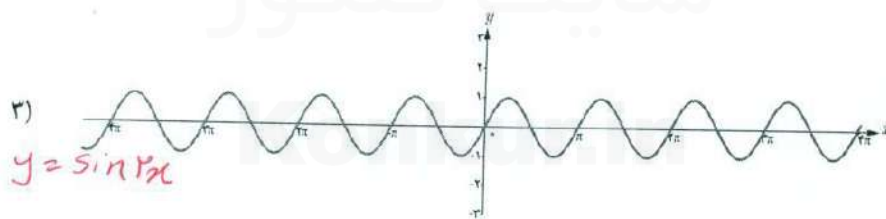
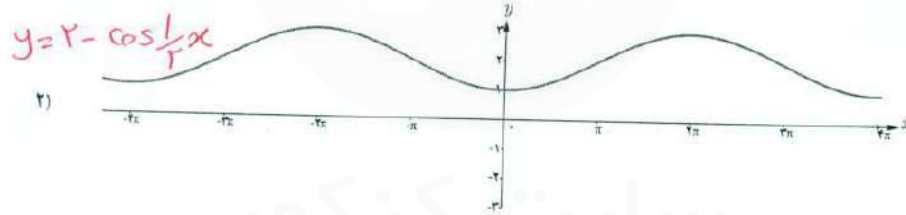
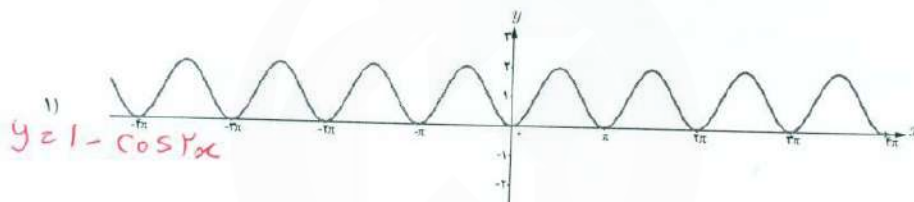
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت)  $y = 1 - \cos 2x$

ب)  $y = \sin 2x$

ب)  $y = 2 - \cos \frac{1}{4} x$

الف)  $y = \sin \pi x$



# گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۴

۲ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف)  $T = \pi$  ,  $\max = 3$  ,  $\min = -3$

$y = 3 \sin 2x$

ب)  $T = 3$  ,  $\max = 9$  ,  $\min = 3$

$y = -4 \sin \frac{2\pi}{3}x + 3$

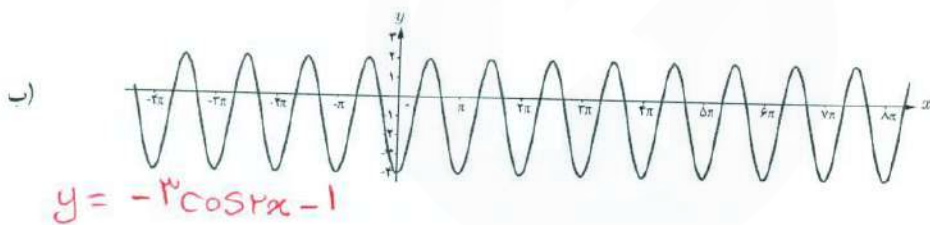
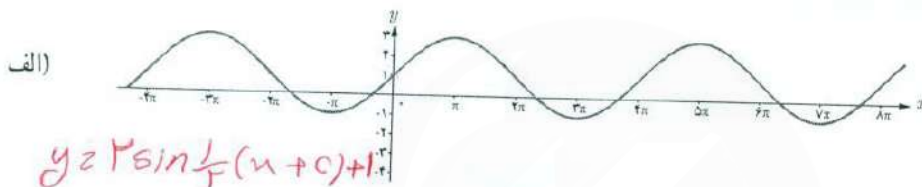
ب)  $T = 4\pi$  ,  $\max = -1$  ,  $\min = -7$

$y = -3 \sin \frac{1}{4}x - 3$

ت)  $T = \frac{\pi}{2}$  ,  $\max = 1$  ,  $\min = -1$

$y = \cos 4x$

۳ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تنازنت در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تنازنت در آن نزولی باشد. **نادرست**

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تنازنت در آن غیرصعودی باشد. **درست**

ت) تابع تنازنت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تنازنت، در موارد زیر مقادیر  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  را با هم مقایسه کنید:

ب)  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$
$\tan \alpha$	$+\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0$

در ربع چهارم نیز  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  هر دو صعودی هستند

الف)  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$0$
$\sin \alpha$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1$	$\sqrt{3}$	$1$	$+\infty$

در ربع اول  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  هر دو صعودی هستند

۲

درس

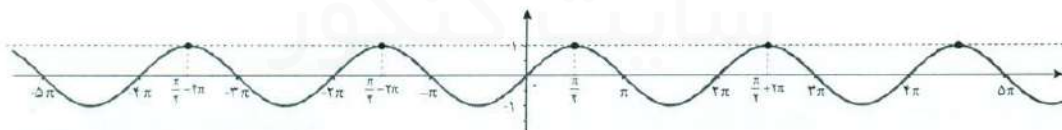
## معادلات مثلثاتی

## معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.  
 ❁ مثال: تابع مثلثاتی  $y = \sin x$  را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin x = 0$  می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت  $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت  $y = 0$  (یعنی محور  $x$ ها) و تابع  $y = \sin x$  است.  
 این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی  $x = k\pi$  که  $k$  یک عدد صحیح است نمایش داد.  
 به‌طور مشابه جواب‌های معادله  $\sin x = 1$  مقادیری از  $x$  هستند که به ازای آنها مقدار  $\sin x$  برابر ۱ می‌شود.  
 این مقادیر محل تقاطع  $y = \sin x$  و  $y = 1$  است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{4} - 4\pi, \frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  قابل نمایش است.

اکنون معادله  $\sin x = \frac{1}{4}$  را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

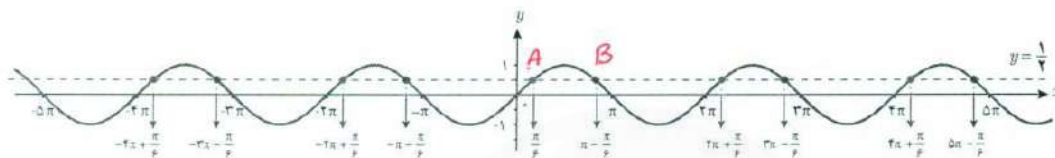
## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۶

## فعالیت

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر  $\frac{1}{4}$  است مثال بزنید.  $\frac{5\pi}{4}$  ،  $\frac{13\pi}{4}$

۲ خط  $y = \frac{1}{4}$  و نمودار  $y = \sin x$  را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟  $\beta$  ،  $\alpha$



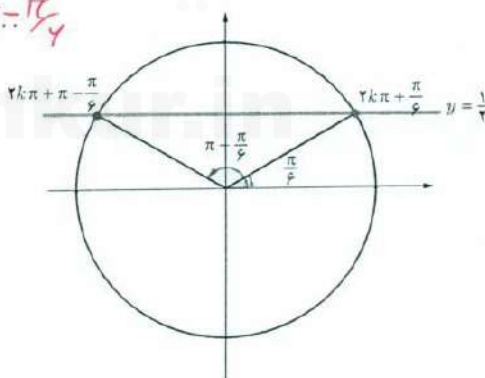
نمای پانچ‌های باقیمانده شده از زاویه  $\alpha$  ها که داده برکتار  $\alpha$  با  $\beta$

۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار  $y = \sin x$  و  $y = \frac{1}{4}$  را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله  $\sin x = \frac{1}{4}$  جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$   
 $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$   
 $\sin(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{4}$

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط  $y = \frac{1}{4}$  و زوایای  $\frac{\pi}{6}$  و  $\pi - \frac{\pi}{6}$  که سینوس آنها برابر  $\frac{1}{2}$  است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه  $\frac{\pi}{6}$  و کدام دسته هم انتها با زاویه  $\pi - \frac{\pi}{6}$  هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با  $\frac{\pi}{6}$ :  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$  ،  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  ،  $2k\pi + \frac{\pi}{6} - 2\pi$  ،  $2k\pi + \frac{5\pi}{6} - 2\pi$  ، ...

هم انتها با  $\pi - \frac{\pi}{6}$ :  $2k\pi - \frac{\pi}{6}$  ،  $2k\pi - \frac{7\pi}{6}$  ،  $2k\pi - \frac{\pi}{6} - \pi$  ،  $2k\pi - \frac{7\pi}{6} - \pi$  ، ...



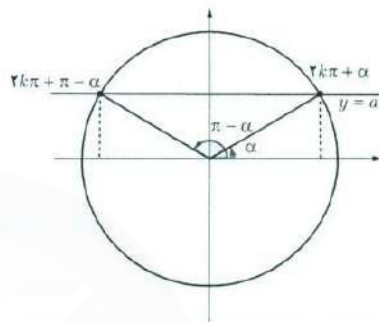
## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۳۷

برای عدد حقیقی  $-1 \leq a \leq 1$  که  $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند  $\alpha$  وجود دارد که برای آن داریم  $\sin \alpha = a$ . بنابراین معادله  $\sin x = a$  به صورت  $\sin x = \sin \alpha$  بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله  $\sin x = \sin \alpha$  باید رابطه بین کمان‌های  $x$  و  $\alpha$  را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی رویه‌رو رابطه بین کمان معلوم  $\alpha$  و کمان‌های مجهول  $x$  به طوری که  $\sin x = \sin \alpha$  در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \sin \alpha$  به صورت  $x = 2k\pi + \alpha$  و  $x = (2k+1)\pi - \alpha$  می‌باشد که  $k \in \mathbb{Z}$ .

مثال: معادله  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کاردرکلاس

الف)  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

ب)  $4\sin x + \sqrt{18} = 0$

$$2\sin \alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$4\sin \alpha + \sqrt{18} = 0$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{18}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \alpha = \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



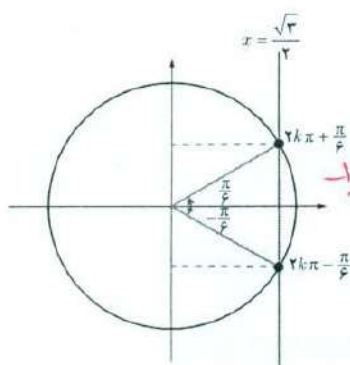
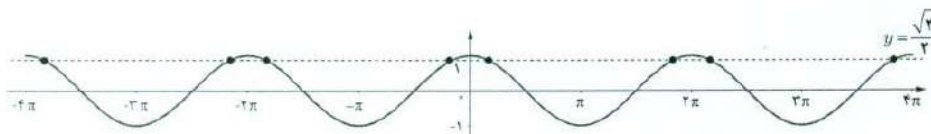
## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۸

فعالیت

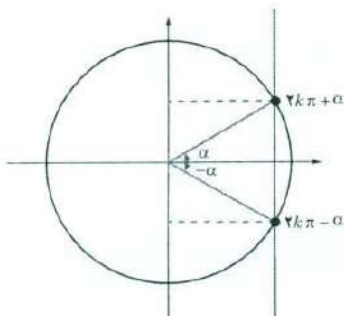
نمودار تابع  $y = \cos x$  و خط  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$  در زیر رسم شده اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب های معادله

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ را بیابید.}$$



الف) برخی از جواب های معادله  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  را با توجه به نقاط تقاطع در نمودار پیدا کنید.  $-\frac{13\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه رو و محل تقاطع خط  $x = \frac{\sqrt{3}}$  با دایره مثلثاتی، جواب های معادله فوق را به دست آورید.  $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$  و  $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$   
برای هر عدد حقیقی  $-1 \leq a \leq 1$  در معادله  $\cos x = a$  زاویه ای چون  $\alpha$  وجود دارد که  $\cos \alpha = a$



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت  $\cos x = \cos \alpha$  نوشته و سپس رابطه بین زوایای  $x$  و  $\alpha$  را با توجه به دایره مثلثاتی روبه رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب های کلی معادله  $\cos x = \cos \alpha$  به صورت  $x = 2k\pi \pm \alpha$  می باشند که  $k \in \mathbb{Z}$ .

## مرور ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۳۹

مثال: جواب‌های معادله  $\cos x = \frac{1}{4}$  را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه  $[-3\pi, \pi]$  می‌باشند؟

می‌دانیم  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  پس معادله به صورت  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$  می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای  $k$  در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های  $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله  $\sin 2x = \sin 3x$  را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

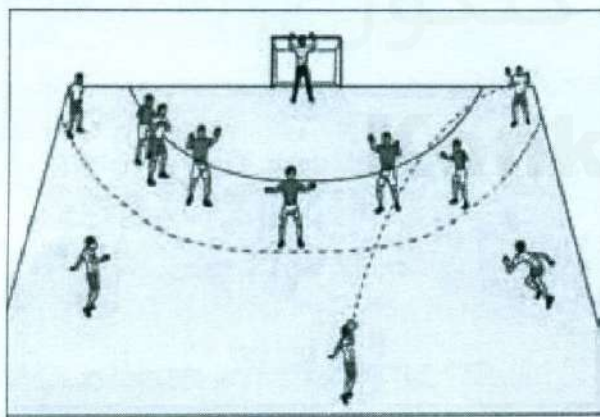
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله  $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$  را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت  $16 \text{ m/s}$  برای هم تیمی خود که در  $12/8$  متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ  $v$  (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی  $d$  (بر حسب متر) و زاویه پرتاب  $\theta$  به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۴۰

از رابطه داده شده به دست می آید:

$$12/8 = \frac{(16)^{\frac{1}{2}} \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول  $\theta = \frac{\pi}{12}$  می باشد.مثال: جواب های معادله  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله  $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$  را حل کنید.ابتدا این معادله را به صورت  $2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$  می نویسیم. با تغییر متغیر  $t = \cos x$  می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$  تبدیل کرد. جواب های این معادله  $t = 5$  و  $t = -\frac{1}{2}$  است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حلدر معادله ساده  $\cos x = 5$  و  $\cos x = -\frac{1}{2}$  به دست می آیند. از آنجا که  $\cos x = 5$  جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$  را به دست می آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: معادله  $\sin x + \cos x = 1$  را در بازه  $0 \leq x \leq 2\pi$  حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)^2 \quad \text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم.}$$

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \quad \text{استفاده از رابطه } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۱

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 \text{ یا } \cos x - 1 = 0$$

اکنون جواب‌های معادله‌های به دست آمده را در بازه  $0 \leq x \leq 2\pi$  می‌یابیم:

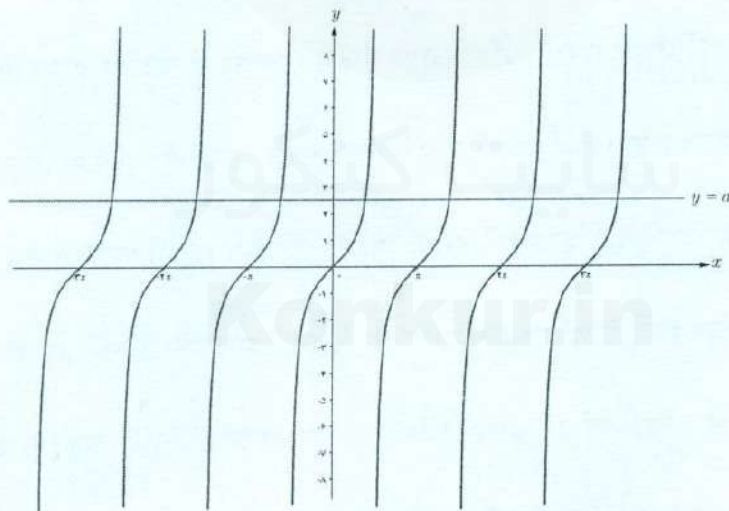
$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را

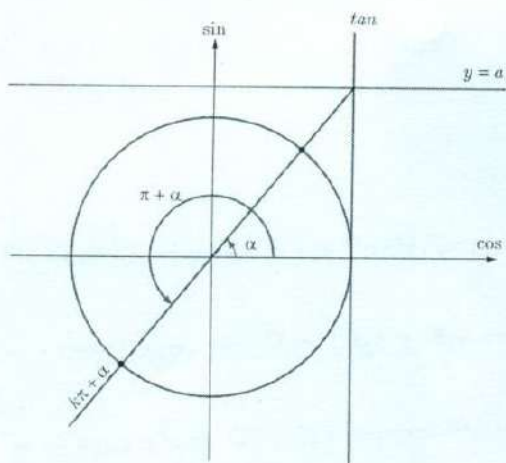
تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که  $x = \frac{3\pi}{2}$  جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیر قابل قبول است اما  $x = 0, \frac{\pi}{2}$  مقادیر به دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند. *پس از توان رساندن ممکن است جواب‌های ما قوی‌تری جواب فرعی اضافه شده باشد که ما کلی کردن آن‌ها حذف می‌شود.*

در شکل زیر نمودار تابع  $y = \tan x$  و خط  $y = a$  که یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله  $\tan x = a$  همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی  $a$ ، که  $\tan x = a$  زاویه‌ای چون  $\alpha$  وجود دارد که برای آن داریم  $\tan \alpha = a$ . بنابراین معادله  $\tan x = a$  به صورت  $\tan x = \tan \alpha$  بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله  $\tan x = \tan \alpha$  باید رابطه بین زوایای  $x$  و  $\alpha$  را بیابیم.



## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۴۲



از دایره مثلثاتی و محور تنازنت در شکل مقابل می توان دریافت که رابطه بین زوایای  $x$  و  $a$  به صورت  $x = k\pi + \alpha$  که  $k$  یک عدد صحیح، است می باشد.

در نمودار بالا اگر  $a = 1$  باشد، داریم:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب های کلی معادله  $\tan x = \tan \alpha$  به صورت  $x = k\pi + \alpha$  می باشد که  $k$  یک عددی صحیح است.

مثال: معادله  $\tan x = \tan 5x$  را حل کنید.

$$x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حل:

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس می توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تنازنت به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cancel{\cos \beta}}{\cos \alpha \cancel{\cos \beta}} + \frac{\cancel{\cos \alpha} \sin \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cos \beta}}{\frac{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta}}{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta}} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

همچنین با تغییر  $\beta$  به  $-\beta$  در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به صورت زیر به دست می آید.

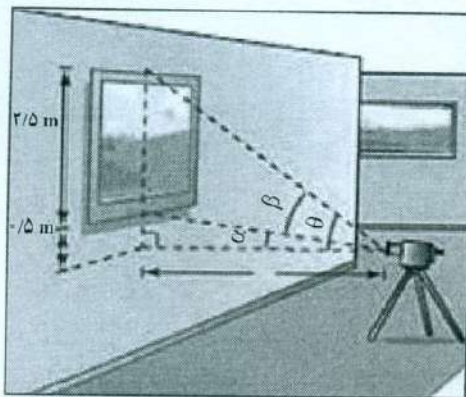
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

## گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۳

مثال: نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین ( $\beta$ ) با فاصله افقی آن با نابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{2/5x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$



سیس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.  
 راه حل: با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه پایین شکل داریم:

$$\tan \alpha = \frac{0/5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن  $\theta$  است داریم:

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به دست می آید:

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{0/5}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{0/5}{x}} = \frac{\frac{3 - 0/5}{x}}{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = \frac{2/5x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم:

$$x = 1 \rightarrow \tan \beta = \frac{2/5 \times 1}{1^2 + \frac{3}{2}} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

از طرفی می دانیم که  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$  پس جواب های معادله  $\tan \beta = 1$  به صورت زیر به دست می آیند:

$$\beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت  $k=0$  که مقدار  $\beta = \frac{\pi}{4}$  را به دست می دهد قابل قبول می باشد.

$$\textcircled{1} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169} \\ \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \end{cases}$$

۴۴

تمرین

۱ فرض کنید  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  و  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف)  $\cos 2\alpha$ ب)  $\sin 2\alpha$ 

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه  $22/5^\circ$  به دست آورید.

$$\sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 2x$

ب)  $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ)  $\cos x = \cos 2x$

ت)  $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ث)  $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

ج)  $\sin x - \cos 2x = 0$

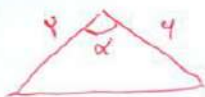
ح)  $\tan(2x - 1) = 0$

ح)  $\tan 2x = \tan \pi x$

خریداری

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با

این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} \quad \text{دو حالت می‌توان ساخت}$$

Konkur.in

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

$$\text{الف) } \sin \frac{\pi}{4} = \sin \pi x$$

$$\pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{\pi} + \frac{1}{4}$$

$$\text{ب) } \cos \pi x - \cos \pi u + 1 = 0$$

$$\cos \pi x - \cos \pi u + 1 = 0$$

$$\cos \pi x - \cos \pi u = -1 \rightarrow \cos \pi u (\cos \pi x + 1) = 0 \begin{cases} \cos \pi u = 0 \\ \cos \pi x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ج) } \cos \pi x - \sin \pi u + 1 = 1 \rightarrow -\cos \pi x + 1 - \sin \pi u = 0 \rightarrow \cos \pi x + \sin \pi u - 1 = 0$$

$$(\sin \pi u + 1)(\cos \pi x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \pi u = -1 \rightarrow u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \cos \pi x = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{د) } \cos \pi x = \cos \pi u$$

$$x = 2k\pi \pm \pi u$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \pi u \rightarrow u = -2k\pi \\ x = 2k\pi - \pi u \rightarrow u = \frac{2k\pi}{\pi} \end{cases}$$

$$u = 2k\pi$$

$$\text{ه) } \cos \pi x + \sin \pi u - 1 = 0 \rightarrow (\sin \pi u + 1)(\cos \pi x - 1) = 0 \begin{cases} \sin \pi u = -1 \\ \cos \pi x = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ u = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{و) } \sin \pi x - \cos \pi u = 0 \rightarrow \sin \pi x + \cos \pi u - 1 = 0 \rightarrow (\sin \pi x + 1)(\cos \pi u - 1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$-\cos \pi x + 1$$

$$\begin{cases} \sin \pi x = -1 \\ \cos \pi u = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ u = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ u = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{ز) } \tan(\pi x - 1) = 0$$

$$\pi x - 1 = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi + 1}{\pi}$$

$$\text{ح) } \tan \pi x = \tan \pi u$$

$$\pi x = k\pi + \pi u$$

$$(\pi - \pi)u = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{\pi - \pi}$$



## حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت

۱. حدهای نامتناهی

۲. حد در بی نهایت



فصل

آذربایجان غربی (ماکو)

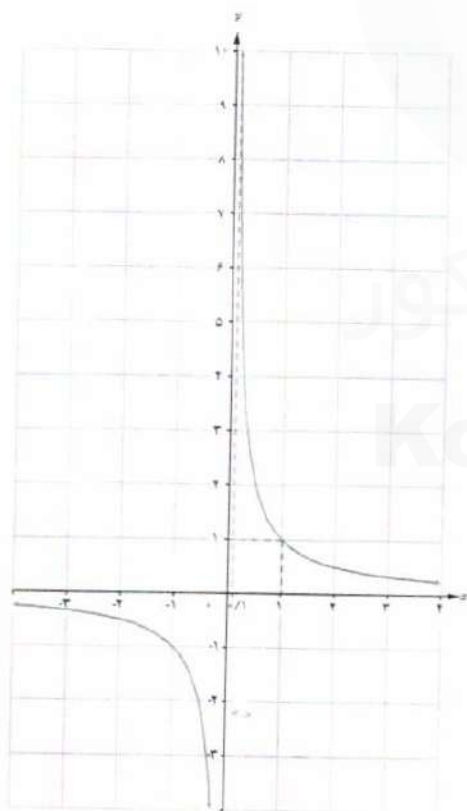
بسیاری از پدیده‌های طبیعی به وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع  $f(x) = \frac{255x}{100+x}$  مدل‌سازی می‌شود. که در آن  $x$  درصد آلودگی و  $f(x)$  هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه‌ها بسیار زیاد خواهد بود. به طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

## حدهای نامتناهی

درس

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که  $l$  حد تابع  $f$  در نقطه  $a$  است هرگاه بتوانیم مقادیر  $f(x)$  را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به  $l$  نزدیک کنیم به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی به  $a$  (از دو طرف  $a$ ) نزدیک کرده باشیم اما  $x$  برابر  $a$  نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای  $f(x) = \frac{1}{x}$  آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست  $x = 0$  بررسی کنیم.

فصل سوم : جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۴۷

۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر  $x$  نشان می دهد آن را تکمیل کنید.

$x$	۰/۸	۰/۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۰۸	... →	۰
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰.۰۰۰	... →	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم  $f(x)$  از یک میلیون بزرگ تر شود مقدار  $x$  از چه عددی باید کوچک تر شود؟ **یک میلیونیم (۱۰<sup>-۶</sup>)**

۳ وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می شوند؟ چرا؟ **خیر**  
**وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر  $f(x)$  مرتباً بزرگ تر می شوند**  
 با توجه به این فعالیت مشاهده می شود که وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر  $f(x)$  بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به بیان دیگر می توان  $f(x)$  را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ تر کرد به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می نویسیم:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$

تذکره: این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگ تر باشد.

### کاردرکلاس

$$\text{برای تابع } f(x) = \frac{1}{x}$$

الف) جدول زیر را کامل کنید:

$x$	$\frac{1}{2}$	-۰/۲	-۰/۸	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱	... →	۰
$f(x)$	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	... →	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار  $f(x)$  از  $10^6$  کوچک تر شود  $x$  باید چگونه انتخاب شود؟ **باید  $x < 10^{-6}$**

ب) وقتی  $x$  از سمت چپ به صفر نزدیک شود  $f(x)$  چه تغییری می کند؟ **مقادیر  $f(x)$  مرتباً کوچک و کوچکتر می شود**  
**اما به عدد خاصی نزدیک نمی شود**  
 ت) در مورد  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$  چه می توان گفت؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

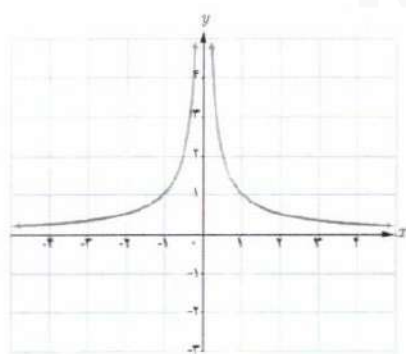
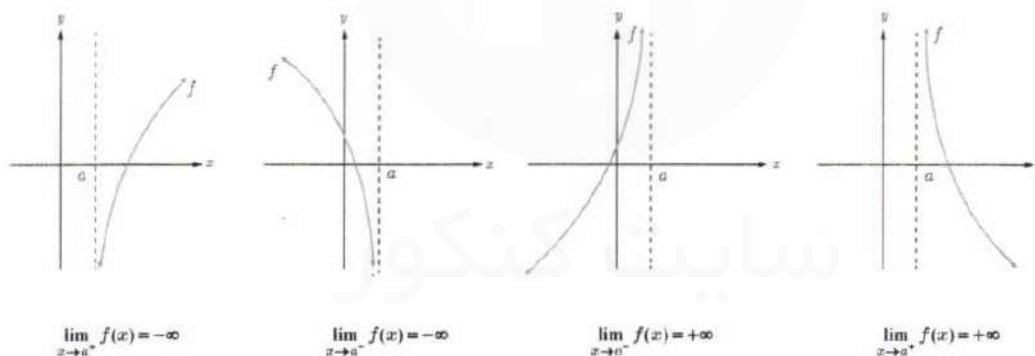
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه‌ی قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

### تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  بدین معنی است که می‌توانیم  $f(x)$  را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که  $x$  را از سمت راست به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  بدین معنی است که می‌توانیم  $f(x)$  را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که  $x$  را از سمت چپ به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

تذکره: تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



مثال: نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  در شکل رویه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع  $f$  را در همسایگی محذوف نقطه  $x = 0$  بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید:

فصل سوم : حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۴۹

$x$	$-0.5$	$-0.1$	$-0.01$	$-0.001$	$\dots \rightarrow$	$0$	$\leftarrow \dots$	$0.001$	$0.01$	$0.1$	$0.5$
$f(x)$	$2$	$10$	$100$	$1000$	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow \dots$	$1000$	$100$	$10$	$2$

مشاهده می شود با نزدیک کردن  $x$  به اندازه کافی به صفر، مقدارهای  $f(x)$  را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین  $f(x)$  از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

تعریف :

فرض کنید تابع  $f$  در همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  یعنی اینکه می توانیم  $f(x)$  را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حد در مورد تابع هایی که وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می شود و مقدار تابع خیلی کوچک تر می شود در زیر وجود دارد.

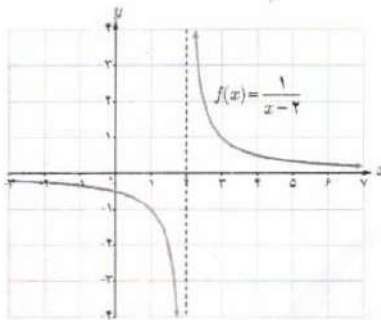
تعریف :

فرض کنید تابع  $f$  در همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  یعنی اینکه می توانیم مقدارهای  $f(x)$  را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

مثال : برای حد تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  در نقطه  $x = 0$  می توان گفت :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

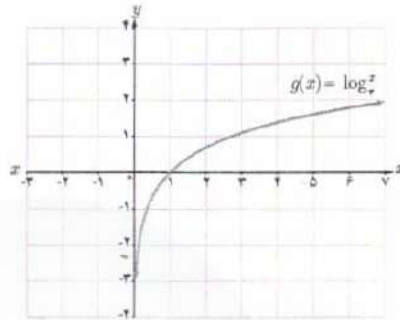
مثال : در مورد حد تابع  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  در نقطه  $x = 0$  می توان گفت :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$

نمودار توابع  $f, g, h$  در شکل های زیر داده شده اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

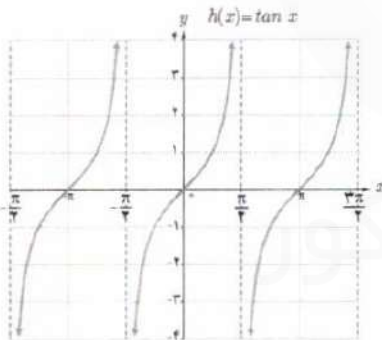
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

تپه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

### خواندنی

بی نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته های مختلف ریاضیات با تغییرات مختلف به کار می رود و معمولاً به معنای «فرا تر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به کار می رود و نشانه آن در ریاضیات  $\infty$  می باشد.

این نماد به صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی نهایت به معنای حدی بی کران است  $\infty \rightarrow x$  یعنی متغیر  $x$  فرا تر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می کند.

بی نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت اند مفهوم فیزیکی بی نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می گوئیم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی نهایت تشکیل می شود. حال اگر دو عدسی یا فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی نهایت تشکیل می شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی شود. یعنی بی نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی نهایت فیزیکی است در ریاضیات می گوئیم «بی نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی نهایت» در نظر گرفته می شود. به عنوان مثال در حد تابع می گوئیم  $\infty \rightarrow x$  یعنی اینکه  $x$  از هر عدد انتخاب شده ای بزرگ تر باشد.

## برخی از قضایای حدهای بی نهایت

☞ قضیه ۱: اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد: آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ عددی زوج باشد,} \\ -\infty & n \text{ عددی فرد باشد.} \end{cases}$$

☞ مثال: با توجه به قضیه فوق می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

☞ قضیه ۲: الف) اگر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و برعکس.

ب) اگر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  و برعکس.

$$\text{☞ مثال: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \quad \text{در نتیجه} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

## کاردرکلاس

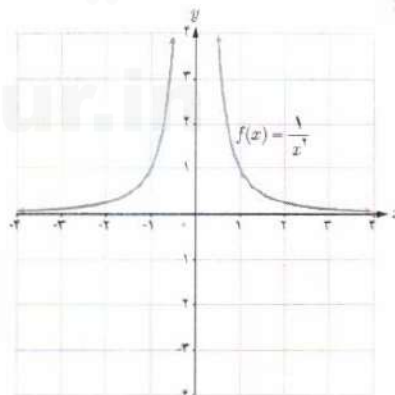
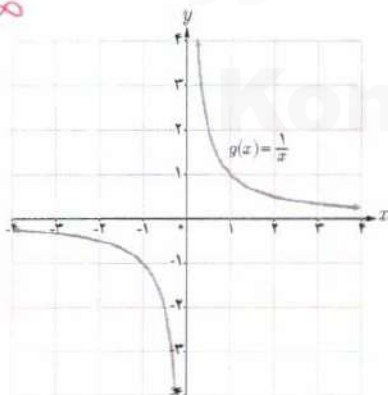
با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید. **ملین قضیه ۱  $n=1$  (مزداست)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad \text{الف)} \\ = +\infty$$



۱- ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی کنیم.

☞ قضیه ۳: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  آن گاه:

(الف) اگر  $L > 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  مثبت باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر  $L < 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  مثبت باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر  $L > 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  منفی باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر  $L < 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  منفی باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

☞ تذکر: قضیه ۳ در حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.

☞ مثال: هزینه پاک‌سازی  $x$  درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی، با ضابطه  $f(x) = \frac{255x}{100-x}$  محاسبه می‌شود که در آن  $x$  درصد آلودگی و  $f(x)$  هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع  $(0, 100]$  می‌باشد. مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه  $63/75$  میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها  $4/845 = f(95)$  و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{255x}{100-x} = +\infty$$

توجه به قضیه فوق داریم: و این بدان معنا است که با نزدیک شدن  $x$  به عدد ۱۰۰ مقدار  $f(x)$  از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد لذا نمی‌توان صد درصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.



سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (تکاس سید مهدی حسینی)

☞ مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$  را به دست آورید.

حل: از آنجا که  $4-x^2 = (2-x)(2+x)$  وقتی  $x$  در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty \quad \text{طبق بند (الف) قضیه فوق}$$

از طرفی  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3$



فصل سوم : جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۵۳

مثال : حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$  را به دست آورید.

حل : وقتی  $x$  در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر  $-1$  و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در

همسایگی راست صفر  $\sin x$  مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

مثال : حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$  را به دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به صورت  $\frac{0}{0}$  در می آید و چون  $x \neq -1$  پس می توان صورت و مخرج کسر را بر  $x+1$  تقسیم کرد.

داریم :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

### کاردرکلاس

جدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1-2}{-2+2} = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[2]-2}{2-2} = \frac{1-2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

قضیه ۴ : اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  (و یا  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ) آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

تذکره : قضیه فوق در حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.

مثال : حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$  را به دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس های قبل به صورت شهودی دیده شد که :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = -\infty$  از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \text{ طبق قضیه فوق } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

نهیہ کنندہ:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

۱. توابع  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  و  $g(x) = x + 1$  را در نظر بگیرید.

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} g(n) = 0 + 1 = 1$$

الف) حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  را به دست آورید.ب) تابع  $f + g$  را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} ((f + g)(x))$  را محاسبه کنید.

$$(f + g)(x) = \frac{1}{x^2} + (x + 1) = \frac{x^2 + x^2 + 1}{x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{n^2 + n^2 + 1}{n^2} = +\infty$$

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲. تابع  $f \times g$  را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$  را محاسبه کنید و ارتباط آن را با  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  بیان کنید.

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{x^2} \times (x + 1) = \frac{x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} (f \times g)(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} (f \times g)(n) = -\infty$$

همان طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۵: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \quad \text{ب) اگر } L > 0 \text{ آن گاه}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \quad \text{ب) اگر } L < 0 \text{ آن گاه}$$

تذکر: قضیه فوق برای حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.

مثال: برای به دست آوردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1 + \frac{1}{x^2})$  از آنجا که  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر  $+\infty$  می‌شود.

مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$  را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت  $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}$  از طرفی  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  و با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر  $+\infty$  خواهد شد.

۱- این قضیه در حالت  $L = 0$  در این کتاب بررسی نمی‌شود و در ارزشیابی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت  $-\infty - \infty$  در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

$$\text{اگر } \lim_{n \rightarrow a} g(n) = L, \lim_{n \rightarrow a} f(g(n)) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f+g)(n) = -\infty \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f \cdot g)(n) = -\infty \quad \text{ب) اگر } L > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f \cdot g)(n) = +\infty \quad \text{ب) اگر } L < 0$$

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت ۵۵

کلیدر کلاس

۱) قضیه ۵، را در حالتی که  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  بازنویسی کنید.

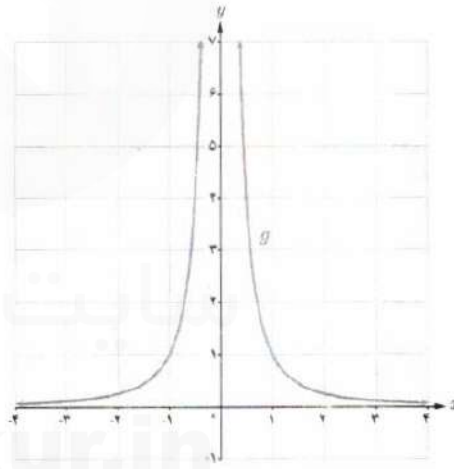
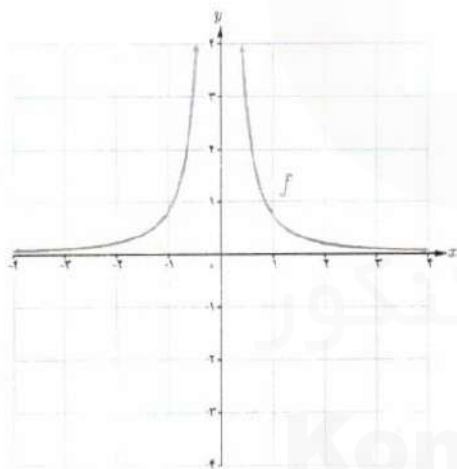
۲) حاصل حدود زیر را به دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مجانِب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  خط  $x=0$  را در هر دو منحنی، مجانِب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف:

خط  $x=a$  را مجانِب قائم نمودار تابع  $f(x)$  گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

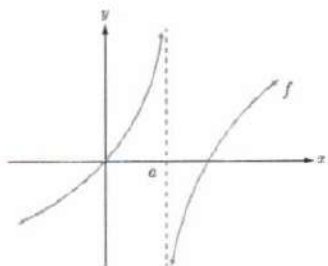
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

تجربه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

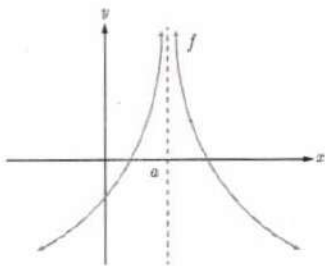
۵۶

مثال: در هر یک از شکل‌های زیر خط  $x = a$  یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



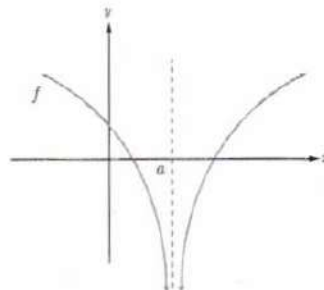
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



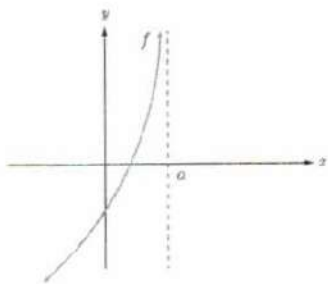
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



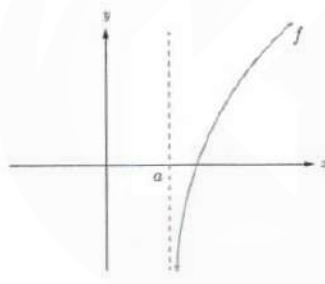
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مثال: کدام یک از خطوط  $x = -1$  و  $x = 3$  مجانب‌های قائم تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$  می‌باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$  می‌توانستیم بگوییم  $x = -1$  نیز مجانب قائم منحنی تابع  $f$  است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

خط  $x = 3$  شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع  $f$  فقط یک مجانب قائم به صورت  $x = -1$  دارد.

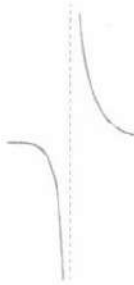
فصل سوم : جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۵۷

مثال : نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$  در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



پس خط  $x=0$  مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت روبه رو خواهد بود.

کاردز کلاس

$$x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

مجانب های قائم تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$  را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{9 - 9 + 2}{9 - 3 - 6} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{4 + 6 + 2}{4 + 2 - 6} = \frac{12}{0} = \infty$$

مجاوب قائم  
 $\begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$

سوال 1

(الف)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+n^2} = \sqrt{3}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$   
 طبق تقویت  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+n^2}}{n^2} = +\infty$

تهیه کننده:

58

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تمرین

1 با استفاده از قضایای حدی نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

(الف)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{|2+x|}$

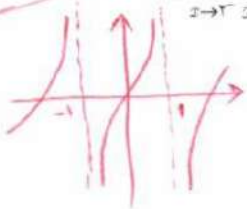
(ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2} |5-x| = \sqrt{\frac{7}{2}} \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{|2+x|} = +\infty$

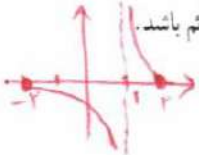
$\lim_{n \rightarrow 2} (1) = 1$   
 $\lim_{n \rightarrow 2} (n-2)^2 = 0^+$   
 طبق تقویت  $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{1}{(n-2)^2} = +\infty$

2 حدهای زیر را محاسبه کنید.

(الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0} = -\infty$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \frac{9+6-1}{9+3-12} = \frac{14}{0} = -\infty$   
 (ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{4}{0} = \frac{4}{0} = -\infty$



3 نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



4 نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن  $\{1\} - [2, 2]$  بوده و دارای مجانب قائم باشد.

5 مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(الف)  $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

(ب)  $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

$x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$  اینها مجانب قائم است

$x=3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{5}{0} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0} = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-n} = \frac{1}{1} = 1$

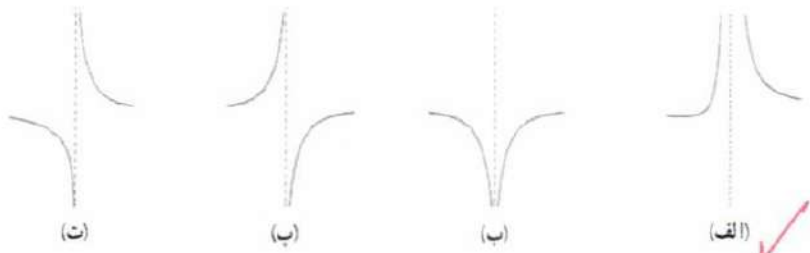
$x=3$  مجانب قائم است



6 نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$  در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

مجانب قائم  $x=0$  و  $D_f = (-\infty, 0)$

7 کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$  را در همسایگی  $x=1$  نمایش می‌دهد؟ چرا؟



$\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$   
 $\lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

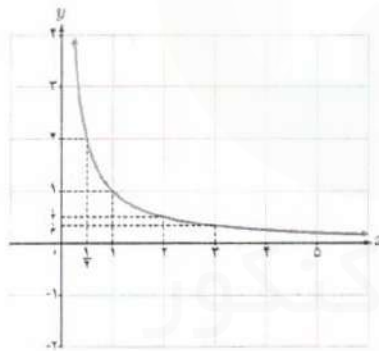
۲

درس

## حد در بی نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن  $x$  به چه عددی  $f(x)$  به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود.  
در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (تزدیک شدن)  $x$  مقادیر  $f(x)$  چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت



نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در بازه  $(0, +\infty)$

در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$x$	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	۱۰ <sup>۳</sup>	۱۰ <sup>۵</sup>	۱۰ <sup>۶</sup>
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$

۲ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{5}$  کمتر شود  $x$  را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{10}$  کمتر شود  $x$  را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر

بگیریم؟ ۱۰

۶-

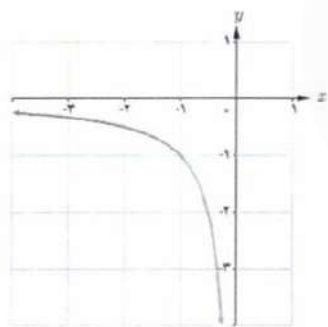
۱۰۰ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{100}$  کوچک تر شود  $x$  را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

۱۰۱ آیا فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها را می توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟ **بله با اتمی - اعدادی بزرگ**

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد در صورتی که  $x$  به اندازه کافی بزرگ اختیار شود می توان  $f(x)$  را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به سمت مثبت بی نهایت میل کند

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ . می نویسیم .}$$

کار در کلاس



نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در بازه  $(-\infty, 0)$  در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$x$	-1	-2	-5	-10	-100	-10 <sup>2</sup>	-10 <sup>3</sup>	...
$f(x)$	-1	-1/2	-1/5	-1/10	-1/100	-1/10 <sup>2</sup>	-1/10 <sup>3</sup>	...

۱ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  از محور  $x$  ها کمتر از  $\frac{1}{100}$  شود،  $x$  را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۱۰۰

۱ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{1000}$  کمتر شود،  $x$  را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۱۰۰۰

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و جدول بالا می توان مشاهده کرد اگر  $x$  به اندازه کافی کوچک تر (یعنی از هر عدد منفی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ : می نویسیم .}$$



فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت ۶۱

تذکره: منظور از  $x \rightarrow \pm\infty$  آن است که  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

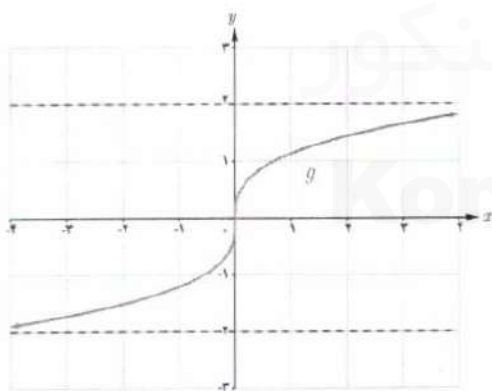
تعریف:

■ اگر تابع  $f(x)$  در بازه‌ای مانند  $(a, +\infty)$  تعریف شده باشد گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر  $l$  است و می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  هرگاه بتوان با اختیار  $x$  های به قدر کافی بزرگ، فاصله  $f(x)$  از  $l$  را به هر اندازه کوچک کرد.

■ اگر تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, a)$  تعریف شده باشد. می‌گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر  $l$  است و می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  هرگاه بتوان با اختیار  $x$  های به قدر کافی کوچک فاصله  $f(x)$  را از  $l$  به هر اندازه کوچک کرد.

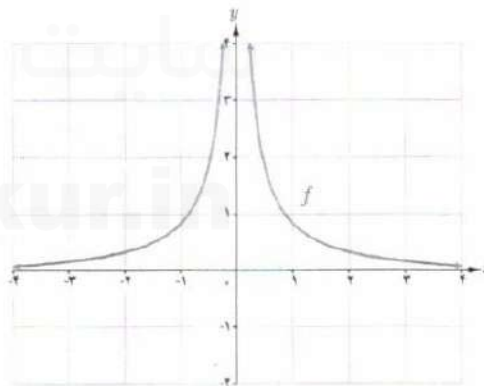
کاردرکلاس

با استفاده از نمودارهای  $f$  و  $g$  حدهای زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

❖ قضیه ۶: اگر  $a$  عددی حقیقی و  $n$  عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

❖ مثال: حاصل هر یک از حدود  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{2x^3}$  و  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2}$  برابر صفر است.

❖ قضیه ۷: اگر  $L_1$  و  $L_2$  اعداد حقیقی و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$  آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$$

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0 \text{ با فرض})$$

❖ تذکر: قضیه فوق وقتی  $x$  به سمت  $-\infty$  میل می کند نیز برقرار است.

❖ مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{5}{x^3} \right)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4}$$

حل:

الف) یا استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

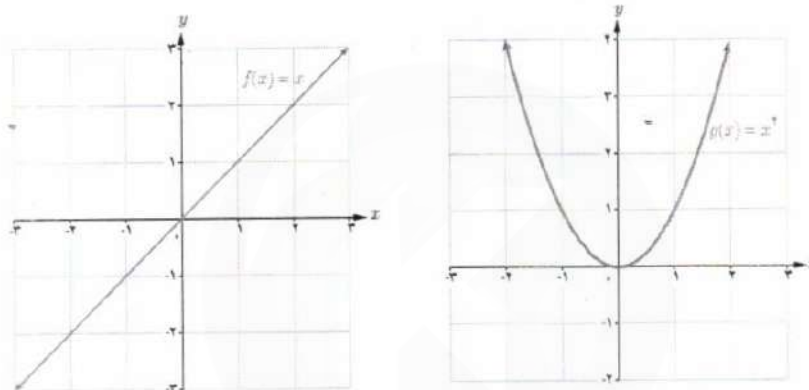
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$$

ب) یا استفاده از قسمت ب) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

### حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی  $x$  به  $+\infty$  میل می کند، ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر  $x$  مقدارهای  $f(x)$  به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر  $f(x)$  از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ تر شوند همان طور که در نمودار توابع  $f(x) = x$  و  $g(x) = x^2$  در شکل زیر دیده می شود با افزایش مقادیر  $x$  مقادیر  $f(x)$  و  $g(x)$  از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ تر می شود.



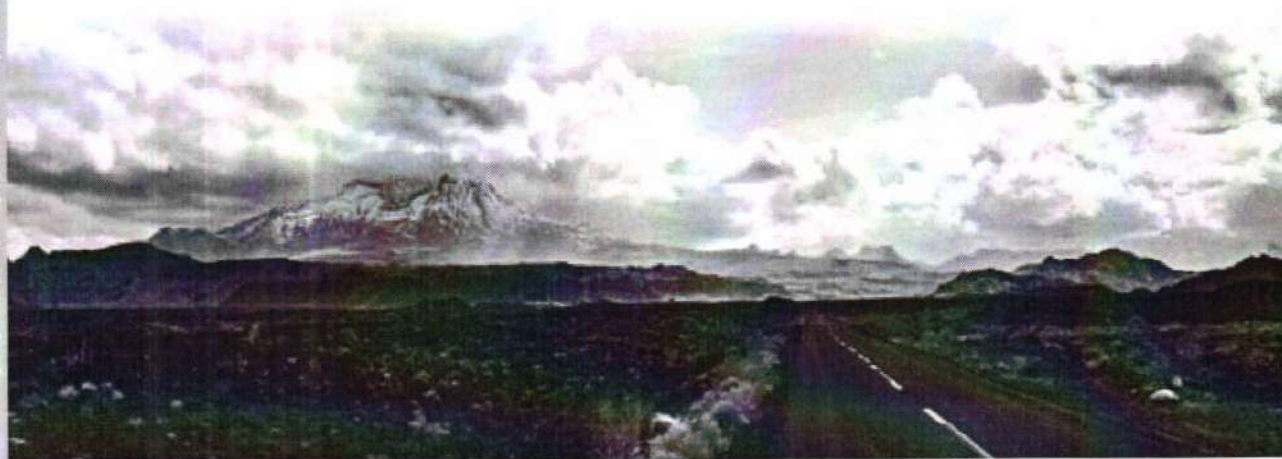
همچنین با کوچک شدن مقادیر  $x$ ، مقادیر  $f(x)$  از هر عدد دلخواه منفی کوچک تر می شود. در نمودارهای بالا می توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر  $x$  مقادیر  $f(x)$  از هر عدد منفی دلخواه کوچک تر و مقادیر  $g(x)$  از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود. در حالت کلی برای یک تابع  $f$  که در یک بازه  $(a, +\infty)$  تعریف شده است اگر با میل کردن  $x$  به سمت  $+\infty$  نیز به سمت

$$+\infty \text{ میل کند می گوئیم حد این تابع در } +\infty \text{ برابر } +\infty \text{ است و می نویسیم } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{برای مثال } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

همچنین اگر با میل کردن  $x$  به سمت  $+\infty$ ،  $f(x)$  به سمت  $-\infty$  میل کند می گوئیم حد این تابع در  $+\infty$  برابر  $-\infty$  است و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ به عنوان مثال } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$



یعنی کاهش مقدار  $x$  مقادیر  $f(x)$  از هر عدد (مقدار مثبتی بزرگتری است)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$   
 یعنی کاهش مقدار  $x$  مقادیر  $f(x)$  از هر عدد (مقدار کوچکتری است)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

۶۴

کاردر کلاس

۱ مفاهیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  را بیان کنید.

۲ با توجه به نمودار توابع  $y = x^3$  و  $y = x$  حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

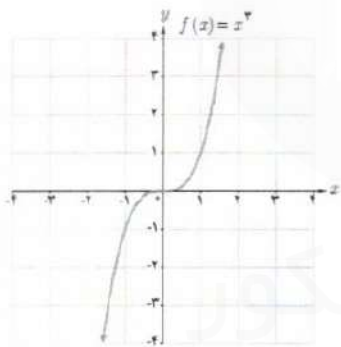
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

تابع  $f(x) = x^3$  را با نمودار روبه رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

$x$	$\dots \leftarrow$	$-10^6$	$-1000$	$-100$	$-1$	$1$	$10$	$100$	$1000$	$10^6$	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	$-10^{18}$	$-10^9$	$-10^6$	$-1$	$1$	$1000$	$10^7$	$10^9$	$10^{18}$	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش)  $x$  مقدار  $f(x)$  چه تغییری می کند؟ با افزایش (کاهش)  $x$  مقادیر  $f(x)$  افزایش (کاهش) می یابند.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

۳ در مورد حدهای  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$  چه می توان گفت؟

فصل سوم : جدهای ناستناهی - حد در بی نهایت

❖ قضیه ۸ : اگر  $n$  عددی طبیعی باشد آن گاه

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ (ب) اگر } n \text{ فرد باشد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \text{ (الف) اگر } n \text{ زوج باشد :}$$

❖ قضیه ۹ : اگر  $l$  عددی حقیقی و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۹ در حالتی که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ قضیه ۱۰ : اگر  $l$  عددی حقیقی و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  آن گاه.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$       ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$

حل :

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

به طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  در  $\pm\infty$  برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

شکل کلی  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

الف) اگر  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  و  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  دو چند جمله‌ای

باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{a_n n^n + a_{n-1} n^{n-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + \dots + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n n^n}{b_m n^m} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} n^{n-m}$$

در هر یک از حالت‌های  $m > n$  و  $m < n$  و  $m = n$  حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

اگر  $m > n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

اگر  $m = n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{a_n}{b_m}$

اگر  $m < n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^7 - 7x + 1}{2x^7 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^7}{2x^7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^7 + x - 1}{4x^7 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^7}{4x^7} = -\frac{3}{4}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^7 - x + 1}{4x^7 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^7}{4x^7} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



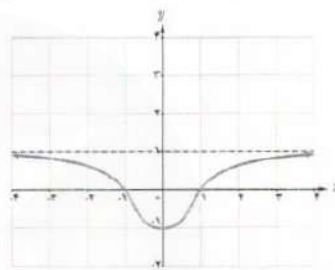
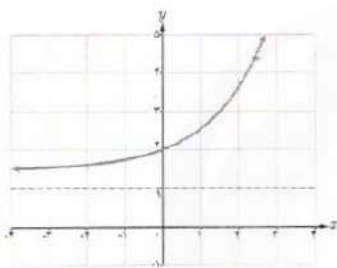
## مجانب افقی

خط  $y = L$  را مجانب افقی نمودار  $y = f(x)$  می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

برقرار باشد

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط  $y = 1$  مجانب افقی نمودارها است. چرا؟



مثال: مجانب‌های افقی و قائم تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

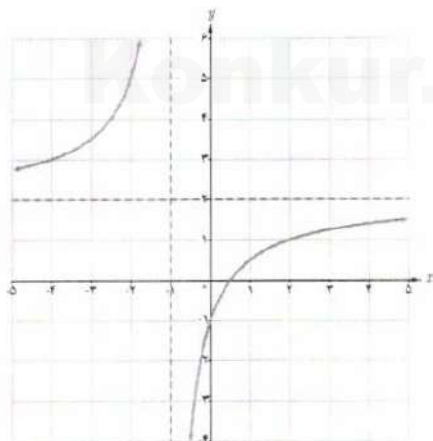
حل: برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در  $\pm\infty$  حساب کنیم داریم:

پس خط  $y = 2$  مجانب افقی تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$$

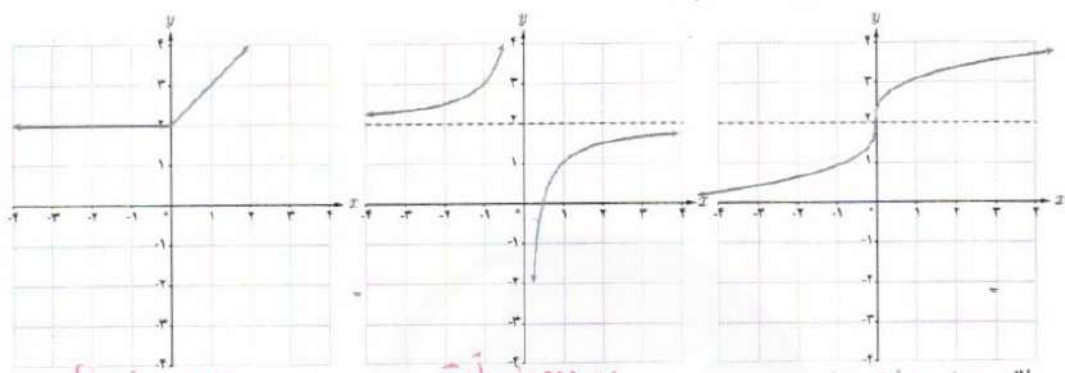
این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط  $x = -1$  مجانب قائم تابع است زیرا:

نمودار تابع به صورت زیر است.



کار در کلاس

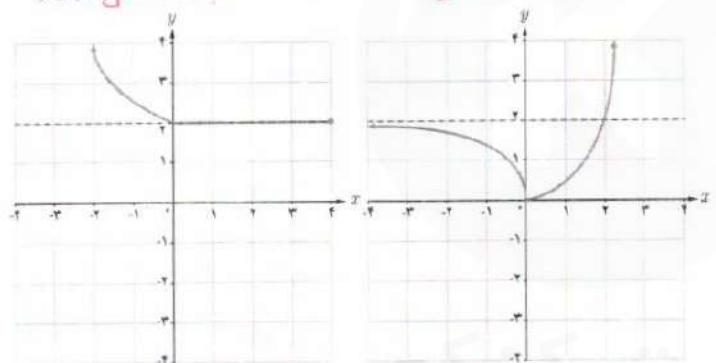
۱ کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



ب) **میان افقی ندارد**

ب)  **$y=2$  مجانب افقی**

الف) **میان افقی ندارد**



ث) **میان افقی ندارد**

ت)  **$y=2$  مجانب افقی**

توجه کننده:

گروه ریاضی، مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{n+1}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\infty} = 0$

میان افقی  $y=0$

ب)  $g(x) = x^2$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^2 = \pm\infty$

میان افقی ندارد.

پ)  $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \pm\infty$

میان افقی ندارد.



نمونه

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

هر چه مقدار  $x$  بزرگتر شود مقدار  $f(x)$  به قدر  $2$  نزدیک می‌شود.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

هر چه مقدار  $x$  کوچکتر شود مقدار  $f(x)$  به قدر  $4$  نزدیک می‌شود.

۲ برای تابع  $f$  که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید :

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

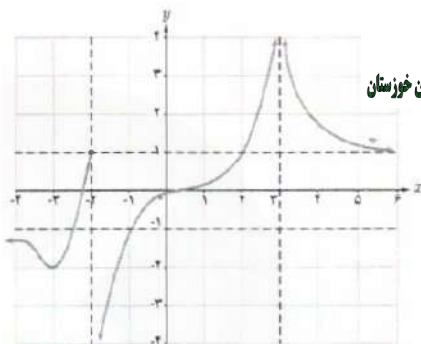
پ)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

ج) مجانب‌های افقی و قائم

مجاانب قائم  $x = -2, x = 3$   
مجاانب افقی  $y = 1, y = -1$



نمودار گنجه:

گروه ریاضی منبع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳ حاصل حدود زیر را به دست آورید :

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

ب)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = 0$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{4} = \mp\infty$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید :

الف)  $y = \frac{2x-1}{x-3}$    
 مجانب قائم  $x = 3$   
 مجانب افقی  $y = 2$

ب)  $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$    
 مجانب قائم  $x = 1, x = -1$   
 مجانب افقی  $y = -2$

ب)  $y = \frac{x}{x^2-4}$    
 مجانب قائم  $x = 2, x = -2$   
 مجانب افقی  $y = 0$

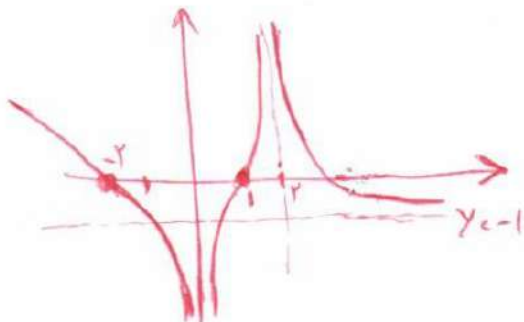
ت)  $y = \frac{2x}{1+x^2}$    
 مجانب قائم ندارد  
 مجانب افقی  $y = 0$

۵ نمودار تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف)  $f(1) = f(-2) = 0$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

پ) خط  $y = -1$  مجانب افقی آن باشد.

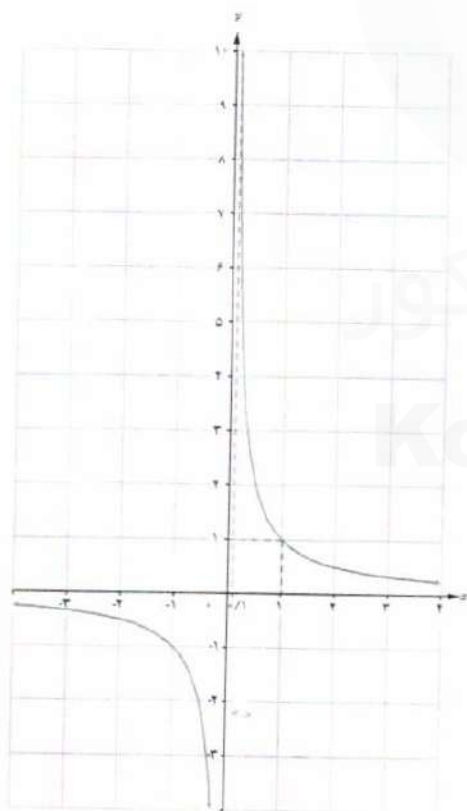


## حدهای نامتناهی

درس

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که  $l$  حد تابع  $f$  در نقطه  $a$  است هرگاه بتوانیم مقادیر  $f(x)$  را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به  $l$  نزدیک کنیم به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی به  $a$  (از دو طرف  $a$ ) نزدیک کرده باشیم اما  $x$  برابر  $a$  نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای  $f(x) = \frac{1}{x}$  آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست  $x = 0$  بررسی کنیم.

فصل سوم : جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۴۷

۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر  $x$  نشان می دهد آن را تکمیل کنید.

$x$	۰/۸	۰/۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۰۸	... →	۰
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰.۰۰۰	... →	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم  $f(x)$  از یک میلیون بزرگ تر شود مقدار  $x$  از چه عددی باید کوچک تر شود؟ **یک میلیونیم (۱۰<sup>-۶</sup>)**

۳ وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می شوند؟ چرا؟ **خیر**  
**وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر  $f(x)$  مرتباً بزرگ تر می شوند**  
 با توجه به این فعالیت مشاهده می شود که وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر  $f(x)$  بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به بیان دیگر می توان  $f(x)$  را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ تر کرد به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می نویسیم:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$

تذکره: این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگ تر باشد.

### کاردرکلاس

$$\text{برای تابع } f(x) = \frac{1}{x}$$

الف) جدول زیر را کامل کنید:

$x$	$\frac{1}{2}$	-۰/۲	-۰/۸	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱	... →	۰
$f(x)$	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	... →	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار  $f(x)$  از  $10^6$  کوچک تر شود  $x$  باید چگونه انتخاب شود؟ **باید  $x < 10^{-6}$**

ب) وقتی  $x$  از سمت چپ به صفر نزدیک شود  $f(x)$  چه تغییری می کند؟ **مقادیر  $f(x)$  مرتباً کوچک و کوچکتر می شوند**  
**اما به عدد خاصی نزدیک نمی شوند**  
 ت) در مورد  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$  چه می توان گفت؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

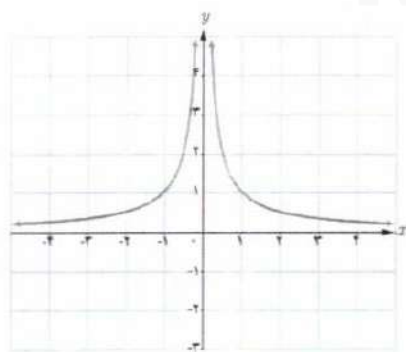
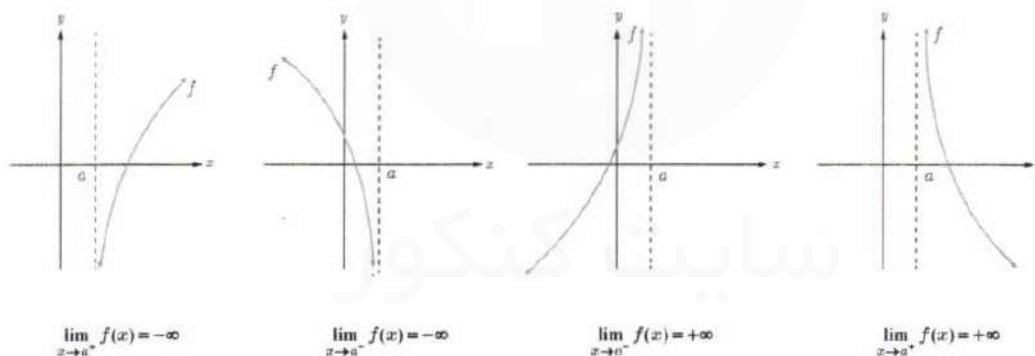
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه‌ی قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

### تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  بدین معنی است که می‌توانیم  $f(x)$  را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که  $x$  را از سمت راست به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  بدین معنی است که می‌توانیم  $f(x)$  را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که  $x$  را از سمت چپ به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

تذکره: تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



مثال: نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  در شکل رویه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع  $f$  را در همسایگی محذوف نقطه  $x = 0$  بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید:

فصل سوم : حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۴۹

$x$	$-0.5$	$-0.1$	$-0.01$	$-0.001$	$\dots \rightarrow$	$0$	$\leftarrow \dots$	$0.001$	$0.01$	$0.1$	$0.5$
$f(x)$	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow \dots$	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲

مشاهده می شود با نزدیک کردن  $x$  به اندازه کافی به صفر، مقدارهای  $f(x)$  را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین  $f(x)$  از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

تعریف :

فرض کنید تابع  $f$  در همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  یعنی اینکه می توانیم  $f(x)$  را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حد در مورد تابع هایی که وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می شود و مقدار تابع خیلی کوچک تر می شود در زیر وجود دارد.

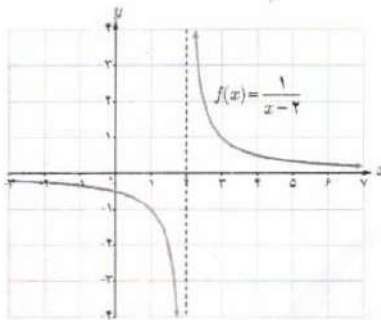
تعریف :

فرض کنید تابع  $f$  در همسایگی محذوف  $a$  تعریف شده باشد در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  یعنی اینکه می توانیم مقدارهای  $f(x)$  را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که  $x$  را به اندازه کافی به  $a$  نزدیک کرده باشیم.

مثال : برای حد تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  در نقطه  $x = 0$  می توان گفت :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

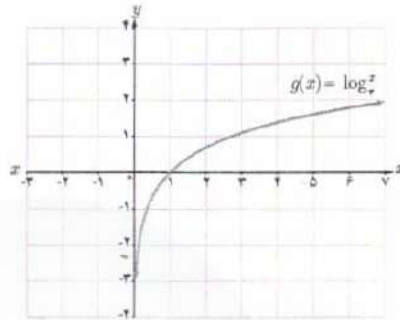
مثال : در مورد حد تابع  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  در نقطه  $x = 0$  می توان گفت :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$

نمودار توابع  $f, g, h$  در شکل های زیر داده شده اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

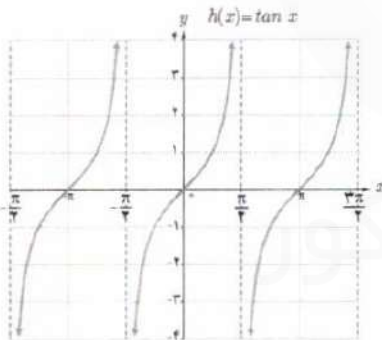
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

### خواندنی

بی نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته های مختلف ریاضیات با تغییرات مختلف به کار می رود و معمولاً به معنای «فرا تر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به کار می رود و نشانه آن در ریاضیات  $\infty$  می باشد.

این نماد به صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی نهایت به معنای حدی بی کران است  $\infty \rightarrow x$  یعنی متغیر  $x$  فرا تر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می کند.

بی نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت اند مفهوم فیزیکی بی نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می گوئیم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی نهایت تشکیل می شود. حال اگر دو عدسی یا فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی نهایت تشکیل می شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی شود. یعنی بی نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی نهایت فیزیکی است در ریاضیات می گوئیم «بی نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی نهایت» در نظر گرفته می شود. به عنوان مثال در حد تابع می گوئیم  $\infty \rightarrow x$  یعنی اینکه  $x$  از هر عدد انتخاب شده ای بزرگ تر باشد.

## برخی از قضایای حدهای بی نهایت

☞ قضیه ۱: اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد: آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ عددی زوج باشد,} \\ -\infty & n \text{ عددی فرد باشد.} \end{cases}$$

☞ مثال: با توجه به قضیه فوق می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

☞ قضیه ۲: الف) اگر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و برعکس.

ب) اگر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  و برعکس.

$$\text{☞ مثال: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \quad \text{در نتیجه} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

## کاردرکلاس

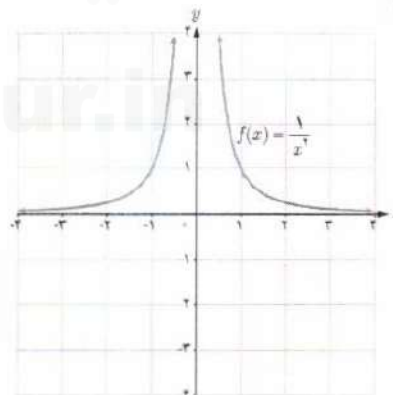
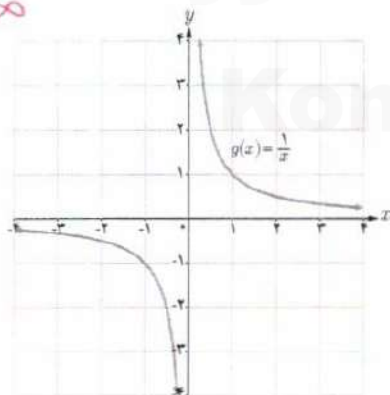
با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید. **ملین قضیه ۱  $n=1$  (مزداست)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad \text{الف)} \\ = +\infty$$



۱- ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی کنیم.

☞ قضیه ۳: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  آن گاه:

الف) اگر  $L > 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  مثبت باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر  $L < 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  مثبت باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر  $L > 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  منفی باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر  $L < 0$  و مقادیر  $g(x)$  در یک همسایگی محذوف  $a$  منفی باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

☞ تذکر: قضیه ۳ در حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.

☞ مثال: هزینه پاک‌سازی  $x$  درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی، با ضابطه  $f(x) = \frac{255x}{100-x}$  محاسبه می‌شود که در آن  $x$  درصد آلودگی و  $f(x)$  هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع  $(0, 100]$  می‌باشد. مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه  $63/75$  میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها  $4/845 = f(95)$  و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{255x}{100-x} = +\infty$$

توجه به قضیه فوق داریم: و این بدان معنا است که با نزدیک شدن  $x$  به عدد ۱۰۰ مقدار  $f(x)$  از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد لذا نمی‌توان صد درصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.



سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (تکاس سید مهدی حسینی)

☞ مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$  را به دست آورید.

حل: از آنجا که  $4-x^2 = (2-x)(2+x)$  وقتی  $x$  در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty \quad \text{طبق بند الف) قضیه فوق}$$

از طرفی  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3$



فصل سوم : جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۵۳

مثال : حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$  را به دست آورید.

حل : وقتی  $x$  در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر  $-1$  و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در

همسایگی راست صفر  $\sin x$  مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

مثال : حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$  را به دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به صورت  $\frac{0}{0}$  در می آید و چون  $x \neq -1$  پس می توان صورت و مخرج کسر را بر  $x+1$  تقسیم کرد.

داریم :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

### کاردرکلاس

جدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1+2}{-2+2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[2]-2}{2-2} = \frac{1-2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

قضیه ۴ : اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  (و یا  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ) آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.

مثال : حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$  را به دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس های قبل به صورت شهودی دیده شد که :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = -\infty$  از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \text{ طبق قضیه فوق } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

۱. توابع  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  و  $g(x) = x + 1$  را در نظر بگیرید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0 + 1 = 1$$

الف) حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  را به دست آورید.ب) تابع  $f + g$  را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} ((f + g)(x))$  را محاسبه کنید.

$$(f + g)(x) = \frac{1}{x^2} + (x + 1) = \frac{x^2 + x^2 + 1}{x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n^2 + 1}{n^2} = +\infty$$

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲. تابع  $f \times g$  را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times g(x)$  را محاسبه کنید و ارتباط آن را با  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  بیان کنید.

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{x^2} \times (x + 1) = \frac{x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \times g)(n) = -\infty$$

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۵: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \quad \text{ب) اگر } L > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \quad \text{ب) اگر } L < 0$$

تذکر: قضیه فوق برای حالتی که  $x \rightarrow a^+$  یا  $x \rightarrow a^-$  نیز برقرار است.مثال: برای به‌دست آوردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1 + \frac{1}{x})$  از آنجا که  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 1 = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر  $+\infty$  می‌شود.مثال: حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$  را به‌دست آورید.حل: می‌توان نوشت  $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}$  از طرفی  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0$  و با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر  $0$  خواهد شد.۱- این قضیه در حالت  $L = 0$  در این کتاب بررسی نمی‌شود و در ارزشیابی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت  $-\infty$  در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

اگر  $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = L$  و  $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = -\infty$

الف)  $\lim_{n \rightarrow a} (f+g)(n) = -\infty$

ب) اگر  $L > 0$  و  $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = -\infty$

ج) اگر  $L < 0$  و  $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = -\infty$

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت ۵۵

کلیدر کلاسی

تپیه کننده:

۱) قضیه ۵، را در حالتی که  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  بازنویسی کنید.

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

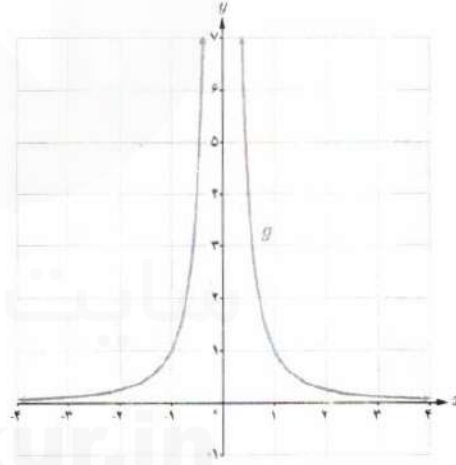
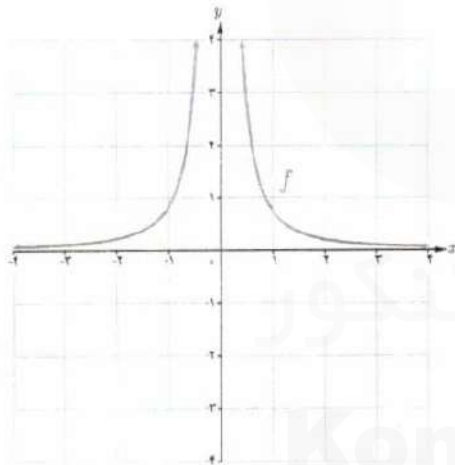
۲) حاصل حدود زیر را به دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$  ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x}) = +\infty$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$  ت)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-\cos 2x}{x} = \frac{2-\cos(0)}{0^-} = \frac{2-1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

مجانِب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$  خط  $x=0$  را در هر دو منحنی، مجانِب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف:

خط  $x=a$  را مجانِب قائم نمودار تابع  $f(x)$  گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

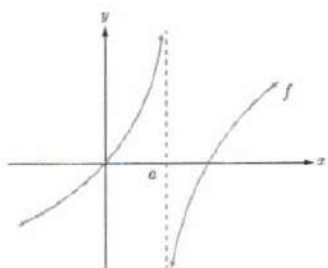
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

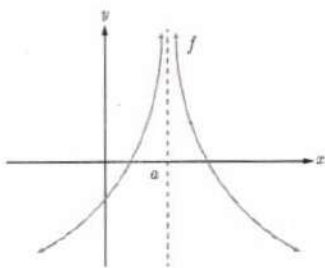
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

مثال: در هر یک از شکل‌های زیر خط  $x = a$  یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



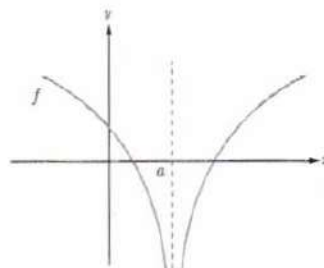
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



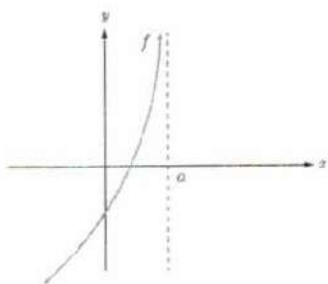
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

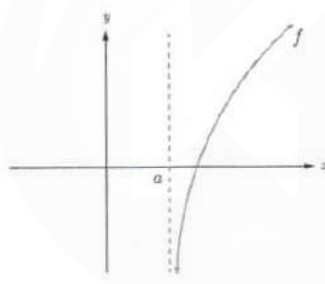


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

مثال: کدام یک از خطوط  $x = -1$  و  $x = 3$  مجانب‌های قائم تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$  می‌باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  می‌توانستیم بگوییم  $x = -1$  نیز مجانب قائم منحنی تابع  $f$  است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

خط  $x = 3$  شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع  $f$  فقط یک مجانب قائم به صورت  $x = -1$  دارد.

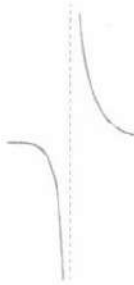
فصل سوم : جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۵۷

مثال : نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$  در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



پس خط  $x=0$  مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت روبه رو خواهد بود.

کاردز کلاس

$$x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

مجانب های قائم تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$  را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{9 - 9 + 2}{9 - 3 - 6} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{4 + 6 + 2}{4 + 2 - 6} = \frac{12}{0} = \infty$$

مجاوب قائم  
 $\begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$

سوال 1

(الف)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+n^2} = \sqrt{3}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$   
 طبق تقویت  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+n^2}}{n^2} = +\infty$

نهیہ کننده:

58

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تمرین

1 با استفاده از قضایای حدی نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

(الف)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{|2+x|}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

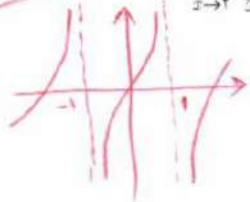
$\lim_{x \rightarrow -2} |5-x| = \sqrt{\frac{5-(-2)}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$   $\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow 2} (1) = 1$   $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{1}{(n-2)^2} = +\infty$

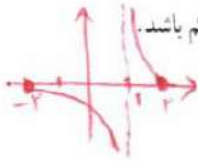
2 حدهای زیر را محاسبه کنید.

(الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0} = -\infty$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \frac{9+6-1}{9+3-12} = \frac{14}{0} = -\infty$  (پ)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{4}{9-9} = \frac{4}{0} = -\infty$

3 نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



4 نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن  $\{1\} - [2, -2]$  بوده و دارای مجانب قائم باشد.



5 مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(الف)  $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

(ب)  $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

$x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$  اینها مجانب قائم است

$x=3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0} = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-n} = \frac{1}{1} = 1$

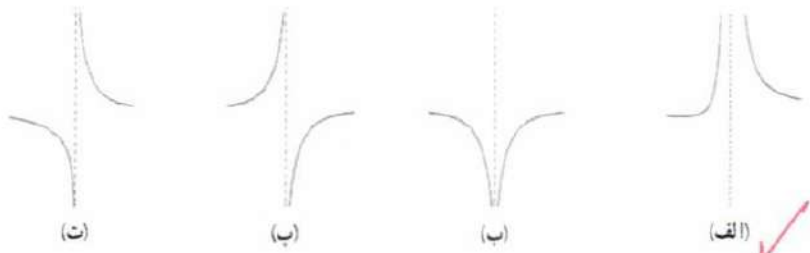
$x=3$  مجانب قائم است

6 نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$  در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟



مجانب قائم  $x=0$   $D_f = (-\infty, 0)$

7 کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$  را در همسایگی  $x=1$  نمایش می‌دهد؟ چرا؟



$\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$   
 $\lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

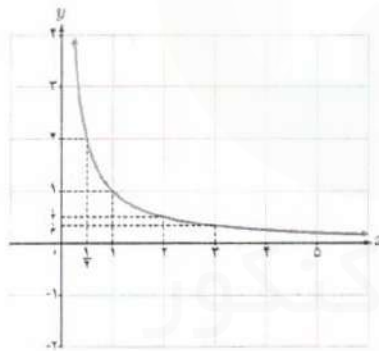
۲

درس

## حد در بی نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن  $x$  به چه عددی  $f(x)$  به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود.  
در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (تزدیک شدن)  $x$  مقادیر  $f(x)$  چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت



نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در بازه  $(0, +\infty)$

در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$x$	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	۱۰ <sup>۳</sup>	۱۰ <sup>۵</sup>	۱۰ <sup>۶</sup>
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$

۲ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{5}$  کمتر شود  $x$  را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{10}$  کمتر شود  $x$  را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر

بگیریم؟ ۱۰

۶-

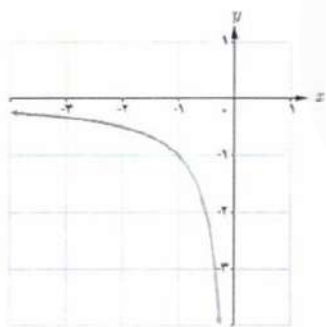
۱۰۰ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{100}$  کوچک تر شود  $x$  را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

۱۰۱ آیا فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها را می توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟ **بله با اتمی - اعدادی بزرگ**

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد در صورتی که  $x$  به اندازه کافی بزرگ اختیار شود می توان  $f(x)$  را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به سمت مثبت بی نهایت میل کند

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ . می نویسیم .}$$

کار در کلاس



نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در بازه  $(-\infty, 0)$  در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$x$	-1	-2	-5	-10	-100	-10 <sup>2</sup>	-10 <sup>3</sup>	...
$f(x)$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10^2}$	$-\frac{1}{10^3}$	...

۱ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  از محور  $x$  ها کمتر از  $\frac{1}{100}$  شود،  $x$  را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۱۰۰

۱ اگر بخواهیم فاصله  $f(x)$  تا محور  $x$  ها از  $\frac{1}{1000}$  کمتر شود،  $x$  را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۱۰۰۰

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و جدول بالا می توان مشاهده کرد اگر  $x$  به اندازه کافی کوچک تر (یعنی از هر عدد منفی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ : می نویسیم .}$$



فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت ۶۱

تذکره: منظور از  $x \rightarrow \pm\infty$  آن است که  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

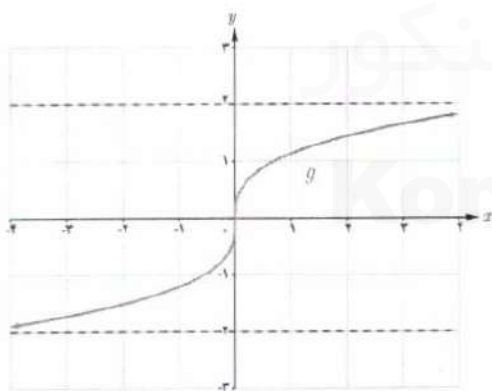
تعریف:

■ اگر تابع  $f(x)$  در بازه‌ای مانند  $(a, +\infty)$  تعریف شده باشد گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر  $l$  است و می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  هرگاه بتوان با اختیار  $x$  های به قدر کافی بزرگ، فاصله  $f(x)$  از  $l$  را به هر اندازه کوچک کرد.

■ اگر تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, a)$  تعریف شده باشد. می‌گوئیم حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر  $l$  است و می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  هرگاه بتوان با اختیار  $x$  های به قدر کافی کوچک فاصله  $f(x)$  را از  $l$  به هر اندازه کوچک کرد.

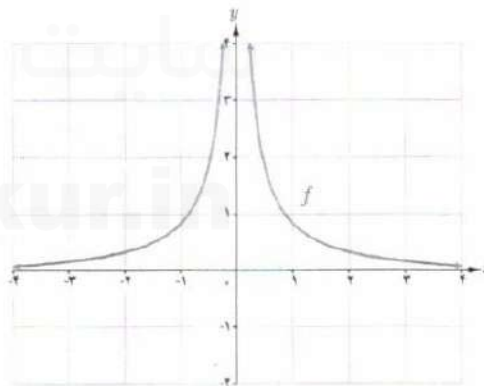
کاردر کلاس

با استفاده از نمودارهای  $f$  و  $g$  حدهای زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

❖ قضیه ۶: اگر  $a$  عددی حقیقی و  $n$  عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

❖ مثال: حاصل هر یک از حدود  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{2x^3}$  و  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2}$  برابر صفر است.

❖ قضیه ۷: اگر  $L_1$  و  $L_2$  اعداد حقیقی و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$  آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0 \text{ با فرض})$$

❖ تذکر: قضیه فوق وقتی  $x$  به سمت  $-\infty$  میل می کند نیز برقرار است.

❖ مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{5}{x^3} \right)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4}$$

حل:

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

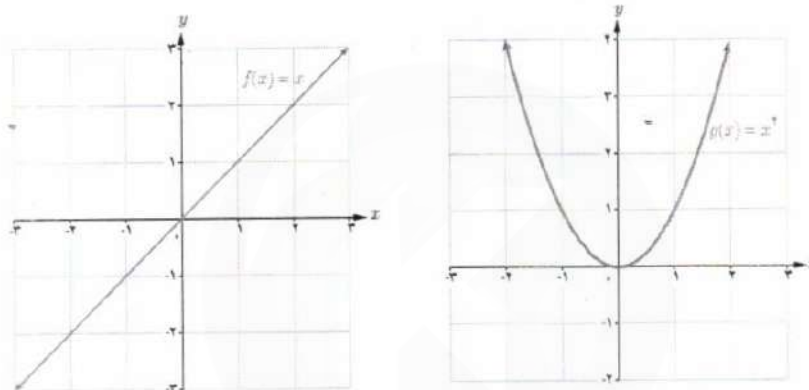
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$$

ب) با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

### حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی  $x$  به  $+\infty$  میل می کند، ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر  $x$  مقدارهای  $f(x)$  به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر  $f(x)$  از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ تر شوند همان طور که در نمودار توابع  $f(x) = x$  و  $g(x) = x^2$  در شکل زیر دیده می شود با افزایش مقادیر  $x$  مقادیر  $f(x)$  و  $g(x)$  از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ تر می شود.



همچنین با کوچک شدن مقادیر  $x$ ، مقادیر  $f(x)$  از هر عدد دلخواه منفی کوچک تر می شود. در نمودارهای بالا می توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر  $x$  مقادیر  $f(x)$  از هر عدد منفی دلخواه کوچک تر و مقادیر  $g(x)$  از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود. در حالت کلی برای یک تابع  $f$  که در یک بازه  $(a, +\infty)$  تعریف شده است اگر با میل کردن  $x$  به سمت  $+\infty$  نیز به سمت

$+\infty$  میل کند می گوئیم حد این تابع در  $+\infty$  برابر  $+\infty$  است و می نویسیم

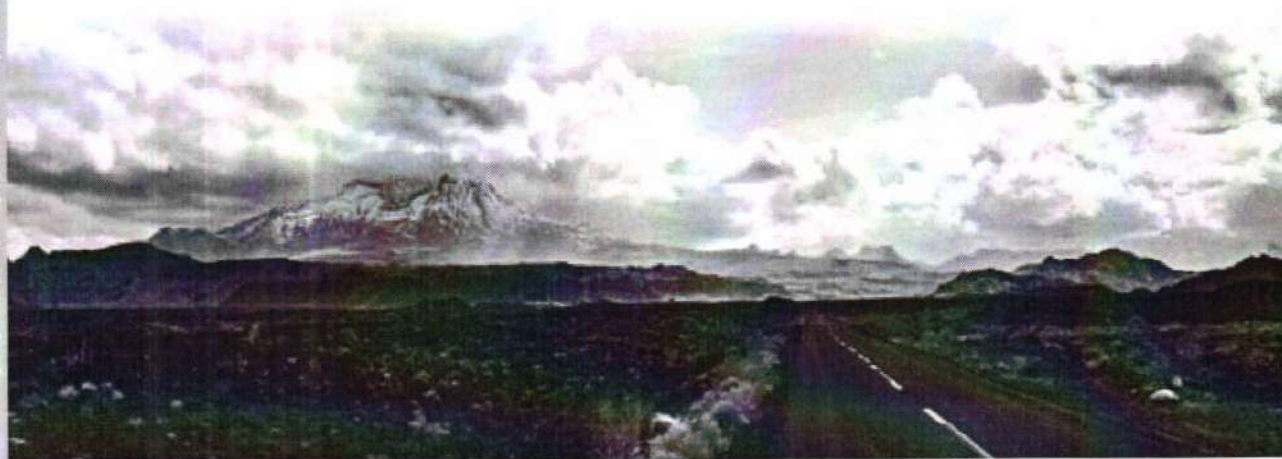
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

برای مثال  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

همچنین اگر با میل کردن  $x$  به سمت  $+\infty$ ،  $f(x)$  به سمت  $-\infty$  میل کند می گوئیم حد این تابع در  $+\infty$  برابر  $-\infty$  است و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

به عنوان مثال  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$



یعنی با کاهش مقدار  $x$  مقادیر  $f(x)$  از هر عدد (مخزنه مثبتی بزرگتری) بزرگتر می شود  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$   
 یعنی با کاهش مقدار  $x$  مقادیر  $f(x)$  از هر عدد (مخزنه کوچکی بزرگتری) کوچکتر می شود  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

۶۴

کاردر کلاس

۱ مفاهیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  را بیان کنید.

۲ با توجه به نمودار توابع  $y = x^3$  و  $y = x$  حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

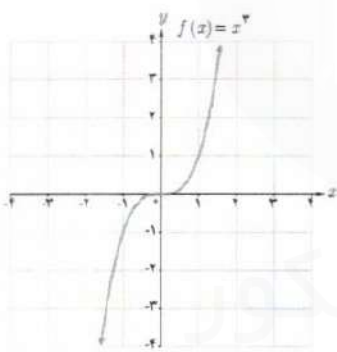
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

تابع  $f(x) = x^3$  را با نمودار روبه رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

$x$	$\dots \leftarrow$	$-10^6$	$-1000$	$-100$	$-1$	$1$	$10$	$100$	$1000$	$10^6$	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	$-10^{18}$	$-10^9$	$-10^6$	$-1$	$1$	$1000$	$10^7$	$10^9$	$10^{18}$	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش)  $x$ ، مقدار  $f(x)$  چه تغییری می کند؟ با افزایش (کاهش)  $x$  مقادیر  $f(x)$  افزایش (کاهش) می یابند.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

۳ در مورد حدهای  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$  چه می توان گفت؟

فصل سوم : جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

❖ قضیه ۸ : اگر  $n$  عددی طبیعی باشد آن گاه

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ (ب) اگر } n \text{ فرد باشد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \text{ (الف) اگر } n \text{ زوج باشد :}$$

❖ قضیه ۹ : اگر  $l$  عددی حقیقی و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۹ در حالتی که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ قضیه ۱۰ : اگر  $l$  عددی حقیقی و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  آن گاه.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$       ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$

حل :

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

به طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  در  $\pm\infty$  برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

شکل کلی  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

کاردر کلاسی

الف) اگر  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  و  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  دو چند جمله‌ای

باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

در هر یک از حالت‌های  $m > n$  و  $m < n$  و  $m = n$  حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

اگر  $m > n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

اگر  $m = n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

اگر  $m < n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2} x = \pm\infty$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = -\frac{1}{2}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$



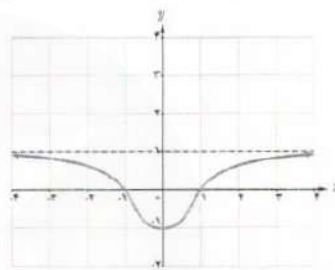
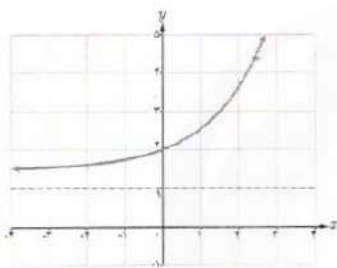
## مجانِب افقی

خط  $y = L$  را مجانب افقی نمودار  $y = f(x)$  می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

برقرار باشد

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط  $y = 1$  مجانب افقی نمودارها است. چرا؟



مثال: مجانب‌های افقی و قائم تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

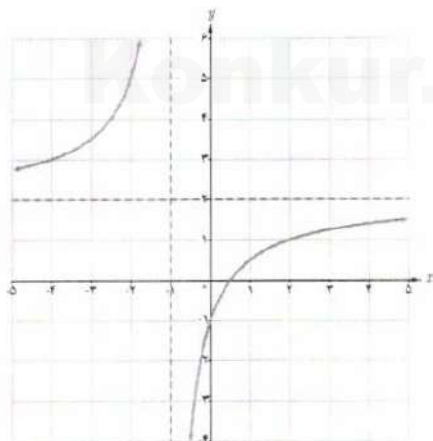
حل: برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در  $\pm\infty$  حساب کنیم داریم:

پس خط  $y = 2$  مجانب افقی تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$$

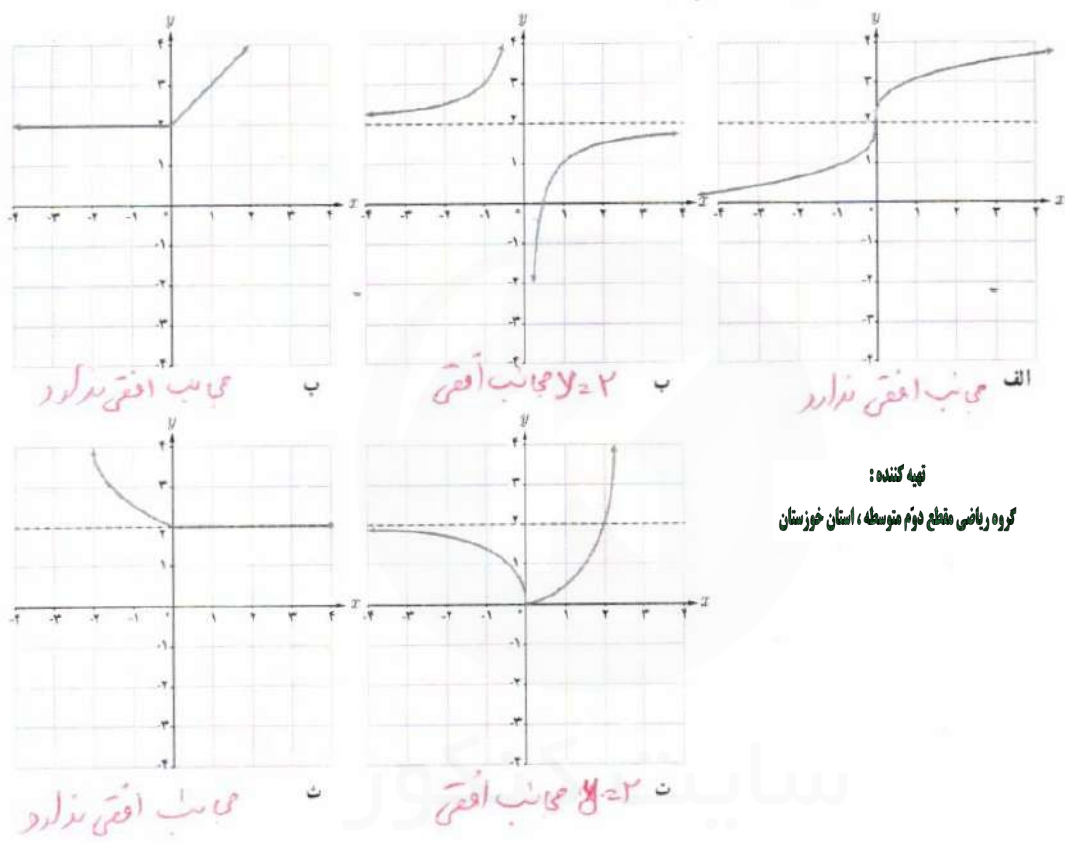
این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط  $x = -1$  مجانب قائم تابع است زیرا:

نمودار تابع به صورت زیر است.



کار در کلاس

۱ کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



تپه کننده:  
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$   $y = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{n+1}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} = 0$  برای افقی  $y=0$

ب)  $g(x) = x^2$   $y = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^2 = \pm\infty$  مجاذب افقی ندارد.

پ)  $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$   $y = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \pm\infty$  مجاذب افقی ندارد.



نمونه

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

هر چه مقدار  $x$  بزرگتر شود مقدار  $f(x)$  به قدر  $2$  نزدیک می‌شود.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

هر چه مقدار  $x$  کوچکتر شود مقدار  $f(x)$  به قدر  $4$  نزدیک می‌شود.

۲ برای تابع  $f$  که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید :

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

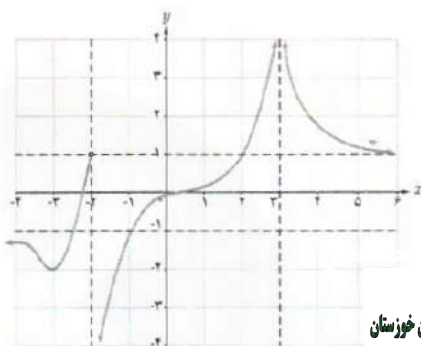
ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

ج) مجانب‌های افقی و قائم (ج)



توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مجاذب قائم  $x = -2, x = 3$   
مجاذب افقی  $y = 1, y = -1$

۳ حاصل حدود زیر را به دست آورید :

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

ب)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = 0$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{4} = \mp\infty$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید :

الف)  $y = \frac{2x-1}{x-3}$    
 مجانب قائم  $x = 3$   
 مجانب افقی  $y = 2$

ب)  $y = \frac{x}{x^2-4}$    
 مجانب قائم  $x = 2, x = -2$   
 مجانب افقی  $y = 0$

ب)  $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$    
 مجانب قائم  $x = 1, x = -1$   
 مجانب افقی  $y = -2$

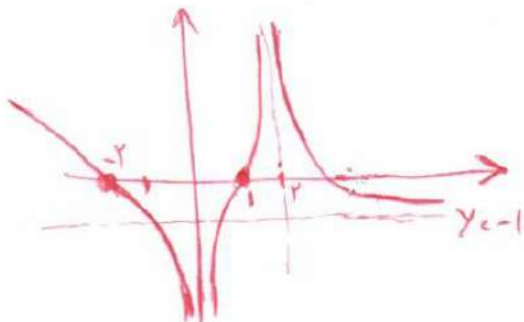
ت)  $y = \frac{2x}{1+x^2}$    
 مجانب قائم ندارد  
 مجانب افقی  $y = 0$

۵ نمودار تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف)  $f(1) = f(-2) = 0$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

پ) خط  $y = -1$  مجانب افقی آن باشد.



## مشتق

# ۴

## فصل

- ۱ آشنایی با مفهوم مشتق
- ۲ مشتق پذیری و پیوستگی
- ۳ آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر



ماهواره‌بر سیمرغ پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

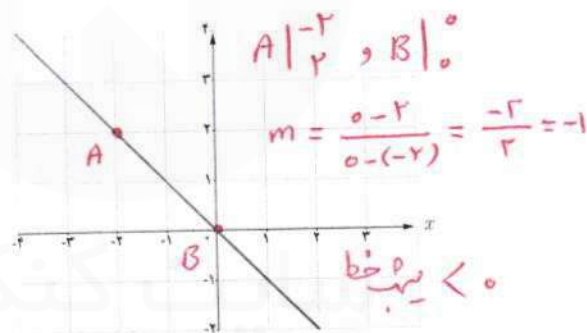
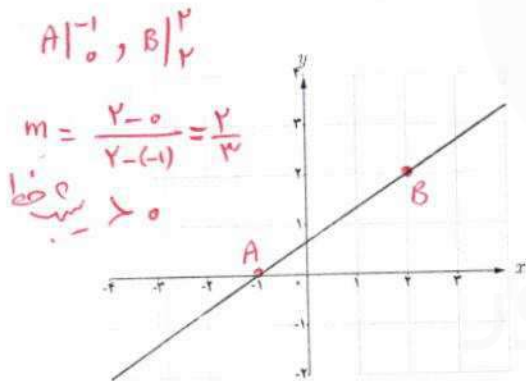
# آشنایی با مفهوم مشتق

## درس

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

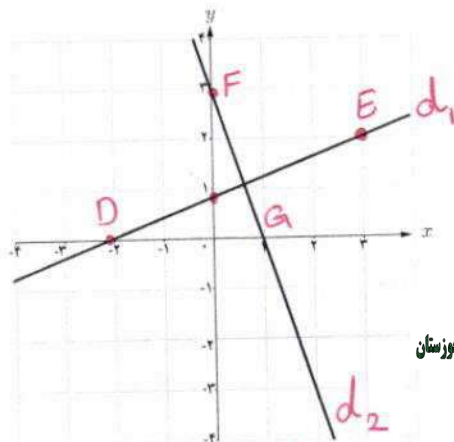
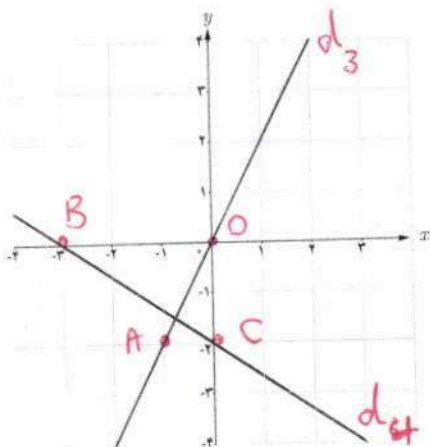
### فعالیت

1 شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



خط	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
شیب	$\frac{2}{3}$	$-1$	$2$	$-\frac{2}{3}$

2 با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های  $d_1, d_2, d_3, d_4$  را روی شکل مشخص کنید.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

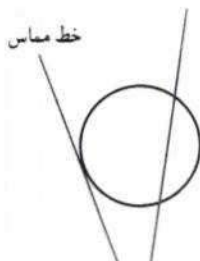
$A|^{-1}, B|^{0} \rightarrow m = \frac{0-(-2)}{0-(-1)} = 2 = m_{d_3}$

$D|^{0}, E|^{2} \rightarrow m = \frac{2}{1} = m_{d_1}$

$B|^{-2}, C|^{0} \rightarrow m = \frac{0-2}{-1-0} = 2 = m_{d_3}$

$A|^{1}, F|^{3} \rightarrow m = \frac{3}{-1} = m_{d_2}$

## خط مماس بر یک منحنی

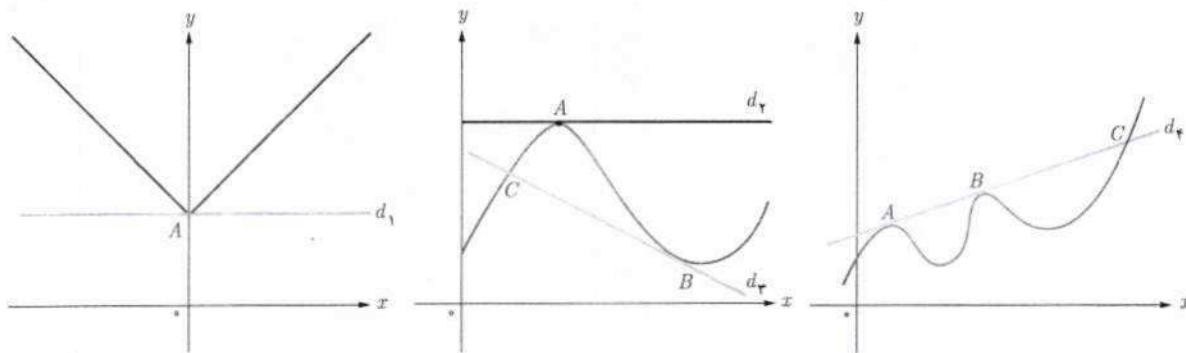


یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

## خواندنی

از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیم‌ها و مینیم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیم یا مینیم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیم یا مینیم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۳۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

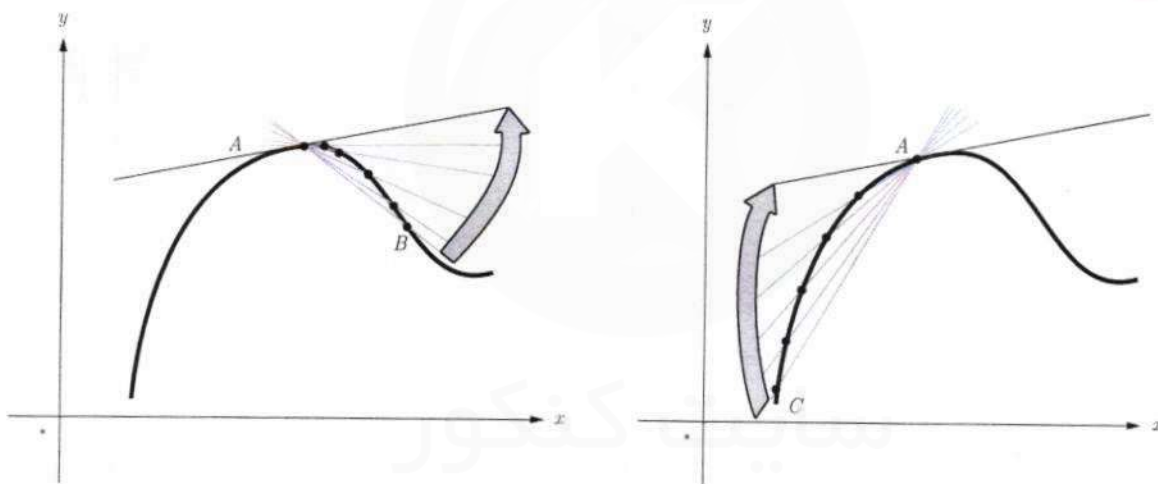
خط‌های  $d_1$  تا  $d_4$  را در نظر بگیرید. خط  $d_4$  در نقطه  $A$ ، خط  $d_3$  در نقطه  $B$  و خط  $d_2$  در نقاط  $A$  و  $B$  بر منحنی مماس هستند. خط  $d_1$  در نقطه  $A$  بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط  $d_3$  و  $d_4$  در نقطه  $C$  بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت  $A$  را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از  $A$  و  $B$  می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه  $A$  اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از  $A$  و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به  $A$  نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ **خط مماس**

اکنون نقطه  $C$  را سمت چپ نقطه  $A$  اختیار می‌کنیم و خط قاطع  $AC$  را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه  $A$  اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت: **خط مماس نزدیک می‌شود.**

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از  $A$  است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به  $A$  نزدیک شوند.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

الف تابع  $f(x) = -x^2 + 10x$  داده شده است، اگر  $0 \leq x \leq 10$ . نقاط  $A(2, f(2))$ ،  $B(6, f(6))$ ،  $C(5, f(5))$ ،  $D(4, f(4))$  و  $E(3, f(3))$  را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط  $A$  و  $B$  می‌گذرد یعنی  $m_{AB}$  از دستور زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{25 - 16}{5 - 2} = 3$$

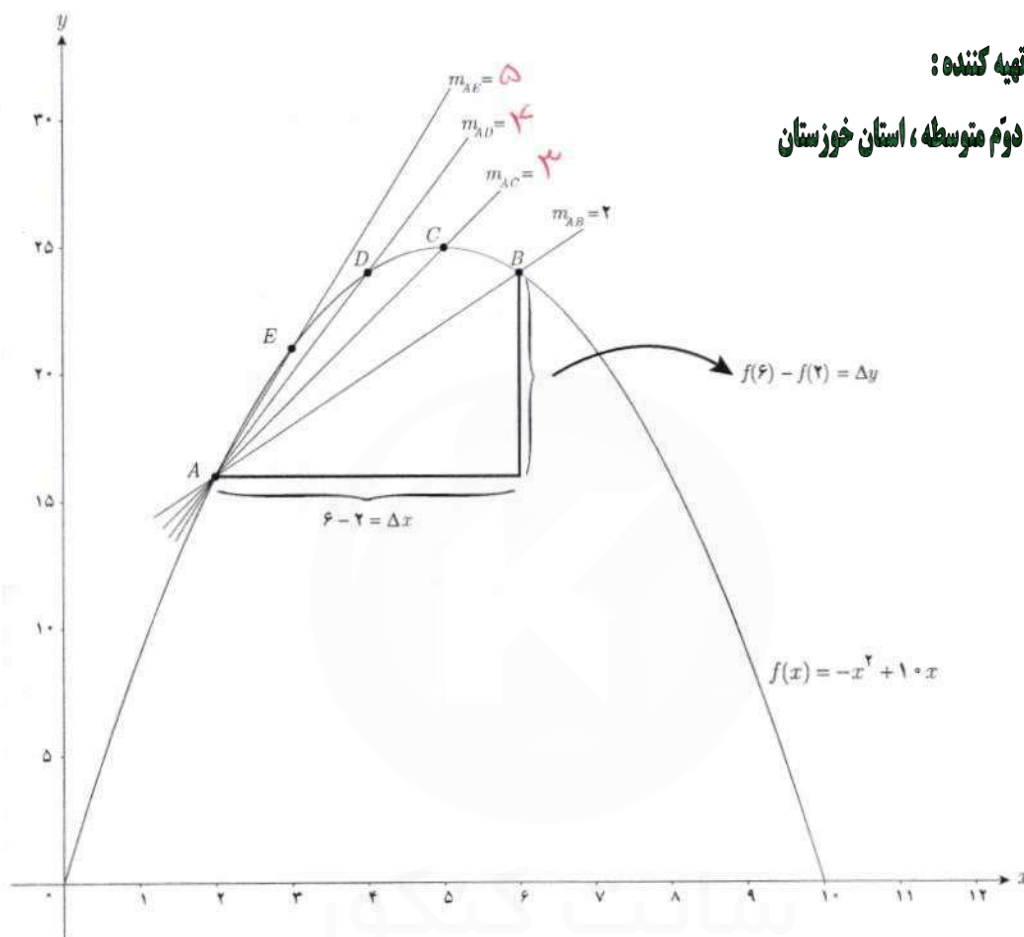
$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{24 - 16}{4 - 2} = 4$$

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{21 - 16}{3 - 2} = 5$$

به همین روش  $m_{AB}$  و  $m_{AD}$  و  $m_{AC}$  را به دست آورید.

$$A|2 \quad B|6 \quad C|5 \quad D|4 \quad E|3$$

$$16 \quad 24 \quad 25 \quad 24 \quad 21$$



تهیه کننده:

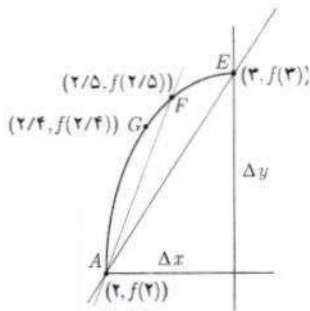
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط  $AB$  نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با  $\Delta y$  و  $\Delta x$  نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که  $\Delta x$  ها چگونه تغییر می کنند؟

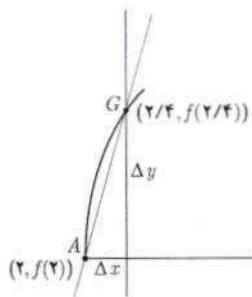
$[2, 6]$	۲ ————— ۶	$\Delta x = 6 - 2 = 4$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 5]$	۲ ————— ۵	$\Delta x = 5 - 2 = 3$	$\Delta y = 25 - 16 = 9$
$[2, 4]$	۲ ————— ۴	$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 3]$	۲ ————— ۳	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 21 - 16 = 5$



$$m_{AF} = \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2}$$

$$= \frac{18/75 - 16}{0/5}$$

$$= \frac{2/75}{0/5} = 5/5$$



$$m_{AG} = \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2}$$

$$= \frac{18,25 - 16}{2,5 - 2} = \frac{2,25}{0,5}$$

$$= 5,25$$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به  $A$  انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی  $f(x) = -x^2 + 10x$  در فاصله  $[2, 3]$  رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه  $[2, 2/4]$  رسم شده است.

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد.
$[2, 2/4]$	$\frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{18,25 - 16}{2,5 - 2} = \frac{2,25}{0,5} = 5/6$
$[2, 2/3]$	$\frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{14,75 - 16}{2,3 - 2} = \frac{1,75}{0,3} = 5,83$
$[2, 2/2]$	$\frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{17/16 - 16}{0/2} = \frac{1/16}{0/2} = 5/8$
$[2, 2/1]$	$\frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/59 - 16}{0/1} = \frac{0/59}{0/1} = 5/9$
$[2, 2/0.1]$	$\frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.599 - 16}{0/0.1} = \frac{0/0.599}{0/0.1} = 5/99$
$[2, 2/0.01]$	$\frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.05999 - 16}{0/0.01} = \frac{0/0.05999}{0/0.01} = 5/999$
$\vdots$	$\vdots$
$[2, 2+h]$ یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ?$

مقایسه به دست آمده به  $\frac{2}{5}$  نزدیک می‌شوند.

## فصل چهارم: مشتق ۷۷

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت  $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$  وقتی  $h$  به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت)

است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط

بر آنکه  $h$  را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که:  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$  کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 3h - 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 6) = 6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ  $A$  اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند،  $[1/5, 2]$ ،  $[1/6, 2]$ ،  $[1/7, 2]$ ،  $[1/8, 2]$  و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با  $6/5$ ،  $6/4$ ،  $6/3$ ،  $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه  $h$  به

قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم:  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$$

شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه  $A(a, f(a))$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و منتهای باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامند و با  $f'(a)$  نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در  $a$  نیز می‌نامند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$$f(3) = -(3)^2 + 10(3) = -9 + 30 = 21$$

۷۸

بنابراین در مثال قبل داریم  $f'(2) = 6$ . در ادامه  $f'(3)$  برای  $f(x) = -x^2 + 10x$  محاسبه شده است:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 10(3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 30 + 10h - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = -x^2 + 10x$  را در نقطه  $A(2, f(2))$  واقع بر نمودار تابع بنویسید.

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

کاردر کلاس

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$$

معادله خط مماس بر منحنی تابع  $y = x^2 + 3$  را در نقطه‌ای به طول ۲ بنویسید.

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4$$

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه

مشق در یک نقطه به دست آورد، به طور مثال شیب خطی که از نقاط  $A$  و  $B$  می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

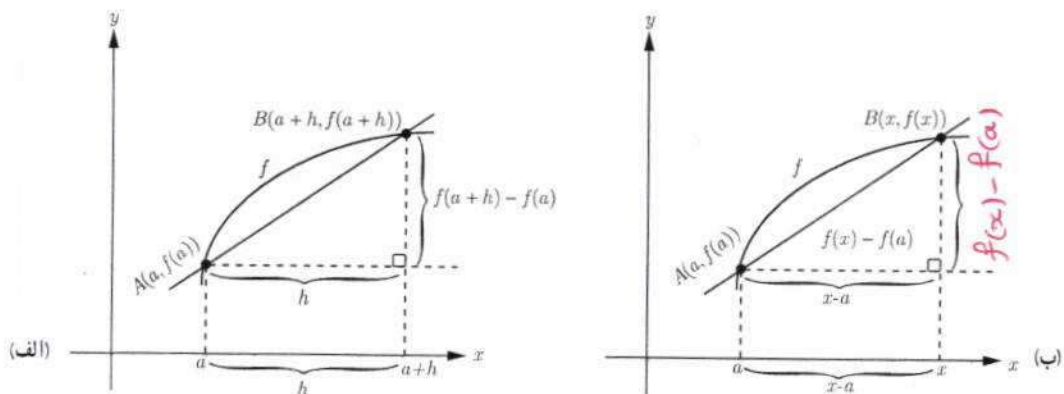
مثال: اگر  $f(x) = -x^2 + 10x$ ،  $f'(2)$  را از دستور بالا به دست آورید:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 10(2 + \Delta x) - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 - 4\Delta x - \Delta x^2 + 20 + 10\Delta x - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-\Delta x + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 6) = 6$$

### محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشق تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  به صورت:  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.

## فصل چهارم: مشتق ۷۹



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق  $f$  در  $a$  داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ در منحنی بر مماس شیب خط} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه  $B$  را به مختصات  $(x, f(x))$  در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که  $x$  را مرتباً به  $a$  نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل  $x$  باید از راست و چپ به قدر کافی به

$$a \text{ نزدیک شود). به عبارت دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**نهیة کننده:**

**گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان**

مثال: اگر  $f(x) = x^2$ ،  $f'(3)$  را به دو روش به دست آورید.

حل:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} \quad \text{روش اول:}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 \quad \text{روش دوم:}$$

$$f(x) = -x^2 + 10x = 19 \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{f(n) - f(1)}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{-n^2 + 10n - 19}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{-(n-2)(n-1)}{n-1} = -2$$

$$f(x) = -x^2 + 10x = 25 \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow 5} \frac{f(n) - f(5)}{n - 5} = \lim_{n \rightarrow 5} \frac{-n^2 + 10n - 25}{n - 5} = \lim_{n \rightarrow 5} \frac{-(n-5)^2}{n-5} = 0$$

۸۰

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس بعد به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کار در کلاس

اگر  $f'(a)$  موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

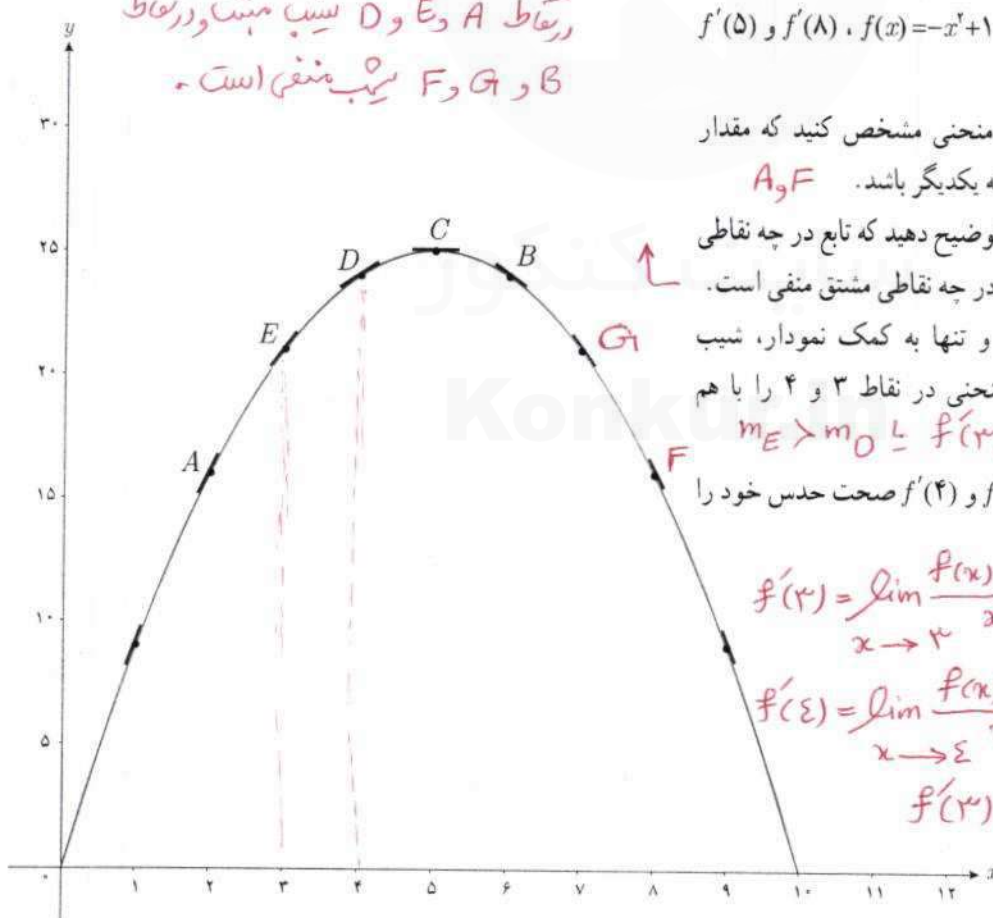
اگر قرار دهیم  $a+h=x$  پس  $h=x-a$  و چون  $x \rightarrow a$  پس  $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

راه‌نمایی: تغییر متغیر  $x = a+h$  را به کار برید. توجه کنید وقتی که  $h \rightarrow 0$  آنگاه  $x \rightarrow a$

کار در کلاس

رابطه A و E و D و B مثبت و رابطه B و G و F منفی است.



الف) برای تابع  $f(x) = -x^2 + 10x$ ،  $f'(8)$  و  $f'(5)$  را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.  $A$  و  $F$

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.  $m_E > m_D \Rightarrow f'(3) > f'(4)$

ث) با محاسبه  $f'(3)$  و  $f'(4)$  صحت حدس خود را بررسی نمایید.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \dots = 4$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \dots = 2$$

لذا  $f'(3) > f'(4)$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3x+4) = 10$$

فصل چهارم: مشتق ۸۱

$$y - 9 = 10(x - 2)$$

$$y - 9 = 10x - 20 \rightarrow y = 10x - 11$$

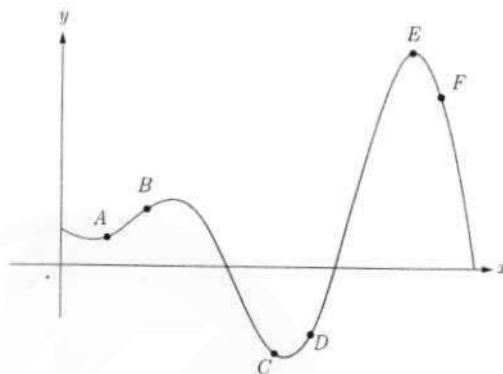
معادله خط مماس

تمرین

۱ اگر  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی  $f$  را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	E
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار  $y = f(x)$  در شکل زیر شیب های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک ترین به بزرگ ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A  $m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه B  $m_2$

پ) شیب نمودار در نقطه C  $m_3$

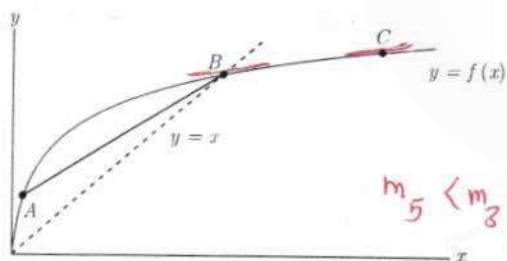
ت) شیب خط AB  $m_4$

ث) شیب خط  $y=2$   $m_5 = 0$

ج) شیب خط  $y=x$   $m_6 = 1$

$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$$

شیب های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب  $m_1, m_2, \dots, m_6$  در نظر بگیرید.

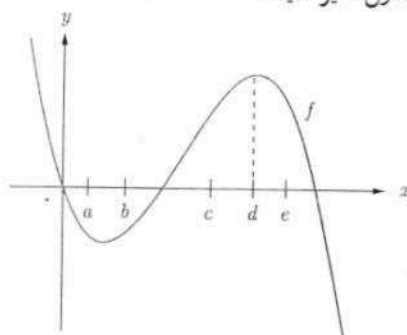


تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴ با در نظر گرفتن نمودار  $f$  در شکل، نقاط به طول های  $a, b, c, d, e$  را با مشتق های داده شده در جدول نظیر کنید.

$x$	$f'(x)$
d	۰
b	$0/5$
c	۲
a	$-0/5$
e	-۲



۵ نقاطی مانند  $A, B, C, D, E, F, G$  را روی نمودار  $y=f(x)$  مشخص کنید به طوری که:

الف)  $A$ ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

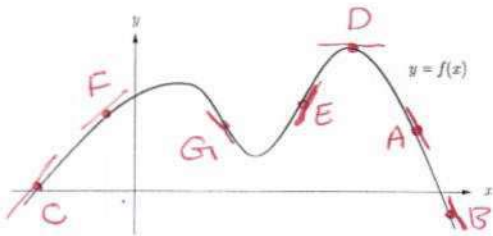
ب)  $B$  نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ)  $C$  نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.  $f(x)=0$  و  $f'(x)>0$

ت)  $D$  نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.  $f'(x)=0$

ث) نقاط  $E$  و  $F$  نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج)  $G$  نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.  $f(x)>0$  و  $f'(x)<0$



$$f(-1) = -3$$

۶ اگر  $f(x) = x^2 - 2 + 3$ ،  $f'(-1)$  را به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2 + 3 - (-3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x - x + 1) = 1$$

۷ نقاط  $A, B, C, D, E, F$  را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. "نادرست" مثلاً در نقطه  $F$  شیب منفی است.

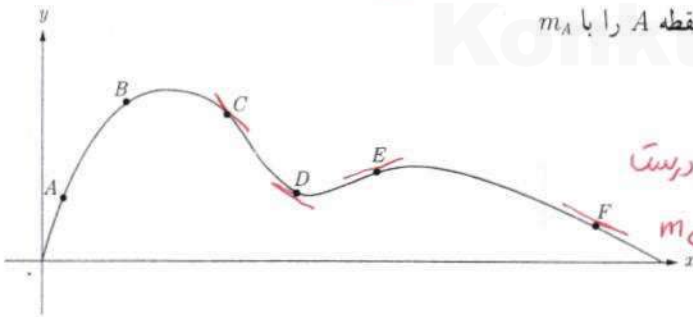
ب)  $m_A < m_B$  (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  را با  $m_A$  نمایش داده‌ایم) "نادرست"

پ)  $m_E < m_B < m_A$  "درست"

ت) شیب منحنی در نقاط  $C, D, F$  منفی است. "درست"

ث)  $m_C < m_D < m_F$  "نادرست"  $m_F < m_D < m_C$

ج)  $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$  "درست"



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

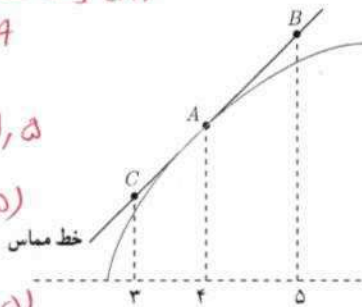
فصل چهارم: مشتق ۸۲

۸ برای تابع  $f$  در شکل زیر داریم:  $f'(4) = 1/5$  و  $f(4) = 25$  با توجه به شکل مختصات نقاط  $A$ ,  $B$ , و  $C$  را بیابید.

$$\frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} = f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B) - 25}{1} = \frac{f(C) - 25}{-1} = 1/5$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(B) = 26 \Rightarrow B(5, 26) \\ f(C) = 24 \Rightarrow C(3, 24) \end{aligned} \right.$$

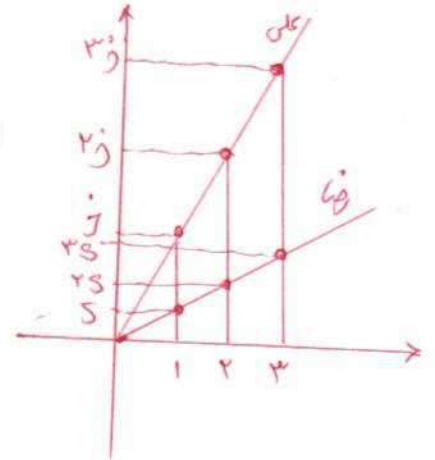


۹ در هر ثانیه علی  $j$  متر با دوچرخه و رضا  $s$  متر با پای پیاده طی می کنند. به طوری که  $j > s$ . در یک زمان داده شده، چگونه

- می توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟
- الف) علی  $j - s$  متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
- ب) علی  $j \cdot s$  متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
- پ) علی  $j/s$  متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
- ت) علی  $j \cdot s$  برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.
- ث) علی  $j/s$  برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ثانیه	۱	۲	۳	$n$
علی	$j$	$2j$	$3j$	$nj$
رضا	$s$	$2s$	$3s$	$ns$

لذا نسبت  $\frac{j}{s}$  ثابت است. پس می توان گفت که علی  $\frac{j}{s}$  برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.



## مشتق پذیری و پیوستگی



### درس

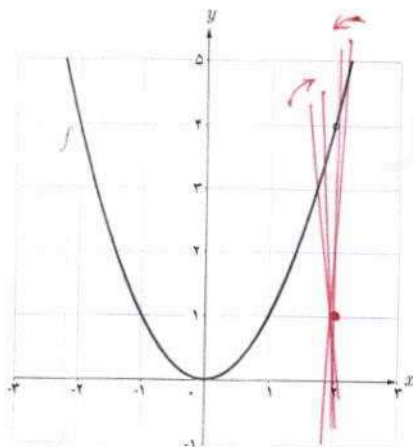
در درس گذشته مشتق تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $x$  به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که  $f$  در  $x$  مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

### فعالیت

نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$  (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که  $f'(2)$  وجود ندارد؟

زیرا شیب خط مماس در نقطه  $x=2$  می‌گذرد به عدد حقیقی و منحصراً منفردی میل نمی‌کند.

اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در  $x=2$  تعریف مشتق  $f$  در  $x=2$  را به کار بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} =$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

## فصل چهارم: مشتق ۸۵

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی  $x \rightarrow 2$ ، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

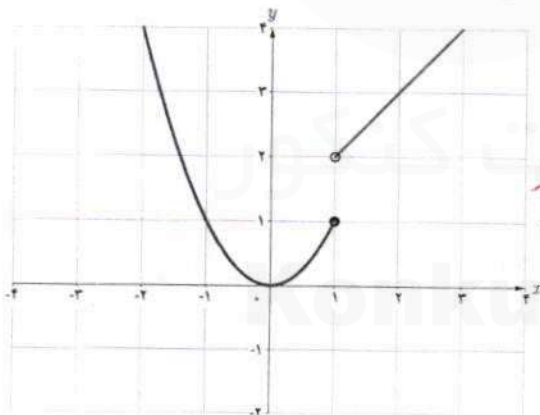
بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  موجود (و منتهایی) نیست، پس  $f'(2)$  وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز  $x = 2$ ) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانان مقایسه کنید.

## کاردر کلاس

تابع  $g$  (شکل زیر) را به صورت  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$  در نظر می‌گیریم.

چرا  $g'(1)$  موجود نیست؟ زیرا بسبب خطای ما، از تعریف  $x=1$  می‌گذریم، به عدد حقیقی و منصفه نزدیک



مثل نمی‌کنند. هوشین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2 \end{cases}$$

پس  $g'(1)$  وجود ندارد.

توابع  $f$  و  $g$  فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در  $x = 2$  و  $x = 1$  ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید،  $f'(2)$  و  $g'(1)$  موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



قضیه: اگر تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشد آن گاه  $f$  در  $a$  پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x-a) \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$  و از آنجا  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته نباشد، آن گاه  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

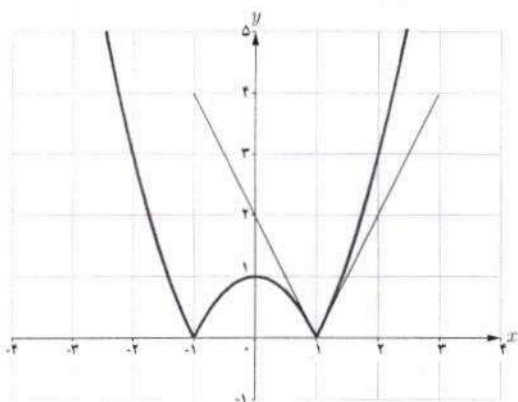
مثال: مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در  $x = 1$  بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه  $f'(1)$  ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین  $f'(1)$  موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه  $x = 1$  وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خطهای مماس بر منحنی در نقطه  $x = 1$  توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه  $x = 1$  نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به  $x = 1$  نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر  $-2$  است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ  $f$  در  $x = 1$  می نامیم و با  $f'_+(1)$  و  $f'_-(1)$  نمایش می دهیم.

فصل چهارم: مشتق ۸۷

در مثال قبل  $f$  در  $x=1$  پیوسته است ولی  $f$  در آن مشتق پذیر نیست.  
نیم خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت: شیب نیم مماس چپ  $f'_-(1) =$

شیب نیم مماس راست  $f'_+(1) =$

معادله این نیم مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از:

$$y - 0 = 2(x-1) \text{ یا } y = 2x - 2, x \geq 1$$

$$y - 0 = -2(x-1) \text{ یا } y = -2x + 2, x \leq 1$$

می‌باشند.

کاردر کلاس

نشان دهید که مشتق تابع  $f$  در مثال قبل در  $x=-1$  نیز موجود نیست.  
در صورت امکان معادله نیم مماس‌های راست و چپ در  $x=-1$  را بنویسید.

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع  $f$  در  $x=a$  را با  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - f(-1)}{x + 1} \begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-(x^2 + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} -(x - 1) = 2 \Rightarrow f'_+(-1) = 2$$

$$\rightarrow y - 0 = 2(x + 1) \rightarrow y = 2x + 2 \quad x > -1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x - 1) = -2 \Rightarrow f'_-(-1) = -2$$

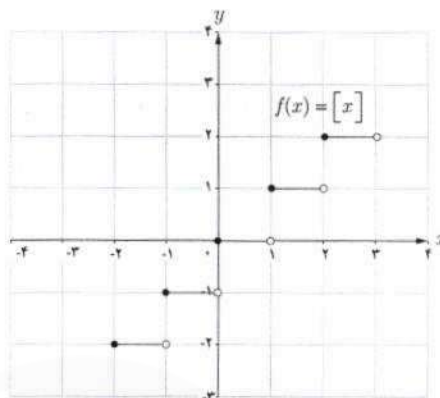
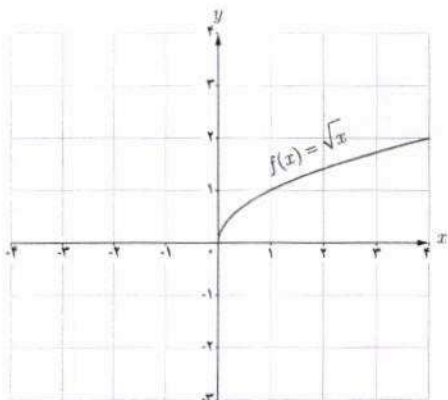
$$\rightarrow y - 0 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x - 2 \quad x < -1$$

نهیہ کنندہ:

گروہ ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

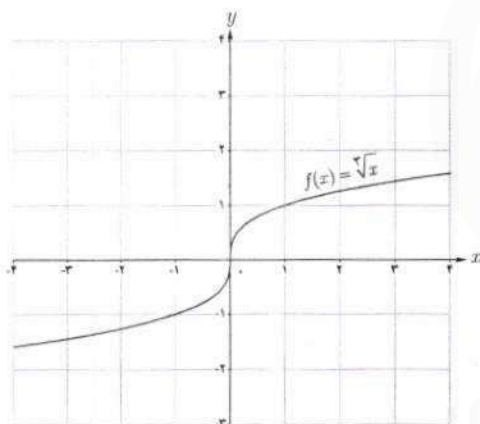
۸۸

❖ مثال: توابع  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  در صفر پیوسته نیستند. بنابراین  $f'(0)$  و  $g'(0)$  موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

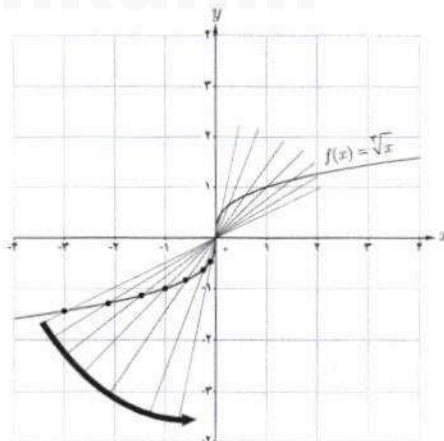
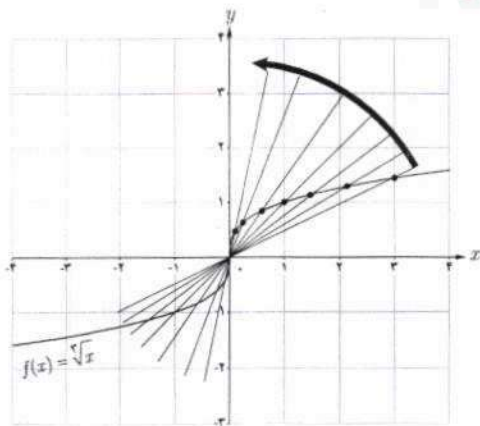
❖ مثال: تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  را در نظر می گیریم. مشتق پذیری این تابع را در  $x = 0$  بررسی کنید.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع  $f$  در صفر مشتق پذیر نیست. شکل ها نشان می دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می شویم خط های قاطع به خط  $x = 0$  نزدیک می شوند.

تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  در  $x = 0$  مشتق پذیر نیست. خط  $x = 0$  را «مماس قائم» منحنی می نامیم.



اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد و  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$  یا  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$  در این صورت خط  $x = a$  را «مماس قائم» بر منحنی  $f$  در نقطه  $(a, f(a))$  می‌نامیم. بدیهی است  $f'(a)$  در این حالت وجود ندارد.

به طور خلاصه می‌توان گفت:

- ۱. تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
  - الف)  $f$  در  $a$  پیوسته نباشد و مشتق راست و مشتق چپ در  $x = a$  (نقطه گوشه‌ای).
  - ب) یکی منتهای و دیگری نامتهای باشد (نقطه گوشه‌ای).
  - پ) هر دو نامتهای باشند.

کاردرکلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

The figure shows six graphs with handwritten annotations in red:

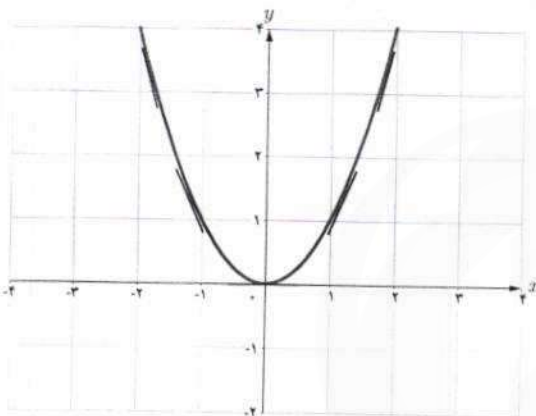
- Graph 1:** A function with a sharp corner at  $x_2$ . Annotation: "نقطه گوشه‌ای" (corner point), " $f'(x_1) \neq f'(x_2) \neq f'(x_3)$ ", "مشتق چپ و مشتق راست".
- Graph 2:** A function with a cusp at  $x_2$ . Annotation: "نقطه گوشه‌ای" (corner point), "مشتق چپ و مشتق راست".
- Graph 3:** A function with a sharp corner at  $x_2$ . Annotation: "نقطه گوشه‌ای" (corner point), "مشتق چپ و مشتق راست".
- Graph 4:** A function with a vertical tangent at  $x_2$ . Annotation: "نقطه گوشه‌ای" (corner point), "مشتق چپ و مشتق راست".
- Graph 5:** A function with a jump discontinuity at  $x_2$ . Annotation: "نقطه گوشه‌ای" (corner point), "مشتق چپ و مشتق راست".
- Graph 6:** A function with a removable discontinuity at  $x_2$ . Annotation: "نقطه گوشه‌ای" (corner point), "مشتق چپ و مشتق راست".

۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های بی‌جده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

## تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

## فعالیت



تابع  $f(x) = x^2$  را در نظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

$x$	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$	-۶	-۴	-۲	۰	۱	$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین  $f'(x)$  تابعی از  $x$  است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع  $f(x) = x^2$  وجود دارد؟ در تمام نقاط

## فصل چهارم: مشتق ۹۱

اگر  $x$  عضوی از دامنه تابع  $f$  باشد، تابع مشتق  $f$  در  $x$  را با  $f'(x)$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه  $f$  که برای آنها  $f'$  موجود باشد را دامنه  $f'$  می‌نامیم.

به طور مثال برای تابع  $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع  $f'$ ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع  $f'$  نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

بنابراین  $f'(x) = 2x$ . همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع  $f'$ ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع  $f(x) = x^2$  در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

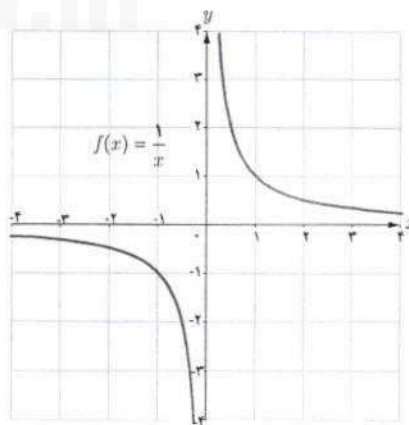
$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \text{ و } f'(50^\circ) = 100$$

❖ مثال: اگر  $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید.  $f'(3)$  را از دو روش به دست آورید:

با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در  $x=3$ .

❖ حل:  $f'(0)$  وجود ندارد. دامنه  $f'$  برابر  $\mathbb{R} - \{0\}$  است. اگر  $x \neq 0$  داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با استفاده از دستور فوق داریم:  $f'(3) = \frac{-1}{9}$  البته مشتق  $f$  در هر نقطه دیگر ( $x \neq 0$ ) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد، به طور مثال:  $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$  و  $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ ،  $f'(3)$  را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

### کاردر کلاس

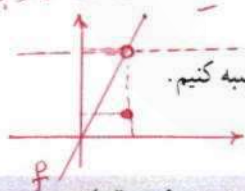
اگر  $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$  دامنه  $f$  و دامنه  $f'$  را محاسبه کنید و ضابطه  $f'$  را به دست آورید. نمودار  $f$  و نمودار  $f'$  را رسم کنید.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \cup \{1\} = \mathbb{R}$$

تابع در نقطه  $x=1$  پیوسته نیست. لذا  $f'(1)$  وجود ندارد.

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x \neq 1 \\ \text{نمی‌تواند} & x = 1 \end{cases}$$



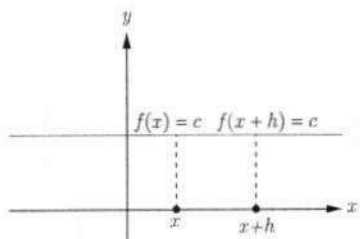
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

### محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر  $f(x) = c$  آن گاه  $f'(x) = 0$ . به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

به طور مثال اگر  $f(x) = 7$  و  $g(x) = -\frac{2}{5}$  آن گاه  $f'(x) = 0$  و  $g'(x) = 0$ .



## فصل چهارم: مشتق ۹۳

۱۶ اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $f(x) = x^n$  آن گاه:  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر  $f(x) = x^1$ ، آن گاه  $f'(x) = 1$ . همچنین اگر  $f(x) = x^2$ ، به کمک این دستور نشان می‌دهیم که:  $f'(x) = 2x$ . ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق  $f(x) = x^n$  استفاده می‌کنیم. اگر  $f(x) = x^2$  داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

اکنون اگر  $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{\text{تعداد } n} = nx^{n-1}$$

۱۷ به طور کلی اگر  $n$  یک عدد صحیح باشد و  $f(x) = x^n$  آن گاه:  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

مثال: اگر  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $x \neq 0$  قبلاً دیدید که  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم:  $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

\* ۱۸ اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $x > 0$  آن گاه  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

\* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع  $\sqrt{f(x)}$  و  $\sqrt[3]{f(x)}$  که  $f(x)$  گویاست، مورد نظر است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.



۵ اگر  $f(x) = \sqrt{ax+b}$  و  $ax+b > 0$  آن گاه  $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶ اگر  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  آن گاه  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

۷ اگر توابع  $f$  و  $g$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع  $kf$  ( $k \in \mathbb{R}$ )،  $f \pm g$ ،  $fg$  و  $\frac{f}{g}$  ( $g(a) \neq 0$ ) نیز در  $x = a$  مشتق پذیرند و داریم:

الف)  $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$       ب)  $(kf)'(a) = kf'(a)$

ب)  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$       ت)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.  
 ❁ مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف)  $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^2$

ب)  $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

ب)  $h(x) = (2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^3+1)(-2x+7)$

ت)  $t(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

۱ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف)  $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب)  $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ)  $h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-4)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + \sqrt{x}(6x)$$

$$h'(x) = \frac{1(2x^2 + x - 1) - (2x + 1)x}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

۲ اگر  $f$  و  $g$  توابع مشتق پذیر باشند و  $f(2) = 3$ ،  $f'(2) = 5$ ،  $g(2) = 8$ ،  $g'(2) = -6$  مقدار  $(fg)'(2)$  و  $(\frac{f}{g})'(2)$  را به دست

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$= 5 \times 8 + (-6) \times 3 = 22$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{5 \times 8 - (-6) \times 3}{(8)^2} = \frac{29}{32}$$

آورید.

### مشتق توابع مثلثاتی

$$f(x) = \cos x \quad \text{و} \quad g(x) = -\sin x$$

توابع  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \cos x$  مشتق پذیر هستند و داریم:

❖ اثبات: با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = 0 + \cos x = \cos x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

در حسابان (۱) دیدیم که:

$$f'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad f'(x) = (\sin x)' + (\cos x)'$$

به طریق مشابه اگر  $g(x) = \cos x$  داریم:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= (\cos x)' - (\sin x)' = -\sin x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با استفاده از دو دستور فوق می توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به دست آورد.

❖ مثال : مشتق  $f(x) = \tan x$  را به دست آورید.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

### کارد کلاس

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = \sin x \tan x$

ب)  $g(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x (1 + \tan^2 x) \quad g'(x) = \frac{-\Delta \sin x (1 - \sin x) - (\cos x)(\Delta \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

### مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر  $f$  و  $g$  دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب  $f \circ g$  مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

❖ مثال : اگر  $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است  $h'(x)$ .

❖ حل : اگر  $f(x) = x^4$  و  $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ، آن گاه  $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)) = (2x + 3) f'(g(x))$$

اگر  $g(x) = u$  آن گاه لازم است که  $f'(u)$  را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x + 3) (4) (x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر  $f$  تابعی بر حسب  $u$  و  $u$  تابعی از  $x$  باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

❖ مثال : مشتق تابع  $y = \sin^2 x$  را به دست آورید.

❖ حل : با فرض  $\sin x = u$  داریم  $y = u^2$  و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 2u = (\cos x)(2)(\sin x) = 2 \sin x \cos x$$

مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$

$$f'(x) = 3(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + (x^2+1)^3(5)$$

ب)  $g(x) = \cos^2 x$

$$g'(x) = -2 \sin x \cos x$$

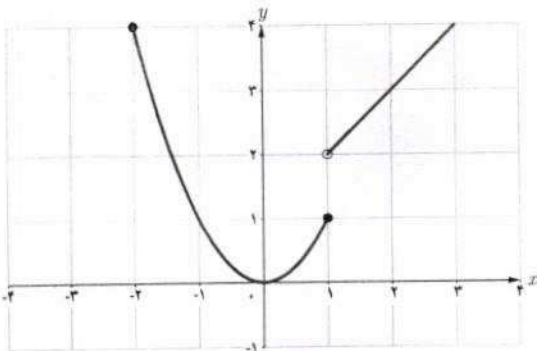
پ)  $h(x) = \sin(3x^2 + 5)$

$$h'(x) = 6x \cos(3x^2 + 5)$$

### مشتق پذیری روی یک بازه

تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.  
 تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  مشتق پذیر است، هرگاه  $f$  در بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد و در نقطه  $a$  مشتق راست و در  $b$  مشتق چپ داشته باشد.

مشتق پذیری روی بازه های  $[a, b]$  و  $(a, b)$  را به طور مشابه تعریف کنید.  
 تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  مشتق پذیر است هرگاه  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد و در نقطه  $a$  مشتق راست داشته باشد.  
 تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر است هرگاه  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد و در نقطه  $b$  مشتق چپ داشته باشد.



اگر  $D_f = \mathbb{R}$  و  $f$  در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد،  
 گوئیم  $f$  روی بازه  $(-\infty, +\infty)$  مشتق پذیر است.

مثال: تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$  را در نظر  
 می گیریم.

$f$  روی بازه های  $[-2, 1]$  و  $(1, \infty)$  مشتق پذیر است. ولی  
 $f$  روی بازه  $[1, 2]$  مشتق پذیر نیست (چرا؟)

زیرا با اینکه روی بازه  $(1, 2)$  مشتق پذیر است، اما در  $x = 1$  مشتق راست ندارد، لذا  
 $x = 1$  مشتق راست ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

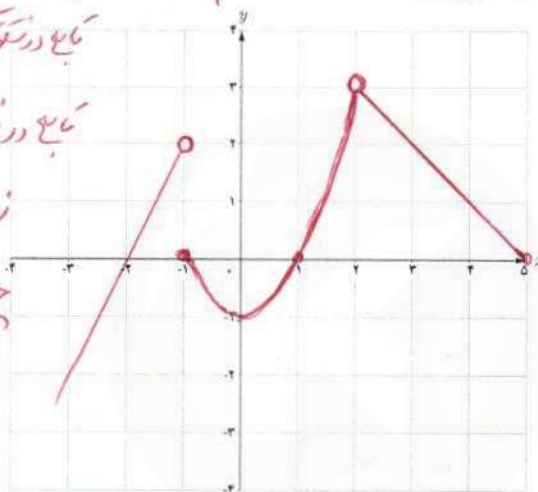
اگر  $f(x)$  نمودار  $f$  را رسم کنید و مشتق پذیری  $f$  را روی بازه‌های  $[-1, 1]$ ،  $(2, 5)$  و  $[-2, 0]$

بررسی کنید.

$$f'(-1) = -2 \text{ و } f'(1) = 2$$

تابع در نقطه  $[-1, 1]$  مشتق پذیر است.تابع در نقطه  $(2, 5)$  مشتق پذیر است.تابع در فاصله  $[-2, 0]$  مشتق پذیر نیست.زیرا تابع در فاصله  $[-2, 0]$  پیوسته نیست.چون تابع در  $x = -1$  پیوسته و مشتق پذیر

است.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### مشتق مرتبه دوم

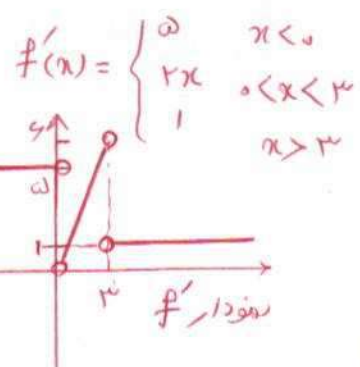
مشتق تابع  $y = f(x)$  با نماد  $y' = f'(x)$  نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم  $y = f(x)$  را به  $y'' = f''(x)$  نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع  $y' = f'(x)$  نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم.

❖ مثال: اگر  $y = 3x^2 + 2x^3 - 1$  آن گاه:

$$y' = 12x^2 + 4x \quad , \quad y'' = 36x + 4$$

ب)  $f'(0)$  وجود ندارد  
 در  $x=0$  تانجنت عمود است.

$f'(3) = 1$  و  $f'(3) = 6 \rightarrow f'(3)$  وجود ندارد



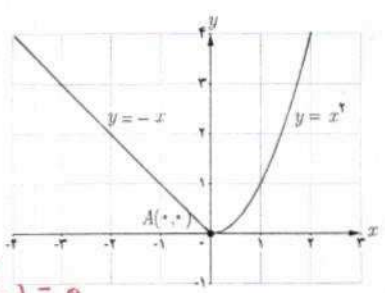
فصل چهارم: مشتق ۹۹

تمرین

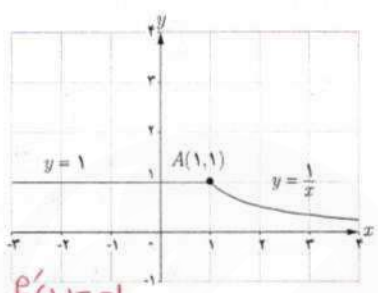
۱ دو تابع مختلف مانند  $f$  و  $g$  مثال بزنید که هر دو در  $x=2$  پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

$f(x) = |x-2|$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}$

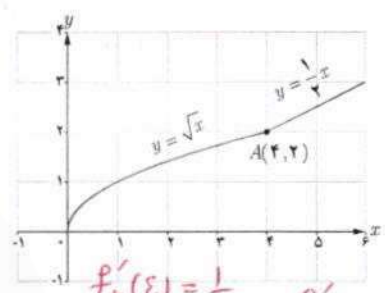
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه  $A$ ، نشان دهید که این توابع در نقطه  $A$  مشتق پذیر نیستند.



$f'(0) = 0$   
 $f'(0) = -1$   
 وجود ندارد  $f'(0)$



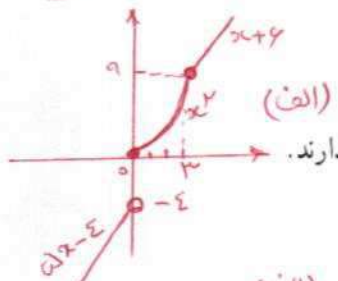
$f'(1) = -1$   
 $f'(1) = 0$   
 وجود ندارد  $f'(1)$



$f'_+(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$   
 $f'_-(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$   
 وجود ندارد  $f'(\epsilon)$

۳ تابع  $f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$  داده شده است.

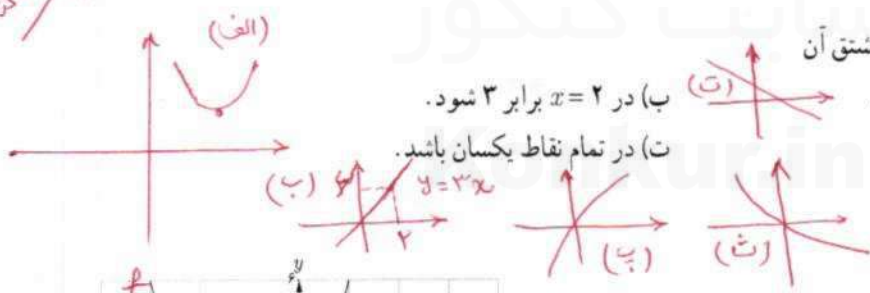
الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.  
 ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.



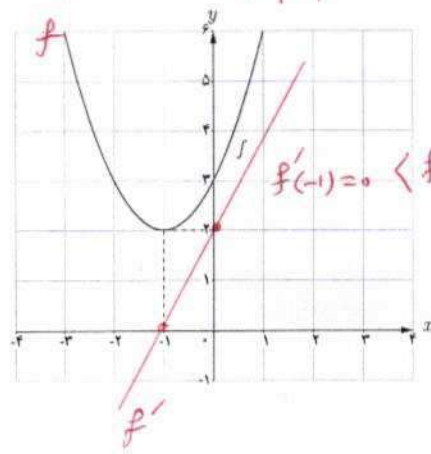
ب) نشان دهید که  $f'(0)$  و  $f'(3)$  وجود ندارند.  
 ت) نمودار تابع  $f'$  را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

- الف) در یک نقطه برابر صفر شود.
- ب) در تمام نقاط مثبت باشد.
- ت) در تمام نقاط منفی باشد.



۵ الف) با استفاده از نمودار تابع  $f(x) = x^3 + 2x + 3$  (شکل



مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.  
 $f'(-1) = 0 < f'(0) < f'(2) < f'(3)$   
 $f'(2)$  و  $f'(-1)$  و  $f'(0)$  و  $f'(3)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع

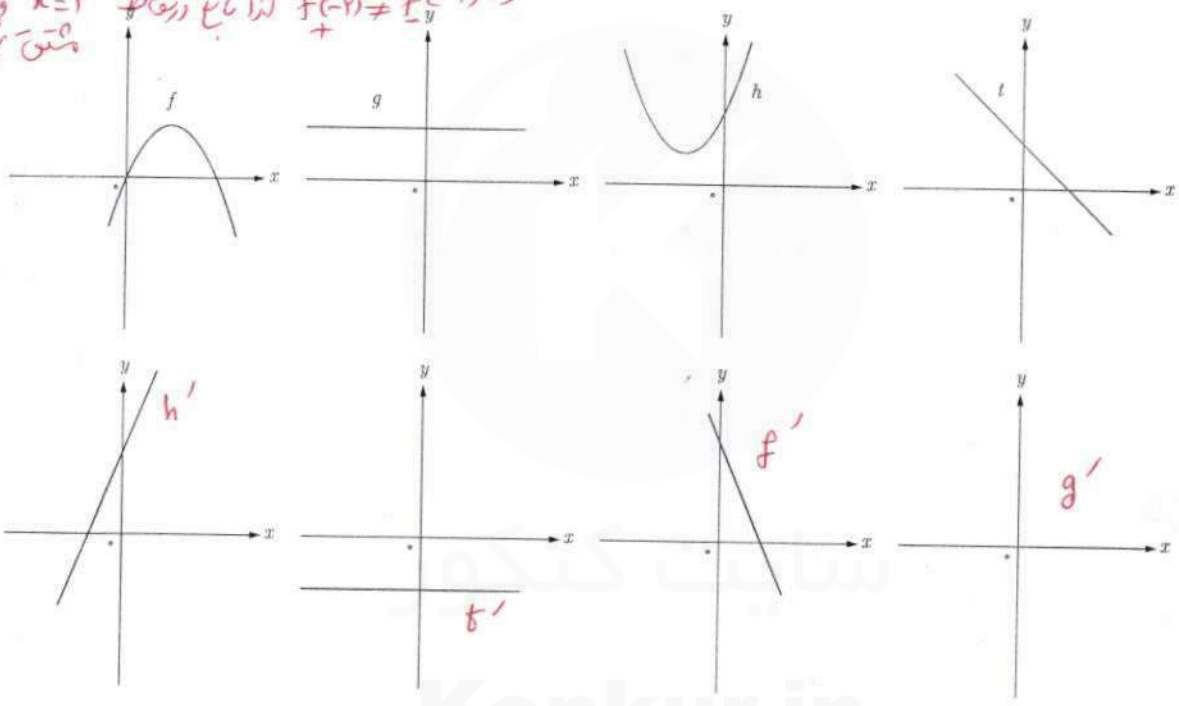
$f'(x) = 3x^2 + 2$   
 $f'(2) = 6$   
 $f'(-1) = 0, f'(0) = 2, f'(3) = 8$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

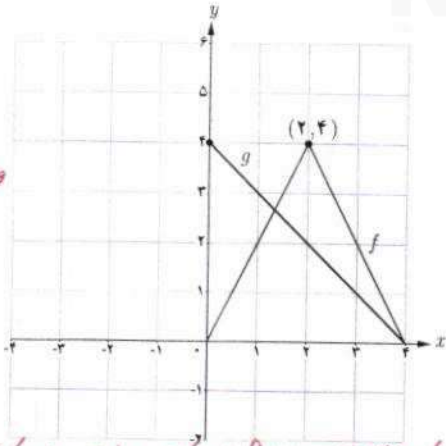
۶ مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x=1$  بررسی کنید. تابع در نقطه  $x=1$  ناپیوسته است.

۷ سه تابع مختلف مثال یزید که مشتق آنها با هم برابر باشند.  
 اگر  $f(x) = |x^2 - 4|$  به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری  $f$  را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.  
 $f(x) = 3x, g(x) = 3x+1, h(x) = 3x-2$

۸ اگر  $f(x) = |x^2 - 4|$  به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری  $f$  را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.  
 نمودار توابع  $f$  و  $g$  و  $h$  و  $t$  را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.  
 $f'(x) = 2x, f'(-2) = -4, f'(2) = 4, f'(x) = -2x, f'(-2) = 4, f'(2) = -4$   
 $f'(x) = 2x, x < -2$   
 $f'(x) = -2x, -2 < x < 2$   
 $f'(x) = 2x, x > 2$   
 و  $f'(-2) \neq f'(2)$  و  $f'(-2) \neq f'(2)$  لذا تابع در نقطه  $x=2$  و  $x=-2$  مشتق پذیر نیست.



$f'(1) = 2$   
 $g'(1) = -1$   
 $f'(2) = 4$   
 $g'(2) = 1$   
 $f'(3) = 6$   
 $g'(3) = 1$



۱۰ نمودار توابع  $f$  و  $g$  را در شکل زیر در نظر بگیرید.  
 الف) اگر  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  مطلوب است  $h'(1), h'(2), h'(3)$

ب) اگر  $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  مطلوب است،  $k'(1), k'(2), k'(3)$   
 $k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \cdot 4 - (-1) \cdot 4}{(4)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$   
 $k'(2) = \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{(g(2))^2} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{(2)^2} = \frac{4}{4} = 1$   
 $k'(3) = \frac{f'(3)g(3) - g'(3)f(3)}{(g(3))^2} = \frac{6 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{(0)^2} = \frac{0}{0} = 0$

$h'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 4 = 4$   
 $h'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 12$   
 $h'(3) = f'(3)g(3) + g'(3)f(3) = 6 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$

فصل چهارم: مشتق ۱۰۱

۱۱ اگر  $f'(1) = 3$  و  $g'(1) = 5$  مطلوب است،  $(f+g)'(1)$  و  $(3f+2g)'(1)$

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$$

۱۲ اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f'_+(0)$  و  $f'_-(0)$  موجودند ولی  $f'(0)$  موجود نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0) = \text{وجود ندارد}$

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+2}}(x^2+1) + 2x^2 \sqrt{3x+2}$$

ب)  $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$

ت)  $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$   $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{9x+2}{2x\sqrt{x}}$

الف)  $f(x) = (2x^2-4)(2x-5)^2$   
 $f'(x) = 4x(2x-5)^2 + 2(2)(2x-5)(4x-2)$

ب)  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{-2x+2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(-2x+2) - (-2)(x^2-2x+1)}{(-2x+2)^2}$$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

?  $\tan^x x$

ب)  $f(x) = \tan^x x - 2 \cos x$

$$f'(x) = 2(1+\tan^2 x) \tan x + 2 \sin x$$

ت)  $f(x) = \sin x \cos^2 x$

$$f'(x) = \cos x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos x$$

الف)  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

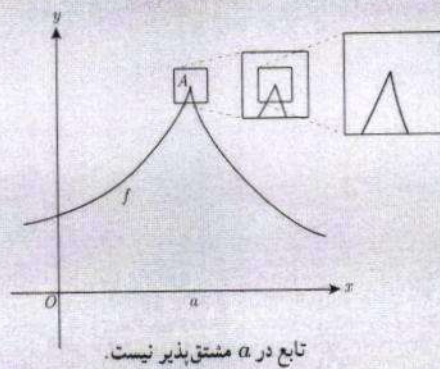
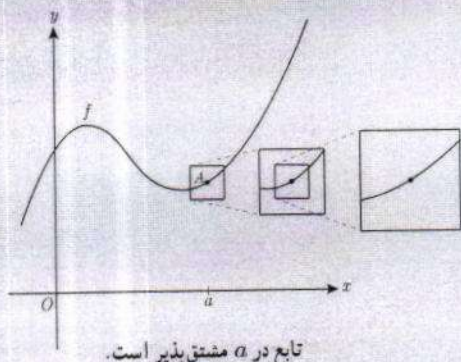
$$f'(x) = 2 \cos x \sin^2 x - 2 \sin x \cos^2 x$$

ب)  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$  ?

$$f'(x) = \frac{2 \cos^2 x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x}$$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه  $A(a, f(a))$  تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه  $A$  در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.





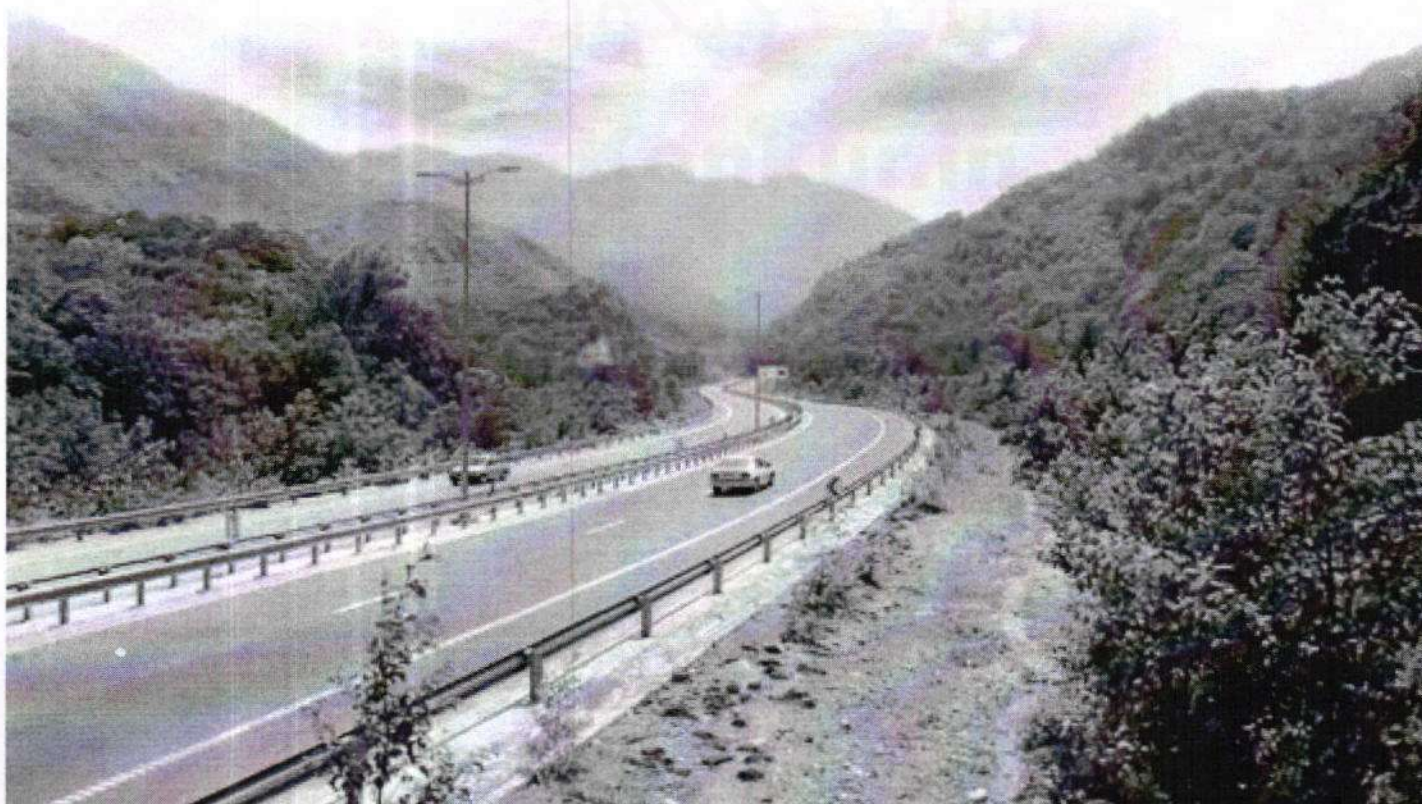
## آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر



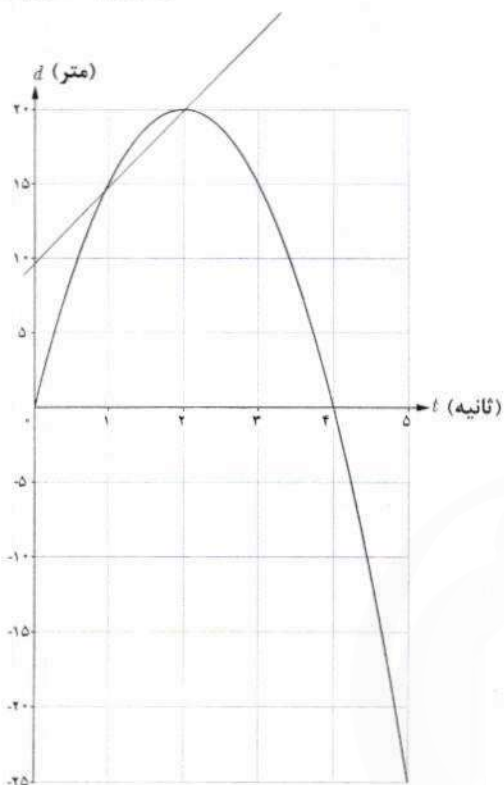
درس

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت  $28^\circ$  کیلومتر را در 4 ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان  $7^\circ = \frac{28^\circ}{4}$  کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه  $t$ ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه  $t$  همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه  $t$  است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.



## فصل چهارم: مشتق ۱۰۳



مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله حرکت می‌کند، که در آن  $0 \leq t \leq 5$  برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان - زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی  $[1, 2]$ ،  $[1, 5]$  و  $[1, 1/4]$  به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند  $[1, 1/3]$  و  $[1, 1/2]$  و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع  $d$  در  $t=1$  به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در  $t=2$  و  $t=3$  چقدر است؟

جواب: الف)

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{2.0 - 1.5}{1} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/75 - 1.5}{0.8} = \frac{3/75}{0.8} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 1.5}{0.75} = \frac{3/2}{0.75} = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در  $t=1$  نزدیک می‌شود.

$$\text{پ) } d'(1) = 1.0 \text{ ، پس ، } d'(t) = -1.0t + 2.0$$

$$\text{ت) } d'(2) = 0 \text{ ، } d'(3) = -1.0$$

سرعت در لحظه  $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور  $x$  هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های  $t=1$  و  $t=3$  برابر است و علامت منفی در مورد  $d'(3)$  نشان می‌دهد که جهت حرکت در  $t=3$  برخلاف جهت حرکت در  $t=1$  است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند  $[a, a+h]$  به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

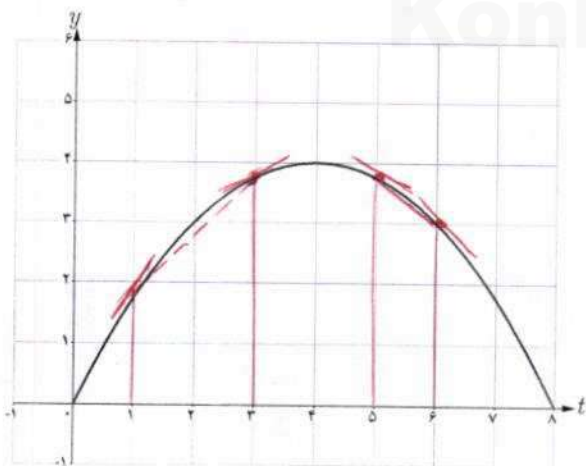
آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه متناظراند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کارد در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه  $t$  نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین  $t=1$  و  $t=3$

B سرعت متوسط بین  $t=5$  و  $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در  $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در  $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در  $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در  $t=6$

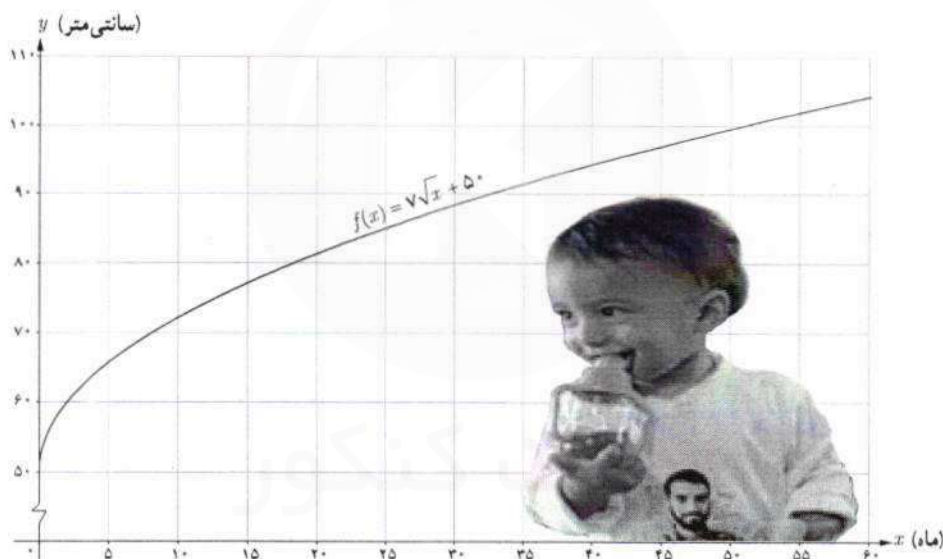
$$F < B < E < D < A < C$$

## کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد: همان گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع  $f(x) = \sqrt{x} + 50$  قد متوسط کودکان را بر حسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن  $x$  مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی  $[0, 60]$  چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.09 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانی متر در هر ماه است.



## کارد کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی  $[0, 25]$  چقدر است؟  $\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{\sqrt{25} + 50 - 50}{25} = \frac{5}{25} = 0.2 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟  
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$   $f'(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} \approx 0.07 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$   $f'(25) > f'(49)$

ب) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله

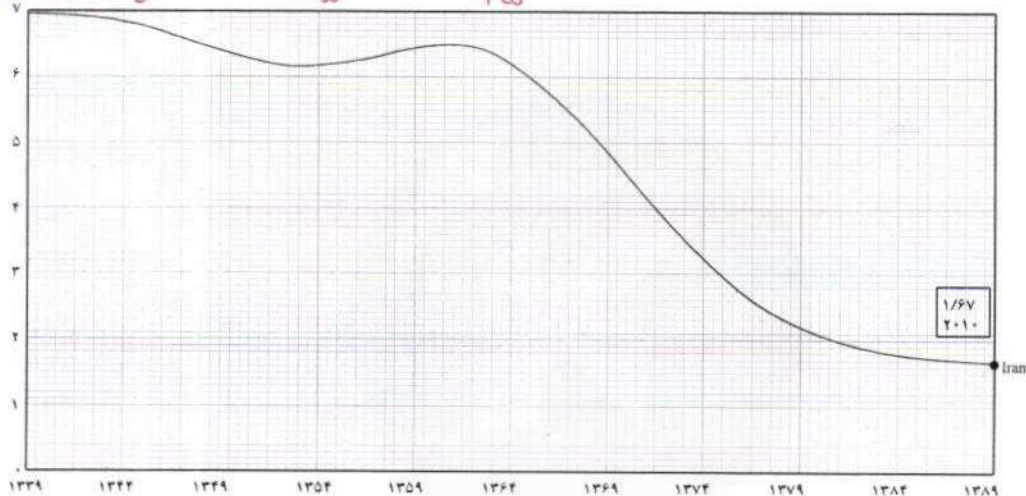
حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.  
 $\frac{f(36) - f(16)}{36 - 16} = \frac{9.5 - 8.5}{20} = \frac{1}{20} = 0.05 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$

نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹, ۱۳۸۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0.108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379) - f(1364)}{1379 - 1364} = \frac{2,2 - 7,2}{15} = \frac{-5}{15} = -0.33$$

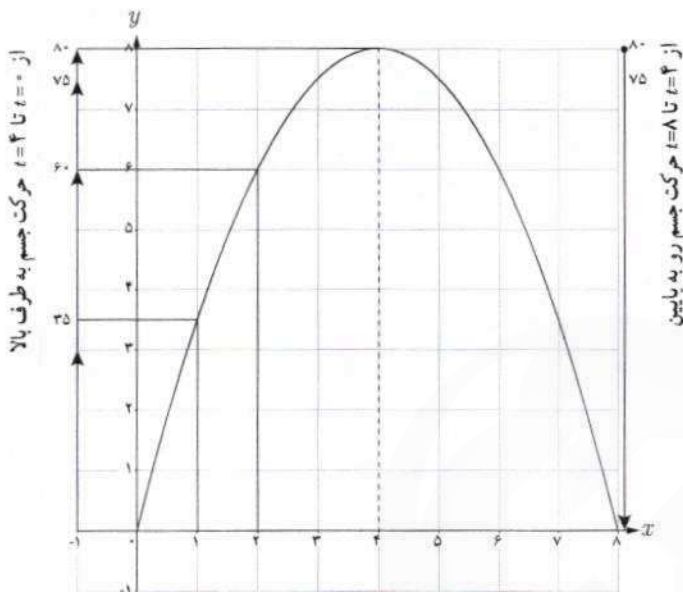


میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

### خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی ها نشان می دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ ترین و سریع ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می کند که این سیاست ها تا دست یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

## سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای



مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله  $h(t) = -5t^2 + 40t$  به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است. به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان - زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی  $[0, 2]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  و  $[3, 4]$  را به ترتیب با  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  و  $v_4$  نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های  $t=1$ ,  $t=2$ ,  $t=3$  و  $t=4$  با استفاده از مشتق تابع  $h$  چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s}, \quad h'(2) = 20 \text{ m/s}, \quad h'(3) = 10 \text{ m/s}, \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در  $t=4$  جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه  $[4, 5]$  برابر  $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$  و سرعت لحظه‌ای در  $t=5$  برابر  $h'(5) = -10 \text{ m/s}$  است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کارد کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.  $t=0 \Rightarrow h'(0) = 20 \text{ m/s}$  هنگام پرتاب

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی  $[5, 8]$  به دست آورید.  $t=8 \Rightarrow h'(8) = -20 \text{ m/s}$  هنگام برخورد به زمین

سرعت متوسط =  $\frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{-75}{3} = -25 \text{ m/s}$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم  $25 \text{ m/s}$  و  $-25 \text{ m/s}$  است.

$25 = -10t + 20 \rightarrow t = -0.5 \text{ s}$  (ردیف)  
 $-25 = -10t + 20 \rightarrow t = 4.5 \text{ s}$  (ردیف)

سرعت لحظه =  $h'(t) = -10t + 20$

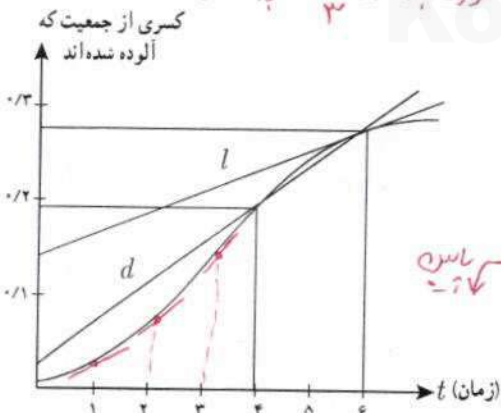
تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت  $T$  (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت $h$	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت $T$	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

الف)  $\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = 2$  ب)  $\frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = -\frac{5}{3}$

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :  
 الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.  
 ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.  
 پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.

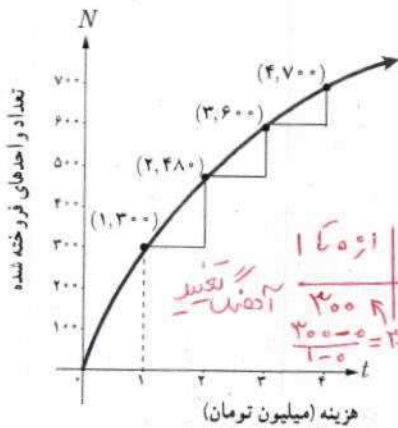


۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه رو نشان داده شده است.

الف) شیب های خطوط  $l$  و  $d$  چه چیزهایی را نشان می دهند.  
 ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های  $t=1, t=2, t=3$  بیشتر است؟  
 پ) قسمت ب را برای  $t=4, t=5, t=6$  بررسی کنید.

الف) شیب خط  $l$  آهنگ تغییر لحظه ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه  $t=6$  (هفته ی هشتم) نشان می دهد.  
 شیب خط  $d$  آهنگ تغییر متوسط کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله ی زمانی  $t=4$  تا  $t=6$  (هفته ی چهارم تا هفته ی هشتم) نشان می دهد.

فصل چهارم: مشتق ۱۰۹



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

از ۰ تا ۱	از ۱ تا ۲	از ۲ تا ۳	از ۳ تا ۴
۳۰۰	۱۸۰	۱۲۰	۱۰۰

$\frac{300-0}{1-0} = 30\%$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟ زیرا با افزایش هزینه، تعداد کالاها فروخته شده کم می‌شود و در نتیجه کم می‌شوند.

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  بر حسب متر در بازه زمانی [۰, ۵] (t بر حسب ثانیه) داده شده است.

در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی [۰, ۵] با هم برابرند؟

$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$        $\text{سرعت لحظه‌ای} = 2t - 1$        $2t - 1 = 4 \rightarrow t = 2.5 \text{ s}$

۵ تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود.  $f(t)$  نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر  $f(t)$  در جدول زیر نمایش داده شده است.

$\frac{f(1/4) - f(1/8)}{1/8} = 12 \text{ m/s}$   
 $\frac{f(1/5) - f(1/6)}{1/6} = 11 \text{ m/s}$

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
f(t)	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

$f'(1/8) = 11.5 \text{ m/s}$

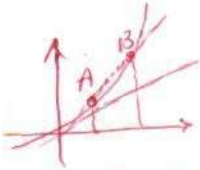
بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

- الف) ۱/۲۳ m/s      ب) ۱۴/۹۱ m/s      ج) ۱۱/۵ m/s      د) ۱۶/۰۳ m/s

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به طور مثال  $f'(0) \approx -6$ . بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰
f(x)	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی f'(x)	-۶	-۳	-۱/۸	-۰/۲	x





۷ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است:

- الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند  $f$  در بازه  $[0, 1]$  همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. **نادرست**
- ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. **نادرست**
- پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم  $f'(a) = 0$  و هم  $f(a) = 0$  **نادرست**  
 $f(a) = f'(a) = 0$
- ۸ یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$  گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی  $3 \leq t \leq 4$  چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t=3$  چقدر است؟

$$\frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = \frac{130 - \sqrt{3} - 54}{1} \approx 76, 39$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow m'(3) \approx 56, 39$$

۹ گنجایش ظرفی  $40$  لیتر مایع است. در لحظه  $t=0$  سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از  $t$  ثانیه از رابطه  $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$  به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی  $[0, 1]$  چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[0, 100]$  می‌شود؟

الف)  $\frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 39, 206 - 40 = -0, 796$  لیتر

ب)  $\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = -0, 4$  **آهنگ متوسط**

$V'(t) = -0, 8(1 - \frac{t}{100})$  **آهنگ لحظه‌ای**

$$\rightarrow -0, 8(1 - \frac{t}{100}) = -0, 4$$

$$\rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 50$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

## کاربردهای مشتق

# ۵

## فصل

- ۱ اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
- ۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
- ۳ رسم نمودار توابع

کرده حیران (اردبیل)

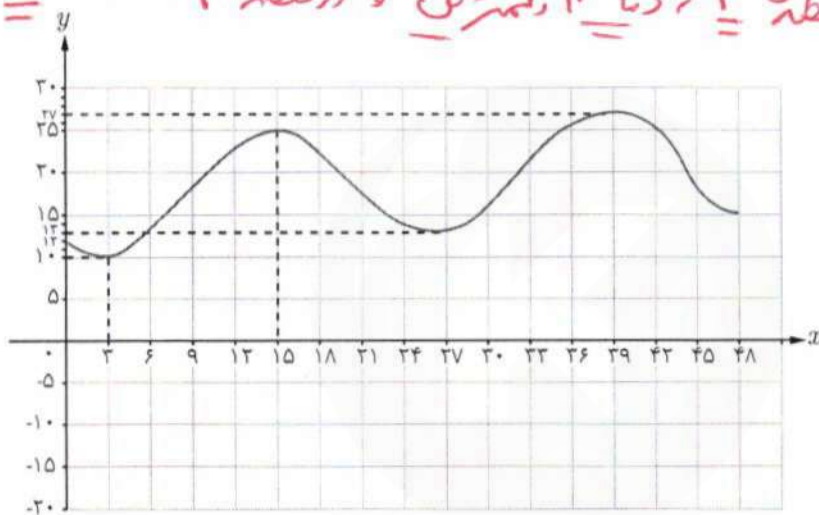
سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان - زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

# اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

درس

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر  $x$  زمان و  $y$  دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

در نقطه ۳ دما ۱۰ کمترین و در نقطه ۱۵ دما ۲۹ و بیشترین



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد. نقاط به طول ۳ و ۲۷ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت:

تعریف:

اگر  $f$  یک تابع و  $I \subseteq D_f$  یک همسایگی از نقطه  $c$  (بازه باز شامل نقطه  $c$ ) باشد که  
 الف) به ازای هر  $x$  متعلق به  $I$  داشته باشیم  $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت  $f(c)$  را یک ماکزیمم نسبی تابع  $f$  می‌نامیم.  
 ب) به ازای هر  $x$  متعلق به  $I$  داشته باشیم  $f(x) \geq f(c)$ ، در این صورت  $f(c)$  را یک مینیمم نسبی تابع  $f$  می‌نامیم.

## فصل پنجم: کاربردهای مشتق ۱۱۲

دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۱۵, ۲۵) و (۳۹, ۲۷) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول ۱۵ و  $x = ۳۹$  اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۳, ۱۰) و (۲۷, ۱۳) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول  $x = ۱۳$  و  $x = ۱۰$  اتفاق افتاده‌اند.

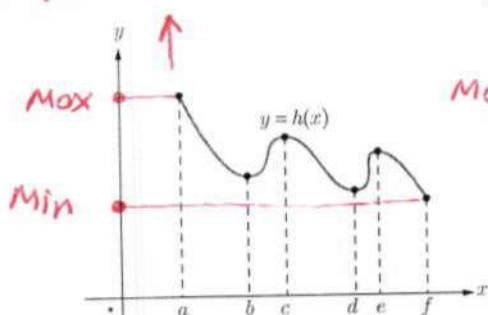
در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک مجموعه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع  $f$  در مجموعه  $I$  «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع  $f$  در مجموعه  $I$  «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  در مجموعه  $I$  به ترتیب «بالا ترین» و «پایین ترین» نقطه نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  (منظور نقطه‌ای از تابع به طول  $x = a$  است) اتفاق افتاده است یعنی  $f(a)$  مقدار ماکزیمم مطلق و نقطه  $(a, f(a))$  نقطه ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است. به عبارتی برای هر  $x \in I$  داریم  $f(x) \leq f(a)$ . همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  اتفاق افتاده است یعنی  $f(a)$  مقدار مینیمم مطلق و نقطه  $(a, f(a))$  نقطه مینیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است.

تذکره: گوییم تابع  $f$  در نقطه  $x = c$  اکسترمم نسبی دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطه  $x = c$  ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه اکسترمم مطلق دارد.

## کارد کلاس

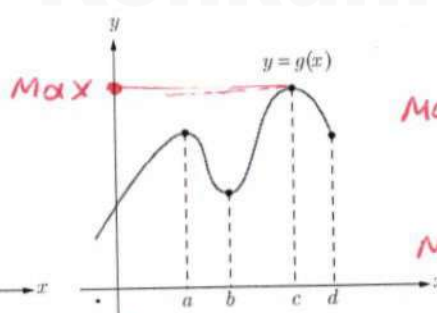
۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

$x = a$  ماکزیمم مطلق



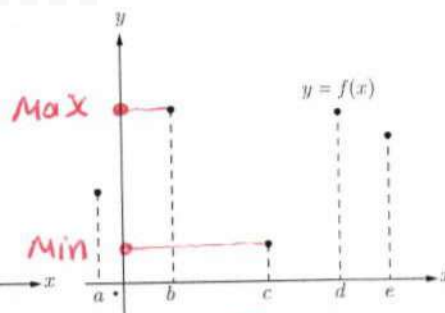
(ب)  $x = f$  مینیمم مطلق

Konkur.in



(ب) مینیمم مطلق ندارد

$x = c$  ماکزیمم مطلق

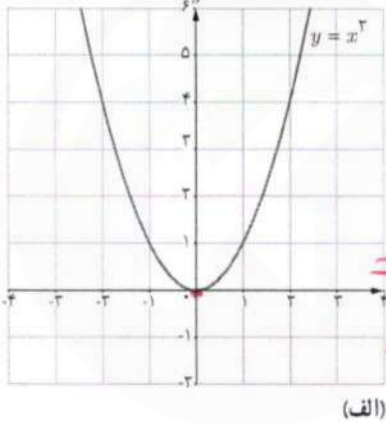
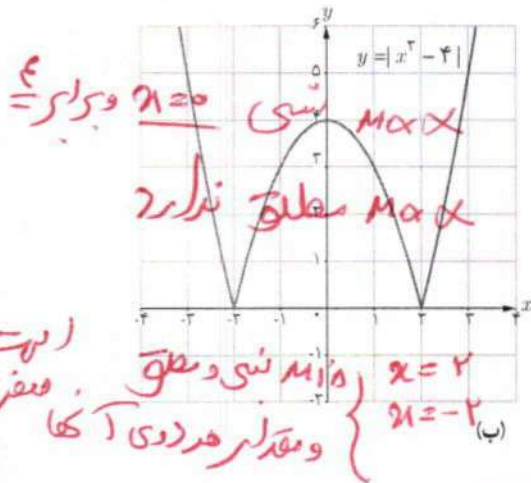
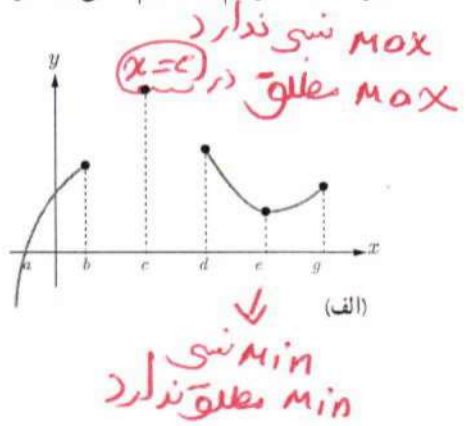
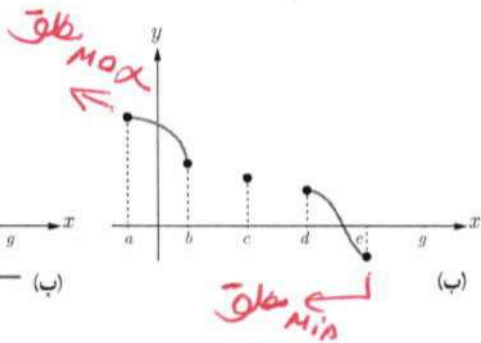
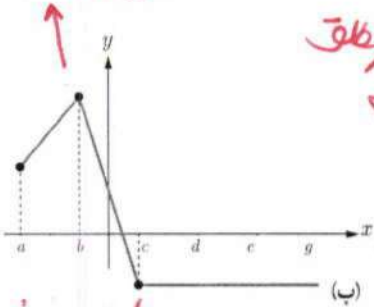


(الف)  $x = b$  ماکزیمم مطلق

$x = c$  مینیمم مطلق

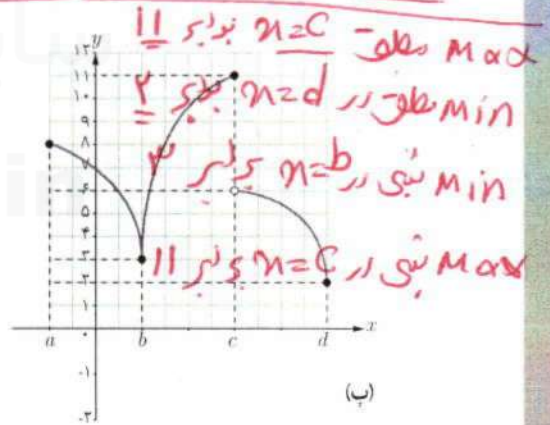
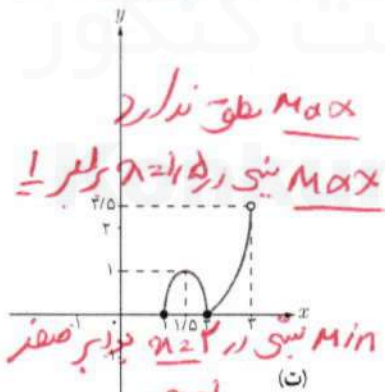
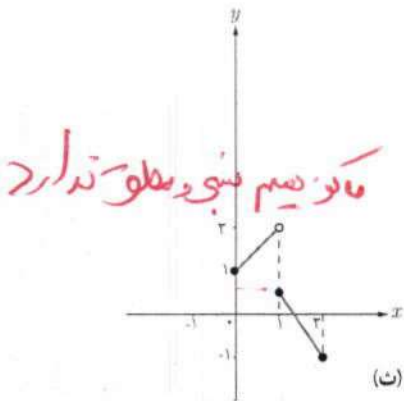
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

Max مطلق نسبی



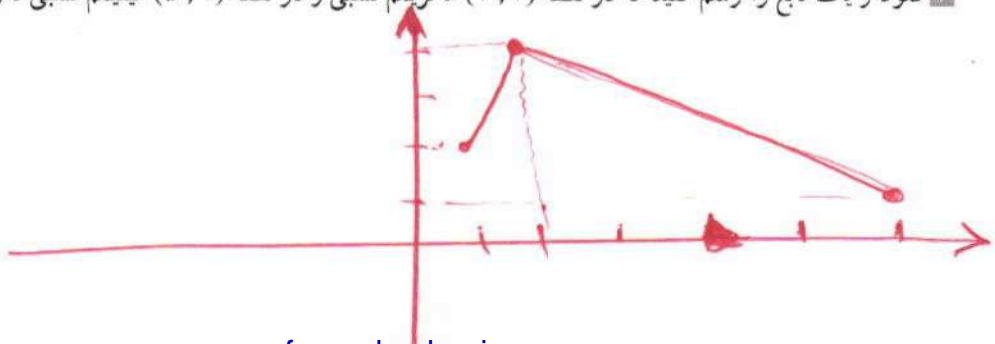
۲ در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.

Min نسبی و مقدار هر دوی آنها = 0  
Min مطلق  
Max نسبی و مطلق ندارد



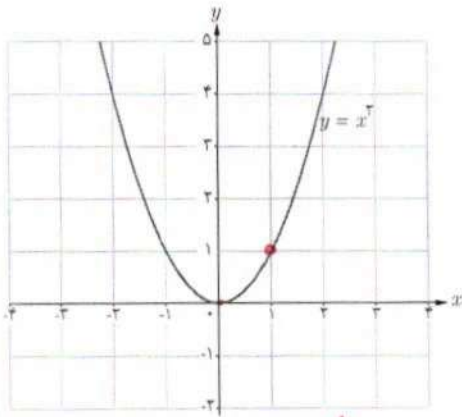
Min مطلق (۱-۳) است

۳ نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه (۲, ۴) ماکزیمم نسبی و در نقطه (۵, ۱) مینیمم نسبی دارد.



(ب) در  $x=0$  یعنی  $(0,0)$   $\min$  مطلق دارد اما ماکزیمم مطلق ندارد.

فصل پنجم: کاربردهای مشتق ۱۱۵



۵ تابع  $f(x) = x^2$  را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  را در بازه‌های  $[0, 1]$  و  $(0, 1)$  بررسی کنید.  
ب) وجود اکسترم‌های مطلق تابع  $f$  را بر  $\mathbb{R}$  بررسی نمایید.

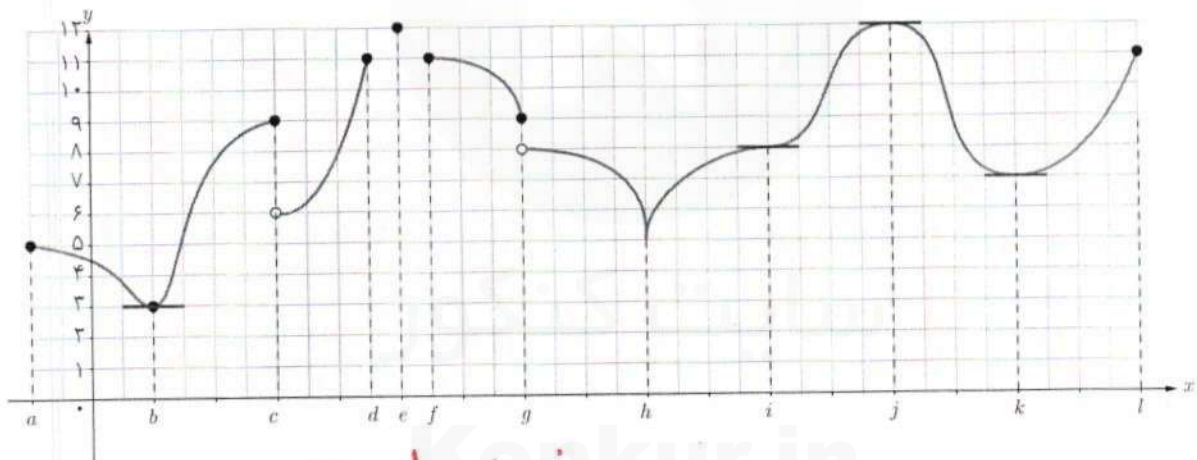
الف) در  $[0, 1]$  ،  $\min$  مطلق برای  $0$

و  $\max$  مطلق برای  $1$

اما در  $(0, 1)$  ،  $\min$  و  $\max$  مطلق ندارد.

فعالیت

۱ در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترم نسبی را مشخص نمایید.

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.  $a, c, d, e, f, g, h, l$

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.  $b, d, e, g, k$

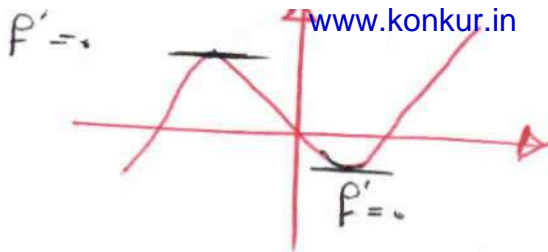
ت) آیا در همه نقاط اکسترم نسبی مشتق وجود دارد؟ **خیر**

ث) در اکسترم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟ **صفر**

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترم نسبی نباشد؟ **بله (نقطهٔ گریز)**

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترم مطلق باشد؟ **بله**

در نقطه  $k$  **ه**

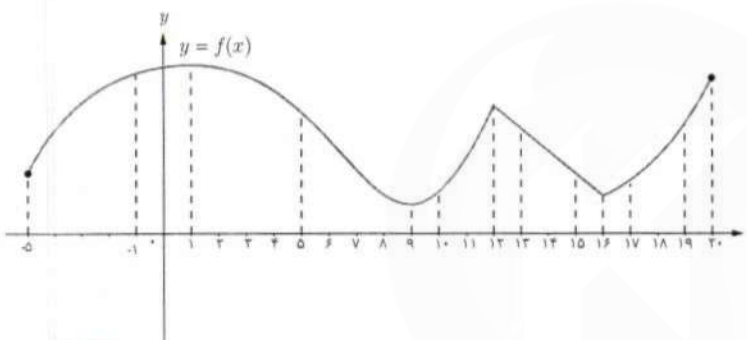


۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟

$f' = 0$

- ۲ با توجه به آنچه در قسمت های ۱ و ۲ دیدید، کدام یک از موارد زیر می تواند درست باشد؟  
 الف) اگر  $f'(c)$  وجود نداشته باشد، آنگاه  $x = c$  یک نقطه اکسترمم نسبی نیست. **نادرست**  
 ب) اگر  $f'(c) = 0$ ، آنگاه  $x = c$  یک نقطه اکسترمم نسبی است. **نادرست**  
 پ) اگر  $x = c$  طول یک نقطه اکسترمم نسبی باشد و  $f'(c)$  موجود باشد، آنگاه  $f'(c) = 0$ . **درست**

فعالیت



۱ شکل رویه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می دهد.

الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع  $f$  در بازه‌های بسته زیر بررسی کنید.

$[-1, 0]$	$[5, 10]$	$[12, 15]$	$[10, 13]$	$[16, 20]$
Max مطلق	Min مطلق	Max مطلق	Min مطلق	Max مطلق
وجود ندارد	Min مطلق $x=9$	وجود ندارد	Max مطلق $x=12$	وجود ندارد

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع  $f$  در بازه‌های باز زیر بررسی کنید.

$(-1, 0)$	$(5, 10)$	$(12, 15)$	$(10, 13)$	$(16, 20)$
وجود ندارد	Min مطلق $x=9$	وجود ندارد	Max مطلق $x=12$	وجود ندارد

- ۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام یک از موارد زیر نمی تواند درست باشد؟  
 الف) هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است. **درست**  
 ب) هر تابع پیوسته بر یک بازه باز دارای اکسترمم‌های مطلق است. **نادرست**  
 قضیه زیر را بدون اثبات می پذیریم.

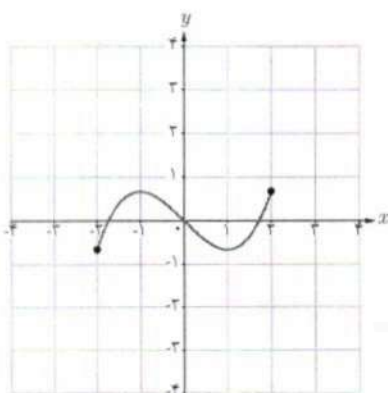
قضیه: اگر تابع  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

## فصل پنجم: کاربردهای مشتق ۱۱۷

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»، یا در «اکسترم‌های نسبی تابع» و یا در «نقاطی که تابع در آنها مشتق پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکسترم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند:

- ۱) نقاطی که مشتق تابع در آنها وجود ندارد.
- ۲) نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.
- ۳) نقاط ابتدایی و انتهایی بازه مورد نظر.

مجموعه حاصل از اجتماع نقاط دو دسته (۱) و (۲) را «نقاط بحرانی» می‌نامیم؛ «به عبارتی نقاط بحرانی نقاطی از دامنه تابع هستند که مشتق تابع در آنها وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است.» برای یافتن نقاط اکسترم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار مینیمم مطلق تابع است.



مثال: اکسترم‌های مطلق تابع  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$  را در بازه  $[-2, 2]$

بیابید.

حل: بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها

وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازه  $(-2, 2)$  به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما  $f$  در تمام بازه  $(-2, 2)$  مشتق پذیر است و داریم  $f'(x) = x^2 - 1$  و مقدار  $f'$  در  $x = \pm 1$  برابر صفر می‌شود یعنی داریم  $f'(1) = 0$  و  $f'(-1) = 0$ .

بنابراین  $x = \pm 1$  طول نقاط بحرانی و  $x = \pm 2$  طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم:

$$f(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$f(-1) = \frac{2}{3}$$

$$f(1) = -\frac{2}{3}$$

$$f(2) = \frac{2}{3}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  و نقاط ماکزیمم نقاط به طول  $x = -1$  و  $x = 2$  و نقاط مینیمم نقاط به طول  $x = 1$  و  $x = -2$  است.



❖ مثال : مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = |x^2 - 1|$  را روی بازه  $[-2, 2]$  پیدا کنید.

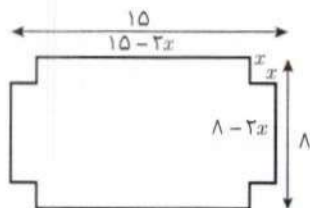
❖ حل : نقاط  $x = \pm 2$  نقاط انتهایی بازه اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند  $c$  که برای آنها  $f'(c) = 0$  یا  $f'(c)$  وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق پذیری تابع  $f$  در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم :

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ یا } 1 \leq x \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \text{ یا } 1 < x \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقاط  $x = -1$  و  $x = 1$  به دست آوریم که با توجه به تعاریف مشتق چپ و راست از فصل مشتق خواهیم داشت :

$$\text{و } f'_-(-1) = -2, \quad f'_+(-1) = 2, \quad f'_-(1) = -2, \quad f'_+(1) = 2$$

بنابراین تابع  $f$  در نقاط  $x = \pm 1$  مشتق پذیر نیست و از طرفی  $f'$  تنها در نقطه  $x = 0$  مقدار صفر می گیرد. لذا نقاط  $x = 0$  و  $x = \pm 1$  نقاط بحرانی این تابع اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطه  $x = \pm 1$  است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط  $x = \pm 2$  و مقدار آن برابر ۳ است. در بسیاری از مسائل در زندگی خواهان این هستیم که با داشتن برخی شرایط از پیش تعیین شده، مسئله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشیم. به عنوان نمونه در مثال زیر می خواهیم از ورقه ای با ابعاد مشخص جعبه ای با بیشترین حجم ممکن بسازیم.



❖ مثال : یک سازنده جعبه های حلبی، با بریدن مربع های همنهشت از چهار گوشه ورق های حلبی به ابعاد ۸ اینچ و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه های سر باز می سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟

❖ حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه های مستطیل مفروض برحسب اینج بریده می شود  $x$  باشد. پس

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{15}{2} & \quad \text{طول قوطی مورد نظر} = 15 - 2x \\ 0 \leq x \leq 4 & \quad \text{عرض قوطی} = 8 - 2x \end{aligned}$$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x) = x(15 - 2x)(8 - 2x) = 4x^2 - 46x + 120, \quad 0 \leq x \leq 4$$

## فصل پنجم: کاربردهای مشتق ۱۱۹

چون  $V$  روی  $[۴, ۰]$  پیوسته است، پس دارای اکسترم‌های مطلق در این بازه است و داریم:

$$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۹۲x + ۱۲۰ = ۰$$

$$(۳x-۵)(x-۶) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \text{ یا } x = ۶$$

اما  $x = ۶$  در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و  $x = \frac{۵}{۳}$  تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی  $V(۰) = ۰$  و  $V(\frac{۵}{۳}) > ۰$  و  $V(۴) = ۰$  نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در  $x = \frac{۵}{۳}$  حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید  $\frac{۵}{۳}$  اینج باشد.

• مثال: در کره‌ای به شعاع  $R$  یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

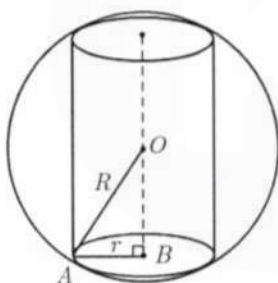
• حل: فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده  $r$  و ارتفاع  $h$  باشد. اگر  $O$  مرکز کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه  $OAB$ ،

$$OB = \frac{h}{۲} \text{ و داریم:}$$

$$AB^۲ + OB^۲ = OA^۲$$

$$\text{بنابراین } r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = R^۲$$

حجم این استوانه برابر است با:



$$V = \pi r^۲ h = \pi \left( R^۲ - \frac{h^۲}{۴} \right) h \Rightarrow V(h) = \pi R^۲ h - \frac{\pi}{۴} h^۳ ; ۰ \leq h \leq ۲R$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه  $[۰, ۲R]$ ، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$V'(h) = \pi R^۲ - \frac{۳\pi}{۴} h^۲ = ۰ \Rightarrow h = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

از طرفی  $V(۰) = ۰$  و  $V(۲R) = ۰$

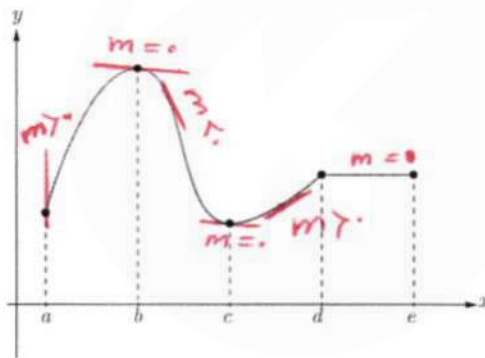
بنابراین تابع  $V$  به ازای  $h = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$  بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه  $r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = R^۲$ ، مقدار  $r$  برابر با  $r = \frac{\sqrt{۲}R}{\sqrt{۳}}$  می‌باشد.

## تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

در فصل اول با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند  $f$  با تابع  $f'$  آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی  $f'$  می توان ویژگی هایی از تابع  $f$  و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

### فعالیت

۱ نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است.



الف) با رسم مماس هایی در نقاط مختلف نمودار  $f$  تعیین کنید در چه بازه هایی شیب مماس ها مثبت و در چه بازه هایی شیب مماس ها منفی و در چه زیرمجموعه ای از دامنه شیب مماس ها برابر صفر است.

$$\begin{aligned} m=0 & \in \{b, c\} \\ m < 0 & \in (a, b) \\ m > 0 & \in (c, d) \end{aligned}$$

در بازه  $(b, c)$  شیب منفی و در بازه  $(d, e)$  شیب مثبت

ب) تعیین کنید در چه بازه هایی مشتق  $f$  مثبت و در چه بازه هایی مشتق  $f$  منفی و در چه بازه هایی  $f'$  برابر صفر است.

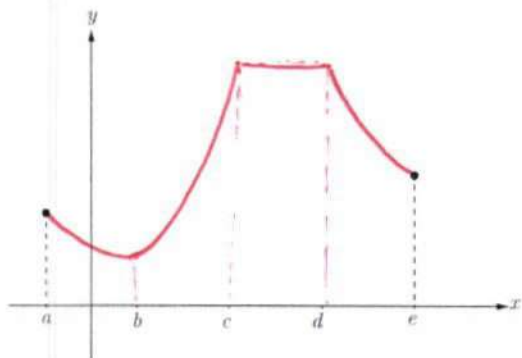
$$\begin{aligned} f' > 0 & \in (a, b) \\ f' < 0 & \in (b, c) \\ f' = 0 & \in \{b, c\} \end{aligned}$$

در بازه  $(a, b)$  شیب مثبت و در بازه  $(b, c)$  شیب منفی و در بازه  $(c, d)$  شیب مثبت

پ) تعیین کنید در چه بازه هایی تابع  $f$  صعودی اکید و در چه بازه هایی نزولی اکید و در چه بازه هایی مقدار تابع  $f$  ثابت است.

$$\begin{aligned} \text{در بازه } (a, b) & \text{ و } (c, d) \text{ اکیداً صعودی و در بازه } (b, c) \text{ اکیداً نزولی} \\ \text{در بازه } (d, e) & \text{ تابع ثابت} \end{aligned}$$

$$\text{در بازه } (d, e) \text{ تابع ثابت}$$



۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازه  $[a, e]$  به گونه‌ای رسم کنید که دارای همه ویژگی‌های زیر باشد:

- تابع  $f$  در بازه  $(a, e)$  مشتق پذیر باشد.
- مقدار مشتق تابع در بازه‌های  $(a, b)$  و  $(b, c)$  و  $(c, d)$  و  $(d, e)$  به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.
- تعیین کنید تابع  $f$  در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

در بازه  $(b, c)$  صعودی و در بازه  $(a, b)$  و  $(d, e)$  نزولی و در بازه  $(c, d)$  تابع ثابت

با توجه به آنچه گفته شد قضیه زیر را بدون اثبات بیان می‌نمایم.

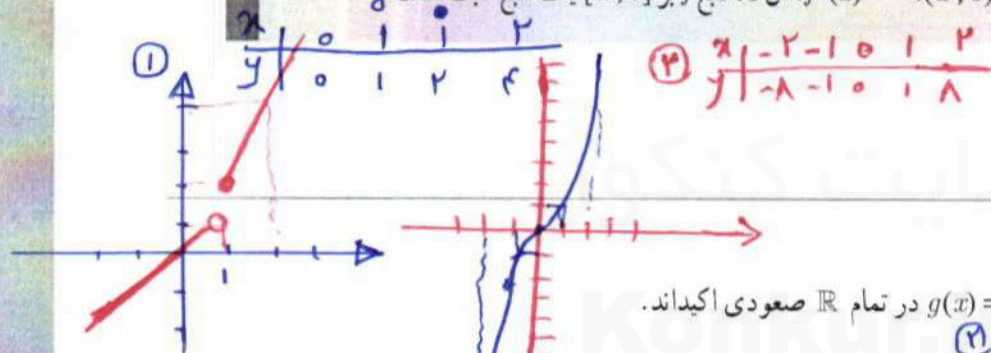
قضیه:

فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته و بر بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر  $x$  در  $(a, b)$ ،  $f'(x) > 0$ ، آن‌گاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$ ،  $f'(x) < 0$ ، آن‌گاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$ ،  $f'(x) = 0$ ، آن‌گاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  یک تابع ثابت است.

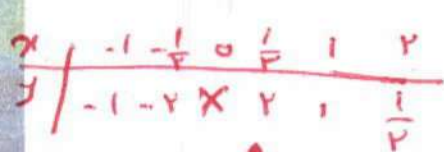


کارد کلاس

۱ توابع  $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$  و  $g(x) = x^2$  در تمام  $\mathbb{R}$  صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق پذیر هم هست؟ **خیر**

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟ **بله**

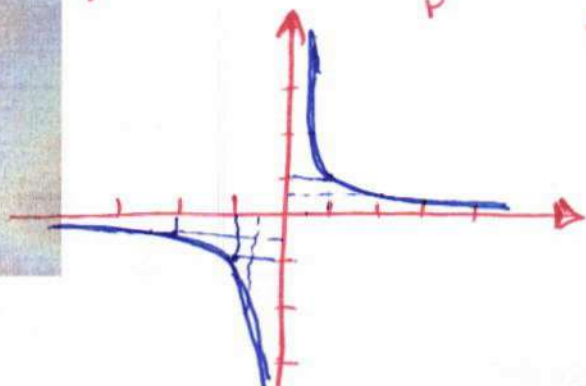


۲ تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در نظر بگیرید.

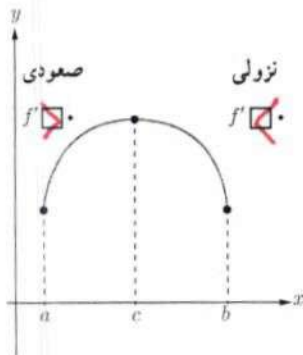
الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنه خود اکیداً نزولی است؟ **خیر**

در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

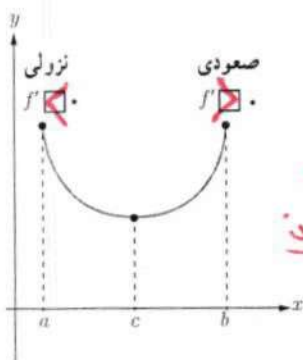


فرض کنیم  $c \in (a, b) \subseteq D_f$  یک نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد و  $f$  بر  $(a, b)$  پیوسته و به جز احتمالاً در  $c$  مشتق پذیر باشد.



۱ اگر تابع  $f$  در بازه ای مانند  $(a, c)$  در سمت چپ آن صعودی و در بازه ای مانند  $(c, b)$  در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت  $x = c$  یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع  $f$  است.

در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع  $f$  رسم شده است. علامت  $f'$  را در دو طرف نقطه  $c$  مشخص نمایید.



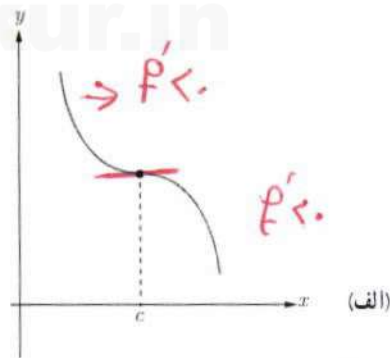
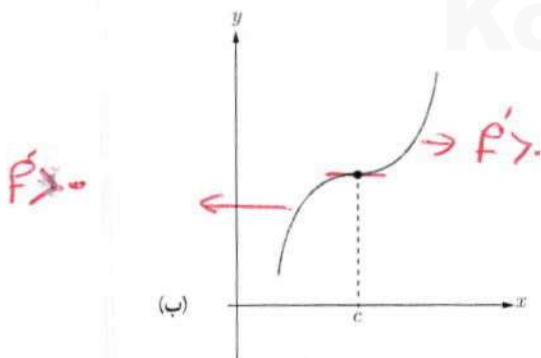
۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطه مینیمم نسبی تابع  $f$  بنویسید.

آرایع  $f$  در بازه ای مانند  $(a, c)$  در سمت چپ آن نزولی و در بازه ای مانند  $(c, b)$  در سمت راست آن صعودی باشد در این صورت  $x = c$  یک نقطه مینیمم نسبی تابع  $f$  است

۳ در شکل های زیر نمودار تابع  $f$  و نقطه  $c$  مشخص شده است و  $f'(c) = 0$ .

الف) علامت  $f'$  را در دو طرف نقطه  $c$  در هر دو نمودار بررسی کنید.

ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا  $c$  یک نقطه اکسترمم نسبی است؟



نقاط اکسترمم ندارند زیرا علامت  $f'$  در نسل های آنها برابر در دو طرف نقطه  $x = c$  یکسان می باشد

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اول معروف است بیان نمود.

### آزمون مشتق اول

فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه‌ای باز مانند  $I (I \subseteq D_f)$  پیوسته باشد و  $c \in I$  یک نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد. هرگاه  $f$  بر این بازه به جز احتمالاً در نقطه  $c$ ، مشتق پذیر باشد، در این صورت:

(الف) اگر به ازای تمام مقادیر  $x$  در بازه‌ای مانند  $(a, c)$ ،  $f'(x) > 0$  و به ازای تمام مقادیر  $x$  در بازه‌ای مانند  $(c, b)$ ،  $f'(x) < 0$ ، در این صورت  $f(c)$  یک مقدار ماکزیمم نسبی  $f$  است.

(ب) اگر به ازای تمام مقادیر  $x$  در بازه‌ای مانند  $(a, c)$ ،  $f'(x) < 0$  و به ازای تمام مقادیر  $x$  در بازه‌ای مانند  $(c, b)$ ،  $f'(x) > 0$ ، آن‌گاه  $f(c)$  یک مقدار مینیمم نسبی  $f$  است.

(پ) اگر  $f'$  در نقطه  $c$  تغییر علامت ندهد، به طوری که  $f'$  در هر دو طرف  $c$  مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه  $f(c)$  نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

❖ مثال: اکستریم‌های نسبی و مطلق تابع  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$  را در بازه  $[-3, 4]$  به دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

❖ حل: از آنجا که توابع چندجمله‌ای همواره مشتق پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع  $f$  باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می‌شود را به دست آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \quad \text{یا} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{2}{3}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط  $x = 2$  و  $x = -\frac{2}{3}$  است و نقاط  $x = -3$  و  $x = 4$  هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم:

$$(-3, -27), \left(-\frac{2}{3}, \frac{202}{27}\right), (2, -2), (4, 22)$$

لذا  $x = -3$  و  $x = 4$  به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و -۲۷ است. حال برای تعیین اکستریم‌های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجه دوم داریم:

$x$		$-\frac{2}{3}$		۲	
$f'(x)$	+	۰	-	۰	+

از این جدول مشخص می‌شود که تابع  $f$  در بازه  $(-\frac{2}{3}, 2)$  نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطه  $x = -\frac{2}{3}$  یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر  $\frac{202}{27}$  است و نقطه  $x = 2$  یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر  $-2$  است. می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

$x$	$-3$	$-\frac{2}{3}$	$2$	$4$
$f'$		$+$	$-$	$+$
$f$	$-27$	$\frac{202}{27}$	$-2$	$22$

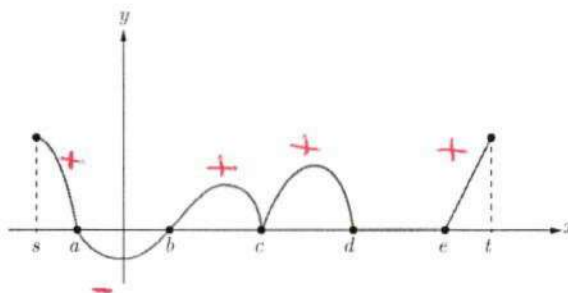
ماکزیمم نسبی

مینیمم نسبی

کارد کلاسی

نمودار تابع  $f'$  در شکل زیر داده شده است. در بازه‌ها  $(a, b)$  و  $(c, d)$  تابع صعودی و در بازه  $(b, c)$  تابع نزولی و همچنین در بازه  $(d, e)$  تابع نزولی است. بررسی کنید. تابع نزولی و صعودی در بازه  $(a, b)$  و  $(c, d)$  و  $(d, e)$  کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی اند؟

ب) آیا نقاط بازه  $(d, e)$  اکسترمم نسبی هستند؟ بله، زیرا تابع در این بازه تابع نزولی است.



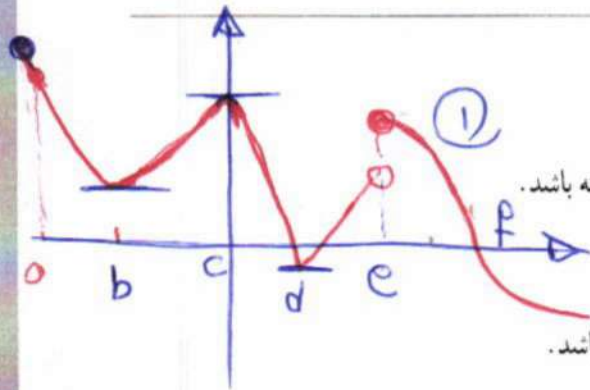
ب) در  $x = a, b, c, d, e$  ماکزیمم نسبی در نقاط بحرانی هستند

زیرا مشتق در این نقاط منفی است

و در  $x = b$  مینیمم نسبی

۱۲۵ فصل پنجم: کاربردهای مشتق

تمرین

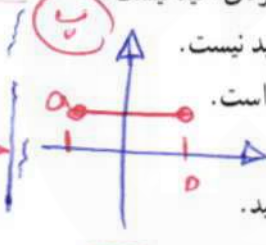
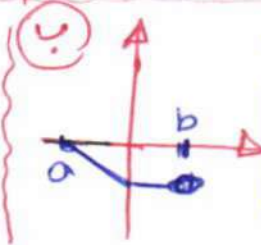
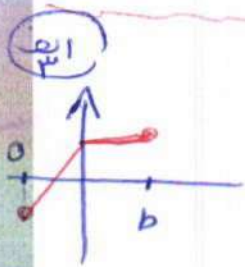


- ۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.
  - نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.
  - نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.
  - نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع نقطهٔ بحرانی نباشد.
  - نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.
  - نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

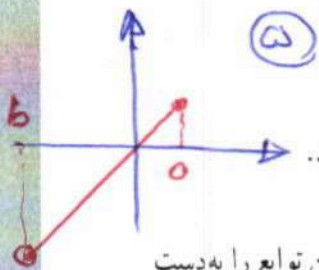


- الف) تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $[a, b]$  صعودی است اما صعودی اکید نیست.
  - ب) تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $[a, b]$  نزولی است اما نزولی اکید نیست.
  - پ) تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $[a, b]$  هم صعودی و هم نزولی است.
- ۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.

ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق پذیر نیست.

پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.



۵ نمودار تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع  $|f|$  ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به دست

الف)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$   $[-2, 1]$

ب)  $f(x) = x^2 - 3x$   $[-1, 2]$

پ)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4-x & x \geq 2 \end{cases}$

جدولی آورد.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x < 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$$

Max برای  $x > 2$

$f'$	+	-
$f$	↗	↘

الف)  $f'(x) = 4x - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

ب)  $f'(x) = 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$x = -2 \Rightarrow y = 12 + 4 + 5 = 21 \Rightarrow \text{Max}$

$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{Max مطلق}$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 5 = \frac{19}{4} \Rightarrow \text{Min}$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 3 = -2 \Rightarrow \text{Min مطلق}$

$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 4 + 5 = 5 \Rightarrow \text{Max مطلق}$

$x = 2 \Rightarrow y = 8 - 4 = 4 \Rightarrow \text{Max مطلق}$



۷ ضرایب  $a$  و  $b$  را در تابع  $f(x) = x^2 + ax + b$  طوری پیدا کنید که در نقطه  $(1, 2)$ ، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-1) = 5, \quad f(4) = -2, \quad f(0) = 0$$

نقطه  $(1, 1)$  ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع  $x$  و  $y$  در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع  $h$  از گوشه‌های آن و تازدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر  $xy = 100 \text{ cm}^2$  و  $h = 2 \text{ cm}$ ، مقادیر  $x$  و  $y$  را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

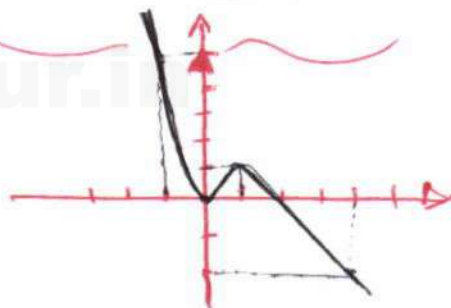
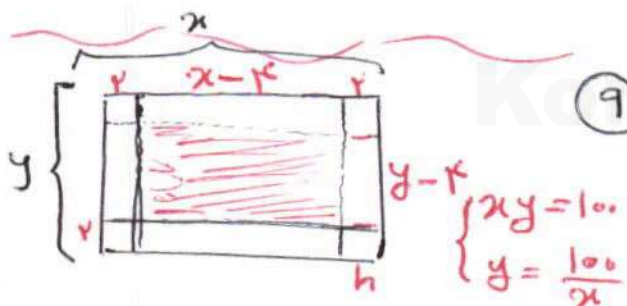
۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی اند؟

$$f(x) = 2x^2 - 3x^3 - 12x + 7 \text{ (الف)}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \text{ (ب)}$$

$$(1, 2) \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow -3 + b = 1 \Rightarrow b = 4 \quad (7)$$

$$f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$



$$V = 2(x-4)(y-2) = 2xy - 8x - 4y + 16$$

$$V(x) = 2 \cdot 2 - 8x - \frac{100}{x}$$

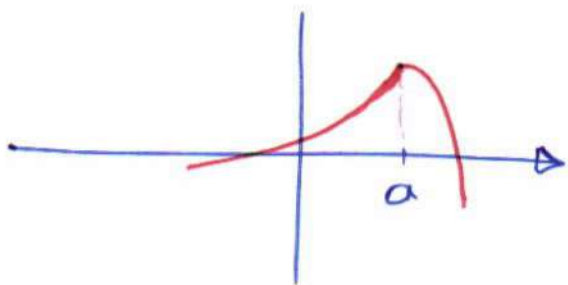
$$V(x) = \frac{2 \cdot 2x - 8x^2 - 100}{x}$$

$$V'(x) = \frac{(2 \cdot 2 - 16x)(x) - 1(2 \cdot 2x - 8x^2 - 100)}{x^2}$$

$$\Rightarrow V'(x) = \frac{-8x^2 + 100}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

$$\Rightarrow y = 10$$



الف)  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$   
 $f'(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x$	$0$
$f''$	$- \quad   \quad +$

تغییر است - یا سب       $\cup$       تغییر است + یا سب

ب)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$   
 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$   
 $D = \mathbb{R} - \{1\}$   
 $f''(x) = \frac{0 + 2(x-1)^{-3}}{(x-1)^4} = \frac{-6}{(x-1)^5}$

$x$	$1$
$f''$	$- \quad   \quad +$

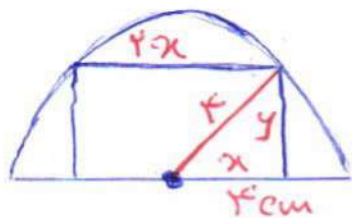
ج)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 - 2 \left( \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} \right)}{(3\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}$   
 $D = \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{3^3(x+1)^{5/3}} <$        $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x$	$-1$
$f''$	$+ \quad   \quad -$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$        $f(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c=1}$   
 $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$

abc  $x = \frac{1}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow f'(x) = 4ax + 2b \Rightarrow 4a\left(\frac{1}{4}\right) + 2b = 0$   
 $\Rightarrow 2a + 2b = 0$

$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a + b = 1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$



$$x^2 + y^2 = r^2 = 14$$

$$\Rightarrow y^2 = 14 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{14 - x^2}$$

۱۰

$$S(x) = 2xy = 2x\sqrt{14 - x^2}$$

$$\Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{14 - x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{14 - x^2}} = \frac{2(14 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{14 - x^2}}$$

$$\Rightarrow S'(x) = \frac{42 - 4x^2}{\sqrt{14 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 42 \Rightarrow x^2 = 10.5$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{10.5} \Rightarrow x = 2\sqrt{2.625} \Rightarrow y = \sqrt{10.5}$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x^3 - 12x + 7$$

۱۱

الف

$$f'(x) = 4x^2 - 9x - 12 = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'		+	-	+
f	↗	↘	↗	

در بازه  $(-1, 2)$  صعودی و در بازه  $(2, +\infty)$  نزولی و در بازه  $(-\infty, -1)$  صعودی

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad D = \mathbb{R} - \{2\}$$

۱۲

$$f'(x) = \frac{1(x-2) - 1(x)}{(x-2)^2}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		-	-
f	نزولی	○	نزولی

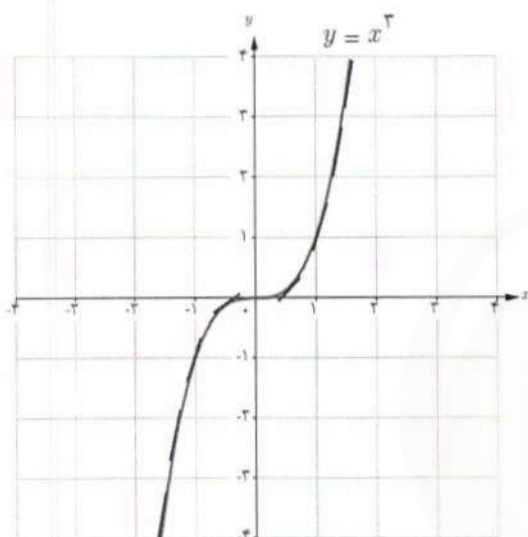
در  $\mathbb{R} - \{2\}$  یعنی در تمام نقاط دامنه نزولی می باشد

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$$

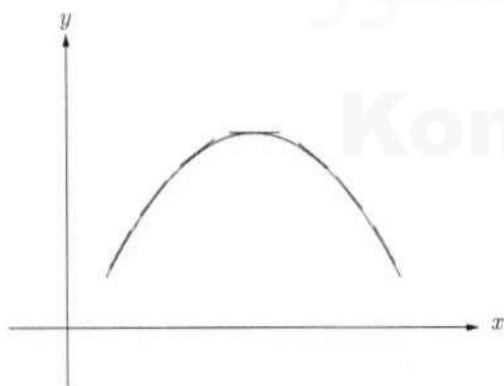
۲

درس

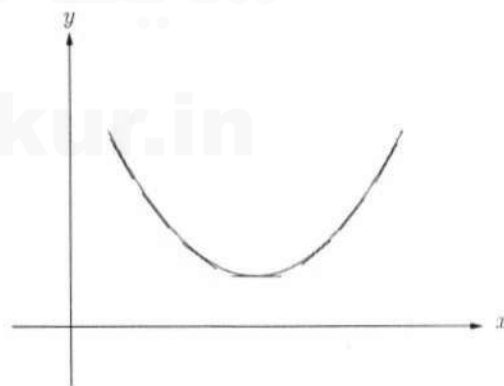
## جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن



با تابع  $f(x) = x^3$  آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در  $x = 0$  برابر صفر و در سایر نقاط همواره  $f'(x) = 3x^2$  برای صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای  $x$  های منفی در بالای نمودار و برای  $x$  های مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازه  $(-\infty, 0)$  به سمت پایین و در بازه  $(0, +\infty)$  به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.

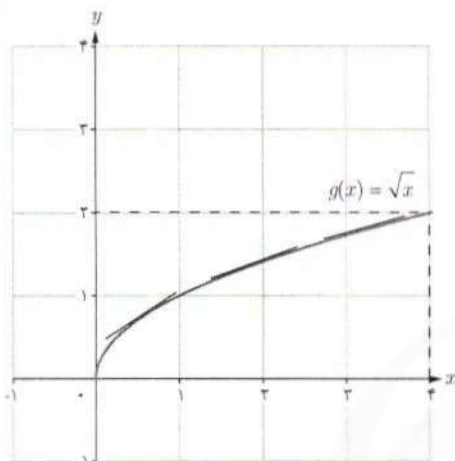


مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.  
تقعر به سمت پایین است.

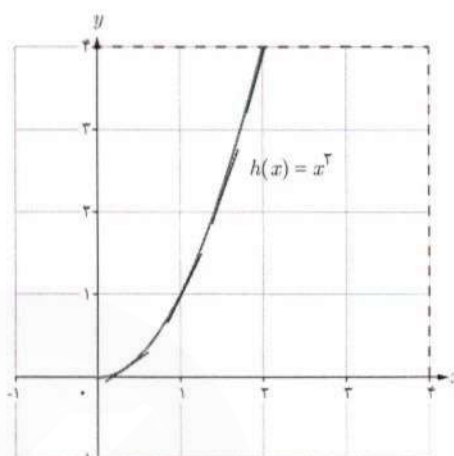


مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.  
تقعر به سمت بالا است.

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع  $h(x) = x^2$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  در بازه  $[0, +\infty)$  و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



(ب)



(الف)

۱ با حرکت از نقطه  $x = 0$  به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

*در شکل افقی شیب زیاد می‌شود اما در شکل (ب) شیب کم می‌شود در این تقعر به سمت بالا در (ب)*

۲ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب (کم شدن یا زیاد شدن) خطوط مماس دارد؟

*در این نمودارها جهت تقعر به بالا یا راست است و تقعر به سمت راست است*

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳ تابع  $g'$  در بازه  $[0, +\infty)$  صعودی است یا نزولی؟ *نزولی*

۴ (الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع  $f$  چه ارتباطی با علامت تابع  $f'$  دارد؟

علامت  $f'$  بر بازه  $I$  مثبت است، آنگاه تابع  $f$  بر بازه  $I$  *صعودی* است.

علامت  $f'$  بر بازه  $I$  منفی است، آنگاه تابع  $f$  بر بازه  $I$  *نزولی* است.

(ب) با توجه به قسمت (الف)، صعودی یا نزولی بودن تابع  $f'$  چه ارتباطی با علامت تابع  $f''$  دارد؟

علامت  $f''$  بر بازه  $I$  مثبت است آنگاه تابع  $f'$  بر بازه  $I$  *صعودی* است.

علامت  $f''$  بر بازه  $I$  منفی است آنگاه تابع  $f'$  بر بازه  $I$  *نزولی* است.

۶ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید:

الف) اگر مقدار  $f''$  در یک بازه مثبت باشد، تابع  $f'$  در آن بازه **صعودی** است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه **افزایش** می‌یابد و تقعر منحنی تابع  $f$  در آن بازه رو به **بالا** است.

ب) اگر مقدار  $f''$  در یک بازه منفی باشد، تابع  $f'$  در آن بازه **نزولی** است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه **کاهش** می‌یابد و تقعر منحنی تابع  $f$  در آن بازه رو به **پایین** است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به طور خلاصه در قضیه زیر، که آزمونی برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع است، آورده شده و در این کتاب اثبات آن مدنظر نیست.

قضیه:

فرض کنیم  $f''(x)$  به ازای هر نقطه  $x$  از بازه  $I$  موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار  $f$  روی بازه  $I$  تقعر رو به بالا دارد.

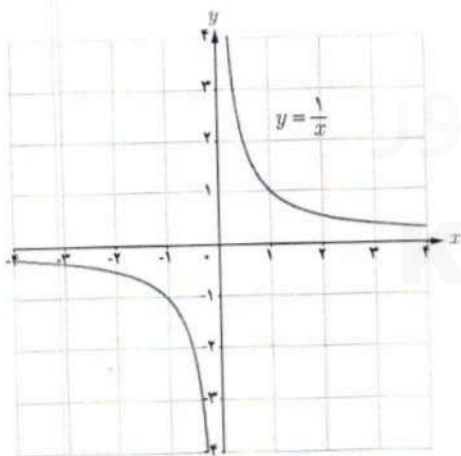
ب) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار  $f$  روی بازه  $I$  تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) = 0$ ، آزمون بی نتیجه است.

❖ مثال: جهت تقعر توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{1}{x}$

ب)  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$



❖ حل: الف) داریم  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

بنابراین:

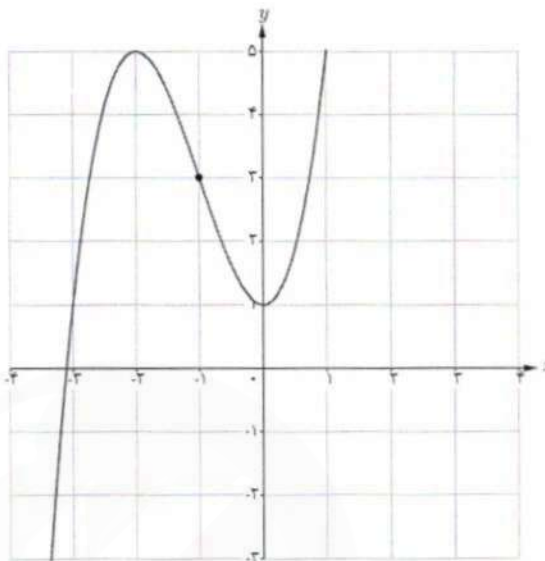
اگر  $x > 0$ ، آنگاه  $f''(x) > 0$  و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه  $(0, +\infty)$  رو به بالاست.

اگر  $x < 0$ ، آنگاه  $f''(x) < 0$  و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه  $(-\infty, 0)$  رو به پایین است.

ب) داریم  $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow g''(x) = 6x + 6$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

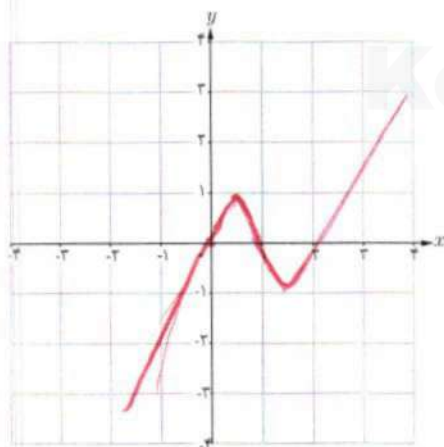


بنابراین:

اگر  $x > -1$  آنگاه  $g''(x) > 0$  و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه  $(-1, +\infty)$  به سمت بالاست.

اگر  $x < -1$  آنگاه  $g''(x) < 0$  و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه  $(-\infty, -1)$  به سمت پایین است.

کارد در کلاس



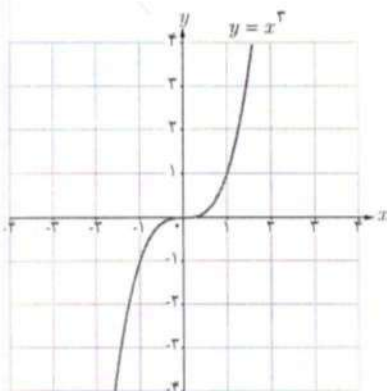
نمودار تابع  $y = f(x)$  را با اطلاعات زیر رسم کنید:

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0$$

و بر بازه  $(-\infty, 1)$ ،  $f''(x) < 0$

و بر بازه  $(1, \infty)$ ،  $f''(x) > 0$ .

## نقطه عطف نمودار یک تابع

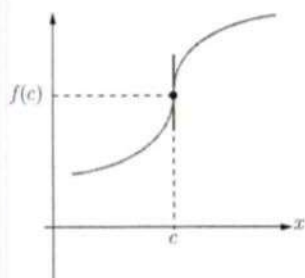


نمودار تابع  $f(x) = x^3$  را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازه  $(-\infty, 0)$  رو به پایین و در بازه  $(0, +\infty)$  رو به بالاست. بنابراین نقطه  $x = 0$  نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در  $x = 0$  منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطه عطف آن منحنی گوئیم. به عبارت دیگر:

## تعریف

فرض کنیم تابع  $f$  در نقطه  $x = c$  پیوسته است. در این صورت نقطه  $(c, f(c))$  نقطه عطف تابع  $f$  است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

- الف) نمودار  $f$  در نقطه  $(c, f(c))$  خط مماس داشته باشد.  
ب) جهت تقعر  $f$  در نقطه  $(c, f(c))$  تغییر کند.



خط  $x = c$  مماس قائم است.

از شرط الف) در تعریف نقطه عطف تابع  $f$  نتیجه می‌شود که یا  $f'(c)$  موجود است و یا تابع  $f$  در نقطه  $c$  مماس قائم دارد.

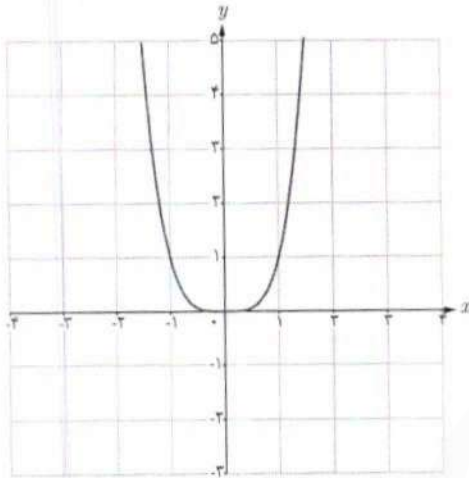
از شرط ب) می‌توان نتیجه گرفت که خط مماس بر نمودار تابع در نقطه  $(c, f(c))$  از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطه عطف تغییر می‌کند؛ لذا  $f''$  در یک طرف نقطه  $c$  مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین  $f''(c)$  نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه  $(c, f(c))$  یک نقطه عطف منحنی باشد، یا باید  $f''(c)$  وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم  $f''(c) = 0$ . با این حال شرط  $f''(c) = 0$  برای نقطه عطف بودن  $x = c$



به تنهایی کافی نیست؛ یعنی ممکن است  $f''(c) = 0$  ولی  $x = c$  یک نقطه عطف تابع نباشد. به طور مثال تابع  $f(x) = x^4$  را بررسی می‌کنیم. داریم:

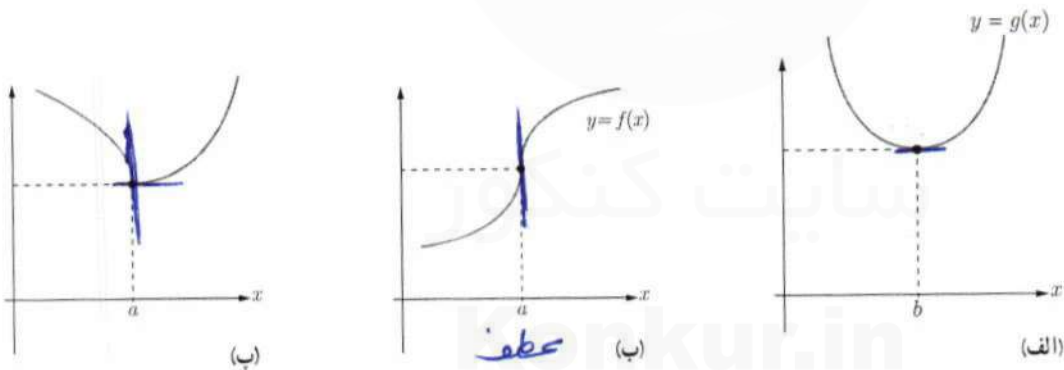
$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2$$



با اینکه  $f''(0) = 0$  اما تابع  $f''$  در دو طرف  $x = 0$  مثبت است و لذا تفرع همواره به سمت بالاست و جهت تفرع در  $x = 0$  عوض نمی‌شود و لذا  $x = 0$  یک نقطه عطف این تابع نیست.

### کاردرکلاسی

۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



۲ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) در نقطه عطف علامت  $f''(x)$  تغییر می‌کند. ✓

ب) هر نقطه که علامت  $f''$  در آن تغییر کند، نقطه عطف است. ✗ مثال مثبت (پ)

پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار  $f''$  برابر صفر شود یک نقطه عطف است. ✗

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد. ✓

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد. ✗ مانند مثال (ب) سوال قبلی

## فصل پنجم: کاربردهای مشتق ۱۳۳

❖ مثال: جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به دست آورید.

الف)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

ب)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

❖ حل:

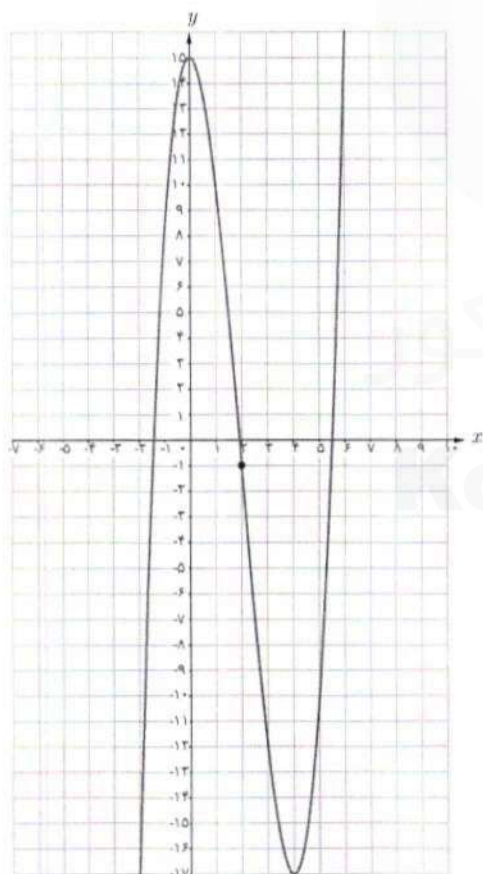
الف)  $f'(x) = 3x^2 - 12x$  و  $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

از آنجا که  $f''(x)$  یک تابع خطی است، و در تمام  $\mathbb{R}$  تعریف شده است و تنها در  $x = 2$  برابر صفر می شود، بنابراین تنها نقطه‌ای که می تواند نقطه عطف باشد  $x = 2$  است به شرط آنکه:

❶  $f'(2)$  موجود باشد❷  $f''$  در دو طرف  $x = 2$  تغییر علامت دهد.

اما  $f'(x)$  یک تابع چند جمله‌ای است و دامنه آن  $\mathbb{R}$  است و  $f'(2)$  نیز موجود و برابر  $-12$  است، از طرفی داریم:



$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f''$	$(-)$	$0$	$(+)$
$f$		$-12$	
		نقطه عطف	

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} \quad (\text{ب})$$

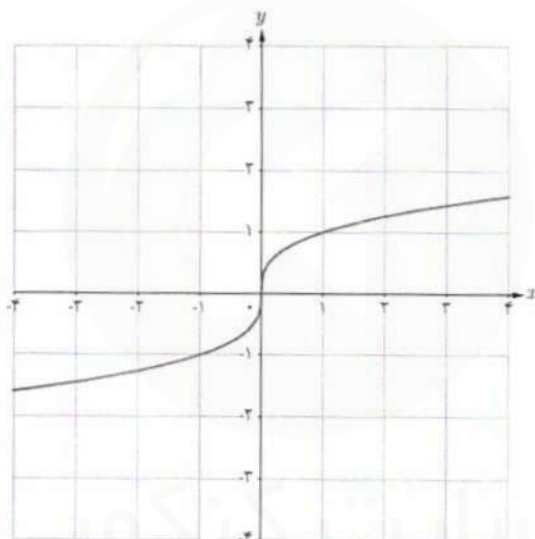
از آنجا که مقدار  $\sqrt[3]{x^5}$  به ازای  $x$  های مثبت، مثبت و به ازای  $x$  های منفی، منفی است. داریم:

اگر  $x > 0$ ، آنگاه  $f''(x) < 0$  و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت پایین است.

اگر  $x < 0$ ، آنگاه  $f''(x) > 0$  و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت بالاست.

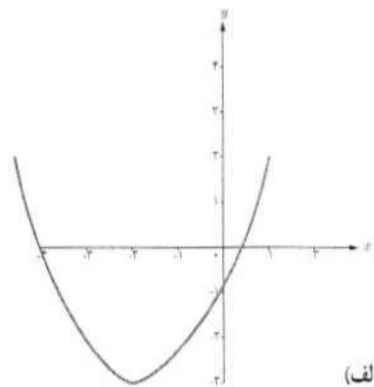
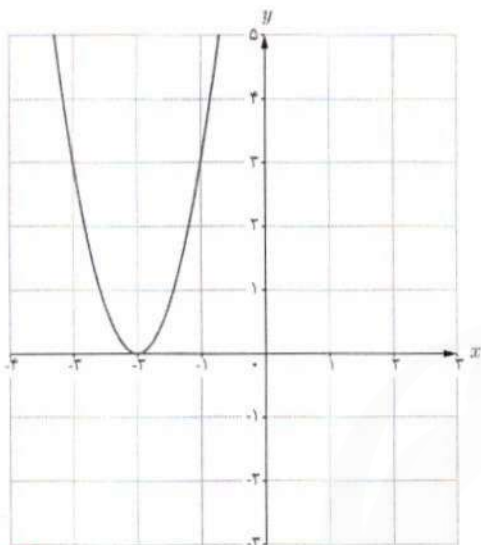
لذا جهت تقعر این تابع در  $x = 0$  عوض می‌شود. از طرفی در فصل مشتق دیدیم که این تابع در نقطه  $x = 0$  دارای مماس (مماس قائم) است.

بنابراین  $x = 0$  نقطه عطف این تابع است.



Konkur.in

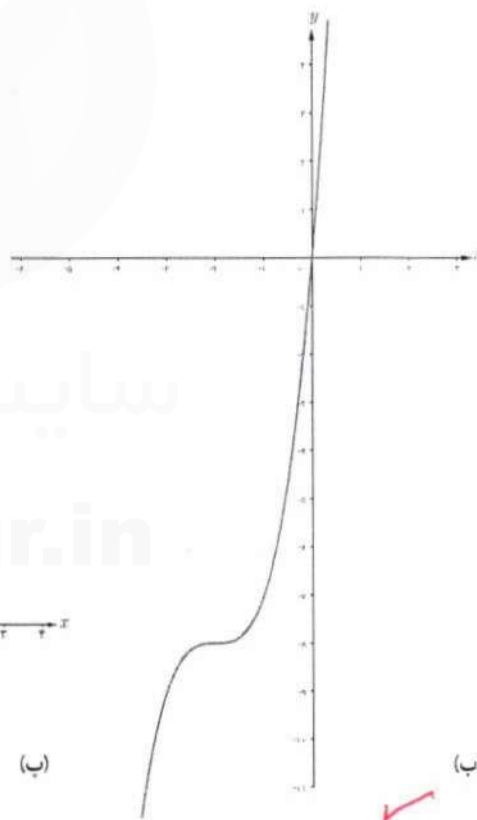
۱ اگر شکل کشیده شده در صفحه شطرنجی مربوط به نمودار تابع  $f'$  باشد کدام نمودار می تواند نمودار تابع  $f$  باشد؟



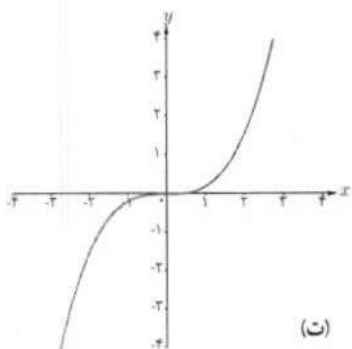
(الف)

$a > 0$      $a < 0$   
 $-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow -b < 0 \Rightarrow b > 0$

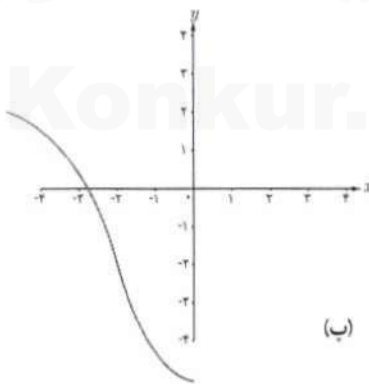
یعنی تابع صعودی و طول نقطه عطف آن منفی باشد



(ب)



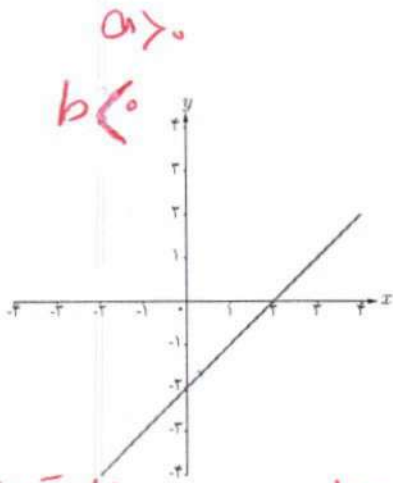
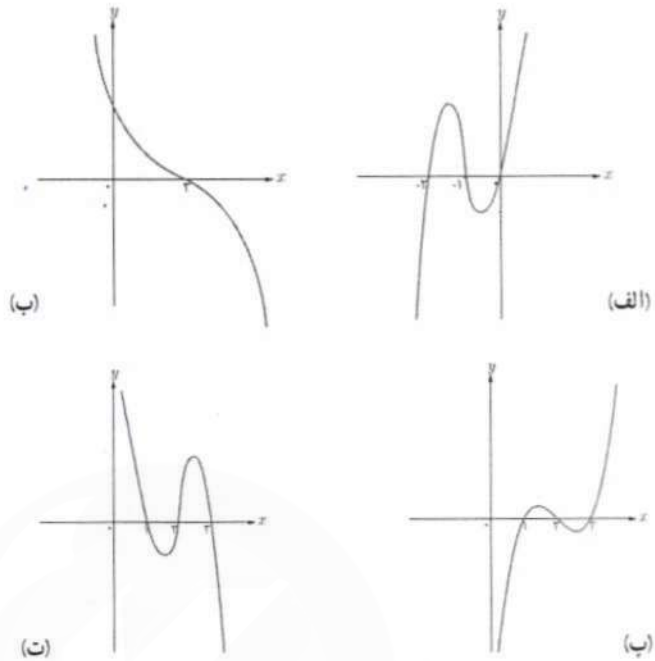
(ج)



(د)

سایت کنکور  
Konkur.in

۱ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع  $f'''$  باشد کدام نمودار می تواند نمودار تابع  $f$  باشد؟



تابع صعودی طول نقطه عطف آن  $x = -\frac{b}{3a}$  مثبت یا منفی است  
نکته: در رسم دقت

تمرین

- ۱ نمودار تابع  $f$  را به گونه ای رسم کنید که در نقطه ای مانند  $a$  جهت تغير عوض شود ولی این نقطه، نقطه عطف نباشد.  
۲ جهت تغير توابع زیر را در دامنه آنها بررسی کرده و نقطه عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

ب)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

ب)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

۲ برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بزنید که نقطه داده شده نقطه عطف آن باشد.

ت) نقطه  $(2, 2)$

ب) نقطه  $(0, 1)$

ب) نقطه  $(1, 0)$

الف) نقطه  $(0, 0)$

$f(x) = (x-2)^3 + 2$

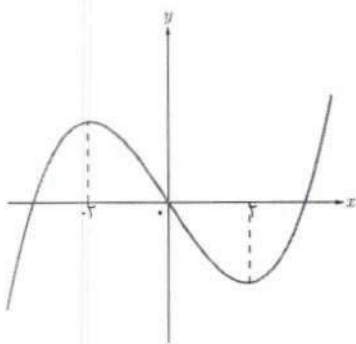
$f(x) = x^3 + 1$

$f(x) = (x-1)^3$

$f(x) = y = x^3$

۴ مقادیر  $a, b, c$  را در تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0) = 1$  و  $f(1) = 2$  و  $x = \frac{1}{3}$  طول نقطه عطف نمودار تابع  $f$  باشد.



۵ اگر نقطه عطف تابع درجه سوم  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  با ضابطه  $(0, 0)$  باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است،  $a, b, c$  را پیدا کنید.

$y' = 3x^2 + 2ax + b$

$y'' = 6x + 2a \Rightarrow 6(0) + 2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$(\min) x = 2 \Rightarrow 3(2)^2 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -12$

$(0, 0) \Rightarrow 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

## رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند  $f$  به ازای هر  $x \in D_f$  دقیقاً یک مقدار  $y$  به دست می‌دهد به طوری که  $y = f(x)$  و زوج مرتب  $(x, y)$  یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همه این نقاط  $(x, y)$  به ازای تمام  $x \in D_f$  ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازه زیرمجموعه  $\mathbb{R}$  تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجه ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

❖ مثال: اگر بدانید تابع  $y = f(x)$  به گونه‌ای است که برای آن داریم:

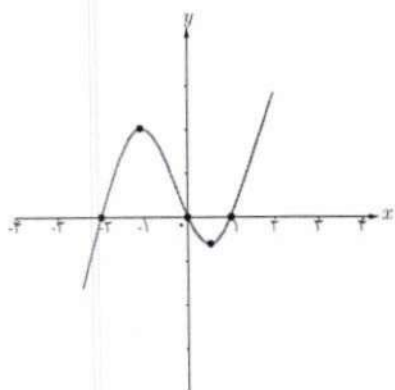
❶ ریشه‌های تابع  $f$  به صورت  $x = 1$  و  $x = 0$  و  $x = -2$  است و  $f$  در همه نقاط مشتق‌پذیر باشد.

❷ ریشه‌های تابع  $f'$  به صورت  $x = \frac{1}{4}$  و  $x = -\frac{6}{5}$  است و علامت  $f'$  بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است و  $f(\frac{1}{4}) = -0.6$  و  $f(-\frac{6}{5}) = 2$ .

❸ تابع  $f''$  تنها یک ریشه در  $x = -\frac{1}{3}$  دارد و علامت  $f''$  در سمت چپ  $-\frac{1}{3}$  منفی و در سمت راست آن مثبت است و  $f(-\frac{1}{3}) = 0.7$ .  
در این صورت نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

❖ حل: از (۲) نتیجه می‌شود که تابع  $f$  بین نقاط  $x = \frac{1}{4}$  و  $x = -\frac{6}{5}$  نزولی و سایر جاها صعودی است و  $x = -\frac{6}{5}$  و  $x = \frac{1}{4}$  به ترتیب طول نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع‌اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تقعر تابع  $f$  قبل از  $x = -\frac{1}{3}$  رو به پایین و در سمت راست  $x = -\frac{1}{3}$  رو به بالاست و چون  $f'$  در  $x = -\frac{1}{3}$  وجود دارد لذا مماس در این نقطه وجود دارد، بنابراین  $x = -\frac{1}{3}$  نقطه عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همه اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

$x$	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'$	+	۰	-	-	۰	+
$f''$	$\cap$	$\cap$	۰	$\cup$	$\cup$	
$f$	$\nearrow$	۲	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		ماکزیم	نقطه عطف	مینیم		



با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور  $x$  ها هستند نمودار تابع به صورت روبه‌رو است.

همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع  $f'$  و  $f''$  کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

- ۱ دامنه تابع را مشخص می‌کنیم.
- ۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۳  $f'$  را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که  $f$  بر آنها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.
- ۴ نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).
- ۵  $f''$  را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.
- ۶ نقطه عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ  $x$  و بسیار کوچک  $x$  مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۸ معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).
- ۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع  $f$  و  $f'$  و  $f''$  در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.
- ۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.
- ۱۱ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

❖ مثال: نمودار تابع  $f(x) = x^3$  را رسم کنید.

❖ حل: دامنه این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه‌اش پیوسته و مشتق پذیر است. حال با به دست آوردن  $f'$  و  $f''$  و ریشه‌های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

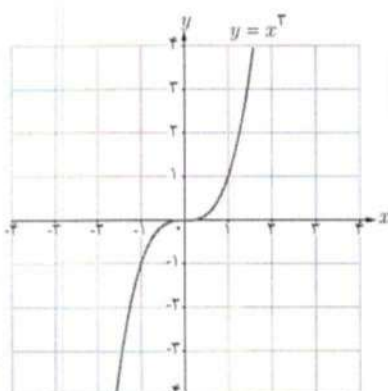
$$f(x) = x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{محل برخورد نمودار با محورهای مختصات } (0, 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$	+	+	+
$f''$	(-)		(+)
$f$	↗	0	↗

نقطه عطف



این تابع همواره صعودی است و اکستریم نسبی ندارد. از طرفی  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  لذا دو شاخه انتهایی نمودار در ربع‌های اول و سوم قرار دارند. می‌توان برای دقیق‌تر شدن شکل، نقاط بیشتری از منحنی را به دست آورد؛ مثلاً در اینجا نقاط  $(1, 1)$  و  $(-1, -1)$  نیز بر نمودار تابع واقع‌اند. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نمودار تابع  $y = x^3$  را به صورت مقابل رسم کرد.

❖ مثال: جدول رفتار و نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^2(x+3)$  را رسم کنید.

❖ حل:

دامنه این تابع  $\mathbb{R}$  است و این تابع همواره پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -3$$

بنابراین نقاط  $(1, 0)$  و  $(-3, 0)$  محل‌های برخورد با محور  $x$  ها است

$$x = 0 \Rightarrow y = 3$$

بنابراین نقطه  $(0, 3)$  محل برخورد با محور  $y$  هاست

$$f'(x) = 2(x-1)(x+3) + (x-1)^2 = (x-1)(3x+5)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -\frac{5}{3}$$



لذا نقاط  $(۱, ۰)$  و  $(-\frac{۵}{۳}, \frac{۲۵۶}{۲۷})$  نقاط بحرانی اند

$$f''(x) = (۳x + ۵) + ۳(x - ۱) = ۶x + ۲$$

$$f''(x) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطه  $x = -\frac{۱}{۳}$  وجود دارد و  $f''$  در دو طرف نقطه  $x = -\frac{۱}{۳}$  تغییر علامت می‌دهد، نقطه

$(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱۲۸}{۲۷})$  نقطه عطف تابع است، از طرفی  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

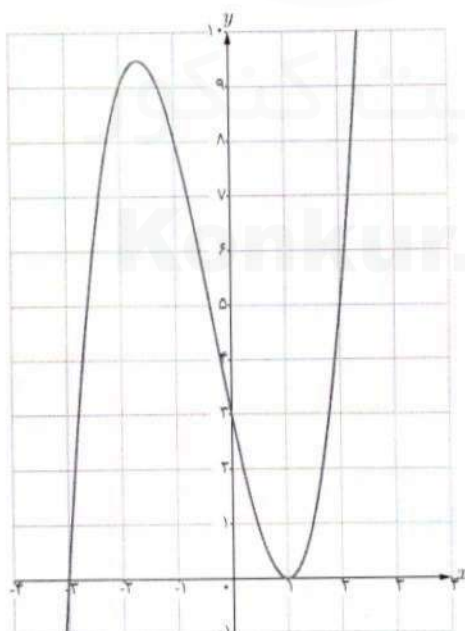
$x$	$-\infty$	$-\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$۱$	$+\infty$
$f'$		+	-	-	+
$f''$		(-)	(-)	(+)	(+)
$f$	$-\infty$	$\frac{۲۵۶}{۲۷}$	$\frac{۱۲۸}{۲۷}$	$۰$	$+\infty$

ماکزیم

عطف

مینیم

حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل زیر است.



تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  را که در آن  $c \neq 0$  است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر  $c = 0$  و  $d \neq 0$  باشد معادله این تابع به صورت  $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$  تبدیل می‌شود که معادله یک خط راست است و اگر  $c \neq 0$  و  $d \neq 0$  باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

بنابراین  $y = \frac{a}{c}$  مجانب افقی این تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = +\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین  $x = -\frac{d}{c}$  مجانب قائم این تابع است

مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  را رسم کنید.

حل: دامنه این تابع  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$  است. داریم  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ ، لذا خط  $y = 1$  مجانب افقی است و از طرفی  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ، لذا  $x = 1$  مجانب قائم نمودار این تابع است.

همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط  $(0, -2)$  و  $(-2, 0)$  قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت:

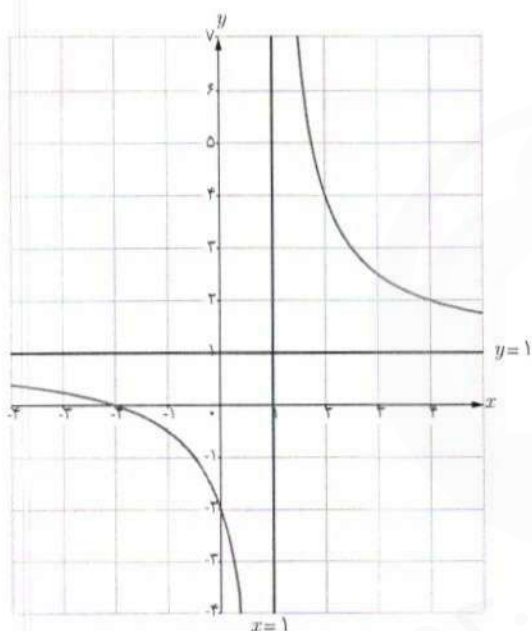
$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

و بنابراین مشتق به ازای هر  $x$  در بازه‌های  $(-\infty, 1)$  و  $(1, +\infty)$  همواره منفی است و لذا تابع  $f$  در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت.

$$f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{6}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

بنابراین برای هر  $x$  در بازه  $(-\infty, 1)$  داریم  $f''(x) < 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر  $x$  در بازه  $(1, +\infty)$  داریم  $f''(x) > 0$  و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به صورت زیر است:

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	-	-	-	-	-
$y''$	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
$y$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$-2$	$-\infty + \infty$	$\rightarrow$



با توجه به اطلاعات این جدول می توان نمودار این تابع را به صورت رویه رو رسم کرد.

مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع  $f(x) = \frac{3x+4}{-2x+1}$  را رسم کنید.

حل: دامنه این تابع  $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  است. داریم  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$ ، لذا  $y = -\frac{3}{2}$  مجانب افقی این تابع است و از طرفی

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ ، لذا  $x = \frac{1}{2}$  مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط  $(0, 4)$  و  $(-\frac{4}{3}, 0)$  محورهای مختصات را قطع می کند.

$$f'(x) = \frac{11}{(-2x+1)^2} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

## فصل پنجم: کاربردهای مشتق ۱۴۳

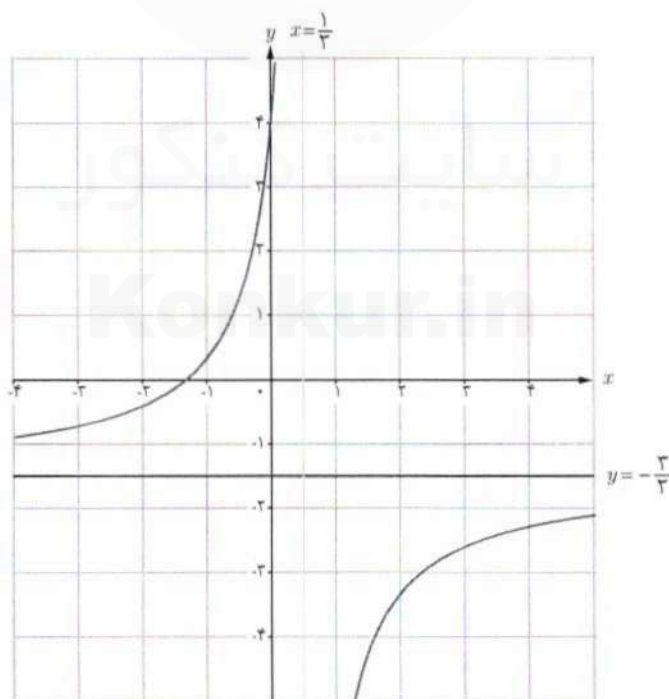
بنابراین مشتق به ازای هر  $x$  در بازه‌های  $(-\infty, \frac{1}{4})$  و  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  همواره مثبت و در نتیجه تابع  $f$  در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت:

$$f''(x) = \frac{44}{(-2x+1)^3} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{4}$$

بنابراین برای هر  $x$  در بازه  $(-\infty, \frac{1}{4})$  داریم  $f'' > 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر  $x$  در بازه  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  داریم  $f'' < 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به صورت زیر است:

$x$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$0$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$y'$		+	+	+	+
$y''$		(+)	(+)	(+)	(-)
$y$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطه کمکی می‌توان نمودار این تابع را به صورت زیر رسم کرد.



$$(2, 1) = \left(-\frac{a}{c}, \frac{a}{c}\right) \Rightarrow -\frac{a}{c} = 2, \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c, d = -2c \quad (2)$$

$$(-1, 0) \Rightarrow a(-1) + b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax + a}{ax - 2a} \Rightarrow f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$$

۱۴۴

تمرین

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

ب)  $f(x) = x^2 - 5x + 5$

پ)  $f(x) = -x(x+2)^2$

ت)  $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

ث)  $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

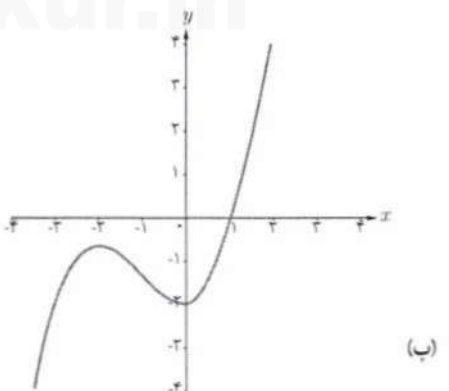
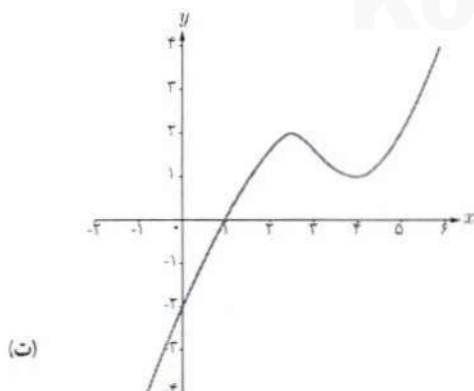
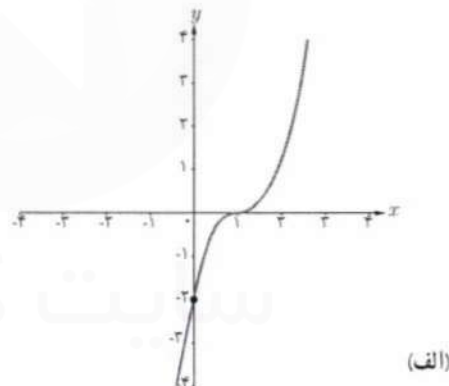
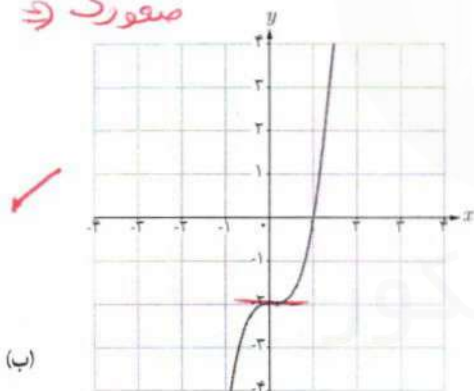
ج)  $f(x) = 2x^2 - 9x^2 + 12x + 1$

۲ فرض کنید  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه  $(2, 1)$  است. اگر این تابع از نقطه  $(-1, 0)$  بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید. *حل بالای صفحه*

۳ کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع  $f(x) = x^2 + x - 2$  است. *نقطه*

$$x = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow f(0) = -2$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{صغری}$$



تہیہ کنندہ:

گروہ ریاضی مقطع دوم متوسطہ، استان خوزستان

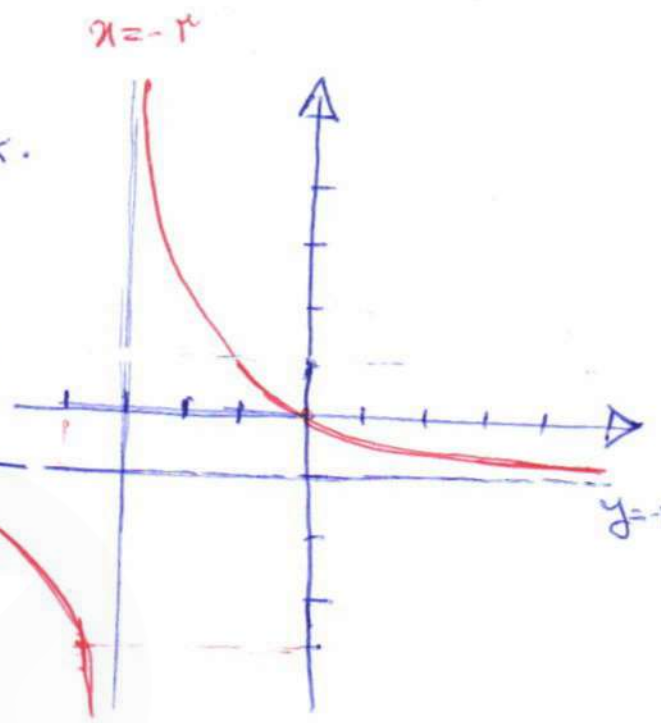
1)  $f(x) = \frac{-x}{x+3} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3\}$

2)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \pm \infty \Rightarrow x = -3$  جانب قائم  
 1)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-x}{x+3} = -1 \Rightarrow y = -1$  افقی

2)  $f'(x) = \frac{-(x+3) - (1)(-x)}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(x+3)^2}$

3)  $f''(x) = \frac{6}{(x+3)^3}$  ( $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ )

x	$-\infty$	$-3$	$-3$	$+\infty$
f'	-	-	-	-
f''	-	-	+	+
f	-1	$-\infty$	$+\infty$	-1

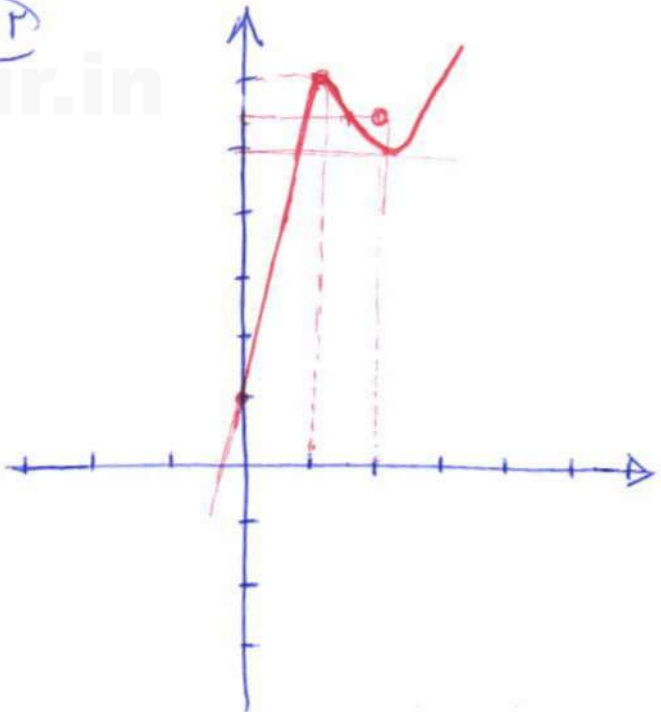


3)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$  ( $D_f = \mathbb{R}$ )

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$

$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f'	+	+	-	-	+
f''	-	-	+	+	+
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$



⊙  $f(x) = -x(x+2)^2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

$f'(x) = -1(x+2)^2 + 2(x+2)(-x) = 0$

$(x+2)(-x-2-2x) = 0$

$(x+2)(-3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'$	-	+	+	-
$f''$	+	+	-	-
$f$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$f''(x) = 1(-3x-2) + (-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow f''(x) = -3x-2-3x-6 \Rightarrow -4x-8 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

تہیہ کنندہ:

گروہ ریاضی مقطع دوم متوسطہ، استان خوزستان

⊙  $f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{2\}$

①  $x=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty$  جانب قائم

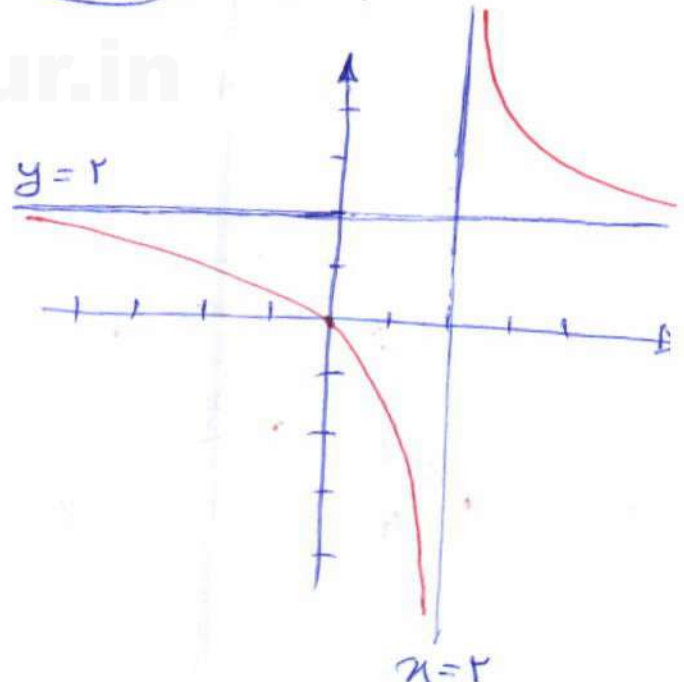
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2$  جانب افقی

⊙  $f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$

⊙  $f''(x) = \frac{0 + 4(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{+4}{(x-2)^3}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'$	-	-	-	-
$f''$	-	-	+	+
$f$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$



از نقاط ایلی رنگی می توان استفاد.

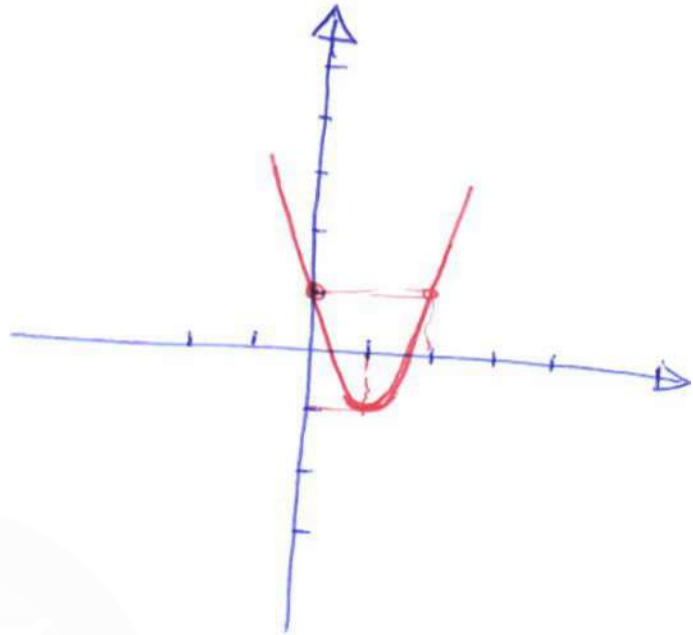
(الف)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$  ( $D_f = \mathbb{R}$ )

(۱)  $f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$

(۲)  $f''(x) = 4 > 0$

(۳)  $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$		-	0	+
$f''$	(+)	(+)	(+)	
$f$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

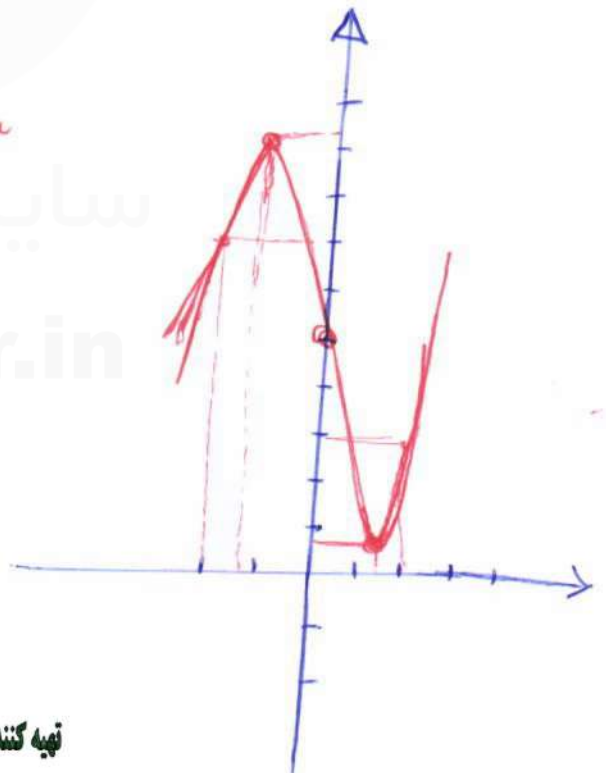


(ب)  $f(x) = x^3 - \Delta x + \Delta \Rightarrow (D_f = \mathbb{R})$

$f'(x) = 3x^2 - \Delta = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$	$0$	$\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$	$+\infty$		
$f'$	+	+	0	-	-	+	+
$f''$	-	-	0	+	+	+	
$f$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$



نہیہ کنندہ:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان