

«هُوَ أَعْلَمُ»

به نام آنکه جان را فکرت آموخت چراغ دل به نور جان برافروخت

آنالیز برداری

مدرس شاه رحیم

ویرایش دوم شهریور ۹۸

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسیم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم، از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگاران که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند....

«آیا کسانی که می دانند و کسانی که نمی دانند یکسانند؟»

پیشگفتار: آلبرت انیشتین: "تجاری که تاکنون داشته ایم به ما این اجازه را می دهند که طبیعت را مصداق ساده ترین اندیشه های ریاضی قابل تصور بدانیم. من قانع شده ام که می توان با استفاده از ابزارهای ریاضی محض ، مفاهیم و قوانین مرتبط کننده آنها را که کلید شناخت طبیعت هستند، بدست آورد. آزمایش ممکن است برای الهام بخشیدن به مفاهیم ریاضی مناسب باشد ، اما به طور قطع نمی توان این مفاهیم را از تجربه استنتاج کرد. البته آزمایش یگانه معیار مفید بودن ساختارهای ریاضی خواهد بود ، اما خلاقیت در جنبه ریاضی مطلب است. بنابراین به یک اعتبار من عقیده دارم همان طور که قُدا تصور می کردند ، فکر محض می تواند به درک واقعیت نائل شود."

آنالیز برداری نوعی تند نویسی ریاضی است و به ما کمک می کند ارتباط پدیده های فیزیکی و روابط ریاضی را بیشتر درک کنیم. با توجه به سخن امام کاظم (ع) زکات علم نشر آن است از این رو برآن شدم تا جزوه ای منسجم در این باب گردآوری کنم و آن را به صورت **رایگان** در اختیار دانشجویان قرار دهم که ضمن بیان روشهای ریاضی در علوم فیزیکی ، قسمتی از نیاز شما را در دروس ریاضی عمومی ۲، فیزیک عمومی ۲، جبر خطی ، الکترومغناطیس ، استاتیک ، دینامیک ، مکانیک سیالات ، ریاضیات مهندسی، انتقال حرارت ، ریاضی فیزیک ۱ (رشته فیزیک) و ... را رفع کند و مفید واقع شود.

*باتوجه به اینکه در این جزوه سعی شده است آنالیز برداری ، دستگاه های مختصات و المان گیری به طور کامل بررسی گردد دانشجویان می توانند برحسب نیاز خود و ارتباط با درس مورد نظر قسمت مربوطه از جزوه را مطالعه نمایند و یا اینکه برحسب علاقه و به منظور یادگیری تمام مطالب جزوه را فراگیرند!! همچنین به دلیل پیوستگی مطالب ، برای فهم بهتر مباحث را به ترتیب مطالعه کنید.

*به منظور عدم افزایش حجم جزوه و مناسب بودن آن برای مرور و جمع بندی از آوردن اثبات روابط و فرمول ها و مثال های زیاد خودداری شده است. در انتهای جزوه مثال هایی از کاربرد در مسائل فیزیک ۲ و دینامیک و همچنین خلاصه فرمول ها آورده شده است. چنانچه مطالب این جزوه را مفید یافتید ، از پیشنهاد آن به دیگران دریغ نکنید.

"در مجموع مطالب این جزوه یک ابزار ریاضی مهم برای شما در مسائل مهندسی خواهد بود..."

با آرزوی موفقیت برای شما در تمامی مراحل زندگی

مهدی شاه رجیان

دانشجوی مهندسی هوافضا و برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر

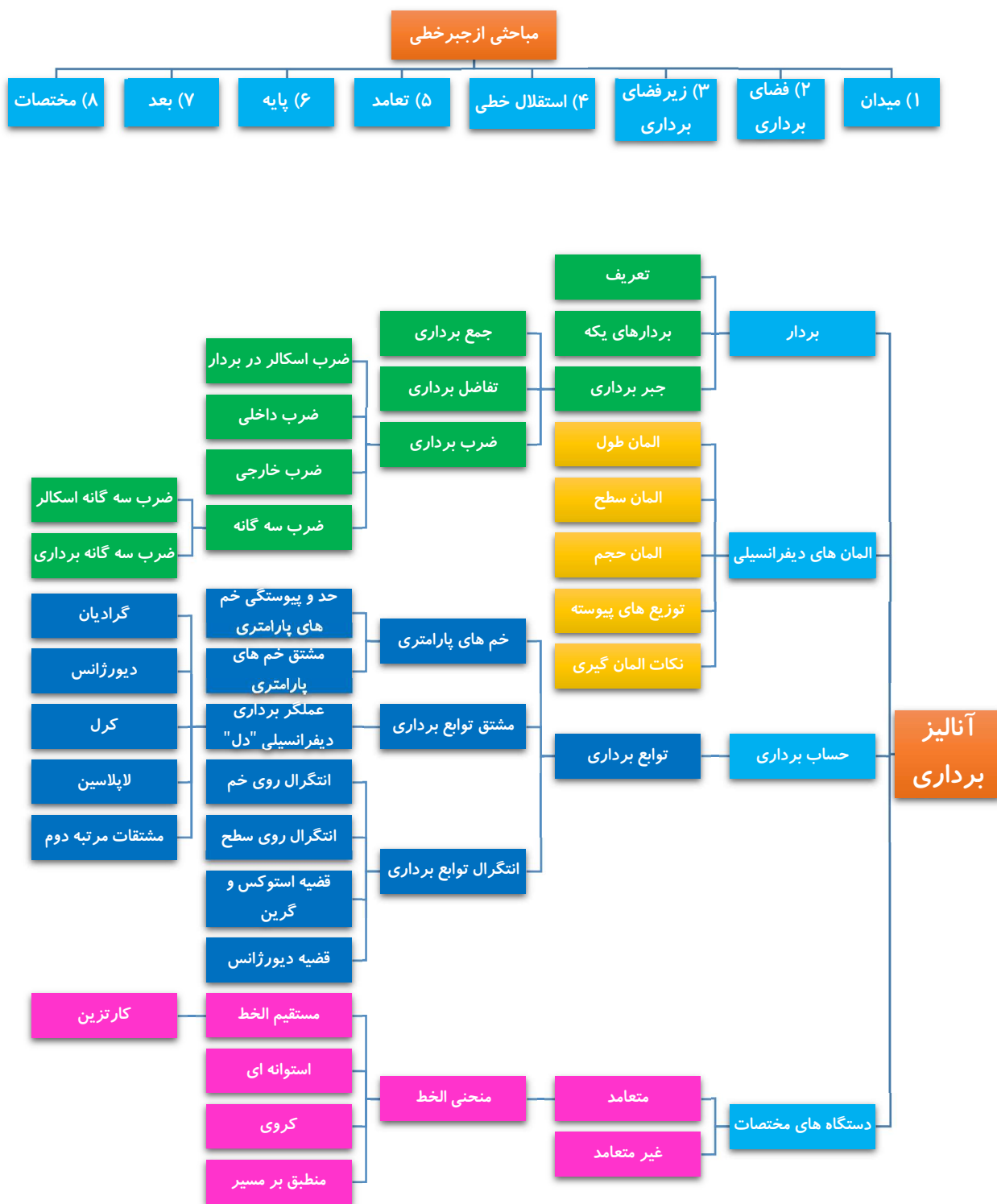
نظرات ، انتقادات و پیشنهاد های خود را می توانید از طرق زیر به اطلاع بنده برسانید:

ID Telegram & Bale: @infiltrator1

ID Instagram: master_m.sh

Email : mahdi.sharajabian@gmail.com

چکیده مطالب به صورت نموداری



فهرست مطالب

۹.....	مباحثی از جبر خطی
۹.....	میدان
۱۰.....	فضای برداری
۱۱.....	زیرفضای برداری
۱۱.....	استقلال خطی
۱۲.....	تعامد
۱۲.....	پایه
۱۳.....	بعد
۱۴.....	مختصات
۱۴.....	درجه آزادی
۱۶.....	آنالیز برداری
۱۶.....	بردار
۱۶.....	بردار یکه
۱۷.....	بردارهای پایه
۱۷.....	جبر برداری
۱۷.....	برآیند برداری
۱۸.....	تفاضل برداری
۱۹.....	ضرب برداری
۱۹.....	ضرب اسکالر در بردار
۱۹.....	ضرب داخلی
۲۰.....	زاویه بین دو بردار
۲۰.....	نامساوی کوشی شوارتز

۲۰	تصویر بردار
۲۱	ضرب خارجی
۲۲	ضرب سه گانه اسکالر
۲۲	ضرب سه گانه برداری
۲۲	اتحاد ژاکوبی
۲۳	اتحاد لاگرانژ
۲۳	المان
۲۳	المان دیفرانسیلی طول
۲۳	المان دیفرانسیلی سطح
۲۴	المان دیفرانسیلی حجم
۲۴	توزیع های پیوسته
۲۶	قضایای پاپوس
۲۷	حساب برداری
۲۷	تابع (میدان) اسکالر و برداری
۲۷	خم (منحنی) های پارامتری
۲۸	انواع منحنی مسطح
۲۹	جهت گذاری مثبت برای خم روی صفحه
۲۹	حد خم های پارامتری
۲۹	پیوستگی خم های پارامتری
۲۹	مشتق خم های پارامتری
۳۰	قواعد مشتق گیری از خم های پارامتری
۳۰	خم هموار
۳۰	خم قطعه قطعه هموار

۳۱		انتگرال خم های پارامتری
۳۱		طول قوس
۳۲		منحنی های پارامتری مهم
۳۲		عملگر های برداری دیفرانسیلی
۳۳		گرادیان
۳۴		دیورژانس
۳۵		کرل
۳۶		قضیه هلمهولتز
۳۷		اتحادهای دیفرانسیل های برداری
۳۷		عملگرهای برداری دیفرانسیلی مرتبه دوم
۳۷		لاپلاسین
۳۸		انتگرال توابع برداری
۳۸		انتگرال روی خم
۳۹		قضیه استقلال از مسیر (قضیه اساسی گرادیان)
۳۹		میدان برداری گرادیانی (پایستار یا ابقایی)
۴۰		تشخیص پایستار (ابقایی) بودن میدان
۴۰		بدست آوردن تابع پتانسیل ϕ
۴۲		رویه (سطح)
۴۳		انتگرال روی سطح
۴۵		قضیه استوکس
۴۵		قضیه گرین
۴۶		قضیه دیورژانس

۴۶	 دستگاه مختصات منحنی الخط
۴۷	 دستگاه متعامد
۴۷	 دستگاه راست گرد
۴۷	 ضرایب متریک (مقیاس)
۴۸	 المان های دیفرانسیلی در دستگاه مختصات منحنی الخط
۴۹	 عملگرهای دیفرانسیلی برداری در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد
۵۱	 اهمیت یادگیری و کاربرد انواع دستگاه های مختصات
۵۲	 دستگاه مختصات دو بعدی (صفحه ای)
۵۲	 دستگاه مختصات کارتزین دو بعدی
۵۳	 دستگاه مختصات قطبی
۵۶	 دستگاه مختصات منطبق بر مسیر (مماسی - عمودی) دوبعدی
۵۷	 انحنا (خمیدگی) منحنی
۵۹	 حرکت منحنی الخط در صفحه
۶۰	 دستگاه مختصات سه بعدی (فضایی)
۶۱	 دستگاه مختصات کارتزین سه بعدی
۶۴	 دستگاه مختصات استوانه ای
۶۷	 دستگاه مختصات کروی
۷۲	 دستگاه منطبق بر مسیره بعدی (کنج فرنه)
۷۳	 دایره بوسان
۷۴	 تاب
۷۵	 فرمول های فرنه- سره
۷۵	 حرکت منحنی الخط در فضا
۷۷	 تبدیل مشتق اول

نکات المان گیری	۷۸
برخی از المان گیری های پر کاربرد	۷۸
مثال از کاربرد المان ها در فیزیک ۲ و دینامیک	۸۲
معادله لاپلاس و توابع هارمونیک	۸۱
خلاصه تبدیلات پارمترهای دستگاه های مختصات	۸۵
خلاصه تبدیلات بردارهای پایه دستگاه های مختصات	۸۶
ماتریس های تبدیل یک بردار در دستگاه های مختصات	۸۷
خلاصه فرمول های دستگاه کروی با پارامترهای R, θ, φ کاربردی در فیزیک	۸۸
خلاصه فرمول های خم	۹۰
منابع و مراجع	۹۱

مباحثی از جبر خطی

(۱) میدان (Field)

از منظر ریاضی: میدان به هر مجموعه ای از اشیاء گفته می شود که بین آنها دو عمل موسوم به عمل جمع و ضرب تعریف شده باشد که این دو عمل همان خواص آشنای اعداد را دارا باشند. به طور دقیق میدان به شکل زیر تعریف می شود:

یک دستگاه $\{F, +, \cdot\}$ شامل یک مجموعه F به همراه دو تابع (نگاشت) جمع $+: F \times F \rightarrow F$ ، $(A+B)$

و ضرب $\cdot: F \times F \rightarrow F$ ، $(A \cdot B)$ یک میدان نامیده می شود هرگاه خواص زیر برقرار باشد:

(۱) اصل وجود عضو خنثی جمع $\exists 0 \in F \mid \forall a \in F \rightarrow 0 + a = a$

(۲) اصل وجود عضو قرینه (وارون جمعی) $\forall a \in F \exists (-a) \in F \mid a + (-a) = 0$

(۳) اصل وجود عضو خنثی ضرب $\exists 1 \in F \mid \forall a \in F \rightarrow 1 \cdot a = a$

(۴) اصل وجود وارون ضربی $\forall a \neq 0 \in F \exists (a^{-1}) \mid a \cdot (a^{-1}) = 1$

(۵) اصل جابجایی $\forall a, b \in F \rightarrow a + b = b + a$

(۶) اصل توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع $\forall a, b, c \in F \rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(۷) اصل شرکت پذیری جمع $\forall a, b, c \in F \rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$

(۸) اصل شرکت پذیری ضرب $\forall a, b, c \in F \rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

⚠ تذکر: در بسیاری از اوقات برای سادگی به جای نماد $a \cdot b$ از نماد ab استفاده می کنیم.

*نکته: مجموعه های اعداد گویا Q اعداد حقیقی R و اعداد مختلط C به همراه جمع و ضرب متعارفی که از آنها می شناسیم مثال های مهمی از میدان هستند.

*نکته: وجود وارون جمعی $(-a)$ برای هر a و وارون ضربی $\left(b^{-1} = \frac{1}{b}\right)$ برای هر b غیر صفر مارا قادر می سازد تا مفاهیمی

چون تفریق $(a-b)$ و تقسیم $\left(\frac{a}{b}\right)$ را تعریف کنیم.

از منظر فیزیک: در فیزیک، میدان به مواردی گفته می شود که در آن ها کمیتی فیزیکی را به هر یک از نقاط مکان (یا به طور عمومی تر به هر نقطه از فضا و زمان) نسبت داده باشیم. میدان، توزیع پیوسته ای از یک کمیت اسکالر، برداری، اسپینور^۲ یا در حالت عمومی تر تانسوری^۳ است که با توابع پیوسته ای از مختصات فضا و زمان بیان شود. میدان دما در فضا مثالی از میدان اسکالر و میدان پتانسیل الکتریکی مثالی از میدان برداری می باشد.

۲) فضای برداری (Vector space)

مجموعه غیر تهی V را همراه با عمل جمع برداری $(+ : V \times V \rightarrow V)$ در نظر بگیرید و فرض کنید یک عمل بین V و میدان F به نام ضرب اسکالر به صورت $a \cdot x$ تعریف شود که در آن $a \in F$ و $x \in V$ می باشد $(\cdot : F \times V \rightarrow V)$ در این صورت گوییم مجموعه V تحت عمل جمع و ضرب مذکور $(V, +, \cdot)$ یک فضای برداری روی میدان F می باشد هرگاه شرایط زیر همگی برقرار باشند:

1. اصل بسته بودن تحت جمع
 $\forall x, y \in V \Rightarrow (x + y) \in V$
2. اصل جابجایی
 $\forall x, y \in V \Rightarrow x + y = y + x$
3. اصل شرکت پذیری جمع
 $\forall x, y, z \in V \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$
4. اصل وجود عضو خنثی جمع
 $\exists 0 \in V \mid \forall x \in V \Rightarrow x + 0 = x$
5. اصل وجود عضو قرینه
 $\exists y \in V \mid \forall x \in V \Rightarrow x + y = 0 \rightarrow y = -x$
6. اصل بسته بودن تحت ضرب اسکالر
 $\forall x \in V, a \in F \Rightarrow a \cdot x \in V$
7. اصل توزیع پذیری (پخش) ضرب نسبت به جمع
 $\forall x \in V, a, b \in F \Rightarrow (a + b)x = ax + bx$
8. اصل توزیع پذیری (پخش) ضرب نسبت به جمع
 $\forall x, y \in V, a \in F \Rightarrow a(x + y) = ax + ay$
9. اصل شرکت پذیری ضرب اسکالر
 $\forall x \in V, a, b \in F \Rightarrow (a \cdot b)x = a \cdot (b \cdot x)$
10. اصل وجود عضو خنثی ضرب اسکالر
 $\exists 1 \in F \mid \forall x \in V \Rightarrow 1 \cdot x = x$

در صورت برقراری شرایط فوق اعضای V را "بردار" و اعضای F را "اسکالر" می نامند و اگر F میدان اعداد حقیقی باشد V را فضای حقیقی و اگر F میدان اعداد مختلط باشد V را فضای مختلط گویند.

مثالی از فضای برداری: فضای اقلیدسی سه بعدی $\leftarrow V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

*نکته: این فضا را می توان به n بعد تعمیم داد یعنی $\mathbb{R}^n$ نیز یک فضای برداری است:

فضای اقلیدسی (Euclidean space):

مجموعه تمام n تایی های مرتب از اعداد حقیقی را فضای اعداد حقیقی n بعدی یا فضای اقلیدسی n بعدی می نامند و با $\mathbb{R}^n$ نشان می دهند.

پس می توان n تایی مرتبی از اعداد حقیقی مانند $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ را به عنوان نقطه ای در فضای n بعدی در نظر گرفت.

همچنین برای این فضای برداری میتوان با فرض $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ و $c \in \mathbb{R}$ و $A, B \in \mathbb{R}^n$

عمل جمع $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ ، ضرب اسکالر در بردار $cX = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$

ضرب داخلی $A \cdot B = \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

و نرم یا طول اقلیدسی $\|X\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = (X \cdot X)^{\frac{1}{2}}$ را تعریف کرد.

*نکته: فضاهای با بعد بالاتر از ۳ در زمینه هایی مانند نسبیت و مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی مورد استفاده قرار دارند.

(۳) زیرفضای برداری (Vector subspace)

فضای برداری V روی میدان F مفروض است هرگاه W زیرمجموعه ای غیر تهی از V باشد ($W \subseteq V$) که به خودی خود یک فضای برداری روی میدان F باشد آنگاه W را یک زیرفضای برداری از V می نامند.

قضیه: اگر W زیر مجموعه غیر تهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه W زیرفضایی از V باشد آن است که W نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد به عبارت دیگر:

$$\forall r \in \mathbb{R}, w_1, w_2 \in W \Rightarrow rw_1 + w_2 \in W$$

*نکته: صفحه های گذرنده از مبدا زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ اند.

*نتیجه: مجموعه بردارهایی که ابتدای آنها مبدا مختصات و انتهای آنها در یک صفحه قرار دارد فقط به شرطی زیرفضا هستند که آن صفحه از مبدا مختصات بگذرد.

(۴) استقلال خطی (Linear independence)

مستقل خطی: به مجموعه ای از بردارها که هیچ ترکیب خطی از آنها صفر نمی شود مگر اینکه همه ضرایب آن ترکیب خطی صفر باشند "مستقل خطی" گویند به عبارت دیگر:

اگر V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ را مستقل خطی گوئیم هرگاه به ازای هر $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ چنانچه داشته باشیم $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$ بتوان نتیجه گرفت $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

و مفهوم آن این است که هیچ یک از بردارها در راستای دیگری تصویر ندارد.

⚠ تذکر: در تساوی اول $0 \in V$ (صفر برداری) و در تساوی دوم $0 \in \mathbb{R}$ (صفر اسکالر) می باشد.

مثال: مجموعه $\{\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \hat{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \hat{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ یک مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ است.

*نکته: هر n برداری که $\mathbb{R}^n$ را تولید کنند مستقل خطی اند.

وابسته خطی: اگر مجموعه $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ مستقل خطی نباشد می‌گوییم S وابسته خطی است.

*نکته: هر زیرمجموعه از فضای برداری V روی میدان F که شامل بردار صفر $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ باشد وابسته خطی است.

*نکته: مجموعه‌ای از سه بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ تنها وقتی وابسته خطی است که این سه بردار هم صفحه باشند و برای بررسی هم صفحه بودن سه بردار از نظر هندسی باید حجم متوازی السطوح تولید شده توسط این سه بردار صفر باشد پس کافیت دترمینان ماتریس متناظر با این سه بردار یا عبارت معادل آن یعنی ضرب مختلط این سه بردار صفر باشد یعنی:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{با فرض } \vec{C} = (c_1, c_2, c_3), \vec{B} = (b_1, b_2, b_3), \vec{A} = (a_1, a_2, a_3) \text{ داشته باشیم:}$$

۵) تعامد (Orthogonality)

در فضای $\mathbb{R}^n$ بردارهای $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ را "متعامد" گویند هرگاه حاصل ضرب داخلی آنها صفر شود یعنی: $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = 0$ و این تعامد را به صورت $A \perp B$ نشان می‌دهند.

۶) پایه (Basis)

تعریف: مجموعه $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ را یک پایه برای فضای (یا زیرفضای) V گوئیم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند (پیماید).

مثال: مجموعه $\{\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \hat{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \hat{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ مجموعه‌ای است که در آن

مؤلفه i ام $\hat{e}_i$ عدد یک و بقیه مؤلفه‌ها صفر است. این مجموعه یک مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ است و $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند زیرا عضو دلخواه $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت $a = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + \dots + a_n \hat{e}_n$ نوشت.

نمایش داد بنابراین این مجموعه یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است و به آن پایه استاندارد (متعارف) می‌گویند.

قضیه: اگر V فضای برداری تولید شده توسط بردارهای $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ باشد و $\{w_1, w_2, \dots, w_\ell\}$ زیرمجموعه ای مستقل خطی از V باشد آنگاه داریم:

$$k \geq \ell \quad (1)$$

(۲) $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ را می توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه برای V تقلیل داد.

(۳) $\{w_1, w_2, \dots, w_\ell\}$ را می توان با افزودن بردارهایی به یک پایه گسترش داد.

(۴) V دارای پایه است و هر دو پایه برای V دارای تعداد اعضای برابراند.

طبق قضیه بالا زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ که با متناهی بردار تولید می شوند دارای پایه اند.

*نکته: هر مجموعه مستقل خطی n عضوی در $\mathbb{R}^n$ پایه ای برای $\mathbb{R}^n$ است.

*نکته: هر پایه برای فضای برداری V تناظری یک به یک بین مجموعه ی همه بردارهای V و مجموعه ی همه ی n تایی های F^n برقرار می سازد.

قضیه: هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

***پایه متعامد یکه (Orthonormal basis):** پایه ای که ضرب داخلی هر دو عضو متفاوت آن صفر و ضرب داخلی هر عضو آن در خودش یک باشد به عبارت دیگر اگر پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ را در نظر بگیریم داریم:

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \quad \text{که در آن } \delta_{ij} \text{ به "دلتای کرونکر"}^5 \text{ موسوم است.}$$

(۷) بعد (Dimension)

اگر فضای برداری V مفروض باشد تعداد اعضای هر یک از پایه های فضای V را بعد آن گوییم و با $\dim(V)$ نمایش می دهیم. به عبارت دیگر اگر فضای برداری V حاوی مجموعه مستقلی از m بردار باشد ولی شامل هیچ مجموعه مستقلی از $m+1$ بردار نباشد آنگاه V دارای بعد m است و $\dim(V)=m$

*نکته: در فیزیک و ریاضیات، ابعاد یک فضای ریاضی (یا شیء) به طور غیررسمی به عنوان حداقل تعداد مختصات (یا پارامترهای مستقل) مورد نیاز برای تعیین موقعیت هر نقطه روی شیء تعریف می شود. به عبارت دیگر ابعاد یک جسم، تعداد درجه آزادی یک نقطه است که روی این جسم حرکت می کند.

*نکته: در فضای n بعدی تعداد n دقیقاً n پارامتر برای تعیین مختصات لازم است.

(۸) مختصات (Coordinate)

تعریف از منظر ریاضی :

با داشتن یک پایه مرتب مانند $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ برای فضای برداری V ، هر عضو آن کاملاً با n تایی مرتب از اعداد

$$v \in V \text{ و } v = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n \quad \text{به صورت زیر مشخص می شود: } x_1, x_2, \dots, x_n \in F$$

در واقع هر عضو فضای برداری مانند $v \in V$ نمایشی منحصر به فرد به شکل بالا دارد چرا که S مستقل خطی است. به این اعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ مختصات بردار v نسبت به پایه S گویند. به این ترتیب هر عضو $v \in V$ با یک عضو F^n متناظر می شود که به آن نمایش بردار v در پایه S می گویند و آن را با $[v]_S$ نمایش میدهند:

$$v = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n \Leftrightarrow [v]_S = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$$

$$[rv + v']_S = r[v]_S + [v']_S \quad \text{*نکته: برای هر } v, v' \in V \text{ و هر } r \in F \text{ داریم:}$$

دستگاه مختصات : دستگاهی برای تناظر یک به یک^۶ مجموعه ای از n کمیت اسکالر (عددی) با فضای n بعدی

*نکته مهم: در یک فضای برداری بردارهای مستقل خطی در آن فضا (بردارهای پایه) تشکیل یک دستگاه مختصات می دهند به طوری که تعداد محورهای مختصات برابر بعد آن فضا است.

*نکته: هر بردار را می توان برحسب بردارهای یک (پایه) هر دستگاه مختصات نوشت با این ویژگی که بردار تغییری نکند.

تعریف از منظر فیزیک:

برای مشخص نمودن موقعیت (مکان) یک ذره^۷ یا جسم صلب^۸ در محیط پیرامونی خود نیاز به مرجع داریم و باید با اعلام اعدادی که از روی این مراجع استخراج می شود موقعیت آن ذره را به صورت نقطه ای منحصر به فرد تعیین نمود. همچنین حرکت ذرات را می توان با استفاده از مختصاتی که نسبت به محورهای ثابت سنجیده می شوند، تشریح نمود. در سیستمهای فیزیکی تعداد پارامترهای لازم برای تعیین مختصات یک شیء در فضای فاز برابر با درجات آزادی آن شیء در آن سیستم است.

۶. تناظر یک به یک (یا تابع دوسوی): تابعی میان اعضای دو مجموعه است به شرط این که هر عضو از هر مجموعه با دقیقاً یک عضو از مجموعه دیگر جفت شده باشد و در هیچ کدام از مجموعه ها هیچ عضو بدون جفتی وجود ندارد به گونه ای که به ازای هر عضو در یک مجموعه یک و تنها یک عضو در مجموعه دیگر وجود دارد. چنانچه یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه ای متناهی برقرار باشد، تعداد اعضای آن دو مجموعه با هم برابرند.

۷. ذره (particle): مقدار بسیار جزئی (تکه) یا بخش گسسته نسبتاً کوچکی از ماده است. در فیزیک، یک ذره جسم کوچکی با جانی مشخص است که می توان ویژگی های فیزیکی و شیمیایی متعددی را مانند حجم یا جرم به آن منتسب کرد. در مکانیک، منظور از ذره، جسمی است که برای مدل سازی آن بتوان از ابعاد آن صرف نظر کرد و تنها برای آن جرم در نظر گرفت. در نتیجه، دوران برای ذره، بی معنی است و هر ذره در فضا، تنها ۳ درجه آزادی (امکان جابجایی در سه راستا) دارد.

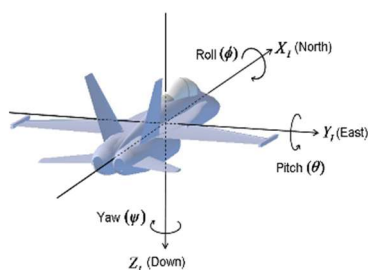
۸. جسم صلب (rigid body): به سیستمی گفته می شود که شامل تعداد زیادی ذرات ثابت هست که فاصله ذرات حتی در صورتی که به جسم نیرو وارد شود یا حرکت کند از یکدیگر همواره ثابت است. در واقع جسمی که هیچ دو ذره ای از ذرات تشکیل دهنده آن نسبت بهم حرکتی نداشته باشند.

دینامیک ، ارتعاشات ، مکانیک پرواز

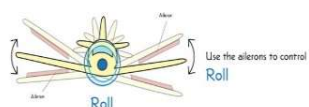
درجه آزادی (DOF) (Degrees of freedom): حداقل تعداد مختصه (پارامتر) های مستقل برای بیان موقعیت و وضعیت (انتقالی ، دورانی یا هر دو) یا به عبارتی پیکربندی یک سیستم

* نکته : وجود هر قید روی سیستم درجه آزادی سیستم را یک درجه کاهش می دهد.

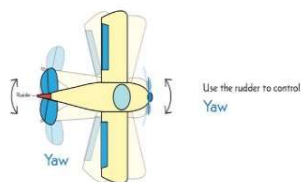
مثلا یک ذره در فضا دارای سه درجه آزادی (حرکت انتقالی در راستای سه محور مختصات) و در صفحه دارای دو درجه آزادی است در حالی یک جسم صلب در فضا دارای شش درجه آزادی است. سه درجه برای حرکت در سه راستای فضای سه بعدی (موقعیت)^۹ و سه درجه برای چرخش (دوران) حول هر یک از محورها (وضعیت)^{۱۰} که در دستگاه مختصات اینرسی زوایای اوپلر نامیده می شوند. زوایای یک شی در یک لحظه مشخص، به عنوان چرخشی که نسبت به یک مرجع فرضی در فضا صورت گرفته، مطرح می شود.



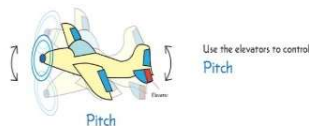
بر اساس قضیه چرخش اوپلر، چرخش یک جسم صلب (یا یک سیستم مختصات سه بعدی با مرجع ثابت) را می توان توسط یک چرخش حول یک محور توصیف کرد. این محور، یک بردار واحد است که در طی چرخش صورت گرفته بی تغییر باقی می ماند. مقدار زاویه نیز به جز علامت آن منحصر به فرد خواهد بود که توسط جهت محور چرخش تعیین می شود. چنین چرخشی را می توان توسط حداقل سه پارامتر حقیقی به صورت یگانه تعریف کرد که سه درجه آزادی را نمایش می دهند. مثلا برای یک هواپیما داریم : با داشتن شتاب هواپیما که از سنسورها بدست می آید و حل معادلات حرکت، مکان و موقعیت هواپیما بدست می آید اما برای دانستن وضعیت دورانی هواپیما نسبت به زمین به سراغ زوایای ϕ و θ و ψ که زوایای اوپلر اند می رویم که به ترتیب بیانگر غلت (roll)، فراز (pitch) و سمت (yaw) هستند که نسبت به دستگاه مختصات اینرسی^{۱۱} سنجیده می شوند.



* roll که به آن غلت می گویند چرخش هواپیما حول محور طولی (X) است که توسط شهپر^{۱۲} انجام می شود.



* pitch که به آن تاب، گام یا فراز میگویند چرخش حول محور عرضی (Y) است که توسط سکان افقی^{۱۳} انجام میشود.



* yaw که به آن گردش می گویند حول محور عمودی هواپیما (Z) است که توسط سکان عمودی^{۱۴} انجام می شود.

* برای بحث زوایای اوپلر و جهت گیری جسم صلب در فضا به همین اندازه در این جزوه اکتفا می کنیم برای یادگیری مطالب بیشتر می توانید به کتاب دینامیک و همچنین مکانیک پرواز 2 مراجعه کنید .

9.position

10.attitude or orientation

۱۱. (inertial coordinate system) دستگاه مختصاتی که شتاب خطی و چرخش زاویه ای نداشته باشد و طبق قانون اول نیوتون مجموع نیروهای وارد بر آن صفر باشد پس یا ساکن است یا با سرعت ثابت ، بدون چرخش به حرکت یکنواخت خود ادامه می دهد .

12.aileron

13. elevator

14. rudder

آنالیز برداری

بردار (Vector)

تعریف بردار: یک پاره خط جهت دار که ابتدا و انتهای آن مشخص باشد. یک بردار را به صورت $\vec{A}$ یا $\underline{A}$ نشان می دهند.

کلمه بردار به معنای حامل میباشد و از یک کلمه لاتین به همین معنا گرفته شده است. یک بردار به عنوان یک عنصر از فضای برداری تعریف میشود و در فضای n بعدی دارای n مولفه است.

* هر بردار دارای دو مشخصه اندازه^{۱۵} (نُرم^{۱۶}، مقدار یا بزرگی) و جهت^{۱۷} (که منظور از جهت مشخص بودن^۱، راستا و^۲، سمت و سوی بردار روی این راستا) است.

* اندازه هر بردار را به صورت $\|\vec{A}\|$ (بعضا به صورت $|\vec{A}|$ نمایش می دهند اما نمایش قبلی صحیح تر است و تفاوت با قدر مطلق را نشان می دهد) نشان می دهند و اگر بردار $\vec{A}$ در فضای $\mathbb{R}^n$ به صورت $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ باشد آنگاه اندازه

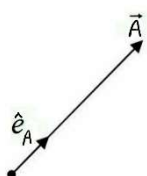
$$\text{بردار } \vec{A} \text{ به صورت } \|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ بدست می آید.}$$

⚠ تذکر: یک بردار در هر دستگاهی تصویرشود نهایتاً همان بردار خواهد بود به عبارت دیگر برداریک کمیت تغییرناپذیر^{۱۸} است.

بردار یکه (Unit vector)

برداری است با اندازه واحد که برای مشخص کردن جهت بردار در فضا به کار می رود به همین دلیل به آن بردار جهت نیز می گویند. بردار یکه بردار $\vec{A}$ را با $\hat{A}$ (علامت هت^{۱۹} " ^ " به معنی یکه بودن بردار است) یا با $\hat{e}_A$ ، $\hat{a}_A$ و یا با $\hat{u}_A$ نشان می دهند و

$$\hat{e}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} \text{ بدست می آید پس می توان نتیجه گرفت بردار } \vec{A} \text{ را می توان به صورت } \vec{A} = \|\vec{A}\| \hat{e}_A \text{ نوشت.}$$



15.magnitude

16.norm

17.direction

18.invariant

19.hat

بردارهای پایه (Basis vectors) :

بردارهای یک‌جهت محورهای مختصات هستند که مستقل خطی اند و هر بردار را می‌توان بر حسب این بردارهای یک‌جهت در دستگاه مختصات مورد نظر نوشت. مثلاً در دستگاه کارتزین سه بعدی داریم:

$$\hat{x} = \hat{i} = (1, 0, 0) \quad \text{و} \quad \hat{y} = \hat{j} = (0, 1, 0) \quad \text{و} \quad \hat{z} = \hat{k} = (0, 0, 1) \quad \text{و} \quad \|\hat{i}\| = \|\hat{j}\| = \|\hat{k}\| = 1$$

و بردار $\vec{A}$ را می‌توان به صورت $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ در این دستگاه نوشت.

در بررسی مسائل فیزیکی با دو نوع کمیت سر و کار داریم :

کمیت نرده ای یا اسکالر (Scalar quantity): کمیت هایی مانند جرم که فقط دارای اندازه هستند.

کمیت برداری (Vector quantity) :

کمیتی که دارای اندازه و جهت نیز باشد و از قاعده جمع برداری پیروی کند. مهم‌ترین کمیت‌های برداری که می‌توان نام برد، عبارت‌اند از:

۱- مکان ۲- سرعت ۳- شتاب ۴- نیرو ۵- میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و...

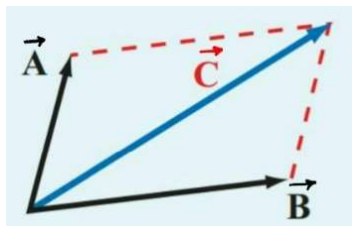
جبر برداری (Vector algebra)

1. برآیند (جمع) برداری (Vector addition) :

بردار برآیند چند بردار، برداری است که به تنهایی خواص بردارهای اولیه را داشته باشد. دو روش برای جمع بردارها با نمایش هندسی :

1. روش متوازی الاضلاع:

این روش مناسب برای جمع دو بردار است که ابتدا دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را از یک نقطه رسم می‌کنیم سپس از انتهای هر کدام خطی موازی بردار دیگر رسم می‌کنیم تا یک متوازی الاضلاع ساخته شود برداری که ابتدای دو بردار را به راس مقابل



متصل می‌کند (قطر بزرگ متوازی الاضلاع) بردار برآیند است و آن را با $\vec{C}$ نشان می‌دهیم که $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ و اگر اندازه هر بردار را به صورت $\|\vec{A}\| = a$, $\|\vec{B}\| = b$, $\|\vec{C}\| = c$ نشان دهیم

آنگاه اندازه بردار $\vec{C}$ از رابطه $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha)}$ بدست می‌آید که در آن α زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است.

*حالات خاص :

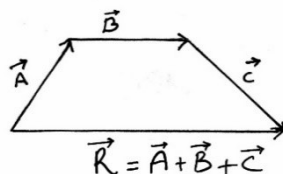
$$a = b \Rightarrow c = 2a \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{اندازه دو بردار مساوی باشد:}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow c = a + b \quad \text{دو بردار هم جهت باشند:}$$

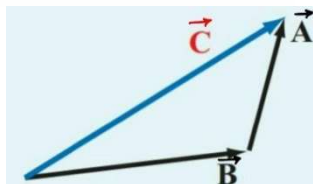
$$\alpha = \pi \Rightarrow c = |a - b| \quad \text{دو بردار خلاف جهت باشند:}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{دو بردار بر هم عمود باشند:}$$

2. روش ابتدا به انتها (چند ضلعی):

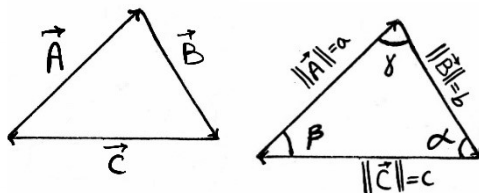


ابتدا یک بردار را رسم کرده از انتهای بردار اول بردار دوم را رسم کرده و هر بردار را به دنبال بردار دیگر در انتهای آن رسم می کنیم. حال برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کند بردار برآیند است.



حالت خاص این روش مثلث است که برای ۲ بردار مناسب است.

* در جمع بردارها خاصیت جابجایی و شرکت پذیری برقرار است.



* برآیند سه بردار زمانی صفر است که تشکیل مثلث بدهند $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{O}$. با

این شرایط دو قانون معروف سینوس ها و کسینوس ها را با فرض

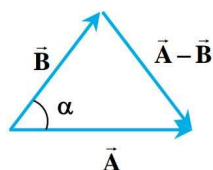
$\|\vec{A}\| = a, \|\vec{B}\| = b, \|\vec{C}\| = c$ برای این مثلث می توان نوشت :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \end{cases}$$

و

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

2. تفاضل برداری (Vector subtraction):



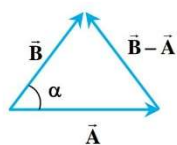
برای تفریق دو بردار ، منفی بردار را به صورت برداری با همان اندازه ولی در جهت مخالف تعریف می

کنیم آنگاه $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$. برای روش هندسی دو بردار را از یک نقطه رسم می کنیم سپس

انتهای بردار دوم (منفی) را به انتهای بردار اول (مثبت) وصل می کنیم تا بردار تفاضل بدست آید.

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ و اگر اندازه هر بردار را به صورت $\|\vec{A}\| = a, \|\vec{B}\| = b, \|\vec{D}\| = d$ نشان دهیم آنگاه اندازه بردار

$\vec{D}$ از رابطه $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}$ بدست می آید که در آن α زاویه بین دو بردار $\vec{A}, \vec{B}$ است.



*در حالت خاصی که اندازه دو بردار برابر باشد $a = b$ اندازه بردار تفاضی از رابطه $d = 2a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ بدست می آید.

در حالت کلی از نظر تحلیلی با داشتن مؤلفه های یک بردار (تصویر بردار در جهت هر یک از بردار های پایه دستگاه مختصات) جمع و تفاضل برداری را میتوان به صورت زیر انجام داد:

اگر دو بردار $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ را در نظر بگیریم که $A, B \in \mathbb{R}^n$ آنگاه با توجه به پایه استاندارد فضای $\mathbb{R}^n$ که مجموعه $\{\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \hat{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \hat{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ می باشد داریم:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (a_1 \pm b_1)\hat{e}_1 + (a_2 \pm b_2)\hat{e}_2 + \dots + (a_n \pm b_n)\hat{e}_n$$

3. ضرب برداری (vector multiplication)

ضرب عدد (اسکالر) در بردار (Scalar multiplication)

اگر بردار $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ را در عدد اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ ضرب کنیم، اندازه بردار λ برابر می شود و جهت بردار $\lambda \vec{A}$ به علامت λ بستگی دارد: اگر علامت عدد λ منفی باشد جهت بردار قرینه می شود و اگر مثبت باشد تغییری نمی کند.

$$\lambda \vec{A} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad \text{و} \quad \|\lambda \vec{A}\| = |\lambda| \|\vec{A}\|$$

ضرب داخلی (Inner product):

ضرب داخلی که ضرب عددی (اسکالر) $\cdot$ و یا ضرب نقطه ای $\cdot$ نیز نامیده می شود یک عمل دوتایی بین دو بردار در فضای برداری n بعدی اقلیدسی است که نتیجه آن یک عدد است.

تعریف: اگر دو بردار $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ را در نظر بگیریم که $A, B \in \mathbb{R}^n$ آنگاه ضرب

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

داخلی دو بردار را به صورت رو به رو تعریف می کنیم:

در فضای $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ اگر زاویه بین دو بردار را داشتیم تعریف دومی نیز برای ضرب داخلی به صورت زیر است که در آن θ (کوچکترین) زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است و $\|\vec{A}\|, \|\vec{B}\|$ نرم دو بردار هستند:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta) \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta)$$

در فضای سه بعدی بدست می آید :

خواص ضرب داخلی : با فرض $t \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (2) \text{ خاصیت جابجایی}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (3) \text{ خاصیت توزیع پذیری}$$

$$(t\vec{A}) \cdot \vec{B} = t(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (t\vec{B}) \quad (4) \text{ خاصیت شرکت پذیری}$$

کاربردهای ضرب داخلی:

زاویه بین دو بردار: با استفاده از رابطه $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta)$ می توان فرمولی برای بدست آوردن زاویه بین دو بردار

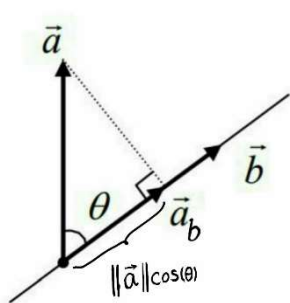
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \right) \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{بدست آورد:}$$

نامساوی کوشی شوارتز: می دانیم $|\cos(\theta)| \leq 1$ آنگاه با توجه به $\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$ نتیجه می گیریم که

$$\left| \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} \right| \leq 1 \Rightarrow \boxed{|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

تصویر بردار (Vector projection)

برای بدست آوردن تصویر(مؤلفه) بردار $\vec{a}$ در جهت بردار $\vec{b}$ کافیست بردار $\vec{a}$ را در بردار جهت $\vec{b}$ ضرب کنیم. به بیان ریاضی:



$$a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \vec{a} \cdot \hat{e}_b = \|\vec{a}\| \cos(\theta) \quad \text{با فرض اینکه زاویه } \theta \text{ زاویه بین دو بردار باشد:}$$

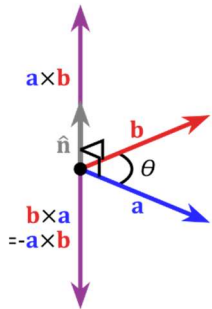
$$\text{و بردار آن به صورت زیر بدست می آید: } \text{proj}_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

از این کاربرد در بدست آوردن مؤلفه های یک بردار در راستای محور های مختصات می

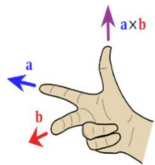
توان استفاده کرد: مثلاً $A_x = \vec{A} \cdot \hat{i}$ و $A_y = \vec{A} \cdot \hat{j}$ و $A_z = \vec{A} \cdot \hat{k}$

ضرب خارجی (Exterior product)

ضرب خارجی که ضرب برداری^{۲۲} و یا ضرب ضربداری^{۲۳} نیز نامیده می شود یک عمل دوتایی بین دو بردار در فضای ۳ بعدی اقلیدسی است که نتیجه آن بردار عمود بر دو بردار اولیه است.



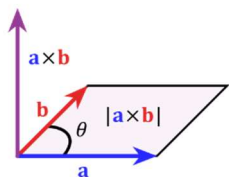
با در نظر گرفتن دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ در فضای سه بعدی اقلیدسی بردار حاصل از ضرب خارجی این دو بردار را به صورت $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش می دهند که اندازه آن به صورت $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$ بدست می آید که در آن θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و جهت آن با استفاده از قانون دست راست تعیین می شود.



ابتدا انگشت شست و چهار انگشت دست راست را در وضعیتی قرار می دهیم که بین انگشت شست و چهار انگشت چسبیده به هم، زاویه قائمه ایجاد شود حال اگر چهار انگشت (انگشت اشاره) را به گونه ای در جهت بردار اول ($\vec{a}$) قرار دهیم که جهت بسته شدن چهار انگشت (انگشت میانی) در جهت بردار دوم ($\vec{b}$) باشد و بسته شدن انگشتان زاویه θ را جاروب کند، آنگاه انگشت شست جهت بردار ضرب خارجی دوبار $\vec{a} \times \vec{b}$ را نشان خواهد داد.

* در صورت نداشتن زاویه بین دو بردار ضرب خارجی دو بردار با داشتن مولفه های دو بردار از رابطه زیر بدست می آید:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}$$



* نکته: اندازه ضرب خارجی دو بردار برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که این دو بردار دو ضلع

$$s = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \text{ مجاور آن را تشکیل می دهند.}$$

خواص ضرب خارجی :

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \quad (۱) \quad \text{خاصیت جابجایی ندارد} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (۲)$$

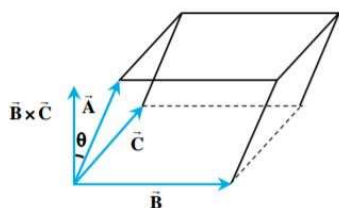
$$\tan(\theta) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \quad \text{و} \quad (\vec{r}\vec{a}) \times (\vec{s}\vec{b}) = (rs)(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (۴) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (۳) \quad \text{خاصیت توزیع پذیری}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \quad (۵) \quad \text{خاصیت شرکت پذیری ندارد}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix} \quad : \vec{a}, \vec{b} \text{ بردار دو لاگرانژ برای دو بردار}$$

ضرب سه گانه

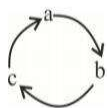
ضرب سه گانه اسکالر (ضرب مختلط) (Scalar triple product)



با فرض $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ضرب سه گانه اسکالر به

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{تعریف می شود و بیانگر حجم متوازی السطوح ساخته شده با}$$

سه بردار $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ است: $v_p = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$



*تبدیل دوری (جایگشت دورانی) در ضرب مختلط سه بردار $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

*با در نظر گرفتن سه بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ نکات مهم زیر بدست خواهد آمد:

شرط موازی بودن دو بردار $\vec{a}, \vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

شرط عمود بودن دو بردار $\vec{a}, \vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

شرط هم صفحه بودن سه بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

ضرب سه گانه برداری (ضرب مضاعف) (Vector triple product)

با فرض $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ضرب سه گانه برداری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b} \times \vec{c}$ و موازی صفحه شامل دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ می باشد.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad \text{نکته:}$$

* ضرب سه گانه برداری خاصیت عدم شرکت پذیری دارد: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

اتحاد ژاکوبی

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} = (0, 0, 0)$$

اتحاد لاگرانژ

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} \quad : \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \text{ چهار بردار}$$

* تعیین بردار مجهول $\vec{X}$ با معلوم بودن بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و مقدار C به طوری که $\vec{B} = \vec{A} \times \vec{X}$, $C = \vec{A} \cdot \vec{X}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{X}) = (\vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{A}) \vec{X} = C \vec{A} - \|\vec{A}\|^2 \vec{X} \Rightarrow \vec{X} = \frac{C \vec{A} + \vec{B} \times \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}$$

فیزیک ۲، الکترومغناطیس، دینامیک، مکانیک سیالات

المان (Element)

در واقع المان، سیستم یا عنصری دیفرانسیلی از جسم است که به عنوان نماینده ای از کل جسم برای بررسی تغییرات یک کمیت (متغیر) روی جسم انتخاب می شود و جهت تغییرات متغیرها در آن حائز اهمیت است. کاربرد المان این است که پس از بررسی انجام شده می توان با انتگرال گیری نتیجه را به کل جسم تعمیم داد.

المان های دیفرانسیلی:

(۱) المان طول (المان خط) (line element)(length element)

یک کمیت برداری است که با $d\vec{\ell}$ یا $d\vec{r}$ نمایش داده شده و اندازه آن با فاصله بین محل قدیم نقطه مورد نظر تا محل جدید آن پس از نمو یافتن برابر است. بردار یکه نشان دهنده جهت بردار المان طول نیز در راستای خط واصل محل قدیم نقطه مورد نظر تا محل جدید آن پس از نمو یافتن می باشد. برای مثال در مختصات کارتزین داریم:

$$d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_x + d\vec{\ell}_y + d\vec{\ell}_z = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

(۲) المان سطح (Area element)(Surface element)

یک کمیت برداری است که با $d\vec{A}$ یا $d\vec{s}$ نمایش داده شده و از حاصل ضرب خارجی دو مؤلفه المان طول در هر یک از جهات محوره های یک دستگاه مختصات بدست می آید. برای مثال در دستگاه کارتزین داریم:

$$d\vec{s}_z = d\vec{\ell}_x \times d\vec{\ell}_y = (dx\hat{i}) \times (dy\hat{j}) = dx dy \hat{k}$$

در واقع بردار المان سطح در مختصات کارتزین عبارت است از مستطیل حاصل از نمو دو پارامتر که اندازه این بردار برابر مساحت مستطیل المان و بردار یکه آن بردار یکه عمود بر سطح خواهد بود که جهت آن رو به خارج سطح است.

* اگر $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح باشد رابطه $d\vec{s} = ds \hat{n}$ همواره برقرار است.

⚠ تذکر: به جز در مبحث خم های پارامتری که ds بیانگر طول قوس است در بقیه مباحث ds نشان دهنده المان سطح است.

(۳) المان حجم (Volume element)

یک کمیت اسکالر است که با dv نمایش داده می شود که در هر دستگاه مختصات از رابطه $dv = d\vec{\ell}_1 \cdot (d\vec{\ell}_2 \times d\vec{\ell}_3)$ بدست می آید. در واقع المان حجم عنصر دیفرانسیلی سه بعدی کوچکی است که از کنار هم چیدن آنها می توان حجمی را در فضا به وجود آورد. برای مثال در دستگاه کارتزین داریم:

$$d\vec{\ell}_1 = dx\hat{i} \quad \text{و} \quad d\vec{\ell}_2 = dy\hat{j} \quad \text{و} \quad d\vec{\ell}_3 = dz\hat{k}$$

$$dv = d\vec{\ell}_1 \cdot (d\vec{\ell}_2 \times d\vec{\ell}_3) = (dx\hat{i}) \cdot ((dy\hat{j}) \times (dz\hat{k})) = (dx\hat{i}) \cdot (dydz\hat{i}) = dx dy dz$$

در نتیجه :

⚠ تذکر: این المان ها بر حسب نوع مسئله هم به صورت بردار هم به صورت اسکالر به کار می روند.
این المان ها را به طور کامل تر در مبحث دستگاه های مختصات منحنی الخط متعامد بررسی خواهیم کرد.

توزیع های پیوسته

اگر در جرمی توزیع جرم به صورت پیوسته باشد (جسم یکنواخت)

مختصات مرکز جرم:

$$x_{c.o.m} = \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x dm}{M}, \quad y_{c.o.m} = \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y dm}{M}, \quad z_{c.o.m} = \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int z dm}{M}$$

برای عنصر دیفرانسیلی جرم که با dm نمایش داده می شود داریم :

(۱) توزیع پیوسته جرم در امتداد یک منحنی با چگالی خطی λ

چون توزیع به صورت یکنواخت و پیوسته است و چگالی خطی برابر است با جرم در واحد طول ، بدست می آید :

$$\lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{dm}{d\ell} \Rightarrow dm = \lambda d\ell$$

جرم یک قطعه منحنی شکل به صورت $M = \int dm = \int \lambda d\ell$ بدست می آید که بعداً بدست می آوریم برای منحنی $y = f(x)$ المان طول به صورت $d\ell = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ و برای منحنی پارامتری با معادلات $x = x(t)$ و $y = y(t)$ به صورت $d\ell = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$ خواهد بود .

و با توجه به تعریف مرکز جرم می توان مختصات مرکز جرم این منحنی را به صورت زیر بدست آورد :

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{M} = \frac{\int x \lambda d\ell}{M} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int y \lambda d\ell}{M}$$

حال اگر توزیع در امتداد یک خط مستقیم مانند محور x باشد، $dm = \lambda dx$ می باشد و می توان جرم یک سیم (میله)

نازک با چگالی خطی $\lambda = \lambda(x)$ را در بازه $x \in [a, b]$ به صورت $M = \int_a^b dm = \int_a^b \lambda(x) dx$ بدست آورد.

و با توجه به تعریف مرکز جرم، می توان مرکز جرم این میله را به صورت $\bar{x} = \frac{\int_a^b x dm}{M} = \frac{\int_a^b x \lambda(x) dx}{M}$ بدست آورد.

(۲) توزیع پیوسته جرم در صفحه (ناحیه دو بعدی) با چگالی سطحی $\sigma = \sigma(x, y)$

چون توزیع به صورت یکنواخت و پیوسته است و چگالی سطحی برابر است با جرم در واحد سطح، بدست می آید:

$$\sigma = \frac{M}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = \sigma dA$$

می توان جرم ناحیه D با چگالی سطحی $\sigma = \sigma(x, y)$ را به صورت $M = \iint_D \sigma dA$ بدست آورد که در مختصات

کارتزین $dA = dx dy$ می باشد و با توجه به تعریف مرکز جرم، می توان مختصات مرکز جرم این ناحیه را به صورت زیر بدست آورد:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \sigma dA}{M} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \sigma dA}{M}$$

(۳) توزیع پیوسته جرم در ناحیه سه بعدی با چگالی حجمی $\rho = \rho(x, y, z)$

چون توزیع به صورت یکنواخت و پیوسته است و چگالی حجمی برابر است با جرم در واحد حجم، بدست می آید:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \rho = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \rho dv$$

می توان جرم ناحیه سه بعدی R با چگالی حجمی $\rho = \rho(x, y, z)$ را به صورت $M = \iiint_R \rho dv$ بدست آورد که در

مختصات کارتزین $dv = dx dy dz$ می باشد و با توجه به تعریف مرکز جرم می توان مختصات مرکز جرم این ناحیه را به صورت زیر بدست آورد:

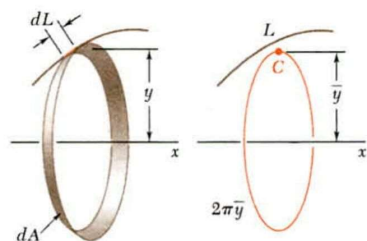
$$\bar{x} = \frac{\iiint_R x \rho dv}{M} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\iiint_R y \rho dv}{M} \quad \text{و} \quad \bar{z} = \frac{\iiint_R z \rho dv}{M}$$

*در مبحث الکتریسته هم به صورت مشابه برای توزیع پیوسته بار بدست می آید :

اگر بار به صورت یکنواخت توزیع شده باشد: چگالی خطی $\lambda = \frac{Q}{p}$ و چگالی سطحی $\sigma = \frac{Q}{A}$ و چگالی حجمی $\rho = \frac{Q}{V}$

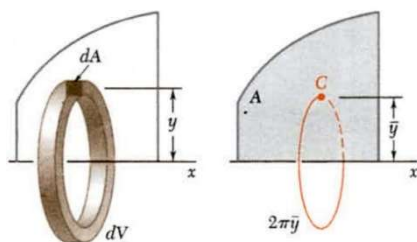
آنگاه برای حل مسائل بدست می آید : $dq = \lambda dl$ $dq = \sigma ds$ $dq = \rho dv$

قضایای پاپوس (گولدین) (Guldin)(Pappus)



۱. مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی مسطح حول محوری که در صفحه منحنی واقع بوده و آن را قطع نکند، برابر است با حاصل ضرب در ازای منحنی (طول قوس منحنی) در محیط پیموده شده (محیط دایره ای که مرکز ثقل در دوران می سازد) توسط مرکز ثقل منحنی. به بیان ریاضی : اگر منحنی به طول L حول محور x دوران کند

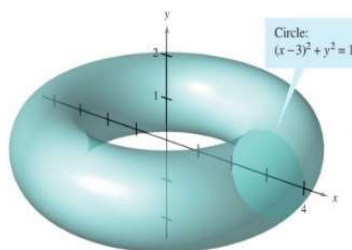
$$A = \int dA = \int 2\pi y d\ell = 2\pi \bar{y} L$$



۲. حجم حاصل از دوران یک ناحیه مسطح حول محوری که ناحیه را قطع نمی کند، برابر است با حاصل ضرب مساحت ناحیه در محیط پیموده شده (محیط دایره ای که مرکز ثقل در دوران می سازد) توسط مرکز ثقل ناحیه. به بیان ریاضی : اگر ناحیه حول

$$\text{محور } x \text{ دوران کند : } V = \int dv = \int 2\pi y dA = 2\pi \bar{y} A$$

*در هر یک از موارد بالا اگر به جای یک دور کامل به اندازه θ دوران کند به جای 2π در فرمول θ قرار می دهیم و اگر حول محور y دوران صورت بگیرد به جای $\bar{y}$ ، $\bar{x}$ قرار می گیرد.

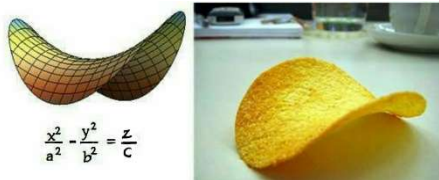


مثال: حجم تورس (Torus) حاصل از دوران دایره $(x-3)^2 + y^2 = 1$ حول محور y را بدست آورید.

در این مثال چون حول محور y دوران داریم پس فرمول حجم طبق قضیه دوم پاپوس به صورت $v = 2\pi \bar{x} A$ در می آید که چون شعاع دایره ۱ است $A = \pi$ و مختصه مرکز سطح فاصله محور y تا مرکز دایره است $\bar{x} = 2 + 1 = 3$ در نتیجه حجم تورس بدست می آید : $v = 6\pi^2$

روش دیگر بدست آوردن حجم استفاده از انتگرال (روش واشر) است.

ریاضی ۲، دینامیک

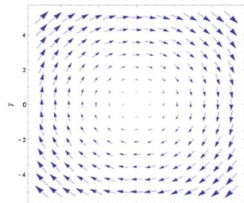


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

نمایش تابع اسکالر $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ به نام سهمی گون

هذلولوی (hyperbolic paraboloid) و کاربرد آن در زندگی :

(مانند یک عدد یا یک کمیت فیزیکی اسکالر مانند دمای تمام نقاط یک جسم را در هر لحظه) را نسبت می دهد.



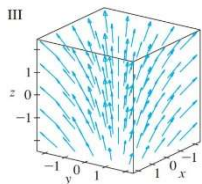
تابع (میدان) برداری (Vector function): در ریاضیات، یک تابع برداری بر $u \subseteq \mathbb{R}^m$ تابعی (نگاشتی)

است چون $F: u \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ که به هر نقطه از دامنه خودش $(u \subseteq \mathbb{R}^m)$ یک بردار را نسبت

می دهد. اگر تابع برداری $\vec{F}$ به صورت $\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ باشد آنگاه هر یک از مولفه های $\vec{F}$ یعنی

f_i ها یک تابع اسکالر n متغیره $(f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ است.

نمایش میدان برداری $\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j}$



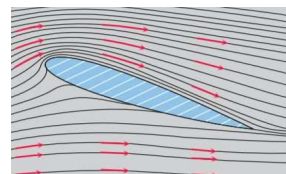
تابع برداری $\vec{F} = (x, y, 3)$

* برای درک بهتر تابع برداری و اسکالر به مثال های زیر توجه کنید:

تابع اسکالر چند متغیره: $f(x, y, z) = x^2 yz + x \sin(z)$

تابع اسکالر تک متغیره: $f(x) = x^2$

تابع برداری تک متغیره: $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$ تابع برداری چند متغیره: $F(x, y) = (x - y, x + y)$



میدان سرعت جریان اطراف airfoil در تونل باد

اگر $m=1$ باشد تابعی برداری پدید می آید که تنها یک متغیر ورودی دارد و خروجی آن یک n تایی مرتب (بردار) در فضای $\mathbb{R}^n$ است به این متغیر ورودی، پارامتر می گوئیم و به خروجی یک کم پارامتری می گوئیم:

خم (منحنی) های پارامتری

به تابع برداری تک متغیره **خم** میگوئیم. خم یک موجود یک بعدی است که زیر مجموعه ای از

یک فضای ۲ بعدی و یا بیشتر می باشد. در ریاضیات، مفهوم منحنی (خم) برای نشان دادن یک شیء یک بعدی و پیوسته

به کار می رود. عبارت منحنی (خم) همچنین در حالاتی استفاده می شود که آن را تقریباً هم معنی با تابع ریاضی یا نمودار

تابع می سازد. تعریف خم پارامتری :

اگر تابع $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (با فرض $a < b$) با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ تابعی پیوسته روی $[a, b]$

باشد آنگاه C با ضابطه r را یک خم پارامتری در فضای $\mathbb{R}^n$ می گویند. به $x_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) مؤلفه i ام خم پارامتری C

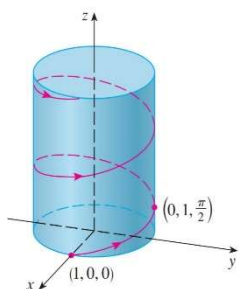
می گویند و $x_i(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ما معمولاً با این خم های پارامتری در فضای دو بعدی $\mathbb{R}^2$ و سه بعدی $\mathbb{R}^3$ سر و کار

داریم چرا که این خم ها در واقع مسیر حرکت یک ذره را نشان می دهند.

خم $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ که در حالت کلی به صورت $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ نمایش

داده می شود به طوری که $a \leq t \leq b$ به هر عدد حقیقی t یک بردار را نسبت می دهد و در واقع مسیر حرکت یک ذره را از $\vec{r}(a)$ تا $\vec{r}(b)$ در فضا نشان می دهد.

مثال: نمایش یک مارپیچ دوار^{۲۶} در فضا با خم پارامتری $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$



* اگر بخواهیم معادله مسیر (رابطه بین x, y, z مستقل از پارامتر t) را بدست بیاوریم کافیست از دستگاه

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

پارامتر t را حذف کنیم. (به هر یک از معادلات $x = x(t)$ و... معادلات پارامتری می گویند)

* ممکن است معادلات پارامتری مختلفی وجود داشته باشند که همگی معرف یک خم باشند.

به طور کلی، خم یا منحنی بر دو گونه است :

• منحنی مسطح (plane curve): خمی است که بر روی سطح دوبعدی (صفحه) قابل جایگیری است.

• منحنی انحرافی (skew curve): خمی فضایی است که روی هیچ صفحه‌ای قرار نگیرد.

به طور شهودی، خم مسطح به مجموعه‌ای از نقطه‌ها گفته می‌شود، به شرط آنکه بتوانیم بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ آن را رسم کنیم.

انواع منحنی مسطح

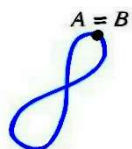
منحنی ساده (simple curve)



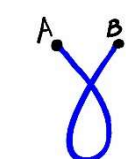
منحنی ساده و باز (و هموار)

یک منحنی ساده، یک منحنی مسطح است که هیچ یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم می‌رسند.

منحنی بسته (closed curve)



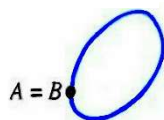
منحنی بسته است اما ساده نیست



منحنی باز است ولی ساده نیست

منحنی بسته، به خمی اطلاق می‌شود که نقطه‌های ابتدا و انتهای آن به هم رسیده و بر همدیگر منطبق باشند.

منحنی ساده بسته (simple closed curve)

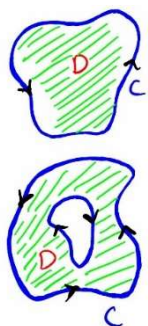


منحنی ساده و بسته

منحنی ای ساده بسته است که نقطه‌های ابتدا و انتهایی آن بر هم منطبق باشند و نقطه‌های خود را قطع نکند.

قضیه منحنی جردن (Jordan curve theorem)

هر منحنی ساده بسته C ، صفحه را به سه زیر مجموعه جدا از هم درون، بیرون و روی منحنی تقسیم می‌کند.



جهت گذاری مثبت برای خم روی صفحه

یک خم بسته که ناحیه D را در $\mathbb{R}^2$ احاطه کرده است جهت دار مثبت گوییم هر گاه وقتی در جهت خم حرکت می کنیم ناحیه احاطه شده توسط خم (D) در سمت چپمان قرار گیرد.

حد خم های پارامتری

خم $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ در نقطه $t = t_0$ دارای حد

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = L_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ است اگر :

برای $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت زیر خواهد بود :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) \right) \hat{i} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \right) \hat{j} + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \right) \hat{k} = L_1 \hat{i} + L_2 \hat{j} + L_3 \hat{k} = \vec{L}$$

پیوستگی خم های پارامتری

خم $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ در نقطه $t = t_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر مؤلفه های آن در $t = t_0$ پیوسته باشند:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = x_i(t_0) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

مشتق خم های پارامتری

خم $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ در نقطه t مشتق پذیر است هر گاه

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{\vec{r}(x) - \vec{r}(t)}{x - t}$$

موجود باشد. در صورت وجود آن مشتق خم $\vec{r}(t)$ در t نامیده و آن را با $\frac{d\vec{r}}{dt}$ یا $\dot{\vec{r}}$ نشان می دهیم.

* اگر مؤلفه های تابع $\vec{r}(t)$ مشتق پذیر باشند آنگاه $\vec{r}(t)$ مشتق پذیر است.

مشتق خم $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت رو به رو خواهد بود:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$$

⚠ تذکر: درنمادگذاری نیوتون مشتق با قرار دادن نقطه بالای تابع مورد نظر نمایش می یابد و این نوع نمایش مشتق در اکثر اوقات برای مشتق زمانی به کار می رود :

مشتق دوم x نسبت به زمان $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow$ و مشتق اول x نسبت به زمان $\dot{x} = \frac{dx}{dt} \rightarrow$

قضیه: هرگاه $\vec{r}(t)$ یک خم برداری با اندازه ثابت باشد آنگاه $\dot{\vec{r}}(t)$ و $\vec{r}(t)$ بر هم عمودند. (عکس قضیه نیز برقرار است)

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \|\vec{r}(t)\|^2 = cte \Rightarrow \vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \vec{r}(t) \perp \dot{\vec{r}}(t)$$

قواعد مشتق گیری از خم های پارامتری

با فرض $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ به عنوان دو خم پارامتری و $\lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اسکالر مشتق پذیر و $a \in \mathbb{R}$ اثبات

1) $\frac{d}{dt}(a\vec{u}(t)) = a\dot{\vec{u}}(t)$ می شود که :

2) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)) = \dot{\vec{u}}(t) \pm \dot{\vec{v}}(t)$

3) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{u}(t)) = \dot{\lambda}(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\dot{\vec{u}}(t)$

4) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \dot{\vec{u}}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t)$

5) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \dot{\vec{u}}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \dot{\vec{v}}(t)$

توجه داشته باشید که در مورد بالا چون ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد فقط به همین شکل بالا باید نوشته شود.

6) $\frac{d}{dt}(\vec{u} \circ \lambda(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{u}(\lambda(t))) = \dot{\lambda}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(\lambda(t))$

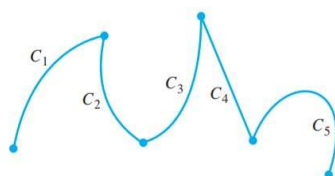
7) $\frac{d}{dt}(\|\vec{u}(t)\|) = \frac{\vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)}{\|\vec{u}(t)\|}, \quad \|\vec{u}(t)\| \neq 0$

خم هموار (smooth curve) :

خم $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ را در بازه $[a, b]$ هموار گوییم هرگاه $\vec{r}(t)$ (به عبارتی مؤلفه های $\vec{r}(t)$) دارای مشتق موجود و پیوسته باشد و مشتق آن در هیچ نقطه ای صفر نباشد (مشتق مؤلفه ها همزمان صفر نباشد). به زبان ریاضی: $\forall t \in [a, b] \quad \dot{\vec{r}}(t) \neq 0$

*نقاط ناهموار در منحنی های پارامتری معمولاً به صورت نقاط زاویه دار می باشند.

خم قطعه قطعه (تکه ای) هموار (piecewise smooth curve)



خم $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ را در بازه $[a, b]$ خم قطعه قطعه هموار گوییم هرگاه $\vec{r}(t)$ اگر در همه نقاط به جز تعدادی متناهی نقطه هموار باشد.

انتگرال خم های پارامتری

برای خم پیوسته $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ انتگرال های معین و نامعین به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\int \vec{r}(t) dt = \left(\int x(t) dt \right) \hat{i} + \left(\int y(t) dt \right) \hat{j} + \left(\int z(t) dt \right) \hat{k}$$

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt \right) \hat{i} + \left(\int_a^b y(t) dt \right) \hat{j} + \left(\int_a^b z(t) dt \right) \hat{k}$$

طول منحنی (طول قوس) (Arc length)

طول قوس (قوس قسمتی از منحنی است که بین دو نقطه محدود شده باشد) منحنی هموار $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ در بازه $[a, b]$ را با S نشان می دهیم و به صورت زیر بدست می آید:

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$$

$$s = \int_a^b \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt \quad \text{و در فضای } \mathbb{R}^3 \text{ با توجه به اینکه } \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \text{ بدست می آید:}$$

اگر منحنی قطعه قطعه هموار باشد با استفاده از روش بالا طول قوس هر قطعه را حساب کرده و با هم جمع می کنیم به عبارتی با قرار دادن $a = t_0$, $b = t_{n+1}$ طول قوس منحنی قطعه قطعه هموار به صورت $s = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$ بدست می آید.

تابع طول قوس

برای منحنی هموار $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ تابع طول قوس را به صورت زیر

تعریف می کنیم: $s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du$ می توان دریافت که $\frac{d}{dt}(s(t)) = \|\vec{r}'(t)\| > 0$ در نتیجه تابع $S(t)$ اکیداً

صعودی است پس وارون پذیر است. فرض می کنیم تابع $\alpha(t)$ وارون $s(t)$ باشد بدست می آید:

$$s = \alpha^{-1}(t) \Rightarrow t = \alpha(s) \quad \text{و} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} = \alpha'(s)$$

آنگاه می توان منحنی (بردار مکان) را بر حسب پارامتر طول قوس پارامتری کرد به بیان ریاضی: $\vec{r} = \vec{r}(s)$

* مفاهیم انحنا و تاب یک منحنی را در قسمت دستگاه مختصات منطبق بر مسیر بررسی می کنیم.

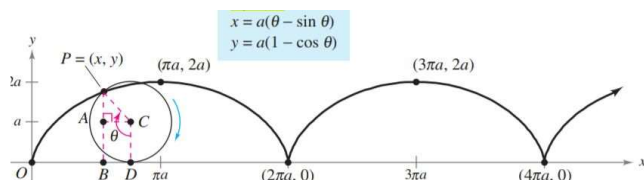
منحنی های پارامتری مهم

1. خط (line) دکارتی: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ پارامتری: $\begin{cases} x(t) = at + x_0 \\ y(t) = bt + y_0 \end{cases}$

2. خط واصل بین دو نقطه $A, B \in \mathbb{R}^n$ از A به B : $\vec{r}(t) = t\vec{B} + (1-t)\vec{A}$, $0 \leq t \leq 1$

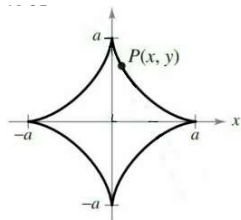
3. دایره (circle) دکارتی: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ پارامتری: $\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos(t) \\ y(t) = y_0 + R \sin(t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

4. بیضی (ellipse) دکارتی: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ پارامتری: $\begin{cases} x(t) = x_0 + a \cos(t) \\ y(t) = y_0 + b \sin(t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$



5. چرخزاد (cycloid) $\begin{cases} x(\theta) = a(\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = a(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$

6. ستاره گون (Astroid)



دکارتی: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ پارامتری: $\begin{cases} x(t) = a \cos^3(t) \\ y(t) = a \sin^3(t) \end{cases}$

عملگر های برداری دیفرانسیلی

دل (Del)

ریاضی ۲، فیزیک ۲، دینامیک، مکانیک سیالات، الکترومغناطیس

این عملگر^{۲۷} که روی توابع اسکالر و برداری عمل می کند و توابع اسکالر و برداری جدیدی پدید می آورد (در واقع این توابع جدید از جزء خانواده مشتق به حساب می آیند) را با نماد نابلا^{۲۸} ∇ نشان می دهند. توجه شود که این عملگر به تنهایی مفهومی را منتقل نمی کند و شیوه اعمال آن بر توابع مختلف باعث ایجاد مفاهیم مختلف می شود.

با فرض اینکه مجموعه $\{\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \hat{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \hat{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ در مختصات $\mathbb{R}^n$ پایه باشد آنگاه:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \hat{e}_n = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

و برای مثال در دستگاه مختصات کارتزین سه بعدی داریم:

*تذکر: منظور از $\frac{\partial}{\partial x_i}$ مشتق جزئی نسبت به مؤلفه x_i است.

27.operator
28.nabla

عملگرهای پدید آمده از اپراتور دل:

گرادیان (شیب) (Gradient)

مشتق برداری (مشتق جهت دار) یک تابع (میدان) اسکالر است و حاصل آن بردار است (گرادیان اسکالر را به بردار تبدیل می کند). گرادیان یک تابع اسکالر جهتی را مشخص می کند که تابع در آن جهت بیشترین تغییرات (افزایش) را دارد و اندازه گرادیان، نرخ افزایش تابع را در جهت بیشترین افزایش نشان می دهد.

به عبارت دیگر تابع f در جهت بردار گرادیان بیشترین افزایش که مقدار آن $\|\vec{\nabla}f\|$ است را دارد.

با فرض $f: u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بردار گرادیان تابع f به صورت زیر بدست می آید:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \hat{e}_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{e}_i$$

$$\text{grad } f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} \quad \text{و برای تابع سه متغیره } f = f(x, y, z) \text{ در فضای سه بعدی:}$$

*ارتباط گرادیان با مشتق جهتی (سوئی): هرگاه f تابعی به صورت $f: u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ باشد و f در $a \in u$ مشتق پذیر باشد آنگاه برای هر بردار $\hat{v}$ یک مشتق جهتی f در نقطه a موجود است و داریم:

$$D_{\hat{v}}f(a) = \vec{\nabla}f(a) \cdot \hat{v} = \|\vec{\nabla}f(a)\| \|\hat{v}\| \cos(\theta) = \|\vec{\nabla}f(a)\| \cos(\theta) \quad \text{که در آن } \theta \text{ زاویه بین } \vec{\nabla}f(a) \text{ و } \hat{v} \text{ می باشد:}$$

خواص گرادیان:

اگر f, g دو تابع اسکالر و $\vec{F}, \vec{G}$ دو تابع برداری باشند و k یک عدد حقیقی باشد آنگاه داریم:

$$\vec{\nabla}(kf) = k\vec{\nabla}f, \quad \vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla}f \pm \vec{\nabla}g, \quad \vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f, \quad \vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2}$$

*نکته: $\vec{\nabla}f$ بر f عمود است و گرادیان در نقاطی که خطوط هم تراز به هم نزدیک ترند بیشتر است.

دیفرانسیل کامل (کل)

اگر مشتقات جزئی اول تابع n متغیره $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در یک نقطه موجود باشد دیفرانسیل کامل این تابع را در این نقطه به صورت زیر نشان می دهیم:

$$df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

تذکر: در مباحث پیشرفته تر گرادیان برای بردار نیز تعریف می شود که حاصل آن یک تانسور مرتبه دوم است و گرادیان در فضای مختلط نیز تعریف می شود که از بحث این جزوه خارج است.

دیورژانس (واگرایی) (Divergence)

تعریف: با فرض اینکه s سطح خارجی ناحیه v (سطح در بر گیرنده حجم v) باشد دیورژانس به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}}{v}$$

این تعریف برگرفته از تعبیر فیزیکی است که در ادامه بیان می کنیم. با امان گیری و استفاده از بسط تیلور تعریف ساده تری برای انجام محاسبات بدست می آید:

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

* اگر میدان برداری $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ که در آن هر یک از F_i ها تابعی سه متغیره از X, Y, Z باشد را در نظر بگیریم آنگاه دیورژانس این میدان در مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

مفهوم فیزیکی اپراتور دیورژانس:

* تعبیر اول: وقتی اپراتور دیورژانس روی یک تابع برداری در یک نقطه دلخواه از فضا عمل می کند، نتیجه ای که به ما می دهد، قدرت منبع اسکالر تولید کننده آن میدان برداری است. اگر دیورژانس یک میدان در نقطه ای صفر باشد در آن نقطه منبع اسکالری نیست و اگر بزرگتر از صفر باشد یک منبع تولیدی (چشمه)^{۲۹} و اگر کوچکتر از صفر باشد یک منبع مکنده (چاهک یا حفره)^{۳۰} برای شار میدان است.

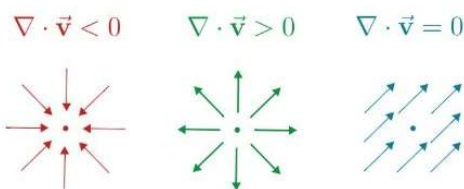
* دیورژانس نشان دهنده منبع اسکالر یک میدان است در نتیجه اگر دیورژانس یک میدان صفر باشد عامل به وجود آورنده آن، میدانی برداری است. به عبارت دیگر اگر دیورژانس میدان $\vec{F}$ صفر باشد میدان $\vec{F}$ دارای **پتانسیل برداری** است مانند میدان مغناطیسی

* تعبیر دوم: میزان واگرایی میدان برداری:

یک میدان برداری را می توان به صورت ترسیمی با خطوط میدان یا خطوط شار نمایش داد که این خطوط منحنی هایی هستند که در هر نقطه مماس بر بردار میدان می باشند. دیورژانس یک میدان برداری بیانگر چگالی حجمی شار خروجی (یا ورودی به) از یک حجم بسیار کوچک می باشد (سطح بسته بسیار کوچک حول یک نقطه) یا به عبارت دیگر بیانگر شار موضعی میدان در هر نقطه است. دیورژانس یک میدان، معیارست برای تعداد خطوط میدان که داخل یا خارج میشوند.

29.source

30.sink



اگر دیورژانس مثبت باشد، یعنی اینکه برآیند خطوط بُرونرو و دُرونرو به سمت بیرون می باشد و اگر دیورژانس منفی باشد، یعنی اینکه به طور کلی، خطوط میدان به سمت داخل هستند. اگر $\vec{F}$ را سرعت یک سیال در نظر بگیریم دیورژانس آن نشان دهنده منابع شارش در نقاط مختلف سیال است.



پخش شدن آب فواره که نشان دهنده دیورژانس مثبت است.

دیورژانس یک میدان برداری در یک نقطه معیاری می باشد از این که آن میدان برداری از آن نقطه به چه میزان به بیرون پخش و واگرا می شود. برای مثال سرعت قطرات آب را یک میدان برداری در نظر بگیرید، در این صورت یک فواره در محلی که آب از آن بیرون می زند واگرایی و پخش شدگی زیادی دارد پس دیورژانس آن مقدار قابل توجهی دارد. در حالیکه آبی که در یک کانال مستقیم حرکت می کند هیچ واگرایی و پخش شدگی ندارد، بنابراین دیورژانس آن صفر است.

تذکر: در نهایت دو تعبیر یک مفهوم را می رسانند.

*نکته: دیورژانس یک اپراتور خطی است : $\text{div}(a\vec{F} + b\vec{G}) = a \text{div} \vec{F} + b \text{div} \vec{G}$ و $a, b \in \mathbb{R}$

کرل (چرخش) (curl) (rotation)

تعریف: با فرض اینکه S سطحی باشد که منحنی C آن را احاطه کرده است کرل یک میدان برداری به صورت زیر تعریف

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{s}$$

می شود:

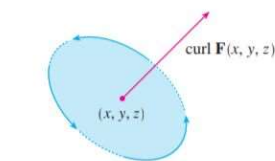
این تعریف برگرفته از تعبیر فیزیکی است و ما از تعریف ساده تری برای انجام محاسبات استفاده می کنیم:

اگر میدان برداری $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ که در آن هر یک از F_i ها تابعی سه متغیره از x, y, z باشد را در نظر بگیریم آنگاه کرل این میدان در مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$

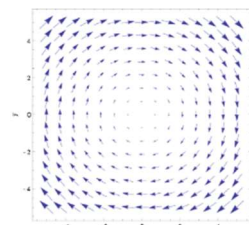
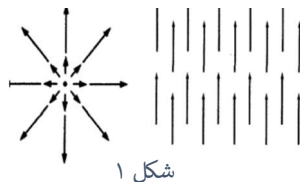
⚠ تذکر: توجه داشته باشید که F_1, F_2, F_3 مؤلفه های میدان برداری هستند نه مشتقات جزئی یا گرادیان چنانکه گرادیان برای تابع اسکالر تعریف می شود.

* عملگر کرل روی یک تابع برداری عمل می کند و حاصل آن بردار است. جهت کرل بیانگر جهت مثبت محور چرخش است و از آنجایی که ضرب خارجی است جهت آن از قانون دست راست تعیین می شود به علاوه مقدار کرل میزان چرخش میدان را نشان می دهد.



مفهوم فیزیکی کرل: میزان چرخش میدان برداری حول یک نقطه

مؤلفه کرل هر بردار در هر جهت معیاری از چرخش خطوط میدان برداری در صفحه عمود بر آن جهت است.



برای مثال: کرل میدان های برداری نشان داده شده در شکل ۱ صفر است و کرل میدان برداری شکل ۲

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -2\hat{k} \quad \text{که } \vec{F}(x, y, z) = y\hat{i} - x\hat{j}$$

این میدان برداری در حال چرخش حول محور Z است و جهت بردار کرل در خلاف جهت محور Z می باشد.

* اگر میدان برداری نشان دهنده سرعت جریان یک سیال در حال حرکت باشد کرل، چگالی گردش سیال است.



* آبی که از طریق یک حفره به صورت صورت چرخشی پیچ می می خورد و تخلیه می شود نشان دهنده وجود یک چاله گردابی (چرخاننده) است و اگر میدان سرعت آب در این گرداب را رسم کنیم به وضوح چرخش میدان نمایان میشود. (علت این حرکت مارپیچی وجود شتاب کریولیس می باشد)

* کرل نشان دهنده منبع برداری یک بردار است: اگر کرل یک میدان صفر باشد عامل به وجود آورنده آن میدان اسکالر است.

مانند میدان الکتریکی

* با فرض همبند ساده بودن ناحیه

اگر دیورژانس میدان برداری صفر باشد عامل به وجود آورنده میدان، برداری است. (پتانسیل برداری)

* دیورژانس یک میدان برداری سنجشی از قدرت منبع جریان (فورانی)^{۳۱} و کرل آن سنجشی از قدرت منبع گردابی^{۳۲} است.

قضیه هلمهولتز (Helmholtz's theorem)

یک میدان برداری را می توان با داشتن کرل و دیورژانس آن در هر نقطه (با شرط اینکه دیورژانس و کرل در بینهایت صفر شوند) بدست آورد چرا که دیورژانس یک میدان برداری سنجشی از قدرت منبع جریان (فورانی) و کرل آن سنجشی از قدرت منبع گردابی است پس با داشتن منابع به وجود آورنده یک میدان می توان آن را به طور کامل بدست آورد. یک میدان برداری را می توان به صورت مجموع گرادیان یک تابع اسکالر و کرل یک تابع برداری نوشت $\vec{F} = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla} \times \vec{G}$

31. Flow source

32. Vortex source

اتحاد های دیفرانسیل های برداری

اگر f و ψ میدان اسکالر و $\vec{F}, \vec{G}$ میدان برداری باشند به طوری که مؤلفه های آن دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند داریم:

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$$

$$\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

$$\vec{\nabla} \times (\psi \vec{F}) = (\vec{\nabla} \psi) \times \vec{F} + \psi (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

عملگرهای دیفرانسیلی برداری مرتبه دوم

* کرل گرادیان یک تابع اسکالر مساوی صفر است:

$$\text{curl}(\text{grad } f) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$$

* دیورژانس کرل یک تابع برداری مساوی صفر است:

$$\text{div}(\text{curl } \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

* کرل کرل یک تابع برداری برابر است با:

$$\text{curl}(\text{curl } \vec{F}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

* دیورژانس گرادیان یک تابع اسکالر با لاپلاسیان آن برابر است:

$$\text{div}(\text{grad } f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f = \Delta f$$

لاپلاسیان (Laplacian)

عملگر لاپلاس (Laplace operator) جزء مشتقات مرتبه دوم محسوب می شود و در واقع دیورژانس گرادیان یک تابع

اسکالر است. این عملگر روی یک میدان اسکالر عمل می کند. با فرض $f: u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

عملگر لاپلاس یا لاپلاسیان به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

در فضای سه بعدی و دستگاه کارتزین برای $f = f(x, y, z)$ داریم:

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

لاپلاسیان برداری نیز به صورت زیر تعریف می شود که روی یک میدان برداری عمل می کند:

$$\text{vector laplacian: } \vec{\nabla}^2 \vec{F} = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \text{curl}(\text{curl } \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

انتگرال توابع برداری

انتگرال روی خم

انتگرال توابع اسکالر روی خم

مثال ساده و آشنایی از انتگرال توابع اسکالر روی خم $\int f(x) dx$ است که در واقع انتگرال گیری از تابع اسکالر تک متغیره $f(x)$ روی منحنی $y=0$ می باشد. حال این مفهوم را تعمیم داده و انتگرال توابع اسکالر را روی یک خم پارامتری تعریف می کنیم: با فرض اینکه C یک خم هموار به صورت $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ باشد و تابع اسکالر n متغیره $f: u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ روی منحنی C کران دار باشد آنگاه انتگرال تابع f روی منحنی C به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_C f d\ell = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_a^b f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + \dots + (\dot{x}_n)^2} dt$$

* اگر خم به صورت قطعه قطعه هموار باشد می توان روی هر خم جداگانه انتگرال گرفت و سپس با هم جمع کرد.

$$\int_C f d\ell = \int_{c_1} f d\ell + \int_{c_2} f d\ell + \dots + \int_{c_k} f d\ell \quad \text{به عبارتی اگر } c = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_k \text{ آنگاه}$$

کاربرد:

محاسبه جرم: سیمی با چگالی $\delta(x, y, z)$ در نقطه (x, y, z) در امتداد خم C در فضا قرار دارد آنگاه جرم از رابطه $M = \int_C \delta(x, y, z) d\ell$ بدست می آید.

انتگرال توابع برداری روی خم

بیانگر کار انجام شده روی خم هموار C توسط میدان $\vec{F}$ می باشد. $w = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

جهت پیمایش خم نیز مهم است چراکه اگر جهت قرینه شود حاصل انتگرال نیز قرینه می شود.

در حالت کلی اگر میدان $\vec{F}$ روی منحنی هموار C به صورت $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

حاصل انتگرال به صورت

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t) dt$$

پیوسته باشد آنگاه با توجه به

قابل محاسبه میباشد.

* با توجه به تعریف $\hat{T} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = \dot{\vec{r}}(t) \frac{dt}{ds}$ و $d\vec{r} = \hat{T} ds$ می توان بدست آورد و انتگرال بالا را به فرم

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \hat{T} ds$$

*انتگرال خم نسبت به متغیرهای مختصات: با فرض $\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ و $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ بدست می آید:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

* تغییر جهت انتگرال گیری علامت انتگرال را قرینه می کند. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

مثال: اگر $\vec{F} = (x^2 + y, xy)$ مطلوبست محاسبه کار انجام شده توسط میدان $\vec{F}$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(1,1)$

در قسمت منحنی های پارامتری مهم خم پارامتری خط واصل بین دو نقطه بیان شد پس بدست می آید:

$$\vec{r}(t) = t(1,1) + (1-t)(0,0) = (t,t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (t^2 + t, t^2) \cdot (1,1) = t^2 + t + t^2 = 2t^2 + t \quad \text{در نتیجه}$$

$$w = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^1 (2t^2 + t) dt = \left(\frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

*حالت خاصی برای محاسبه انتگرال کار وجود دارد که محاسبه انتگرال را راحت می کند:

قضیه استقلال از مسیر (قضیه اساسی گرادیان)

میدان برداری گرادیانی (پایستار یا ابقایی) (conservative):

اگر میدان برداری $F: u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک میدان پایستار باشد یعنی تابع اسکالر ϕ , $\phi: u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $\vec{F} = \nabla \phi$ در این صورت ϕ را یک تابع "پتانسیل" $\vec{F}$ می گوئیم. مفهوم پایستار بودن میدان این است که کار انجام شده به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته می باشد:

به عبارتی هر خم هموار $c: \vec{r}(t)$ به صورت $r: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ را که در نظر بگیریم کار میدان پایستار بین نقاط ابتدا و

$$w = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A) = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$$

انتها برابر است:

*نتیجه: کار میدان پایستار $\vec{F}$ روی هر خم هموار بسته c صفر می باشد: $w = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

تشخیص پایستار (باقای) بودن میدان $\vec{F}$

شرط لازم برای پایستار بودن میدان $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ با فرض پیوسته و موجود بودن مشتقات جزئی F_i ($1 \leq i \leq n$) ها

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} ; \quad 1 \leq i, j \leq n$$

به صورت زیر می باشد :

* حالت خاص آن در فضای $\mathbb{R}^3$ برای میدان $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ برقراری سه شرط $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$, $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$, $\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$

می باشد که معادل آن این است که کرل میدان صفر باشد و در صورتی که دامنه تعریف میدان ناحیه

ای همبند و ساده (ناحیه بدون حفره) باشد این شرط لازم و کافی می شود.

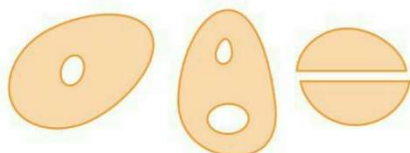


ناحیه همبند ساده

* ناحیه همبند به ناحیه ای گفته می شود که دارای این خاصیت باشد که هر جفت از نقاطش را بتوان با یک

خم پیوسته که همه نقاطش به ناحیه تعلق داشته باشد به هم متصل کرد. و ناحیه همبند

ساده به ناحیه ای گفته می شود که اگر هر خم ساده بسته در آن در نظر بگیریم همه نقاط داخل منحنی عضو ناحیه باشند.



ناحیه های همبند غیر ساده

ناحیه ناهمبند

* حالت خاص آن برای میدان دو بعدی $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$

$$\text{برقراری شرط } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ می باشد.}$$

بدست آوردن تابع پتانسیل ϕ

اگر میدان برداری $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ که در آن هر یک از F_i ها تابعی سه متغیره از x, y, z باشد را در

$$\text{نظر بگیریم طبق تعریف } \vec{F} = \vec{\nabla}\phi \text{ در نتیجه } F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

برای فهم بهتر ادامه روش را با یک مثال توضیح می دهیم .

کار میدان $\vec{F} = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}, \cos(z)e^{\sin(z)})$ را روی خم c که نقطه $A(0,0,1)$ را به $B(0,0,-1)$ متصل می کند بدست آورید.

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} & \cos(z)e^{\sin(z)} \end{vmatrix} = (0, 0, 4xye^{x^2+y^2} - 4xye^{x^2+y^2}) = (0, 0, 0)$$

با توجه به اینکه کرل میدان صفر شد در میابیم که میدان $\vec{F}$ پایستار است پس باید تابع پتانسیل آن را بدست بیاوریم . فرض

$$\text{می کنیم تابع } \phi \text{ تابع پتانسیل } \vec{F} \text{ باشد در نتیجه } \vec{F} = \vec{\nabla}\phi \text{ و } F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

کار را با یکی از رابطه های بالا شروع می کنیم مثلاً در اینجا $F_1 = 2xe^{x^2+y^2} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ را در نظر می گیریم با نوشتن رابطه به صورت $\partial \phi = 2xe^{x^2+y^2} \partial x$ و انتگرال گیری نسبت به x ثابت در نظر گرفتن y بدست می آید: $\phi = e^{x^2+y^2} + h(y, z)$ نکته قابل توجه این است که در این نوع انتگرال گیری ثابت انتگرال گیری تابعی از y و z است.

سپس رابطه دیگر $F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ را در نظر می گیریم نتیجه می گیریم با مشتق گیری از ϕ بدست آمده نسبت به y باید به مؤلفه دوم $\vec{F}$ یعنی $F_2 = 2ye^{x^2+y^2}$ برسیم.

$$F_2 = 2ye^{x^2+y^2} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{x^2+y^2} + h(y, z)) = 2ye^{x^2+y^2} + \frac{\partial h}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow h = h(z)$$

حال از رابطه سوم استفاده می کنیم :

$$F_3 = \cos(z)e^{\sin(z)} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (e^{x^2+y^2} + h(z)) = \frac{dh}{dz} \Rightarrow \frac{dh}{dz} = \cos(z)e^{\sin(z)} \xrightarrow{\int} h(z) = e^{\sin(z)} + c$$

پس در نهایت داریم $\phi = e^{x^2+y^2} + e^{\sin(z)} + c$ حال طبق قضیه گرادیان برای محاسبه کار کافیت $\phi(B) - \phi(A)$ را محاسبه کنیم.

*روش دیگری نیز برای محاسبه تابع پتانسیل وجود دارد:

میدان برداری $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ که در آن هر یک از F_i ها تابعی سه متغیره از x, y, z باشد را در نظر

می گیریم طبق تعریف $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$ در نتیجه $F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ آنگاه $\phi = \int F_1 dx + \int F_2^* dy + \int F_3^{**} dz$

که در آن F_2^* جملاتی از F_2 که فاقد x اند و F_3^{**} جملاتی از F_3 که فاقد x, y اند.

مثال قبل را با این روش محاسبه می کنیم: $\phi = \int 2xe^{x^2+y^2} dx + \int 0 dy + \int \cos(z)e^{\sin(z)} dz = e^{x^2+y^2} + e^{\sin(z)} + c$

کاربرد در دینامیک

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta(K.E) = \Delta T = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2)$$

*قضیه کار انرژی

اگر قسمتی از میدان نیرو پایستار باشد (نیروی پتانسیل) یعنی $\vec{F}_p = \vec{\nabla} \phi$ $\text{curl } \vec{F}_p = \vec{\nabla} \times \vec{F}_p = 0 \Rightarrow \vec{F}_p = \vec{\nabla} \phi$ آنگاه با توجه به

بدست می آید: $\int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A)$ یعنی کار مستقل از مسیر است و فقط به ابتدا و انتها بستگی دارد.

$$\int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A) = U_A - U_B = -\Delta U \quad \text{تعریف پتانسیل :}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta T = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_{n.p} \cdot d\vec{r} = -\Delta U + \int_A^B \vec{F}_{n.p} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_A^B \vec{F}_{n.p} \cdot d\vec{r} = \Delta T + \Delta U = \Delta(K.E + P.E)$$

اگر کار میدان نیروهای ناپایستار (غیر پتانسیل) صفر باشد آنگاه پایستگی انرژی مکانیکی را خواهیم داشت :

$$\Delta(K.E + P.E) = 0 \Rightarrow (K.E)_1 + (P.E)_1 = (K.E)_2 + (P.E)_2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}mv_1^2 + U_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + U_2$$

پتانسیل برداری

در قسمت دیورژانس بیان کردیم که اگر دیورژانس یک میدان صفر باشد آنگاه میدان دارای پتانسیل برداری است و عامل به وجود آورنده آن برداری است یعنی اگر پتانسیل برداری را با $\vec{G}$ نشان دهیم آنگاه $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$ می باشد چراکه دیورژانس کرل صفر می باشد $\text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{G}) = 0$ به این میدان ها میدان های سلنوئیدی^{۳۳} می گویند.

*یکی از روش های بدست آوردن این پتانسیل روش تساوی مؤلفه ای مانند روش ۱ پتانسیل اسکالر می باشد و روش دیگر استفاده از فرمول $\vec{G}(x, y, z) = \int_0^1 t \vec{F}(tx, ty, tz) \times (x, y, z) dt$ می باشد.

رویه (سطح) (Surface)

مکان هندسی نقاطی مانند (x, y, z) که در $g(x, y, z) = 0$ صدق می کنند را سطح یا رویه گویند.

بردار یک عمود بر سطح S از رابطه $\hat{n} = \pm \frac{\vec{\nabla} g}{\|\vec{\nabla} g\|}$ و المان سطح از رابطه $ds = \frac{\|\vec{\nabla} g\|}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{P}|} dA_u$ بدست می آید که در آن

بردار $\vec{P}$ یکی از سه بردار $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ است که عمود بر ناحیه تصویر است و u یکی از سه مختصه x, y, z متناظر با $\vec{P}$ است که المان سطح آنها در قسمت دستگاه مختصات کارتزین آورده شده است. مثلاً اگر ناحیه S را روی صفحه xy تصویر کنیم

عمود بر این ناحیه بردار $\hat{k}$ است در نتیجه المان سطح به صورت $ds = \frac{\|\vec{\nabla} g\|}{|g_z|} dx dy$ بدست می آید.

در حالت خاص برای رویه $z = g(x, y)$ بدست می آید: $ds = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy$ و $\hat{n} = \pm \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}}$

رویه (سطح) پارامتری (Parametric Surface)

تابع برداری $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با ضابطه $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ را با فرض پیوستگی مشتقات جزئی اول x, y, z یک رویه پارامتری گویند که سطح یا رویه ای مانند S را به فرم پارامتری نمایش می دهد. مثلاً سطح کره با شعاع a و مرکز (x_0, y_0, z_0) به صورت زیر برحسب دو پارامتر θ, ϕ پارامتری می شود.

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (x_0 + a \sin \phi \cos \theta, y_0 + a \sin \phi \sin \theta, z_0 + a \cos \phi) \quad , \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

* در نظر گرفتن $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ بردار نرمال (عمود) یکه بر رویه به

$$\forall (u, v) \in D \text{ if } \vec{r}_u \times \vec{r}_v = 0 \Rightarrow \hat{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \quad \text{صورت زیر بدست می آید:}$$

همچنین المان سطح این رویه به صورت $ds = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$ می باشد.

انتگرال روی سطح

انتگرال توابع اسکالر روی سطح

(۱) انتگرال تابع اسکالر $f = f(x, y, z)$ روی سطح S به معادله $g(x, y, z) = 0$ به صورت زیر تعریف می شود که در آن

$$\iint_S f \cdot ds = \iint_D f \cdot \frac{\|\vec{\nabla} g\|}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{P}|} dA_u \quad D \text{ تصویر ناحیه } S \text{ روی یکی از صفحات مختصات است.}$$

که در آن بردار $\vec{P}$ یکی از سه بردار $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ است که عمود بر ناحیه تصویر است و u یکی از سه مختصه x, y, z متناظر با $\vec{P}$ است که المان سطح آنها در قسمت دستگاه مختصات کارترین آورده شده است. مثلاً اگر ناحیه S را روی صفحه xy تصویر

کنیم عمود بر این ناحیه بردار $\hat{k}$ است که در نهایت فرمول انتگرال به صورت $\iint_S f \cdot ds = \iint_D f \cdot \frac{\|\vec{\nabla} g\|}{|g_z|} dx dy$ در می آید.

$$\iint_S f \cdot ds = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} dx dy \quad (2) \text{ برای رویه } z = g(x, y)$$

(۳) اگر سطح به صورت $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ پارامتری شده باشد :

$$\iint_S f \cdot ds = \iint_D f(r(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

* برای محاسبه مساحت سطح S کافیهست قرار دهیم $f(x, y, z) = 1$ پس در دو حالت کارترین و پارامتری داریم:

$$A = \iint_S ds = \iint_D \frac{\|\vec{\nabla} g\|}{|g_z|} dx dy \quad \text{و} \quad A = \iint_S ds = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

انتگرال توابع برداری روی سطح (انتگرال شار)

(۱) انتگرال میدان برداری را روی سطح S به معادله $g(x, y, z) = 0$ به صورت زیر تعریف می کنیم که در آن $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح S و D تصویر ناحیه S روی یکی از صفحات مختصات است.

$$\text{با توجه به } \hat{n} = \pm \frac{\vec{\nabla} g}{\|\vec{\nabla} g\|} \text{ و } ds = \frac{\|\vec{\nabla} g\|}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{P}|} dA_u \text{ بدست می آید } \vec{ds} = \hat{n} ds = \pm \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{P}|} dA_u \text{ در نتیجه :}$$

$$\text{flux} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{P}|} dA_u$$

اگر ناحیه S را روی صفحه xy تصویر کنیم عمود بر این ناحیه بردار $\hat{k}$ است که در نهایت فرمول انتگرال به صورت

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{\nabla} g}{|g_z|} dx dy \text{ در می آید.}$$

$$(۲) \text{ اگر سطح به صورت } z = g(x, y) \text{ باشد با توجه به } ds = \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2} dx dy \text{ و } \hat{n} = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}}$$

بدست می آید $\hat{n} ds = (-g_x, -g_y, 1) dx dy$ در نتیجه :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (-g_x, -g_y, 1) dx dy$$

(۳) اگر سطح به صورت $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ پارامتری شده باشد

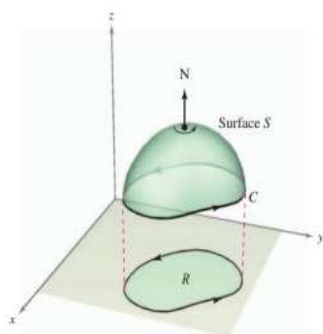
$$\text{با توجه به } \hat{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \text{ و } ds = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv \text{ بدست می آید } \vec{ds} = \hat{n} ds = \pm (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv \text{ در نتیجه :}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

قضیه استوکس (Stokes's Theorem)

این قضیه انتگرال روی خم را به انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور به خم مرتبط می کند. اگر سطح S توسط خم بسته قطعه قطعه هموار C محصور باشد و $\hat{n}$ بردار یکه قائم و روبه خارج سطح باشد و مؤلفه های میدان برداری $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد آنگاه

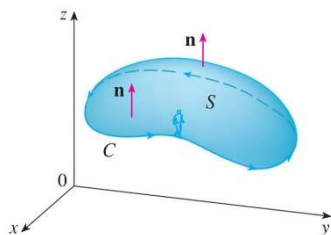
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds$$



* جهت درست در قضیه استوکس از قانون دست راست تعیین می شود به این صورت که اگر چهار انگشت در جهت خم C بچرخند آنگاه انگشت شست جهت $\hat{n}$ را نشان می دهد.

* نتیجه مهم قضیه استوکس: اگر دو سطح S و S' دارای مرز مشترک باشند با دوبار نوشتن

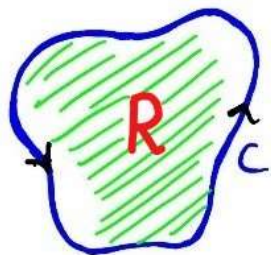
$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_{S'} \text{curl } \vec{F} \cdot \hat{n} ds \quad \text{قضیه استوکس نتیجه زیر حاصل می شود:}$$



مثلا اگر یک نیم کره داشتیم که قسمت باز آن با دایره ای بسته شده باشد می توان به جای محاسبه انتگرال روی سطح کره، انتگرال روی سطح دایره که ساده تر است را محاسبه کرد.

اگر در قضیه استوکس قرار دهیم $\vec{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$ و سطح را در صفحه $\mathbb{R}^2$ فرض کنیم حالت خاصی از قضیه استوکس بدست می آید که به قضیه گرین معروف است:

قضیه گرین (Green's Theorem)



این قضیه انتگرال در امتداد منحنی بسته C در صفحه $\mathbb{R}^2$ را به انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور به C را به هم مرتبط میکند. با فرض اینکه C یک خم ساده بسته قطعه قطعه هموار باشد که ناحیه R را در بر می گیرد و نسبت به این ناحیه دارای جهت گذاری مثبت باشد و تابع برداری $\vec{F} = F_1(x, y)\hat{i} + F_2(x, y)\hat{j}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

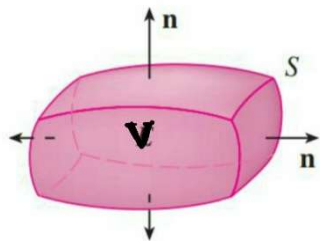
* محاسبه مساحت ناحیه ای مانند R محصور در خم C در $\mathbb{R}^2$ به کمک قضیه گرین

اگر میدان برداری را طوری انتخاب کنیم که $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ باشد آنگاه با توجه به قضیه گرین مساحت این ناحیه را می

$$A = \iint_R dA = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C F_1 dx + F_2 dy \quad \text{توان با محاسبه انتگرال میدان روی خم } C \text{ بدست آورد:}$$

ساده ترین مثال ها از این میدان برداری $\vec{F} = (-y, 0)$ و $\vec{F} = (0, x)$ می باشد.

قضیه دیورژانس گاوس (Gauss's Theorem)



این قضیه انتگرال دوگانه روی سطح را به انتگرال سه گانه روی حجم تبدیل می کند. اگر S سطحی بسته در $\mathbb{R}^3$ باشد که حجم $V \subseteq \mathbb{R}^3$ را محصور کرده و $\hat{n}$ بردار یکه قائم و روبه خارج سطح باشد و میدان برداری $\vec{F}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد آنگاه :

$$\text{flux} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} dv = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dv$$

اگر بردار $\hat{n} = \cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k}$ باشد نمایش داده شود $\hat{n} = \cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k}$ آنگاه قضیه دیورژانس با فرض $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ به فرم زیر در می آید که به فرمول استروگرادسکی^{۳۴} معروف است.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S F_1 dy dz + F_2 dx dz + F_3 dx dy$$

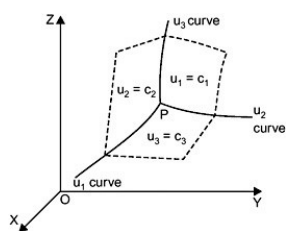
* اگر در سوالی سطح داده شده S بسته نبود می توان سطح S' را به سطح S اضافه کرد و یک سطح بسته ایجاد کرد سپس از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. در نهایت باید برای بدست آوردن مقدار انتگرال روی سطح S مقدار انتگرال روی سطح S' را از مقدار انتگرالی را که از قضیه دیورژانس بدست آوردیم کم کنیم. به بیان ریاضی :

$$\oint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} dv \Rightarrow \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} dv - \oint_{S'} \vec{F} \cdot \hat{n} ds$$

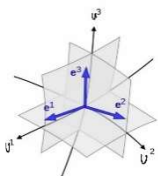
$$\text{if } \text{div } \vec{F} = 0 \Rightarrow \text{flux} = 0$$

* نکته :

دستگاه مختصات منحنی الخط (خمیده خط) (Curvilinear coordinate) (رشته فیزیکی)



در دستگاه مستقیم الخط^{۳۵} کارترین سطوح به صورت صفحه های صاف هستند و اجزاء مربوط به حرکت در دستگاهی تعریف می گردند که جهت آن ثابت است این در حالیکه دستگاه مختصات منحنی الخط خصوصیات مسیری که ذره می پیماید را نیز در بر می گیرد به عبارتی این دستگاه ها به مسیری که توسط ذره پیموده می شود وابسته هستند.



خمیده خط بدین معناست که حداقل یکی از سطوح که مختصه ای از دستگاه مختصات در آن ثابت است، صفحه صاف نیست و انحنا دارد. مثلاً در دستگاه مختصات استوانه ای که استوانه های دوار قائم حول محوری مشترک، بیانگر فاصله r از محور هستند یا در دستگاه مختصات کروی که کره های هم مرکز حول مبدأ، بیانگر فاصله (شعاع) از مرکز هستند و مخروط های دوار قائم حول محور قطبی Z با راس واقع در مبدأ بیانگر زاویه θ هستند.

34. Ostrogradsky
35. Rectilinear coordinate

هر نقطه در فضای سه بعدی را می توانیم به صورت محل برخورد سه سطحی که مختصات خمیده خط را می سازند توصیف کنیم. سطوح ثابت $u_i = \text{cte}$ $i = 1, 2, 3$ که هر یک از این سطح ها به صورت تابعی از x, y, z بیان می شوند یعنی $u_i = u_i(x, y, z)$; $i = 1, 2, 3$ اگر $J = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0$ باشد طبق قضیه تابع ضمنی می توان نوشتد

$x = x(u_1, u_2, u_3)$ و $y = y(u_1, u_2, u_3)$ و $z = z(u_1, u_2, u_3)$ به هریک از این سطح های ثابت $u_i = \text{cte}$ می توان بردار $\hat{u}_i$ عمود بر سطح ثابت $u_i = \text{cte}$ و در جهت افزایش u_i نسبت داد. هر بردار را می توان بر حسب این بردارهای یکده در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد نوشت :

$$\vec{A} = A_{u_1} \hat{e}_{u_1} + A_{u_2} \hat{e}_{u_2} + A_{u_3} \hat{e}_{u_3}$$

دستگاه متعامد: اگر سطوح تشکیل دهنده دستگاه مختصات دو به دو بر هم عمود باشند به طوری که $\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 = 0$ و $\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_3 = 0$ و $\hat{u}_2 \cdot \hat{u}_3 = 0$ آنگاه یک دستگاه متعامد داریم. به عبارت دیگر در هر نقطه بر منحنی های مختصات سه مماس می توان رسم کرد، هرگاه این مماس ها دو به دو متعامد باشند دستگاه را متعامد گویند. دستگاه های مختصات غیر متعامد در برخی از مباحث خاص فیزیک کاربرد دارند اما در مسائل مهندسی که ما تحلیل می کنیم مسئله را پیچیده خواهند کرد پس در این جا فقط به بررسی دستگاه های متعامد می پردازیم.

دستگاه راست گرد (راست گوشه): اگر بین بردار های یک نظم راست گردی برقرار باشد، یعنی با گردش از سمت راست، حاصل ضرب خارجی دو بردار یکده برابر با بردار یکده سوم باشد، دستگاه مختصات راست گرد خواهیم داشت.

$$\hat{u}_1 \times \hat{u}_2 = \hat{u}_3 \quad \text{و} \quad \hat{u}_2 \times \hat{u}_3 = \hat{u}_1 \quad \text{و} \quad \hat{u}_3 \times \hat{u}_1 = \hat{u}_2$$

ضرایب متریک (مقیاس) (metric coefficients) (scale factors)

نقطه A به مختصات (u_1, u_2, u_3) و B به مختصات $(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ را در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد در نظر می گیریم اگر dl_i المان طولی باشد که از تغییر u_i به $u_i + du_i$ حاصل می شود وقتی که دو المان دیگر ثابت نگه داشته بشوند آنگاه du_i و dl_i به ازای $i = 1, 2, 3$ الزاماً با هم برابر نخواهند بود و در حالت کلی توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند:

$$d\vec{\ell}_{u_i} = d\vec{\ell}_i = dl_i \hat{u}_i \quad \text{و} \quad dl_{u_i} = dl_i = h_i du_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

باید توجه داشت که dl_i همیشه با du_i برابر نیست بلکه ضریب تبدیلی نیاز است که تغییر دیفرانسیلی du_i را به dl_i تبدیل کند. این ضرایب مقادیر مثبت و غیر صفری هستند که تابعی از موقعیت برای یک دستگاه مختصات منحنی الخط می باشند.

در واقع در دستگاه های مختصاتی که دارای پارامترهایی هستند که این پارامترها از جنس طول نیستند این ضرایب کمک میکنند تا مؤلفه های المان طول که بر حسب این پارامترها نوشته می شود به فرمی درآید که از جنس طول باشند.

به طور کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط (u_1, u_2, u_3) ، h_i ها $(i = 1, 2, 3)$ تابعی از پارامترهای (مختصه های) دستگاه اند به عبارتی :
 $h_i = h_i(u_1, u_2, u_3) ; i = 1, 2, 3$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3$$

اگر بردار $\vec{r}$ بردار مکان باشد آنگاه

بردار $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ بر خم مختصه u_i مماس است با داشتن بردار مکان $\vec{r}$ در مختصات با پارامترهای (u_1, u_2, u_3) بردارهای پایه

$$\text{از رابطه } \hat{u}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\|} ; i = 1, 2, 3 \text{ بدست می آید که } \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\| \text{ همان ضریب مقیاس است پس}$$

$$h_{u_i} = h_i = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\| ; i = 1, 2, 3 \quad \text{و} \quad \hat{u}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{h_i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i$$

المان طول در حالت کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد از روابط زیر بدست می آید :

$$d\vec{r} = d\vec{\ell} = d\ell_1 \hat{u}_1 + d\ell_2 \hat{u}_2 + d\ell_3 \hat{u}_3 = h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3$$

$$(d\ell)^2 = h_1^2 (du_1)^2 + h_2^2 (du_2)^2 + h_3^2 (du_3)^2$$

المان سطح در حالت کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد از روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} ds_{u_1} = ds_1 = d\ell_2 d\ell_3 = h_2 h_3 du_2 du_3 \\ ds_{u_2} = ds_2 = d\ell_1 d\ell_3 = h_1 h_3 du_1 du_3 \\ ds_{u_3} = ds_3 = d\ell_1 d\ell_2 = h_1 h_2 du_1 du_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{ds}_{u_1} = \vec{ds}_1 = \vec{d\ell}_2 \times \vec{d\ell}_3 = h_2 h_3 du_2 du_3 \hat{u}_1 \\ \vec{ds}_{u_2} = \vec{ds}_2 = \vec{d\ell}_1 \times \vec{d\ell}_3 = h_1 h_3 du_1 du_3 \hat{u}_2 \\ \vec{ds}_{u_3} = \vec{ds}_3 = \vec{d\ell}_1 \times \vec{d\ell}_2 = h_1 h_2 du_1 du_2 \hat{u}_3 \end{cases}$$

المان حجم در حالت کلی در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد از رابطه زیر بدست می آید:

$$dv = \left| \vec{d\ell}_1 \cdot (\vec{d\ell}_2 \times \vec{d\ell}_3) \right| = \left| (h_1 du_1 \hat{u}_1) \cdot ((h_2 du_2 \hat{u}_2) \times (h_3 du_3 \hat{u}_3)) \right| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 du_2 du_3 = J du_1 du_2 du_3$$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

ژاکوبین در مختصات منحنی الخط متعامد به صورت روبه رو تعریف می شود:

در مختصات متعامد ژاکوبی ها با حاصل ضرب ضرایب مقیاس برابراند مثلاً $J = h_1 h_2 h_3$ و $dx dy dz = J du_1 du_2 du_3$

یا در مختصات دو بعدی با مختصه های u_1, u_2 ژاکوبین به صورت $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u_1, u_2)}$ می باشد.

بدست آوردن ضرایب مقیاس مختصات استوانه ای با توجه به بردار مکان $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ و تبدیل های زیر

$$u_1 = r \quad u_2 = \theta \quad u_3 = z \quad x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = z$$

$$h_r = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2} = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 0} = 1$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} = \sqrt{(-r \sin(\theta))^2 + (r \cos(\theta))^2 + 0} = r$$

$$h_z = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1$$

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد

با در نظر گرفتن میدان اسکالر $f = f(u_1, u_2, u_3)$ و میدان برداری $\vec{F} = F_1 \hat{u}_1 + F_2 \hat{u}_2 + F_3 \hat{u}_3$

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{u}_3 \quad \text{گرادیان:}$$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2) \right] \quad \text{دیورژانس:}$$

$$\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} & \frac{\hat{u}_2}{h_1 h_3} & \frac{\hat{u}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \quad \text{کرل:}$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \quad \text{لاپلاسن:}$$

*دستگاه های مختصات متعامد زیادی وجود دارند اما ما در این جزوه سه دستگاه های کارترین ، استوانه ای و کروی که کاربرد و عمومیت بیشتری دارند را با توجه به کمیت ها و تعاریف بیان شده مورد بررسی قرار می دهیم و نحوه المان گیری را روی هر یک از این دستگاه ها تشریح خواهیم کرد. با جایگذاری مختصه ها و ضرایب هر دستگاه که در جدول زیر آمده در روابط مطرح شده برای دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد روابط برای هر دستگاه بدست خواهد آمد.

دستگاه کروی	دستگاه استوانه ای	دستگاه کارترین	
$u_1 = \rho, u_2 = \varphi, u_3 = \theta$	$u_2 = \theta, u_3 = z$ $u_1 = r$	$u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z$	مختصه ها (پارامترها)
$\hat{u}_1 = \hat{\rho}, \hat{u}_2 = \hat{\varphi}, \hat{u}_3 = \hat{\theta}$	$\hat{u}_2 = \hat{\theta}, \hat{u}_3 = \hat{z}$ $\hat{u}_1 = \hat{r}$	$\hat{u}_1 = \hat{x} = \hat{i}, \hat{u}_2 = \hat{y} = \hat{j}, \hat{u}_3 = \hat{z} = \hat{k}$	بردارهای پایه
$h_2 = \rho, h_1 = 1, h_3 = \rho \sin(\varphi)$	$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$	$h_2 = h_y = 1, h_3 = h_z = 1$ $h_1 = h_x = 1$	ضرایب مقیاس

اهمیت یادگیری و کاربرد انواع دستگاه های مختصات

اولین کاربرد تمامی سیستم های مختصات تعیین کردن یک نقطه در فضا است. پس از یک تک نقطه نوبت به تعیین یک مسیر و یا یک شکل در صفحه یا فضا می رسد. در حل مسائل عملی همیشه با نواحی یا اشیاء سر و کار داریم و لازم است فرمول های عمومی را در دستگاه مختصات مناسب هندسه مسئله مفروض بیان نماییم. مثلاً بیان یک دایره که مرکز مختصات، همان مرکز دایره باشد در دستگاه قطبی بسیار ساده تر از دستگاه دکارتی است در حالی که بیان معادله خط در مختصات دکارتی آسان تر از قطبی است. بیضی و مقاطع مخروطی را در هر دو مختصات دکارتی و قطبی می توان بیان کرد. بیان آنها در دکارتی راحت تر است دارای صورت و زیبایی است ولی در عمل از آنها نمی توان استفاده کرد به این دلیل که مختصات دکارتی وابسته به مبدأ است در حالی که مختصات قطبی وابسته به نقطه مورد بیان است. مثلاً در بیان مدار یک سیاره حول خورشید می توان از آسمان راستای معیاری انتخاب کرد و با محاسبه زاویه شعاع حامل سیاره تا آن مرجع، فاصله سیاره از خورشید را محاسبه کرد یعنی می توان θ را رؤیت کرد و از فرمول مدار، r را استخراج کرد.

برای مدل سازی سیستم های مورد بررسی در صنعت و توصیف کارکرد های آن نیاز است که تجهیزاتی مانند لوله های انتقال سیالات، برج های تقطیر، تانکرها و همچنین کمپرسور موتور هواپیما که به صورت استوانه هستند، مخازن ذخیره سازی که به صورت کروی یا استوانه ای طراحی می شوند و کاتالیست های مورد استفاده در صنعت نیز که عموماً به صورت کروی اند و بسیاری از سامانه های دیگر در مختصات مناسب و متناظر با شکل آنها بررسی و مطالعه می شوند.

یکی از رایجترین مثال های سیستم استوانه ای بیان مکان هواپیما از فرودگاه است. بدین شکل که فاصله مستقیم فرودگاه و هواپیما و همچنین راستای این شعاع حامل با شمال و ارتفاع هواپیما از سطح زمین را برحسب طول بیان می کنند اما در هواپیماهای قاره پیما از سیستم مختصات کروی استفاده می شود.

در دروسی مثل فیزیک عمومی ۲ و ریاضی عمومی ۲ نیازمند انتگرال گیری چندگانه هستیم که عمدتاً به دلیل محاسبات طولانی و طاقت فرسا در دستگاه کارتزین با تبدیل دستگاه کارتزین به دستگاه های استوانه ای و کروی المان خود را تغییر داده و به عبارت ساده تری برای حل انتگرال می رسمیم. همچنین در دروس مهندسی با توجه به هندسه مسئله نیازمند حل معادله با مشتقات جزئی (PDE) در دستگاه های دکارتی، استوانه ای و یا کروی هستیم. مثلاً زمانی که در مکانیک سیالات معادله مومنتم برای بدست آوردن توزیع سرعت در یک لوله نوشته می شود، با توجه به هندسه سیستم، مختصات استوانه ای برای انجام محاسبات انتخاب می شود.

اکثر دروسی که در آنها نیازمند مختصات برای مدل سازی سیستم ها هستیم

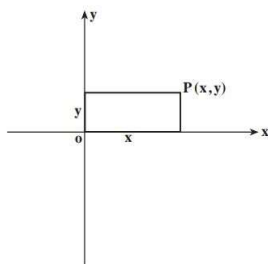
دستگاه مختصات دو بعدی (صفحه ای)

در صفحه نیازمند سیستم های مختصاتی هستیم که تنها با ارائه دو پارامتر یا مختصه نقطه مورد نظر را به صورت منحصر به فرد ارائه دهد. برای این امر به معرفی مختصات دکارتی دو بعدی، مختصات قطبی و پردازیم. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

دستگاه مختصات کارتزین (دکارتی) دو بعدی (2D Cartesian coordinate system)

به این دستگاه مستطیلی^{۳۶} یا قائم^{۳۷} هم می گویند.

اساس کار در مختصات دکارتی بر انتخاب دو راستای متمایز هست اما تنها یک شرط برای انتخاب این دو راستا تعیین شده و آن عمود بودن دو راستای مورد نظر است. به همین دلیل به مختصات دکارتی، دستگاه مختصات متعامد نیز می گویند.



در شکل می توانید نمایی کلی از این دستگاه مختصات ببینید. ترتیب ارائه مختص ها در دستگاه مختصات به نام گذاری مختصات بستگی دارد. محور متناظر با مؤلفه اول در این دستگاه مختصات با حرف X مشخص می گردد و همینطور محور متناظر با مؤلفه دوم با Y تعیین می شود که به X طول نقطه و به Y عرض نقطه می گویند. این محور ها ناحیه را به چهار قسمت تقسیم می کنند که هر کدام از آنها را یک "ربع" می نامند تمامی خطوط عمودی، متناظر با ثابت بودن پارامتر اول و خطوط افقی، متناظر با ثابت بودن مختص دوم هستند. برای تعیین مختص های یک نقطه در این صفحه می توان یک بار از خطوط افقی و یکبار از خطوط عمودی استفاده کرد و در نهایت مجموعه فواصل طی شده روی خطوط افقی را به عنوان مؤلفه اول و مجموعه فواصل طی شده روی خطوط عمودی را به عنوان مؤلفه دوم ارائه کنیم. یعنی مختصات ارائه شده به شکل یک زوج مرتب (x, y) خواهد بود.

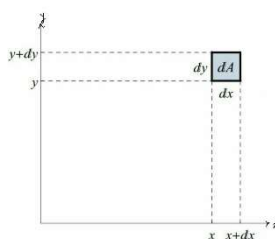
بردارهای پایه

بردارهای یکه در راستای محوره های مختصات به صورت $\hat{x} = \hat{i} = (1, 0)$ و $\hat{y} = \hat{j} = (0, 1)$ می باشند. که برای این بردارها داریم:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \quad \text{و} \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

*نمایش هر بردار در این دستگاه به صورت $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$ می باشد.

*فاصله دو نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ به صورت $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ می باشد.



*المان دیفرانسیلی طول در مختصات کارتزین: $\begin{cases} d\ell_x = dx \\ d\ell_y = dy \end{cases}$, $\begin{cases} d\vec{\ell}_x = dx\hat{i} \\ d\vec{\ell}_y = dy\hat{j} \end{cases}$, $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

*توجه: با توجه به المان بالا داریم:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt = \|\vec{V}\| dt$$

پس می توان گفت اگر $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j}$ معادله پارامتری منحنی مفروضی بر حسب t باشد آنگاه طول قوس منحنی در بازه

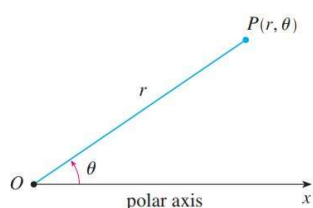
$$[t_0, t_1] \text{ از رابطه } \ell = \int_{t_0}^{t_1} d\ell = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V}\| dt \text{ بدست می آید.}$$

همچنین اگر طول قوس تابع $y = f(x)$ را در بازه $[a, b]$ بخواهیم می توان نوشت:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx \text{ و } \ell = \int_a^b d\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات کارتزین: $ds = dA = dx dy$, $d\vec{s} = d\vec{A} = (dx\hat{i}) \times (dy\hat{j}) = dx dy \hat{k}$

دستگاه مختصات قطبی (Polar coordinate system)

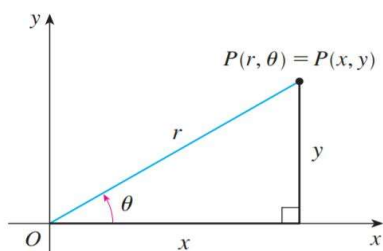


راهی دیگر برای تعیین مکان یک نقطه بر روی صفحه انتخاب یک راستای مرجع و یک راستای دوار است که هر دو راستا در نقطه مبدأ مشترک خواهند بود. در این دستگاه که باز هم دو راستای مرجع داریم (اما راستای دوم بنابر موقعیت نقطه مورد نظر متغیر است) ابتدا نقطه ای را به عنوان مبدأ انتخاب میکنیم و سپس خطی از مبدأ به سمت نقطه مورد نظر رسم میکنیم و آن را دومین راستای مرجع میگیریم. قطب یا مبدأ O و خط OX که آن را

محور قطبی^{۳۸} گوئیم در نظر میگیریم. مختصات هر نقطه در این دستگاه زوج مرتب (r, θ) است که در آن r فاصله نقطه از مبدأ است (op) و θ زاویه بین OX و op که جهت مثبت اندازه گیری آن جهت مثلثاتی (پادساعتگرد)^{۳۹} (c.c.w) می باشد.

باید دانست که در یک صفحه هرگاه مکان نقطه ای را معین کنیم، مکان نقطه مورد نظر صرف نظر از نوع دستگاه مختصات انتخابی، یک نقطه در صفحه بیش نیست و باید توانست هر یک از مختص های یک دستگاه را از مختص های دستگاه دیگر بدست آورد؛ برای این امر میتونید به شکل زیر توجه کنید که طبق

روابط مثلثاتی و فیثاغورث در مثلث قائم الزاویه می توان نوشت:



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

38.polar axis

39.counterclockwise

توجه داشته باشید که :

$$\begin{cases} \theta = 0 & ; \quad x = 0, y = 0 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & ; \quad x > 0, y \geq 0 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & ; \quad x > 0, y < 0 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & ; \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \text{if } x = 0, y > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ \text{if } x = 0, y < 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \text{if } y = 0, x > 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ \text{if } y = 0, x < 0 \Rightarrow \theta = \pi \end{cases}$$

*موقعیت نقاط در دستگاه قطبی پس از طی کردن هر 2π روی دایره تغییر نمی کند یعنی :

$$p(r, \theta) = p(r, \theta + 2k\pi) \quad \text{و} \quad k \in \mathbb{Z}$$

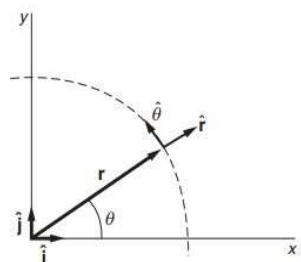
*ممکن است $r < 0$ داده شود که طبق تعریف قابل قبول نیست. به صورت قراردادی به جای $r < 0$ قرینه آن را در نظر می گیریم و محور شعاعی آن را π رادیان دوران می دهیم یعنی موقعیت این نقطه را به صورت $p(-r, \theta + \pi)$ نمایش می دهیم.

بردارهای پایه

بردار یکه در جهت افزایش r (شعاعی) : $\hat{r} = \hat{e}_r$, بردار یکه در جهت افزایش θ (مماسی) : $\hat{\theta} = \hat{e}_\theta$

که برای این بردارها داریم : $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = 1$ و $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0$

*امتداد r در امتداد بردار مکان بوده و امتداد θ عمود است بر امتداد r و جهت آن به گونه ای است که باعث افزایش θ شود.



تبدیل بردارهای پایه مختصات قطبی به دکارتی :

$$\hat{r} = \hat{e}_r = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{\theta} = \hat{e}_\theta = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$$

*بردارهای یکه $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ تابعی پارامتری از پارامتر θ هستند به عبارتی $\hat{e}_r = \hat{e}_r(\theta)$ و $\hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta(\theta)$

*فاصله دو نقطه $A(r_1, \theta_1)$ و $B(r_2, \theta_2)$ در مختصات قطبی به صورت $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$ می باشد.

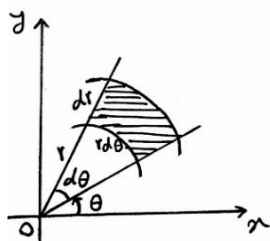
* مشتق بردارهای پایه مختصات قطبی :

$$(1) \quad \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \hat{e}_\theta \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\hat{e}_r \quad \text{به این پارامتر داریم:}$$

(2) از آنجایی که بردارهای یکه با تغییر زمان تغییر می کنند (چراکه تابع θ هستند و θ نیز با گذشت زمان تغییر می کند) با

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \text{و} \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r \quad \text{داریم:}$$

$$\vec{dl} = dr\hat{e}_r + r d\theta\hat{e}_\theta, \quad \begin{cases} d\vec{l}_r = dr\hat{e}_r \\ d\vec{l}_\theta = r d\theta\hat{e}_\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r d\theta \end{cases} \quad \text{*المان دیفرانسیلی طول در مختصات قطبی:}$$



*با توجه به شکل می توان دریافت که اگر زاویه $d\theta$ باشد آنگاه طول کمان مقابل آن $r d\theta$ می باشد.
مثلا اگر یک توزیع خطی روی محیط دایره (یک حلقه) داشته باشیم به دلیل اینکه در راستای شعاعی تغییر نداریم و فقط در راستای θ طول تغییر می کند داریم: $dl = r d\theta$

$$\vec{ds} = (dr\hat{e}_r) \times (r d\theta\hat{e}_\theta) = r dr d\theta \hat{k} \quad \text{و} \quad ds = r dr d\theta \quad \text{*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات قطبی:}$$

*با توجه به شکل هم می توان مقدار اسکالر المان سطح را با ضرب dr و $r d\theta$ بدست آورد.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

پس برای انتگرال گیری دوگانه پس از تغییر متغیر طبق قضیه فوینی خواهیم داشت: $dA = dx dy = J dr d\theta = r dr d\theta$

*دانستیم که در مختصات قطبی داریم: $u_1 = r, u_2 = \theta$ و $\hat{u}_1 = \hat{e}_r, \hat{u}_2 = \hat{e}_\theta$ و بردار مکان $\vec{r} = r\hat{e}_r = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$

آنگاه با توجه به این مطالب ضرایب متریک را برای دستگاه قطبی بدست می آوریم (در قسمت معرفی ضرایب متریک با بردار مکان در مختصات کارتزین و روابط تبدیل مختصات کارتزین به قطبی این ضرایب را بدست آوردیم)

$$h_r = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = \left\| (\cos(\theta), \sin(\theta)) \right\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| (-r \sin(\theta), r \cos(\theta)) \right\| = \sqrt{(-r \sin(\theta))^2 + (r \cos(\theta))^2} = r$$

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در مختصات قطبی

با فرض $f = f(r, \theta)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F} = F_r(r, \theta)\hat{e}_r + F_\theta(r, \theta)\hat{e}_\theta$ که در آن F_r و F_θ که مؤلفه های میدان برداری می باشند تابعی از دو متغیره r, θ باشد داریم:

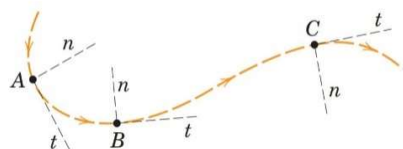
$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \quad \text{گرادیان:}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad \text{لاپلاسین:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \quad \text{دیورژانس:}$$

دستگاه مختصات منطبق بر مسیر دو بعدی (مسیری)(مماسی-عمودی)(n-t)

(Normal and tangential coordinate system)(Path variables coordinate system)



یکی از روش های توصیف حرکت منحنی الخط ذرات، استفاده از متغیرهای مسیر می باشد که اندازه گیری آن در طول مماس t و عمود n بر مسیر صورت می گیرد. این دستگاه در واقع دستگاه مختصات مکانی نیست بلکه برای توصیف حرکت ذره نسبت

به مرجع متحرکی که روی آن در نظر گرفته می شود به کمک بردارهای سرعت و شتاب قابل استفاده است. دستگاه $n-t$ با حرکت ذره در طول مسیر مطابق شکل حرکت می کند به طوری که جهت بردار $\hat{e}_t$ (یا $\hat{T}$) به گونه ای تعریف می شود که راستایش موازی با مماس بر منحنی در هر لحظه باشد و سویی به سمت جهت حرکت ذره روی این منحنی باشد به عبارت دیگر بردار $\hat{e}_t$ در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت ذره است و (با فرض پارامتری شدن خم بر حسب s) جهت آن در جهت مثبت محور s می باشد. راستای بردار $\hat{e}_n$ (یا $\hat{N}$) در هر لحظه عمود بر $\hat{e}_t$ (در واقع بر منحنی) می باشد و جهت مثبت آن به سمت مرکز انحنا^{۴۰} هر نقطه از مسیر یا به عبارتی تقعر منحنی است.

* اگر خم هموار C با معادله پارامتری $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ بیانگر یک منحنی مسطح باشد که حرکت ذره ای را در صفحه نشان می دهد آنگاه بردار سرعت^{۴۱} و شتاب^{۴۲} این ذره در مختصات کارتزین از روابط زیر بدست می آید:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j}$$

وتندی^{۴۳} حرکت از رابطه $v = v(t) = \|\vec{v}\| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}$ و مقدار شتاب از رابطه $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2}$ بدست می آید.

اگر خم بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد $\vec{r} = \vec{r}(s)$ با توجه به تعریف پارامتر طول قوس s پارامتری است که نشان دهنده طول مسیر پیموده شده روی منحنی از مبدأ (مسافت) می باشد $s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du$ و تعریف بردار سرعت

$$\|\vec{r}'(t)\| = \|\vec{v}(t)\| \quad \text{بدست می آید:} \quad s(t) = \int_a^t \|\vec{v}(u)\| du$$

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \|\vec{v}\| = v \quad \text{حال با مشتق گیری از این پارامتر داریم:}$$

همچنین بردارهای $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_n$ را با توجه به تعاریف بالا می توان بدست آورد.

40. center of curvature

41. Velocity vector

42. Acceleration vector

43. Speed

بردارهای پایه

بردار یکه مماس بر منحنی (Unit tangent vector):

بردار یکه هم جهت با بردار $\vec{v}$

$$\hat{e}_t(t) = \hat{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{v}$$

اگر خم بر حسب طول قوس (s) پارامتری شده باشد با توجه به قاعده زنجیره ای داریم:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$\left\ \frac{d\vec{r}}{ds} \right\ = \ \vec{r}'(s)\ = 1$	$\hat{e}_t(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$	آنگاه بردار یکه مماس بر منحنی از رابطه $\hat{e}_t(s) = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}}{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ بدست می آید.
--	--------------------------------------	--

بردار یکه عمود بر منحنی (Unit normal vector):

$$\hat{e}_n(t) = \hat{N}(t) = \frac{\frac{d\hat{e}_t}{dt}}{\left\| \frac{d\hat{e}_t}{dt} \right\|} = \frac{\dot{\hat{e}}_t}{\|\dot{\hat{e}}_t\|}$$

بردار یکه عمود بر $\vec{v}$

برای خم پارامتری شده بر حسب طول قوس (s) به صورت مشابه است با این تفاوت که مشتق نسبت به S می باشد.

انحنا (خمیدگی) منحنی (curvature)

خمیدگی یک منحنی آهنگ چرخش بردار یکه مماس بر منحنی است یه به عبارت دیگر بیانگر میزان انحراف خم در یک نقطه از خط مماس بر منحنی یا بردار یکه مماس بر آن می باشد که به صورت زیر تعریف می شود و آن را با κ نشان می دهیم:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\hat{e}}_t\|}{\|\dot{\vec{r}}\|} = \frac{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3} = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\hat{e}_t}{ds} \right\| = \left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\|$$

اگر منحنی بر حسب طول قوس پارامتری شده باشد:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

* انحنای منحنی $y = f(x)$:

$$\kappa(\theta) = \frac{|f^2 + 2(f')^2 - f \cdot f''|}{(f^2 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad * \text{انحنای منحنی قطبی } r = f(\theta) :$$

* انحنای خط راست صفر است و انحنای دایره با شعاع r ، $\frac{1}{r}$ می باشد که از آن نتیجه می گیریم با افزایش شعاع دایره از انحنای آن کاسته می شود.

شعاع انحنای منحنی (Radius of curvature)

با شرط $\kappa \neq 0$ شعاع انحنای منحنی را به صورت $\rho = \frac{1}{\kappa}$ تعریف می کنیم.

* شعاع انحنای دایره با شعاع آن برابر است.

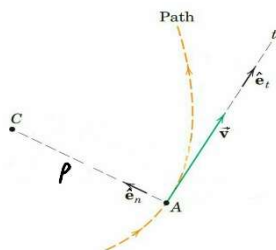
* روابط بین بردارهای یکه :

$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_n = 0 \quad \text{و} \quad \|\hat{e}_t\| = \|\hat{e}_n\| = 1 \quad \text{و} \quad \hat{e}_n = \rho \frac{d\hat{e}_t}{ds} = \rho(s) \vec{r}''(s)$$

$$* \text{ مشتق بردارهای یکه : } \frac{d\hat{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \hat{e}_n \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \hat{e}_n = \frac{\dot{s}}{\rho} \hat{e}_n \quad \text{و} \quad \dot{\hat{e}}_n = -\frac{\dot{s}}{\rho} \hat{e}_t$$

* هر بردار را به صورت $\vec{A} = A_t \hat{e}_t + A_n \hat{e}_n$ در این دستگاه روی منحنی در صفحه می توان بیان نمود.

معادلات سرعت و شتاب در دستگاه منطبق بر مسیر



$$\vec{v} = v \hat{e}_t = \frac{ds}{dt} \hat{e}_t = \dot{s} \hat{e}_t \quad \text{و} \quad \|\vec{v}\| = v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad \text{سرعت:}$$

$$\text{شتاب:} \quad a_t = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \quad \text{و} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = kv^2 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \quad \text{و} \quad a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

tangential acceleration centripetal acceleration

$$\vec{a} = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n \quad \text{و}$$

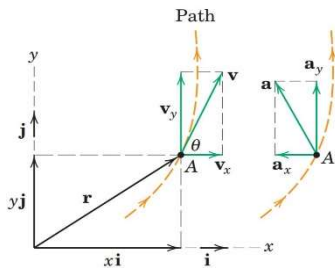
* وقتی ذره با مقدار تندى ثابت منحنى را طى مى کند صرفاً شتاب عمودى $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \hat{e}_n$ دارد.

* در نقاط عطف مسیر چون شعاع انحنای نداریم پس $a_n = 0$

حرکت منحنی الخط در صفحه (Plane Curvilinear Motion)

این معادلات حرکت نسبت به دستگاه اینرسی بیان می شوند.

معادلات حرکت در مختصات دکارتی:



$$\vec{r}(t) = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \quad \text{بردار مکان:}$$

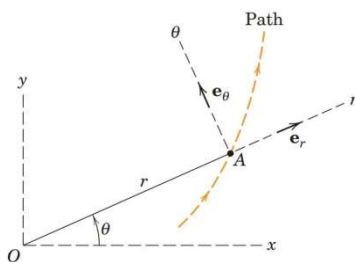
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} \quad \text{بردار سرعت:}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} \quad \text{بردار شتاب:}$$

$$\text{و همچنین داریم:} \quad \|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

معادلات حرکت در مختصات قطبی:



$$\vec{r}(t) = r \hat{e}_r \quad \text{بردار مکان:}$$

$$\vec{v}(t) = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \text{بردار سرعت:}$$

$$\vec{a}(t) = a_r \hat{e}_r + a_\theta \hat{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad \text{بردار شتاب:}$$

$$\text{و همچنین داریم:} \quad \|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \quad \text{و} \quad \|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

تذکر: توجه داشته باشید که بردار مکان را با $\vec{r}$ نشان می دهیم و با r مختصات قطبی متفاوت است. 

*توجه: شاید این سوال پیش بیاید که چرا بردار مکان در مختصات قطبی تنها بر حسب بردار $\hat{e}_r$

بیان می شود علت آن است بر خلاف دستگاه کارترین بردارهای یک در فضا ثابت نیستند و با تغییر

نقطه تغییر می کنند این مطلب از اینکه بردار $\hat{e}_r$ تابعی بر حسب θ هست نیز برداشت می شود. (روش

اثبات دیگر، تساوی بردارهای مکان در دستگاه کارترین و قطبی می باشد)

*جمله $2\dot{r}\dot{\theta}$ در فرمول شتاب در مختصات قطبی به مشتق دوم هیچ یک از مختصه های r, θ بستگی ندارد در واقع این

جمله از مجموع دو جمله $\dot{r}\dot{\theta}$ بدست آمده که هر کدام منشأ جداگانه دارد یکی به خاطر تغییر جهت $\hat{e}_r$ و دیگری به خاطر

تغییر اندازه $r\dot{\theta}$ می باشد. این عامل جالبی است که نقش مهمی در برخی پدیده های فیزیکی مانند حرکت مارپیچی آب

هنگام فرو رفتن در یک سوراخ روی زمین و همچنین در هدایت موشک ها این شتاب حتما لحاظ می شود وگرنه موشک به

هدف برخورد نمی کند. به این شتاب شتاب کریولیس^{۴۴} گفته می شود. شتاب کریولیس بیانگر اختلاف شتاب بین دستگاه

مختصات مرجع و دستگاه مختصات کمکی است و در حالت کلی به صورت $2\vec{\omega}_b \times \vec{v}_r$ نمایش داده می شود که در آن $\vec{\omega}_b$

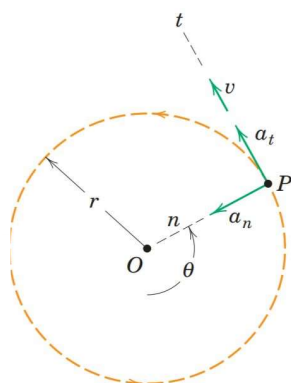
سرعت زاویه ای دستگاه کمکی b نسبت به دستگاه مرجع a می باشد و $\vec{v}_r$ سرعت ذره نسبت به دستگاه کمکی می باشد به

$$\text{عبارتی اگر } \vec{p} \text{ بردار مکان ذره نسبت به دستگاه کمکی } b \text{ باشد آنگاه} \quad \vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_b$$

*معادلات حرکت در مختصات منطبق بر مسیر در قسمت معرفی این مختصات بیان شد.

*حرکت دایره ای:

معادلات حرکت آن حالت خاصی از حرکت در مختصات قطبی می باشد به طوری که چون دایره است پس r ثابت است در نتیجه $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ و معادلات حرکت آن به صورت زیر خواهد بود:



$$\vec{r}(t) = r\hat{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = -r\dot{\theta}^2\hat{e}_r + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$$

*توجه داشته باشید که در حرکت دایره ای دستگاه قطبی و منطبق بر مسیر مشابه یکدیگرند و فقط در این حالت است که مؤلفه های شتاب در دستگاه منطبق بر مسیر مماسی و شعاعی می

توان گفت و داریم: $\hat{e}_t = \hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_r = -\hat{e}_n$

$$\underbrace{a_n = \frac{v^2}{r} = v\dot{\theta} = v\omega = r\dot{\theta}^2 = r\omega^2}_{\text{radial acceleration or centripetal acceleration}} \quad \text{و} \quad \underbrace{a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta} = r\alpha}_{\text{tangential acceleration}} \quad \text{و} \quad \underbrace{\|\vec{v}\| = v = r\dot{\theta} = r\omega}_{\text{linear velocity}}$$

$$\vec{a} = r\alpha\hat{e}_t + r\omega^2\hat{e}_n$$

اکثر دروس

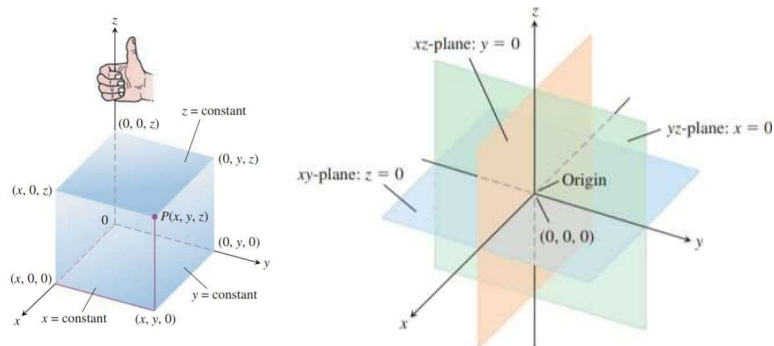
دستگاه مختصات سه بعدی (فضایی)

در فضا نیازمند سیستم های مختصاتی هستیم که تنها با ارائه سه پارامتر یا مختصه نقطه مورد نظر را به صورت منحصر به فرد ارائه دهد.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

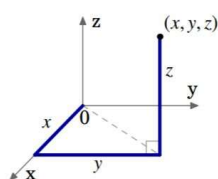
موقعیت ذره p در فضا را در هر لحظه t می توان توسط مختصات قائم (کارتزین) یا مختصات استوانه ای یا مختصات کروی و یا متغیرهای مسیر در فضا توصیف نمود.

دستگاه مختصات کارتزین (دکارتی) سه بعدی (3D Cartesian coordinate system)



در مختصات کارتزین، سه صفحه دو به دو به دو عمود بر هم انتخاب می‌شوند که در یک نقطه به نام مبدأ متقاطع اند. این سه صفحه فضا را به هشت قسمت تقسیم می‌کنند که به هر یک از آنها یک "یک هشتم" می‌گوییم و مختصات هر نقطه در فضا با فواصل آن از هر یک از این صفحات برابر خواهد بود که آن را با سه تایی مرتب $P(x, y, z)$ نشان

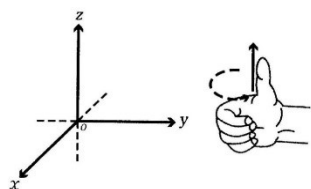
می‌دهیم که این نقطه محل تقاطع سه صفحه $x = \text{constant}$, $y = \text{constant}$, $z = \text{constant}$ است به عبارت دیگر در



این سیستم مختصات از سه راستا و یا خط دویه دو عمود بر هم استفاده می‌شود. برای رسیدن از نقطه مرجع به نقطه مورد نظر تنها مقیدیم در موازات هر یک از این سه راستا حرکت کنیم و مقدار مسیر پیموده شده روی خطوط موازی این راستاها را به عنوان یک مختصه اعلام میکنیم. به دلیل اینکه با تشکیل یک مکعب مستطیل می‌توان این دستگاه را برپا کرده و موقعیت نقطه یا مکانی را مشخص نمود، مختصات مستطیلی به آن اطلاق می‌شود.

* هر دو راستای در نظر گرفته شده در این سیستم یک صفحه را می‌سازند و تصویر یک نقطه در آن صفحه متناظر صفر بودن مختصه ای است که راستای آن عمود بر این صفحه است.

* دستگاه مختصات کارتزین راست گرد است یعنی شیوه بیان این سه مختصه به شکلی است که از قانون دست راست پیروی نماید. بدین صورت که شما مختصه اول را به دلخواه انتخاب کرده و با X نامگذاری میکنید اما نامگذاری برای



تعیین مختصه دوم و سوم باید به گونه ای باشد که هرگاه دست راست خود را در راستای X قرار دادید و به سمت راستای دوم Y خم کردید، انگشت شست شما نشان دهنده جهت مثبت راستای سوم Z باشد. همچنین همانطور که خواهیم دید از سمت راست حاصل ضرب خارجی بردار یکه دو محور برابر با بردار یکه محور سوم خواهد بود.

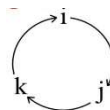
بردارهای پایه: بردارهای یکه در جهت محوره‌های X و Y و Z به صورت $\hat{x} = \hat{i} = (1, 0, 0)$ و $\hat{y} = \hat{j} = (0, 1, 0)$ و

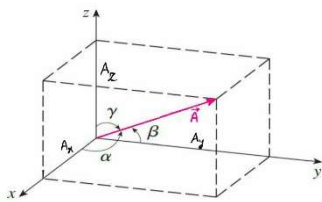
$\hat{z} = \hat{k} = (0, 0, 1)$ می‌باشد. این بردارها هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت ثابت هستند.

و برای این بردارها داریم: $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ و $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$

و برای به خاطر سپردن ضرب خارجی این بردارها باید به این نکته توجه داشت که ضرب خارجی این بردارها به صورت دوری است یعنی در ضرب خارجی هر دو تای آنها با توجه به ترتیب، اگر حرکت ما از بردار اول به دوم در جهت فلش باشد (ساعتگرد) حاصل، بردار سوم با علامت مثبت و اگر خلاف جهت فلش باشد با علامت منفی است. برای مثال:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \text{و} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \text{و} \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$





*هربردار را می توان روی محورهای مختصات تصویر کرد(به مؤلفه هایش تجزیه کرد). مثلاً اگر بردار $\vec{A}$ را در نظر بگیریم که $\|\vec{A}\| = A$ و این بردار با جهت مثبت محور X زاویه α و با جهت مثبت محور Y زاویه β و با جهت مثبت محور Z زاویه γ بسازد آنگاه به $\cos(\alpha)$ و $\cos(\beta)$ و $\cos(\gamma)$ کسینوس های هادی می گوییم و می توان مؤلفه های بردار $\vec{A}$ را برحسب این کسینوس ها بدست آورد : $A_x = A \cos(\alpha), A_y = A \cos(\beta), A_z = A \cos(\gamma)$

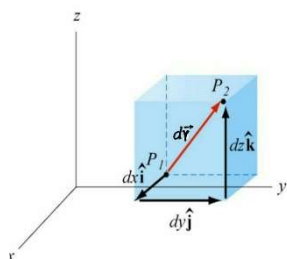
به طوری که $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = A$ همچنین رابطه $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$ برای این کسینوس

$$\cos(\alpha) = \frac{A_x}{A}, \cos(\beta) = \frac{A_y}{A}, \cos(\gamma) = \frac{A_z}{A} \quad \text{های هادی برقرار است و داریم :}$$

پس می توان به جای بردار یکه بردار $\vec{A}$ ، $\hat{e}_A = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ را قرار داد.

*نمایش هر بردار در این دستگاه به صورت $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ و $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ و نمایش بردار مکان در این دستگاه به صورت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ می باشد .

*فاصله دو نقطه $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ در این دستگاه به صورت $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ می باشد.



$$\vec{dl} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad \text{و} \quad \begin{cases} d\vec{l}_x = dx\hat{i} \\ d\vec{l}_y = dy\hat{j} \\ d\vec{l}_z = dz\hat{k} \end{cases} \quad \begin{cases} d\ell_x = dx \\ d\ell_y = dy \\ d\ell_z = dz \end{cases}$$

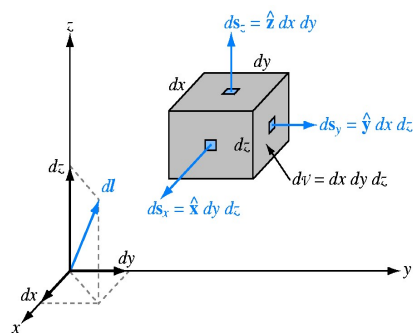
*توجه: با توجه به المان بالا داریم:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt = \|\vec{V}\| dt$$

پس می توان گفت اگر $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ معادله پارامتری منحنی مفروضی بر حسب t باشد آنگاه طول قوس منحنی در

$$\text{بازه } [t_0, t_1] \text{ از رابطه } \ell = \int_{t_0}^{t_1} d\ell = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V}\| dt \text{ بدست می آید.}$$

*المان دیفرانسیلی سطح در این دستگاه :



$$\vec{ds} = dydz\hat{i} + dxdz\hat{j} + dx dy\hat{k} \quad , \quad \begin{cases} d\vec{s}_x = dydz\hat{i} \\ d\vec{s}_y = dxdz\hat{j} \\ d\vec{s}_z = dx dy\hat{k} \end{cases} \quad \begin{cases} ds_x = dydz \\ ds_y = dxdz \\ ds_z = dx dy \end{cases}$$

$$dv = dx dy dz$$

*المان دیفرانسیلی حجم در این دستگاه :

Figure 3-8

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در دستگاه کارتزین

با فرض $f = f(x, y, z)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F} = F_x(x, y, z)\hat{i} + F_y(x, y, z)\hat{j} + F_z(x, y, z)\hat{k}$ در مختصات کارتزین که در آن F_x و F_y و F_z که مؤلفه های میدان برداری می باشند، تابعی سه متغیره از (x, y, z) باشند داریم:

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \quad \text{گرادیان:}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{لاپلاسین:}$$

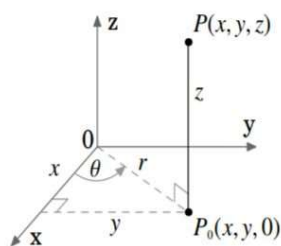
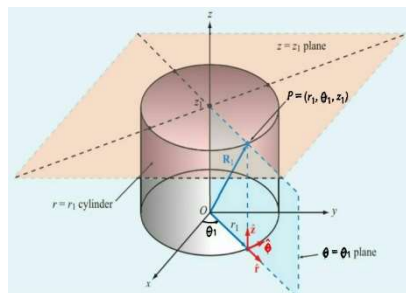
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{دیورژانس:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad \text{کُرل:}$$

تذکر مهم: از آنجایی که این جزوه مبنای ریاضی دارد در مبحث مختصات استوانه ای پارامترهای r, θ, z و در مختصات کروی پارامترهای ρ, φ, θ معرفی شده اند در برخی از کتب مانند فیزیک و الکترومغناطیس به جای r در مختصات استوانه ای از ρ و به جای θ از φ استفاده می شود از طرفی ممکن است در اکثر اوقات به جای پارامتر ρ در مختصات کروی از پارامتر R یا r استفاده شود یا در مختصات کروی θ و φ به جای هم تعریف شده باشند این پارامترها را نباید با هم اشتباه گرفت چراکه تمامی روابط و نکات در این جزوه بر حسب پارامتر معرفی شده (روی شکل) بیان می شوند و مقایسه آنها با روابط کتاب دیگر بدون دقت به تعریف پارامتر امکان اشتباه را در پی دارد پس کفایت به تعریف پارامترها دقت کنید تا در تشخیص آن دچار مشکل نشوید.

دستگاه مختصات استوانه ای (cylindrical coordinate system)

دستگاه مختصات استوانه ای تعمیمی از دستگاه مختصات قطبی دو بعدی در فضای سه بعدی است. در این دستگاه هر



نقطه با یک سه تایی مرتب (r, θ, z) مشخص می شود. مختصات استوانه ای نوعی مختصات متعامد است که در آن یک نقطه، در فضا بر روی قاعده یک استوانه در نظر گرفته می شود. مکان آن نقطه بر اساس فاصله از محور z ، شعاع (r) ، و ارتفاع استوانه (z) و زاویه ای که شعاع قاعده گذرنده از آن نقطه با محور x می سازد (θ) ، بیان می شود. صفحه ای مرجع که شامل نقطه مبدأ هست در نظر می گیریم و در آن برای تعیین هر نقطه در همان صفحه از دستگاه مختصات قطبی استفاده می کنیم. همچنین برای تعیین نقاط خارج از این صفحه راستایی عمود بر این صفحه انتخاب می کنیم و حرکت در راستای این راستا را نیز به عنوان مختصه سوم اعلام می کنیم. در واقع نقطه ای مانند $P = (r_1, \theta_1, z_1)$ نقطه تلاقی یک استوانه به شعاع $r = r_1$ و یک نیم صفحه بازویه $\theta = \theta_1$ نسبت به محور x و یک صفحه موازی صفحه xy و گذرنده از $(0, 0, z_1)$ می باشد. برای پوشش کامل فضای سه بعدی حدود این پارامترها عبارتند از

$$0 \leq r < \infty \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{و} \quad -\infty < z < +\infty$$

در فیزیک و به ویژه در مباحث الکترومغناطیس و مخابرات به جای r و θ و z به ترتیب از حروف ρ ، φ ، z استفاده می شود. مختصات استوانه ای در ارتباط با اشیاء و پدیده هایی است که دارای تقارن چرخشی در محور طولی هستند، مانند جریان آب در یک لوله مستقیم با مقطع عرضی، توزیع گرما در سیلندر فلزی، میدان های الکترومغناطیسی تولید شده توسط یک جریان الکتریکی در یک سیم مستقیم طولانی و... ممکن است معادله یک رویه در یکی از دستگاه های ساده تر از معادله آن در دستگاه دکارتی باشد. در چنین مواردی استفاده از دستگاه مناسب باعث صرفه جویی در وقت می شود. این موضوع در حل انتگرالهای چندگانه اهمیت بیشتری پیدا می کند. همان طور که می دانید حل برخی انتگرالهای سه گانه در دستگاه دکارتی گاهی غیر ممکن می باشد، ولی با یک تغییر مختصات ساده به راحتی می توانیم به جواب مورد نظر برسیم. در دستگاه مختصات استوانه ای، استوانه هایی که محورشان در امتداد محور z هستند معادلات بسیار ساده ای دارند. ($r = a$)

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

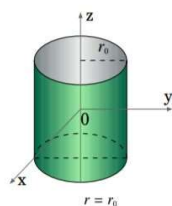
روابط تبدیل پارامترهای دستگاه استوانه ای به دکارتی:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

روابط تبدیل پارامترهای دستگاه دکارتی به استوانه ای:

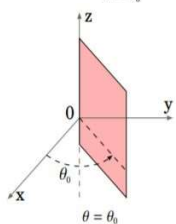
بقیه نکات مانند دستگاه قطبی است.

رویه های مهم در مختصات استوانه ای:

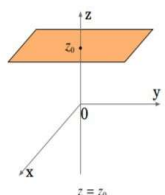


(۱) معادله $r = r_0$ فقط دایره ای در صفحه xy را مشخص نمی کند بلکه استوانه ای کامل به شعاع r_0 حول محور z را توصیف میکند.

* اگر $r = 0$ باشد مختصه θ روی محور z بی معنی می شود و خود محور z با معادله $r = 0$ معین می شود.



(۲) معادله $\theta = \theta_0$ توصیف کننده صفحه ای (نیم صفحه ای) است عمود بر صفحه xy که شامل محور z و گذرنده از مبدأ است و زاویه ای به اندازه θ_0 رادیان با قسمت مثبت محور x می سازد.



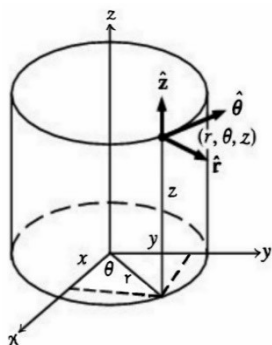
(۳) معادله $z = z_0$ صفحه ای موازی صفحه xy را توصیف می کند که به ارتفاع $|z_0|$ از مبدأ واقع شده است.

بردارهای پایه

بردار یکه درجهت r (شعاعی): $\hat{r} = \hat{e}_r$ و بردار یکه درجهت θ (مماسی): $\hat{\theta} = \hat{e}_\theta$ و بردار یکه درجهت z : $\hat{z} = \hat{e}_z = \hat{k}$

* برای این بردارهای پایه داریم: $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_r = 0$ و $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1$

برای تعیین جهت مثبت راستای سوم از قانون دست راست تبعیت میکنیم یعنی اگر دست راست خود را در مرکز صفحه قرار دهید و چهار انگشت دست راست را که در راستای $\hat{r}$ قرار دارد را در جهت افزایش مختصه دوم θ بگردانید شست شما جهت مثبت مؤلفه سوم $\hat{z}$ را نشان می دهد.



همچنین برای ضرب خارجی آنها مانند دستگاه کارترین داریم:

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_z \quad \text{و} \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_z = \hat{e}_r \quad \text{و} \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$$



تبدیل بردارهای پایه مختصات استوانه ای به کارترین:

$$\hat{r} = \hat{e}_r = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{\theta} = \hat{e}_\theta = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{z} = \hat{e}_z = \hat{k}$$

از آنجایی که بردارهای یکه با تغییر زمان تغییر می کنند با مشتق گیری از این بردارها نسبت به زمان داریم:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad \text{و} \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \quad \text{و} \quad \dot{\hat{e}}_z = 0$$

* نمایش هر بردار $\vec{A}$ در مختصات استوانه ای به صورت $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_z \hat{z}$ و نمایش بردار مکان به صورت $\vec{r} = r \hat{e}_r + z \hat{e}_z$ می باشد.

* فاصله دو نقطه $A(r_1, \theta_1, z_1)$ و $B(r_2, \theta_2, z_2)$ در مختصات استوانه ای

به صورت $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + (z_2 - z_1)^2}$ بدست می آید.

* المان دیفرانسیلی طول در مختصات استوانه ای:

$$\vec{d\ell} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + dz\hat{z} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \vec{d\ell}_r = dr \\ \vec{d\ell}_\theta = r d\theta \\ \vec{d\ell}_z = dz \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} d\ell_r = dr \\ d\ell_\theta = r d\theta \\ d\ell_z = dz \end{cases}$$

* المان دیفرانسیلی سطح در مختصات استوانه ای:

(۱) المان سطح قاعده استوانه (دایره) (سطح عمود بر جهت Z):

$$\vec{ds}_z = r d\theta dr \hat{k} \quad \text{و} \quad ds_z = r dr d\theta$$

(۲) المان سطح جانبی استوانه (سطح عمود بر جهت r):

$$\vec{ds}_r = r d\theta dz \hat{r} \quad \text{و} \quad ds_r = r d\theta dz$$

(۳) المان سطح مقطعی از استوانه (سطح عمود بر جهت θ):

$$\vec{ds}_\theta = dr dz \hat{\theta} \quad \text{و} \quad ds_\theta = dr dz$$

* المان دیفرانسیلی حجم در مختصات استوانه ای: $dv = r dr d\theta dz$

ژاکوبین در مختصات استوانه ای:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

پس برای انتگرال گیری سه گانه پس از تغییر متغیر طبق قضیه فوبینی خواهیم داشت:

$$dv = dx dy dz = |J| dr d\theta dz = r dr d\theta dz$$

ضرایب مقیاس:

$$h_r = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = 1 \quad \text{و} \quad h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = r \quad \text{و} \quad h_z = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = 1$$

عملگرهای دیفرانسیلی برداری در مختصات استوانه ای:

با فرض $f = f(r, \theta, z)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F} = F_r(r, \theta, z)\hat{r} + F_\theta(r, \theta, z)\hat{\theta} + F_z(r, \theta, z)\hat{z}$ در مختصات استوانه ای که در آن F_r و F_θ و F_z که مؤلفه های میدان برداری می باشند، تابعی سه متغیره از r, θ, z باشد داریم:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad \text{گرادیان:}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{لاپلاسین:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{دیورژانس:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} \quad \text{کرل:}$$

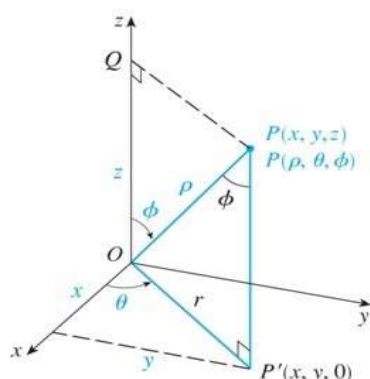
دستگاه مختصات کروی (Spherical coordinate system)

این دستگاه به وسیله یک کره به مرکز مبدأ و شعاع ρ از نقطه ای که میخواهیم مختصات آن را نمایش دهیم تعریف می شود. (ρ, ϕ, θ)

ρ : فاصله نقطه p تا مبدأ (مرکز) (شعاع)

ϕ : زاویه op (بردار مکان) با جهت مثبت محور Z

θ : زاویه تصویر op (op' یا r) در صفحه xy با جهت مثبت محور X



برای نشان دادن مکان یک نقطه در این مختصات مستقیماً نقطه مبدأ را به آن نقطه مورد نظر متصل میکنیم و مقدار مسافت طی شده در آن راستا برای رسیدن به نقطه مورد نظر را به عنوان مختص اول اعلام میکنیم. با اینکار یک کره را با شعاعی برابر مختص به مرکز مبدأ مشخص کرده ایم که نقطه مورد نظر بر روی آن قرار دارد. برای بیان مختص دوم زاویه راستای شعاعی ای که در مرحله پیش طی کردیم را با جهت مثبت راستای عمود بر صفحه مرجع را اعلام میکنیم این باعث می شود که ما یک مخروط را با این کره تماس دهیم که به ما میگوید نقطه مورد نظر بر روی این دایره خواهد بود.

برای تعیین نقطه دقیقاً روی این دایره، راستای شعاعی را بر روی صفحه مرجع دوران می دهیم و بدین شکل خطی در صفحه مرجع خواهیم داشت که میتوانیم زاویه آن با راستای مرجع در صفحه تعیین کنیم. به عبارت دیگر مختصات یک نقطه در این مختصات از تلاقی یک کره و یک مخروط و یک نیم صفحه که در ادامه به طور کامل بررسی می کنیم بدست می آید. البته در تمام این موارد توجه کنید که هم قانون دست راست برقرار است و هم باید زوایا را از خطوط مرجع در جهت پادساعتگرد سنجید.

برای پوشش کامل فضای سه بعدی حدود این پارامترها عبارتند از: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq \varphi \leq \pi$ و $0 \leq \rho < \infty$

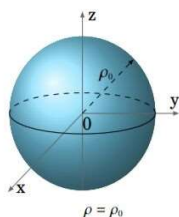
$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases} \quad \text{روابط تبدیل پارامترهای دستگاه کروی به دکارتی:}$$

*برخی روابط مهم در تبدیلات بین دستگاه های کارترین، استوانه ای و کروی:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin(\varphi)$$

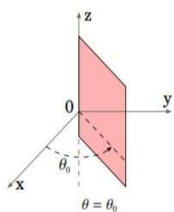
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad \tan(\varphi) = \frac{r}{z} \quad \text{و} \quad \cos(\varphi) = \frac{z}{\rho}$$

رویه های مهم در مختصات کروی:

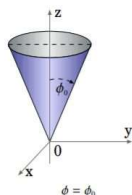


(۱) معادله $\rho = \rho_0$ کره ای به مرکز مبدأ و شعاع ρ_0 را نشان می دهد.

(۲) معادله $\theta = \theta_0$ توصیف کننده صفحه ای (نیم صفحه ای) است عمود بر صفحه xy که شامل محور z و گذرنده از مبدأ است و زاویه ای به اندازه θ_0 رادیان با قسمت مثبت محور x می سازد.



(۳) معادله $\varphi = \varphi_0$ یک نیم مخروط با محور تقارن محور z و رأس مبدأ را نشان می دهد.



بردارهای پایه

$\hat{\rho} = \hat{e}_\rho$: ρ جهت افزایش

$\hat{\phi} = \hat{e}_\phi$: ϕ درجهت افزایش

$\hat{\theta} = \hat{e}_\theta$: θ جهت افزایش

برای این بردارهای پایه داریم :

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\rho = 0 \quad \text{و} \quad \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = 1$$

برای تعیین جهت مثبت راستای سوم از قانون دست راست تبعیت میکنیم یعنی اگر دست راست خود را در مرکز قرار دهید و چهار انگشت دست راست را که در راستای $\hat{\rho}$ قرار دارد را در جهت افزایش مختصه دوم $\hat{\phi}$ بگردانید شست شما جهت مثبت مؤلفه سوم $\hat{\theta}$ را نشان می دهد.

همچنین برای ضرب خارجی این بردارها داریم :

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_\theta \quad \text{و} \quad \hat{e}_\phi \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\rho \quad \text{و} \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi$$



*تبدیل بردارهای پایه مختصات کروی به کارترین:

$$\hat{\rho} = \hat{e}_\rho = \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{i} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{j} + \cos(\phi) \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = \hat{e}_\phi = \cos(\phi) \cos(\theta) \hat{i} + \cos(\phi) \sin(\theta) \hat{j} - \sin(\phi) \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \hat{e}_\theta = -\sin(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j}$$

همچنین برای این بردارها روابط زیر برقرار است :

$$\hat{e}_\rho = \hat{e}_\rho(\phi, \theta) \quad \text{و} \quad \hat{e}_\phi = \hat{e}_\phi(\phi, \theta) \quad \text{و} \quad \hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta(\theta) \quad \frac{d\hat{e}_\rho}{d\phi} = \hat{e}_\phi \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi} = -\hat{e}_\rho$$

از آنجایی که بردارهای پایه با تغییر زمان تغییر می کنند با مشتق گیری از این بردارها نسبت به زمان داریم :

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{\theta} \sin(\phi) \hat{e}_\theta \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = \dot{\hat{e}}_\phi = \dot{\theta} \cos(\phi) \hat{e}_\theta - \dot{\phi} \hat{e}_\rho \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \sin(\phi) \hat{e}_\rho - \dot{\theta} \cos(\phi) \hat{e}_\phi$$

* نمایش هر بردار $\vec{A}$ در مختصات استوانه ای به صورت $\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}$ و نمایش بردار مکان به صورت $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho$ می باشد.

*المان دیفرانسیلی طول در مختصات کروی:

$$\vec{dl} = d\rho\hat{\rho} + \rho \sin(\varphi) d\theta\hat{\theta} + \rho d\varphi\hat{\varphi} \quad \text{و} \quad \begin{cases} d\bar{l}_\rho = d\rho\hat{\rho} \\ d\bar{l}_\varphi = \rho d\varphi\hat{\varphi} \\ d\bar{l}_\theta = \rho \sin(\varphi) d\theta\hat{\theta} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} dl_\rho = d\rho \\ dl_\varphi = \rho d\varphi \\ dl_\theta = \rho \sin(\varphi) d\theta \end{cases}$$

*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات کروی:

(۱) المان سطح عمود بر جهت ρ (سطح خارجی (جانبی) کره):

$$\vec{ds}_\rho = \rho^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta \hat{\rho} \quad \text{و} \quad ds_\rho = \rho^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta$$

(۲) المان سطح عمود بر جهت φ (سطح جانبی مخروط):

$$\vec{ds}_\varphi = \rho \sin(\varphi) d\theta d\rho \hat{\varphi} \quad \text{و} \quad ds_\varphi = \rho \sin(\varphi) d\theta d\rho$$

(۳) المان سطح عمود بر جهت θ : $\vec{ds}_\theta = \rho d\varphi d\rho \hat{\theta}$ و $ds_\theta = \rho d\varphi d\rho$

**المان دیفرانسیلی حجم در مختصات کروی: $dv = \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$

*زاویه فضایی: در هندسه دو زاویه را می توان قوسی از یک دایره در نظر گرفت. در هندسه فضایی زاویه فضایی را می توان قوسی از یک کره در نظر گرفت که آن را با Ω نشان می دهند و واحد آن استرادیان است. زاویه فضایی جسم

متناسب است با مساحت بخشی از کره که جسم پوشانده است تقسیم بر شعاع کره به توان دو $\Omega = \frac{S}{R^2}$

در مختصات کروی جزء دیفرانسیلی زاویه فضایی برابر است با $d\Omega = \sin(\varphi) d\theta d\varphi$

ژاکوبین در مختصات کروی:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\varphi) \cos(\theta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & \rho \cos(\varphi) \sin(\theta) & \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin(\varphi)$$

پس برای انتگرال گیری سه گانه پس از تغییر متغیر طبق قضیه فوینی خواهیم داشت:

$$dv = dx dy dz = |J| d\rho d\varphi d\theta = \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

ضرایب مقیاس:

$$h_\rho = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \cos^2(\varphi)} = 1$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) + 0} = |\rho \sin(\varphi)| = \rho \sin(\varphi)$$

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \rho^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\varphi)} = \rho$$

عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات کروی :

با فرض $f = f(\rho, \varphi, \theta)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F} = F_\rho(\rho, \varphi, \theta)\hat{\rho} + F_\varphi(\rho, \varphi, \theta)\hat{\varphi} + F_\theta(\rho, \varphi, \theta)\hat{\theta}$ در مختصات کروی که در آن F_ρ و F_φ و F_θ که مؤلفه های میدان برداری می باشند، تابعی سه متغیره از ρ, φ, θ باشند داریم:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho \sin(\varphi)} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} \quad \text{گرادیان:}$$

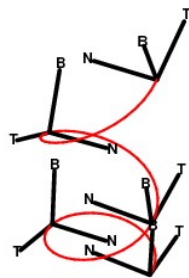
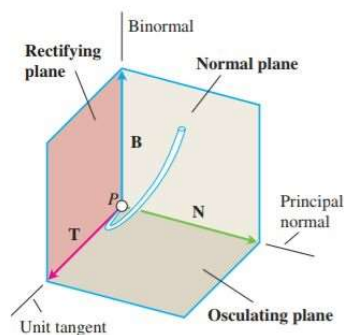
$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad \text{لاپلاسین:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin(\varphi) F_\varphi) + \frac{1}{\rho \sin(\varphi)} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \quad \text{دیورژانس:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{\rho^2 \sin(\varphi)} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \rho \sin(\varphi) \hat{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & \rho \sin(\varphi) F_\theta \end{vmatrix} \quad \text{کرل:}$$

*تذکر: برای راحتی کار با معادلات مختصات کروی در دروس فیزیک و الکترومغناطیس در انتهای جزوه خلاصه روابط در مختصات کروی با پارامترهای R, θ, φ آمده است.

ریاضی ۲، دینامیک



دستگاه مختصات منطبق بر مسیر سه بعدی (TNB)

دستگاه مختصات منطبق بر مسیر در فضای سه بعدی تعمیمی از همان دستگاه مختصات در فضای دو بعدی است که در واقع با اضافه کردن بردار یکه سومی که با $\hat{B}$ نشان می دهیم سه تایی مرتب $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ یا $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ یک پایه راستگرد متعامد تشکیل می دهد که به آن **کنج فرنه** یا **قاب فرنه**^{۴۵} می گویند. همان طور که قبلا گفته شد این دستگاه مختصات منطبق بر مسیر (متحرک) بوده و برای توصیف معادلات حرکت یک ذره در فضا به کار می رود. تمامی مطالبی که برای مختصات منطبق بر مسیر دو بعدی گفته شد در این مختصات برقرار است پس از تکرار آن خودداری میکنیم.

بردارهای پایه

$$\hat{e}_t = \hat{t} = \hat{T}$$

بردار یکه مماس (Unit tangent vector):

در این دستگاه چون دو بردار عمود داریم به بردار $\hat{N}$ بردار یکه قائم اصلی (اول) و به بردار $\hat{B}$ که در ادامه معرفی خواهیم کرد بردار یکه قائم فرعی (دوم) می گوییم.

$$\hat{e}_n = \hat{n} = \hat{N}$$

بردار یکه قائم اصلی (Unit principal vector):

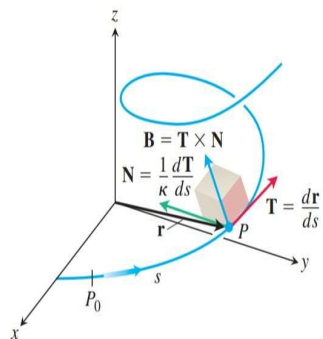
بردار یکه قائم فرعی (Unit Binormal vector)

$$\hat{e}_b = \hat{b} = \hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

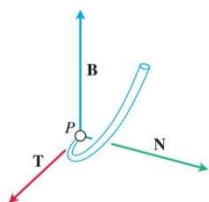
بردار یکه ای است $\|\hat{B}\| = 1$ که همواره بر دو بردار $\hat{T}$ و $\hat{N}$ عمود است:

در حالتی که خم C بر حسب پارامتر t با ضابطه $\vec{r}(t)$ پارامتری شده باشد این بردار را می توان به طور مستقیم و بدون

$$\text{محاسبه } \hat{T} \times \hat{N} \text{ به صورت } \hat{B}(t) = \hat{B}(t) = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\kappa \|\dot{\vec{r}}\|^3} \text{ بدست آورد.}$$

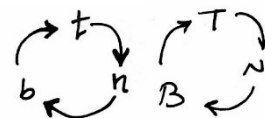


برای تعیین جهت مثبت راستای $\hat{B}$ از قانون دست راست تبعیت میکنیم یعنی اگر دست راست خود را در نقطه P قرار دهید و چهار انگشت دست راست را که در راستای $\hat{T}$ قرار دارد را در جهت افزایش مختصه دوم $\hat{N}$ بگردانید شست شما جهت مثبت مؤلفه سوم $\hat{B}$ را نشان می دهد.



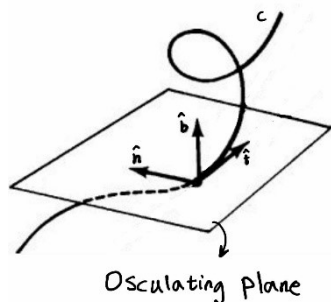
سه بردار $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ که کنج فرنه را پدید می آورند متعامد و یکه اند و برای ضرب خارجی مانند دستگاه های دیگر دارای جایگشت دورانی اند و می توان روابط زیر را برای آنها در نظر گرفت:

$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = \hat{e}_n \cdot \hat{e}_n = \hat{e}_b \cdot \hat{e}_b = 1, \quad \hat{e}_t \cdot \hat{e}_n = \hat{e}_t \cdot \hat{e}_b = \hat{e}_n \cdot \hat{e}_b = 0$$



$$\hat{e}_t \times \hat{e}_n = \hat{e}_b, \quad \hat{e}_n \times \hat{e}_b = \hat{e}_t, \quad \hat{e}_b \times \hat{e}_t = \hat{e}_n$$

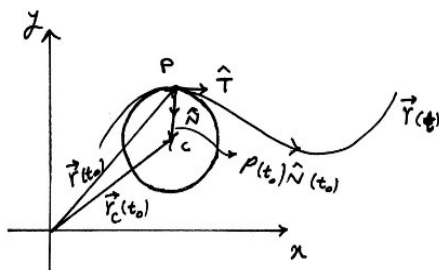
سه بردار یاد شده در فضا سه صفحه عمود بر هم را پدید می آورند:



۱. **صفحه بوسان (Osculating plane):** این صفحه توسط بردارهای $\hat{T}$ و $\hat{N}$ پدید می آید و نرمال آن بردار $\hat{B}$ است.

۲. **صفحه قائم (Normal plane):** این صفحه توسط بردارهای $\hat{N}$ و $\hat{B}$ پدید می آید و نرمال آن بردار $\hat{T}$ است.

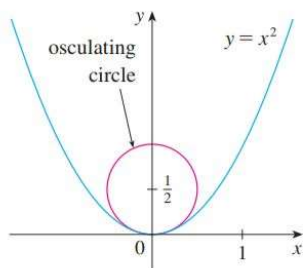
۳. **صفحه راستگرد (اصلاحی) (Rectifying plane):** این صفحه توسط بردارهای $\hat{T}$ و $\hat{B}$ پدید می آید و نرمال آن بردار $\hat{N}$ است.



دایره بوسان (Osculating circle)

دایره ای است در صفحه بوسان که از نقطه $\vec{r}(t_0)$ روی منحنی می گذرد و بر منحنی مماس است. شعاع دایره بوسان در این نقطه برابر $\rho(t_0)$ و مرکز این دایره همان مرکز انحنا منحنی در این نقطه است که در طرف تقعر منحنی و روی خط عمود بر منحنی قرار دارد و از رابطه $\vec{r}_c(t_0) = \vec{r}(t_0) + \rho(t_0)\hat{N}(t_0)$ بدست می آید. انحنا دایره بوسان در این نقطه با انحنا منحنی برابر است. این دایره بیش از هر منحنی دیگری به منحنی نزدیک است و بهترین توصیف را از رفتار منحنی در نقطه مورد نظر دارد.

* اگر منحنی به صورت $y = f(x)$ بیان گردد آنگاه مرکز دایره بوسان در نقطه p به صورت زیر بدست می آید:



$$x_c = x(p) - \frac{y'(p)(1 + (y'(p))^2)}{y''(p)}, \quad y_c = y(p) + \frac{1 + (y'(p))^2}{y''(p)}$$

تاب (Torsion)

تاب معیاری از پیچش خم است به عبارت دیگر تاب میزان انحراف خم از صفحه بوسان است. پس تاب را می توان آهنگ

$$\frac{d\hat{B}(s)}{ds} = -\tau(s)\hat{N}(s) \quad \text{و} \quad |\tau(s)| = \left\| \frac{d\hat{B}}{ds} \right\| \quad \text{چرخش بردار نسبت بیان نمود و آن را با } \tau \text{ نشان می دهیم:}$$

در حالتی که خم C بر حسب پارامتر t با ضابطه $\vec{r}(t)$ پارامتری شده باشد تاب را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\tau(t) = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|^2} = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{a} \times \vec{a})}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2}$$

* اگر $\tau > 0$ باشد جهت حرکت خم از صفحه بوسان به سمت (در جهت) بردار $\hat{B}$ است یا به عبارت دیگر راستگرد است.

* برای منحنی های مسطح همواره $\tau = 0$ است. پس می توان نتیجه گرفت سه بردار $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$ هم صفحه خواهند بود اگر $\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) = 0$ که قبلا در حالت کلی در قسمت ضرب مختلط بیان شده بود.

* اگر واحد طول m باشد واحد تاب و انحنای $\frac{1}{m}$ است.

قضیه اساسی منحنی های فضایی

اگر C_1 و C_2 دو منحنی مفروض باشند که هر دو دارای انحنای $\kappa(s)$ و تاب $\tau(s)$ باشند و همواره $\kappa(s) \neq 0$ در این صورت این منحنی ها همنهشت اند یعنی یکی را می توان با حرکات جسم صلب (انتقال و دوران) طوری تغییر داد که بر دیگری منطبق شود.

* اگر خمیدگی هرگز صفر نشود شکل خم به وسیله توابع انحنای و تاب $(\kappa(s), \tau(s))$ تعیین می شود.

دو نتیجه مهم: با فرض $\kappa(s) \neq 0$:

۱. اگر $\tau = 0$ و κ عدد ثابت باشد آنگاه منحنی مورد نظر دایره است.

۲. اگر $\tau \neq 0$ و عدد ثابت باشد آنگاه منحنی مورد نظر یک مارپیچ دوار است.

در واقع مارپیچ $\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, $a, b > 0$ را می توان مثال نقضی برای گزاره "اگر انحنای ثابت باشد منحنی دایره است" بیان کرد.

فرمول های فرنه-سره (Frenet-serret)

سه رابطه بین بردار های $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ و κ و τ :

اگر خم بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد:

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N}, \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = \tau\hat{B} - \kappa\hat{T}, \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$$

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{bmatrix}$$

فرمول های بالا را به صورت ماتریسی هم می توان نمایش داد:

و اگر خم بر حسب پارامتر t پارامتری شده باشد:

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \kappa v \hat{N}, \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = (\tau\hat{B} - \kappa\hat{T})v, \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau v \hat{N}, \quad v = \|\vec{v}\|$$

دینامیک

حرکت منحنی الخط در فضا (Space Curvilinear Motion)

معادلات حرکت در مختصات دکارتی:

$$\vec{r}(t) = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad \text{بردار مکان:}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad \text{بردار سرعت:}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad \text{بردار شتاب:}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{و} \quad \|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{آید: همچنین اندازه سرعت و شتاب از روابط مقابل بدست می آید:}$$

معادلات حرکت در مختصات استوانه ای:

$$\vec{r}(t) = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z \quad \text{بردار مکان:}$$

$$\vec{v}(t) = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_z\hat{e}_z = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z \quad \text{بردار سرعت:}$$

$$\vec{a}(t) = a_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta + a_z\hat{e}_z = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z \quad \text{بردار شتاب:}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2} \quad \text{و} \quad \|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} \quad \text{آید: همچنین اندازه سرعت و شتاب از روابط مقابل بدست می آید:}$$

معادلات حرکت در مختصات کروی :

$$\vec{r}(t) = \rho \hat{e}_\rho \quad \text{بردار مکان :}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = v_\rho \hat{e}_\rho + v_\varphi \hat{e}_\varphi + v_\theta \hat{e}_\theta = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \rho \dot{\theta} \sin(\varphi) \hat{e}_\theta \quad \text{بردار سرعت :}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = a_\rho \hat{e}_\rho + a_\varphi \hat{e}_\varphi + a_\theta \hat{e}_\theta \quad \text{بردار شتاب :}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 - \rho \dot{\theta}^2 \sin^2(\varphi)) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} - \rho \dot{\theta}^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \hat{e}_\varphi + (2\dot{\rho} \dot{\theta} \sin(\varphi) + 2\rho \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \rho \ddot{\theta} \sin(\varphi)) \hat{e}_\theta$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2 + a_\theta^2} \quad \text{و} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2} \quad \text{همچنین اندازه سرعت و شتاب از روابط مقابل بدست می آید:}$$

بردار سرعت زاویه ای دستگاه های مختصات استوانه ای ، کروی و مسیری نسبت به دستگاه اینرسی با توجه به قضیه اویلر ثابت می شود که دوران های کوچک بردارند در نتیجه سرعت زاویه ای ω یک بردار است پس در دستگاه اینرسی قابل بیان است. اگر دستگاه اینرسی XYZ را در نظر بگیریم که بردار های $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ پایه ثابت در این دستگاه باشند آنگاه بردار سرعت زاویه ای دستگاه a با بردار های پایه $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ که نسبت به دستگاه اینرسی XYZ می چرخد از رابطه زیر بدست می آید:

$$\vec{\omega} = (\dot{\hat{a}}_2 \cdot \hat{a}_3) \hat{a}_1 + (\dot{\hat{a}}_3 \cdot \hat{a}_1) \hat{a}_2 + (\dot{\hat{a}}_1 \cdot \hat{a}_2) \hat{a}_3$$

برای مثال بردار سرعت زاویه ای دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر بدست می آید :

$$\hat{a}_1 = \hat{r} = \cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{a}_2 = \hat{\theta} = -\sin(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j} \quad \text{و} \quad \hat{a}_3 = \hat{z} = \hat{k}$$

$$\dot{\hat{a}}_1 = \dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta} \quad \text{و} \quad \dot{\hat{a}}_2 = \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r} \quad \text{و} \quad \dot{\hat{a}}_3 = \dot{\hat{z}} = 0$$

$$\vec{\omega} = ((-\dot{\theta} \hat{r}) \cdot \hat{k}) \hat{r} + 0 + ((\dot{\theta} \hat{\theta}) \cdot \hat{\theta}) \hat{k} = \dot{\theta} \hat{k}$$

به صورت مشابه بردار سرعت زاویه ای در دستگاه کروی به صورت زیر می باشد:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \cos(\varphi) \hat{e}_\rho - \dot{\theta} \sin(\varphi) \hat{e}_\varphi + \dot{\varphi} \hat{e}_\theta$$

و بردار سرعت زاویه ای در دستگاه منطبق بر مسیر به صورت $\vec{\omega} = \frac{\dot{s}}{\rho} \hat{e}_b = \frac{\|\vec{v}\|}{\rho} \hat{e}_b$ می باشد.

*بردار $\vec{\omega}$ عمود بر صفحه دوران بوده و جهتش از قاعده دست راست پیروی می کند.

تبدیل مشتق اول:

اگر دستگاه مرجع XYZ را با a و دستگاه مرجع xyz را با b نشان دهیم آنگاه مشتق اول هر برداری مانند $\vec{A}$ در a و b به

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_b + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{A}$$

واسطه رابطه رو به رو به هم ربط دارند:

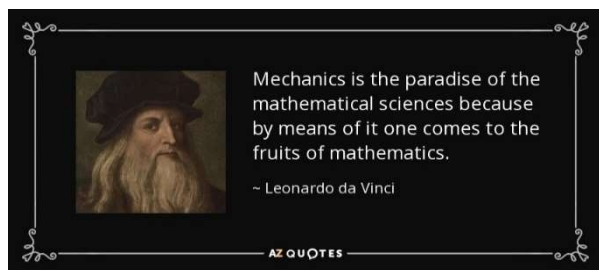
که در آن $\vec{\omega}_{b/a}$ سرعت زاویه ای دستگاه b نسبت به a است.

یکی از کاربردهای رابطه بالا محاسبه مشتق بردارهای یکه دستگاه های مختصات استوانه ای و کروی نسبت به دستگاه اینرسی کارتزین است و با استفاده از آن می توان فرمول های سرعت و شتاب را در این دستگاه ها بدست آورد. برای مثال بردار مکان در دستگاه استوانه ای به صورت $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{k}$ می باشد برای محاسبه بردار سرعت باید از این بردار نسبت به زمان (از منظر دستگاه اینرسی) مشتق بگیریم:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) + \frac{d}{dt}(z\hat{k}) \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r + \dot{z}\hat{k}$$

حال باید مشتق $\hat{e}_r$ را نسبت به دستگاه اینرسی بدست بیاوریم. با توجه به اینکه $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$ بدست می آید:

$$\dot{\hat{e}}_r = 0 + \vec{\omega} \times \hat{e}_r = (\dot{\theta}\hat{k}) \times \hat{e}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{k}$$



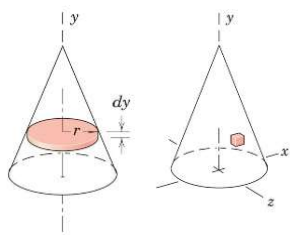
"مکانیک بهشت ریاضیات است چرا که در اینجا است که مابین ثمرات و

کار بردهای ریاضیات پی می بریم"

"لئوناردو داوینچی"

نکات المان گیری

1. مرتبه جزء (المان):

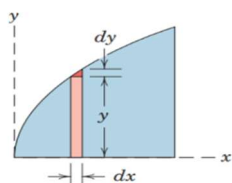


تا حد امکان جزء دیفرانسیلی با مرتبه پایین تر را باید انتخاب کرد چراکه انتگرال گیری آن راحت تر باشد. مثلاً برای شکل مخروطی به جای $dv = dx dy dz$ از $dv = \pi r^2 dy$ استفاده شود چراکه با فرض المان اول نیازمند انتگرال گیری سه گانه هستیم و با فرض المان دوم انتگرال یگانه.

2. پیوستگی:

در صورت امکان جزء را طوری انتخاب میکنیم که بتوان از آن طی یک مرحله پیوسته انتگرال گرفت و این انتگرال کل شکل را پوشش دهد. (یعنی مجبور نشویم دو یا چند انتگرال بگیریم)

3. صرف نظر از جمله های مرتبه بالا که مقادیر بسیار کوچک دارند:



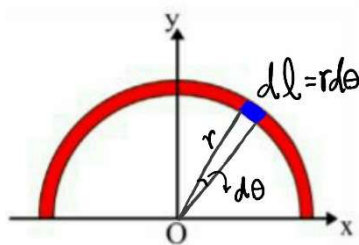
مثلاً در المان رو به رو صرف نظر از $\frac{1}{2} dx dy$ و نوشتن المان سطح به صورت صرفاً $dA = y dx$

4. انتخاب دستگاه مختصات مناسب

از دستگاه مختصاتی استفاده می کنیم که به بهترین صورت با مرزهای شکل سازگار است. مثلاً برای شکل های دایروی دستگاه قطبی مناسب تر است.

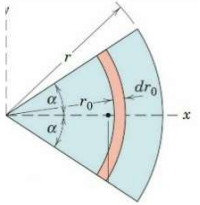
برخی از المان گیری های پرکاربرد

۱. المان طول حلقه نازک دایروی

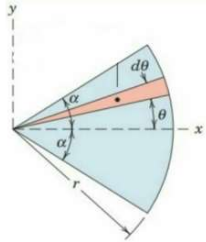


همان طور که در شکل نشان داده شده است المان طول برای یک حلقه نازک دایروی به صورت $dl = r d\theta$ می باشد که برای اثبات می توان آن را معادل با طول کمان مقابل به زاویه $d\theta$ در نظر گرفت.

۲.۱.۰ المان سطح قطاع دایروی



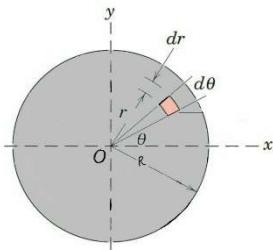
به غیر از المان سطح در مختصات قطبی $dA = r dr d\theta$ که در مسائل منجر به انتگرال دوگانه می شود داریم:
الف) مطابق شکل المان به صورت $dA = 2\alpha r_0 dr_0$ می باشد.



ب) مطابق شکل المان همان قطاع به فرم دیگر $dA = \frac{r^2}{2} d\theta$ می باشد.

روش اول اثبات : می دانیم که مساحت قطاع از رابطه $A = \frac{r^2}{2} \theta$ بدست می آید در نتیجه $dA = \frac{r^2}{2} d\theta$

روش دوم : اگر المان رو به رو را یک مثلث فرض کنیم مساحت آن به صورت $dA = \frac{1}{2}(r)(r d\theta)$ بدست می آید.



۳.۱.۰ المان سطح یک سطح دایروی (دیسک)

از مختصات قطبی داشتیم که در حالت کلی : $dA = r dr d\theta$

یک المان از مرتبه ۲ که در انتگرال گیری منجر به انتگرال دوگانه می شود.

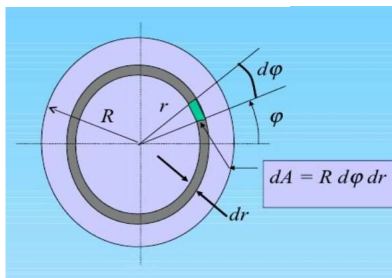
حال چون با دایره سرو کار داریم پس θ (یا ϕ تفاوتی ندارد) از ۰ تا 2π تغییر می کند در

نتیجه خواهیم داشت : $dA = 2\pi r dr$

روش دوم برای بدست آوردن این المان : $A = \pi r^2 \Rightarrow dA = 2\pi r dr$

روش سوم برای بدست آوردن المان سطح باید طول المان (محیط نوار دایروی) را در قطر

آن ضرب کنیم : $dA = (2\pi r) dr = 2\pi r dr$



۴.۱.۰ المان های استوانه و مخروط

المانی برای سطح جانبی استوانه :

با توجه به المان های دیفرانسیلی مطرح شده در مختصات استوانه ای داریم : $ds_{\text{lateral}} = r d\theta dz$

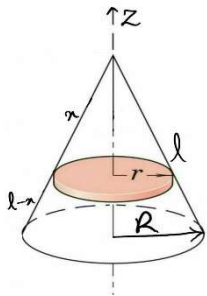
حال چون استوانه کامل را بررسی میکنیم پس r ثابت و تغییرات θ از ۰ تا 2π است در نتیجه : $ds_{\text{lateral}} = 2\pi r dz$

* با انتگرال گیری می توان فرمول مساحت جانبی استوانه را بدست آورد:
 $s = \int_0^h 2\pi r dz = 2\pi r h$

تعبیر دیگری نیز برای مساحت جانبی استوانه می توان قائل شد که مساحت جانبی برابر است با محیط قاعده المان استوانه

ای ضرب در ارتفاع استوانه یعنی : $s = 2\pi r \times h$

المانی برای سطح جانبی مخروط :



اگر مخروط مقابل را در نظر بگیریم ، طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{x}{l} = \frac{r}{R} \Rightarrow Rx = \ell r \Rightarrow Rdx = \ell dr \Rightarrow dx = \frac{\ell}{R} dr$$

$$ds_{\text{lateral}} = 2\pi r dx$$

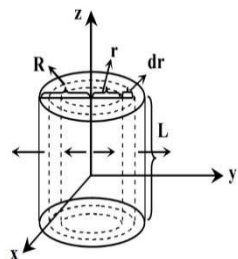
حال داریم :

* با انتگرال گیری می توانیم فرمولی برای مساحت سطح جانبی مخروط بدست آوریم :

$$S_{\text{lateral}} = \int 2\pi r dx = \int_0^R 2\pi r \frac{\ell}{R} dr = \frac{2\pi\ell}{R} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^R = \pi R \ell$$

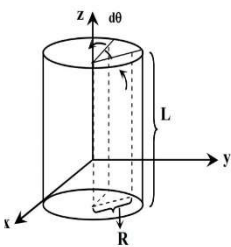
المان حجم استوانه:

المان حجم در حالت کلی در دستگاه استوانه ای $dv = r dr d\theta dz$ بود .



(الف) حالت خاصی از المان حجم در مختصات استوانه ای: اگر انتقال فقط در جهت r حائز اهمیت باشد

برای بدست آوردن المان حجم استوانه یک المان به فرم مقابل در نظر می گیریم. می دانیم مساحت جانبی استوانه (سطح عمود بر جهت r) از رابطه $A_r = 2\pi r L$ بدست می آید حال با توجه به شکل المان حجم به صورت مقابل بدست می آید: $dv = A_r dr = 2\pi L r dr$



(ب) حالت خاصی از المان حجم در مختصات استوانه ای: اگر انتقال فقط در جهت θ حائز اهمیت باشد

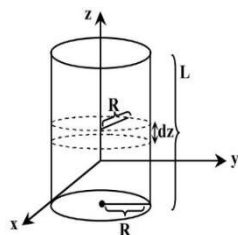
برای بدست آوردن المان حجم استوانه یک المان به فرم مقابل در نظر می گیریم. مساحت سطح عمود بر جهت θ از رابطه $A_\theta = R \cdot L$ بدست می آید . آنگاه المان حجم به صورت زیر خواهد بود

$$dv = A_\theta d\theta = R \cdot L d\theta$$

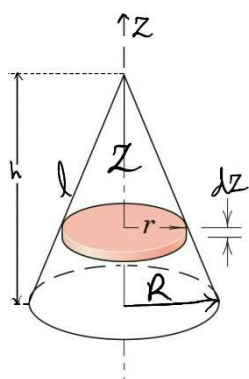
(ج) حالت خاصی از المان حجم در مختصات استوانه ای: اگر انتقال تنها در جهت z حائز اهمیت باشد

برای بدست آوردن المان حجم استوانه یک المان به فرم دیسک در نظر می گیریم که شعاع آن ثابت

است . از قبل می دانیم که مساحت سطح مقطع آن (سطح عمود بر جهت z) از رابطه $A_z = \pi R^2$ بدست می آید حال برای بدست آوردن المان حجم کافیه المان ارتفاع را در این مساحت دیسک ضرب کنیم و اگر ارتفاع را با محور z نشان دهیم خواهیم داشت: $dv = A_z dz = \pi R^2 dz$



با انتگرال گیری به راحتی می توان فرمول حجم استوانه را بدست آورد: $v = \int dv = \int_0^h \pi R^2 dz = \pi R^2 h$



حال همین تفسیر را برای مخروط نیز می توانیم بیان کنیم: در شکل ارتفاع در جهت محور Z است

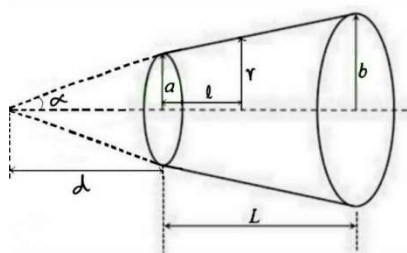
$$dv = \pi r^2 dz \quad \text{پس داریم:}$$

* به طور مشابه می توان فرمول حجم مخروط را نیز بدست آورد:

$$\frac{z}{h} = \frac{r}{R} \Rightarrow Rz = hr \Rightarrow Rdz = hdr \Rightarrow dz = \frac{h}{R} dr \quad \text{با استفاده از قضیه تالس داریم:}$$

$$v = \int dv = \int \pi r^2 dz = \int_0^R \pi r^2 \frac{h}{R} dr = \frac{\pi h}{R} \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{3} \pi R^2 h \quad \text{پس با توجه به المان حجم داریم:}$$

۵. مخروط ناقص



المان طول مخروط ناقص:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{d} = \frac{r}{d+l} \quad \text{با توجه به شکل داریم:}$$

$$a(d+l) = r(d) \Rightarrow adl = (d)dr \Rightarrow d\ell = \frac{d}{a} dr$$

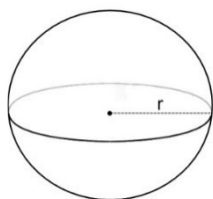
* محاسبه حجم مخروط ناقص:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{d} = \frac{b}{d+L} \Rightarrow ad + aL = bd \Rightarrow d(b-a) = aL \Rightarrow d = \frac{aL}{b-a} \quad \text{با توجه به شکل داریم:}$$

در نتیجه با توجه به المان بدست آمده در قسمت قبل داریم: $d\ell = \frac{L}{b-a} dr$ حال با در نظر گرفتن المان حجم

$$dv = \pi r^2 d\ell \quad \text{و انتگرال گیری حجم مخروط ناقص بدست می آید:}$$

$$v = \int dv = \int \pi r^2 d\ell = \int_a^b \pi r^2 \frac{L}{b-a} dr = \frac{\pi L}{b-a} \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_a^b = \frac{1}{3} \pi L \frac{b^3 - a^3}{b-a} = \frac{\pi L}{3} (b^2 + ab + a^2)$$



۶. المان حجم کره کامل

همانطور که گفته شد المان حجم در حالت کلی در مختصات کروی به صورت $dv = \rho^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta d\rho$

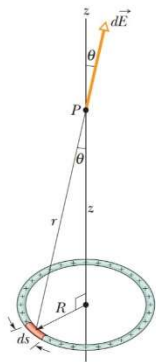
یا با فرض اینکه متغیر شعاعی r باشد $dv = r^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta dr$ می باشد. حال در کره کامل تغییرات

پارامتر φ و θ ثابت است؛ φ از 0 تا π و پارامتر θ از 0 تا 2π تغییر می کند و تنها پارامتر شعاعی r تغییر می کند. پس

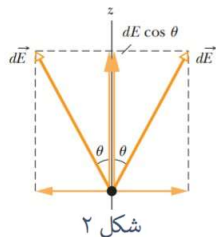
با انتگرال گیری از المان بالا نسبت به و المان حجم کره کامل به صورت $dv = 4\pi r^2 dr$ بدست می آید.

$$dv = \left(\int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \right) r^2 dr = 2 \times 2\pi \times r^2 dr = 4\pi r^2 dr$$

$$dv = 4\pi r^2 dr$$



شکل ۱



شکل ۲

مثال از کاربرد المان ها در فیزیک ۲ و دینامیک

۱. محاسبه میدان الکتریکی حاصل از یک حلقه باردار به شعاع R با

بار خطی λ در فاصله z از مرکز حلقه

با توجه به المان دیفرانسیلی میدان و متقارن بودن حلقه با رسم دو بردار المان مطابق با شکل ۲ می توان نتیجه گرفت که برآیند میدان در راستای محور X و Y صفر و فقط در راستای محور Z مقدار دارد پس مقدار المان میدان برآیند به صورت زیر بدست می آید: $dE_t = dE \cos(\theta)$ با در نظر گرفتن مقدار المان میدان داریم:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}, \quad dq = \lambda ds \text{ و } ds = R d\phi \Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi}{r^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \text{ و } r^2 = R^2 + z^2 \text{ با توجه به شکل ۱ بدست می آید که}$$

در نتیجه برای محاسبه مقدار میدان برآیند به صورت زیر عمل می کنیم:

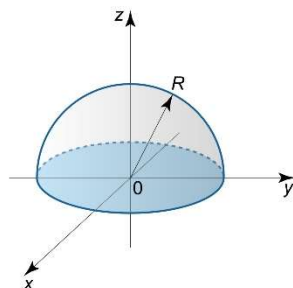
$$E = \int dE_t = \int dE \cos(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{r^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} d\phi = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi$$

$$E = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

و جهت بردار $\vec{E}$ در راستای مثبت محور Z می باشد: $\vec{E} = E\hat{k}$

۲. محاسبه میدان الکتریکی ناشی از نیمکره باردار با چگالی $\sigma = \sigma_0 \cos(\phi)$ و به شعاع R در مرکز

نیمکره



*توجه داشته باشید در این مثال همانطور که بیان شد به دلیل تعریف پارامترهای مختصات کروی در درس فیزیک تعریف پارامترهای θ, ϕ به جای یکدیگر است یعنی θ نشاندهنده زاویه بین المان با جهت مثبت محور Z و ϕ نشاندهنده زاویه بین تصویر المان (r) در صفحه XY با جهت مثبت محور X است. همچنین مختصه شعاعی را در مختصات کروی با r نشان می دهیم.

این سوال را به روش برداری حل می کنیم:

$\vec{r} = 0$: بردار مکان نقطه ای که می‌خواهیم میدان را محاسبه کنیم

$\vec{r}' = R\hat{r} = R(\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k})$: بردار مکان المان

$dA = R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta$: المان سطح جانبی کره

$$dq = \sigma dA = (\sigma_0 \cos(\varphi))(R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta) = \sigma_0 R^2 \cos(\varphi) \sin(\theta) d\varphi d\theta$$

$$\vec{E} = \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R\hat{r} = -R(\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k}) \quad \text{و} \quad \|\vec{r} - \vec{r}'\| = R$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-R(\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k}) \times R^2 \cos(\varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi}{R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) d\theta d\varphi \right) \hat{i} + \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\theta d\varphi \right) \hat{j} + \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta d\varphi \right) \hat{k} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) d\theta d\varphi \right) \hat{i} + \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \frac{\sin(2\varphi)}{2} d\theta d\varphi \right) \hat{j} + \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\theta)}{2} \cos(\varphi) d\theta d\varphi \right) \hat{k} \right]$$

انتگرال ضریب $\hat{j}$ به دلیل صفر شدن $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\varphi)}{2} d\varphi = -\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0$ و انتگرال ضریب $\hat{k}$ به دلیل صفر

شدن $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = \sin(\varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0$ صفر می‌شود پس فقط کافیس انتگرال ضریب $\hat{i}$ را محاسبه کنیم.

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) d\theta d\varphi \right) \hat{i} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\theta d\varphi \right) \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \right) \hat{i} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi \left(\frac{1}{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta)) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi \right) \hat{i} = \frac{-\sigma_0}{16\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} (\varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi)) \Big|_0^{2\pi} \right) \hat{i} = \frac{-\sigma_0 \pi}{16\epsilon_0} \hat{i}$$

مثالی از دینامیک

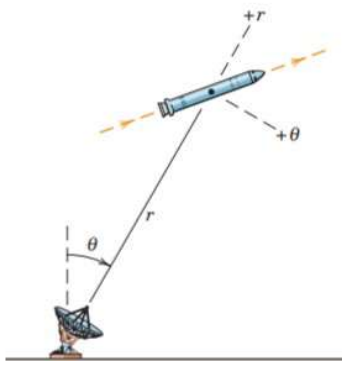
یک رادار در یک صفحه عمودی، مسیر راکتی را که با موتور خاموش بالای جو در حال حرکت است، ردیابی می کند.

موقعی که $\theta = 30^\circ$ است، داده های ردیابی عبارتند از: $r = 80 \text{ km}$ ، $\dot{r} = 1200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\dot{\theta} = 0.8 \frac{\text{deg}}{\text{s}}$

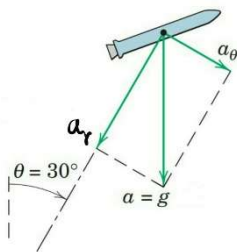
شتاب راکت فقط ناشی از نیروی جاذبه بوده و در آن ارتفاع خاص برابر $9.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ عمودی و به طرف پایین می باشد. در این شرایط سرعت v راکت و مقادیر $\ddot{r}$ ، $\ddot{\theta}$ را بدست آورید.

با توجه به معادلات سرعت داریم:

$$\vec{v}(t) = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$



$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(1200)^2 + (1117)^2} = 1639 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



چون شتاب کل راکت برابر $g = 9.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و به طرف پایین است، به سادگی می توان مولفه های r ، θ را برای موقعیت های داده شده بدست آورد. این مولفه ها مطابق شکل عبارتند از:

$$a_r = -9.2 \cos(30) = -7.97 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_\theta = 9.2 \sin(30) = 4.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

اکنون برای بدست آوردن مجهولات کافیت به رابطه شتاب در مختصات قطبی توجه کنیم:

$$\vec{a}(t) = a_r \hat{e}_r + a_\theta \hat{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

$$\ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = -7.97 + 8 \times 10^4 \times \left(0.8 \times \frac{\pi}{180}\right)^2 = 7.63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{r}(a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{8 \times 10^4} (4.6 - 2 \times 1200 \times 0.8 \times \frac{\pi}{180}) = -3.61 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

معادله لاپلاس و توابع هارمونیک

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی "بیضوی" است که در مدل سازی کمیت های مختلف مانند توزیع دمای حالت پایدار، شارش سیال ها و میدان های پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی کاربرد دارد.

فرم کلی این معادله به صورت $\nabla^2 f = 0$ است که در آن $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک تابع n متغیره اسکالر است.

معادله لاپلاس در مختصات کارتزین:

با فرض $f = f(x, y)$ در حالت ۲ بعدی داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{یا} \quad f_{xx} + f_{yy} = 0$$

و با فرض $f = f(x, y, z)$ در حالت سه بعدی:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{یا} \quad f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

با فرض $u = u(r, \theta)$ معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت رو به روست:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

با فرض $u = u(r, \theta, z)$ معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$$

با فرض $u = u(\rho, \varphi, \theta)$ معادله لاپلاس در مختصات کروی:

$$\nabla^2 u = u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot(\varphi)}{\rho^2} u_{\varphi} + \frac{1}{(\rho \sin(\varphi))^2} u_{\theta\theta} = 0$$

به تابعی که دارای مشتقات جزئی پیوسته مرتبه دوم باشد و در معادله لاپلاس صدق کند (لاپلاسی آن صفر باشد) تابع همساز، هارمونیک^{۴۶} یا توافقی می گویند. این توابع از هر مرتبه مشتق دارند و تحلیلی اند و فقط روی مرز دامنه خود دارای ماکسیمم و مینیمم اند.

خلاصه تبدیلات پارمترهای دستگاه های مختصات

از به	کارتزین	استوانه ای	کروی
کارتزین	-	$x = r \cos(\theta)$ $y = r \sin(\theta)$ $z = z$	$x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta)$ $y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta)$ $z = \rho \cos(\varphi)$
استوانه ای	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$	-	$r = \rho \sin(\varphi)$ $z = \rho \cos(\varphi)$ $\theta = \theta$
کروی	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$	$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right)$ $\theta = \theta$	-

خلاصه تبدیلات بردارهای پایه دستگاه های مختصات

کروی استوانه ای	$\hat{\rho}$	$\hat{\varphi}$	$\hat{\theta}$
$\hat{r}$	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	0
$\hat{\theta}$	0	0	1
$\hat{z}$	$\cos(\varphi)$	$-\sin(\varphi)$	0

کارتزین استوانه ای	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{r}$	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	0
$\hat{\theta}$	$-\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	0
$\hat{z}$	0	0	1

کارتزین کروی	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{\rho}$	$\sin(\varphi) \cos(\theta)$	$\sin(\varphi) \sin(\theta)$	$\cos(\varphi)$
$\hat{\varphi}$	$\cos(\varphi) \cos(\theta)$	$\cos(\varphi) \sin(\theta)$	$-\sin(\varphi)$
$\hat{\theta}$	$-\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	0

برای مثال بردار $\hat{i}$ بر حسب بردارهای پایه مختصات کروی به صورت زیر خواهد بود :

$$\hat{i} = \sin(\varphi) \cos(\theta) \hat{\rho} + \cos(\varphi) \cos(\theta) \hat{\varphi} - \sin(\theta) \hat{\theta}$$

ماتریس های تبدیل یک بردار در دستگاه های مختصات

در واقع ماتریس تبدیل همان تبدیل بردار های یکه است که در جدول بالا آمده است.

ماتریس تبدیل مختصات کارتزین به استوانه ای و برعکس:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix}$$

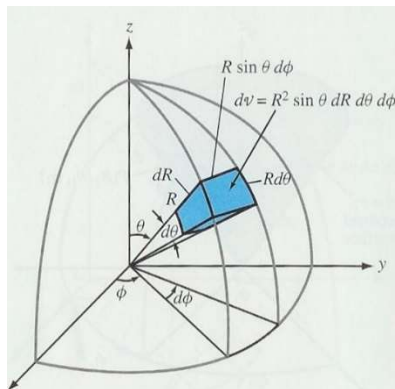
ماتریس تبدیل مختصات کارتزین به کروی و برعکس:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل مختصات کروی به استوانه ای و برعکس:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix}$$



خلاصه فرمول های دستگاه کروی با پارامترهای R, θ, ϕ کاربردی در فیزیک

حدود پارامترها در این دستگاه: $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq R < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x = R \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = R \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = R \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{روابط تبدیل پارامترهای دستگاه کروی به دکارتی:}$$

*برخی روابط مهم در تبدیلات بین دستگاه های کارترین، استوانه ای و کروی:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2} \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = R \sin(\theta)$$

$$\tan(\phi) = \frac{y}{x} \quad , \quad \tan(\theta) = \frac{r}{z} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{z}{R}$$

بردارهای پایه

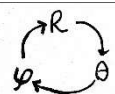
بردار یکه در جهت افزایش θ : $\hat{\theta} = \hat{e}_\theta$

بردار یکه در جهت افزایش R : $\hat{R} = \hat{e}_R$

بردار یکه در جهت افزایش ϕ : $\hat{\phi} = \hat{e}_\phi$

*برای ضرب خارجی این بردارها داریم:

$$\hat{e}_R \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \quad \text{و} \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_R \quad \text{و} \quad \hat{e}_\phi \times \hat{e}_R = \hat{e}_\theta$$



*تبدیل بردارهای پایه مختصات کروی به کارترین:

$$\hat{R} = \hat{e}_R = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \hat{e}_\theta = \cos(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + \cos(\theta) \sin(\phi) \hat{j} - \sin(\theta) \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = \hat{e}_\phi = -\sin(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j}$$

مشتق بردارهای پایه نسبت به زمان

$$\frac{d\hat{e}_R}{dt} = \dot{\hat{e}}_R = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin(\theta) \hat{e}_\phi \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\phi} \cos(\theta) \hat{e}_\phi - \dot{\theta} \hat{e}_R \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = \dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi} \sin(\theta) \hat{e}_R - \dot{\theta} \cos(\theta) \hat{e}_\theta$$

* نمایش هر بردار $\vec{A}$ در مختصات استوانه ای به صورت $\vec{A} = A_R \hat{R} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$ و نمایش بردار مکان به صورت $\vec{r} = R \hat{e}_R$ می باشد.

*المان دیفرانسیلی طول در مختصات کروی:

$$\vec{d\ell} = dR\hat{R} + R d\theta\hat{\theta} + R \sin(\theta) d\varphi\hat{\phi} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \vec{d\ell}_R = dR\hat{R} \\ \vec{d\ell}_\theta = R d\theta\hat{\theta} \\ \vec{d\ell}_\varphi = R \sin(\theta) d\varphi\hat{\phi} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} d\ell_R = dR \\ d\ell_\theta = R d\theta \\ d\ell_\varphi = R \sin(\theta) d\varphi \end{cases}$$

*المان دیفرانسیلی سطح در مختصات کروی:

(۱) المان سطح عمود بر جهت R (سطح خارجی (جانبی) کره):

$$\vec{ds}_R = R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta \hat{R} \quad \text{و} \quad ds_R = R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta$$

(۲) المان سطح عمود بر جهت θ (سطح جانبی مخروط): $ds_\theta = R \sin(\theta) d\varphi dR$ و $\vec{ds}_\theta = R \sin(\theta) d\varphi dR \hat{\theta}$

(۳) المان سطح عمود بر جهت φ : $ds_\varphi = R d\theta dR$ و $\vec{ds}_\varphi = R d\theta dR \hat{\phi}$

**المان دیفرانسیلی حجم در مختصات کروی :

$$dv = R^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dR$$

در مختصات کروی جزء دیفرانسیلی زاویه فضایی برابر است با $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, \varphi)} = -R^2 \sin(\theta) \quad \text{ژاکوبین در مختصات کروی} :$$

پس برای انتگرال گیری سه گانه پس از تغییر متغیر طبق قضیه فوبینی خواهیم داشت:

$$dv = dx dy dz = |J| dR d\theta d\varphi = R^2 \sin(\theta) dR d\theta d\varphi$$

ضرایب مقیاس:

$$h_R = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} \right\| = 1, \quad h_\varphi = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| = R \sin(\theta), \quad h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = R$$

عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات کروی :

با $f = f(R, \theta, \varphi)$ به عنوان میدانی اسکالر و میدان برداری $\vec{F} = F_R(R, \theta, \varphi)\hat{R} + F_\theta(R, \theta, \varphi)\hat{\theta} + F_\varphi(R, \theta, \varphi)\hat{\phi}$ که مؤلفه های میدان برداری می باشند، تابعی سه متغیره از R, θ, φ باشند داریم:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial R} \hat{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\phi} \quad \text{گرادیان} :$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad \text{لاپلاسین} :$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 F_R) + \frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) F_\theta) + \frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad \text{دیورژانس :}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{R^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & R\sin(\theta)\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_R & RF_\theta & R\sin(\theta)F_\phi \end{vmatrix} \quad \text{کرل :}$$

$$\vec{r}(t) = R\hat{e}_R \quad \text{بردار مکان :}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = v_R \hat{e}_R + v_\theta \hat{e}_\theta + v_\phi \hat{e}_\phi = \dot{R}\hat{e}_R + R\dot{\theta}\hat{e}_\theta + R\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{e}_\phi \quad \text{بردار سرعت :}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = a_R \hat{e}_R + a_\theta \hat{e}_\theta + a_\phi \hat{e}_\phi \quad \text{بردار شتاب :}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta))\hat{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2 \sin(\theta)\cos(\theta))\hat{e}_\theta + (2\dot{R}\dot{\phi}\sin(\theta) + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta) + R\ddot{\phi}\sin(\theta))\hat{e}_\phi$$

خلاصه فرمول های خم

پارامتری بر حسب طول قوس s	پارامتری بر حسب پارامتر t	
$\hat{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$	$\hat{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}}{\ \dot{\vec{r}}\ } = \frac{\vec{v}}{\ \vec{v}\ }$	بردار یکه مماس
$\kappa(s) = \left\ \frac{d\hat{T}}{ds} \right\ = \left\ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\ $	$\kappa(t) = \frac{\ \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\ }{\ \dot{\vec{r}}\ ^3} = \frac{\ \vec{v} \times \vec{a}\ }{\ \vec{v}\ ^3}$	انحنای
$\hat{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = \rho(s) \vec{r}''(s)$	$\hat{N}(t) = \frac{\dot{\hat{T}}}{\ \dot{\hat{T}}\ } = \frac{\dot{\hat{T}}}{\kappa \ \dot{\vec{r}}\ }$	بردار یکه قائم اول (اصلی)
$\hat{B}(s) = \hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$	$\hat{B}(t) = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\ \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\ } = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\kappa \ \dot{\vec{r}}\ ^3}$	بردار یکه قائم دوم (فرعی)
$\frac{d\hat{B}(s)}{ds} = -\tau(s) \hat{N}(s)$	$\tau(t) = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{\ \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\ ^2}$	تاب

منابع و مراجع

۱. ربانی، حسین: «آنالیز برداری»، انتشارات پلی تکنیک تهران ، ۱۳۵۸
۲. آرفکن، جورج براون : «روش های ریاضی در فیزیک» ، مرکز نشر دانشگاهی تهران ، ۱۳۶۳
۳. بوس، مری : «روش های ریاضی در علوم فیزیکی» ، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۴
۴. قولتوقچیان ، هایک: «ریاضی فیزیک ۱» ، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ، ۱۳۷۷
۵. کریزیگ، اروین : «ریاضیات مهندسی پیشرفته» ، دالفک تهران ، ۱۳۷۷
۶. آپوستل، تام : «حساب دیفرانسیل و انتگرال» ، مرکز نشر دانشگاهی ، ۱۳۶۶
۷. توماس ، جرج برینتون: «حساب دیفرانسیل و انتگرال» ، مرکز نشر دانشگاهی ، ۱۳۷۰
۸. مارون، ایزاک : «حساب دیفرانسیل و انتگرال» ، انتشارات علوی ، ۱۳۶۶
۹. استوارت، جیمز : «حساب دیفرانسیل و انتگرال» ، دانشگاه علم و صنعت ، ۱۳۷۹
۱۰. آدامز، رابرت الگزاندر: «حساب دیفرانسیل و انتگرال» ، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ، ۱۳۸۴
۱۱. فرامرزی، حسین : «ریاضی عمومی ۲»، ۱۳۹۲
۱۲. هالیدی، دیوید : «مبانی فیزیک» ، مرکز نشر دانشگاهی ، ۱۳۹۰
۱۳. چنگ، دیوید کئون : «الکترومغناطیس میدان و موج» ، دانشگاه تهران ، ۱۳۷۵
۱۴. هیت ، ویلیام هارت : «الکترومغناطیس مهندسی» ، نشر علوم دانشگاهی ، ۱۳۸۰
۱۵. مریام ، جیمز : «دینامیک» ، مرکز نشر دانشگاهی ، ۱۳۷۱
۱۶. نیکخواه بهرامی، منصور : «دینامیک برداری» ، انتشارات دانشگاه تهران ، ۱۳۸۰

به اضافه تعداد زیادی از جزوات ریاضی ۲ ، فیزیک ۲ و دینامیک که چکیده مطالب آن در این جزوه آمده است.

Mahdi shahrajabian

خود را به بلندای سعادت برساند	آنکس که بداند و بخواهد که بداند
اسب شرف از گنبد گردون بجهاند	آنکس که بداند و بداند که بداند
با کوزه ی آب است ولی تشنه بماند!	آنکس که بداند و نداند که بداند
لنگان خرک خویش به مقصد برساند!!	آنکس که نداند و بداند که نداند
جان و تن خود را ز جهالت برهاند!	آنکس که نداند و بخواهد که بداند
در چهل مرکب ابدالدهر بماند!!	آنکس که نداند و نداند که نداند
حیف است چنین جانوری زنده بماند!!! ^{۴۷}	آنکس که نداند و نخواهد که بداند

۴۷. این شعر از کتاب معراج السعادة "ملاً احمد نراقی" اقتباس شده است اما برخی شاعر آن را "ابن یمین" یا "مولانا" دانسته اند.