بخش اول: خلاصه خالص از کل درس آمار و مدلسازی

① تعاریف و حفظیات (ر م ج پ ا ح)

* مدل سازی: بیان مسئله به زبان ریاضی، مدل مناسب: ابتدایی، ساده و نتیجه به پدیده مورد نظر نزدیک

* اندازه گیری: برای مدلسازی عدد و رقم لازمه و اندازه گیری اولین گام برای رسیدن به اطلاعات عددی و قابل تفسیره و معنا و واحد داره.

* خطای اندازه گیری: مقدار واقعی منهای مقدار اندازه گیری شده. $|E|<1$ و از جملات E^2 به بالا صرفنظر می‌کنیم چون کمن!

* جامعه آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیا که می‌خوایم در مورد شون موضوعی رو مطالعه کنیم. به تعداد اعضای اون اندازه جامعه که متناهیه!

* نمونه آماری: بدلیل مشکلات سرشماری در بررسی کل جامعه که خط پایین اشاره می‌کنیم؛ زیرمجموعه‌ای از جامعه انتخاب می‌کنیم شامل همه خصوصیات

* سرشماری: اگر تمام اعضای جامعه رو مورد مطالعه قرار بدیم و نمونه گیری نکنیم در واقع سرشماری کردیم. اندازه جامعه = اندازه نمونه

* مشکلات سرشماری: در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه، وقت گیر بودن، مقرون به صرفه نبودن، از بین رفتن جامعه یا قسمتی از آن

* نمونه تصادفی و ویژگیهاش: امکان پذیر بودن انتخاب هر عضو از جامعه، اعضا دارای شانس یکسان جهت انتخاب

* روش‌های جمع آوری داده: استفاده از داده‌های قبلی، پرسش‌ها (مصاحبه)، مشاهده، ثبت وقایع، انجام آزمایش. قبلاً هم چندبار تو کنکور سوال داشته.

* پرسشنامه: سازماندهی محتوا، هدف، فهرست، سوالات واضح و ساده و کمک کلمه‌ای (وضعیت تزئیناتی)، عدم جمع آوری اطلاعات اضافی، دستورالعمل، تشکر

* متغیرهای تصادفی: به موضوع یا موضوعات مورد مطالعه مثل قد و وزن و رنگ و سن و ... که به دو دسته کمی و کیفی تقسیم می‌شن

* متغیرهای کمی: قابل اندازه گیری
  - پیوسته: وزن، قد، طول، میزان آلودگی هوا، معدل
  - گسسته: تعداد هر چی، طبقات ساختمان حتی اگر نیم طبقه هم داشته باشه، درصد

* متغیرهای کیفی: قابل اندازه گیری نیستن
  - اسمی: گروه خونی، R_H، رنگ مو، رنگ پوست، نوع آلودگی
  - ترتیبی: فصل‌های سال، مراحل زندگی، مراحل تحصیلی، مراحل رشد.

* اولین‌ها!: اولین گام جهت رسیدن به اطلاعات عددی اندازه گیریه، اولین قدم در بررسی جامعه داده‌ای، دسته بندیه

* مهم ترین بخش آمار: عمل نمونه گیری که باید به اندازه کافی بزرگ باشه و اگر جامعه کوچیک باشه سرشماری بهتره.

* الگوهای آماری: آنچه بین نتایج دو نمونه گیری تصادفی مناسب مشترک است. نتایج دو نمونه گیری هرگز دقیقاً مساوی نیستن.

* مطالعه متغیرها: در مطالعه متغیرهای گسسته جدول فراوانی بودن داشتنی ولی اگر پیوسته باشه این روش عملی نیست. داده‌ها یا نمایش

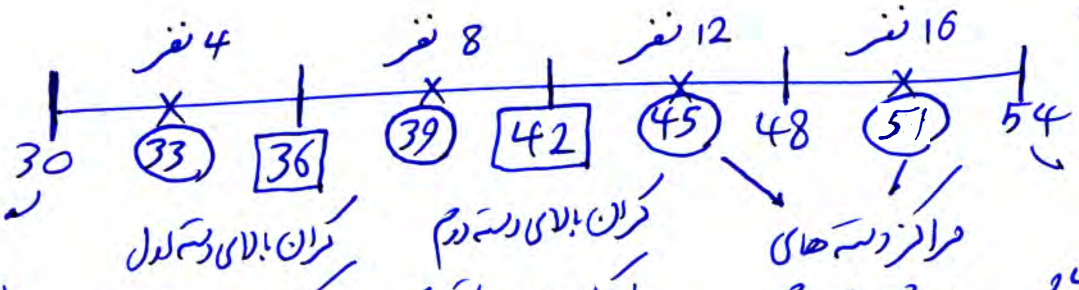
* روش تعیین اعداد تصادفی: عدد RAN رو که یک عدد تصادفی می‌کن در تعداد اعضای نمونه ضرب می‌کنیم و جزء صحیح براکتش رو +1 ... اولین شماره‌ها

② دسته بندی داده ها و انواع فراوانی و نمودارهای آماری

اولاً برای حل سوالات دسته بندی حتماً محور بکش. اصلاً نیازی به حفظ هیچ فرمولی نداری. مثلاً یه همچین یه سوال خوب و جامع از دسته بندی داده ها برات حل کنم. یه کلینیک فوق تخصصی و مجهز توسط آقای خالیباف در تهران افتتاح شده!! و برای 40 پزشک متخصص از 30 ساله تا 54 ساله در این کلینیک اشتغال زایی شده. بریم سراغ داده های مربوط به سن پزشکان عزیزمون.

ساقه	برگ
3	0 1 2 5 6 7 7 8 8 8 9 9
4	2 2 2 3 3 4 5 5 5 5 6 6 8 8
5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 3 4 4

* اولین قدم برای بررسی و کار آماری دسته بندیه. پس یه محور میکشیم: مثلاً به 4 دسته تقسیم میکنیم.

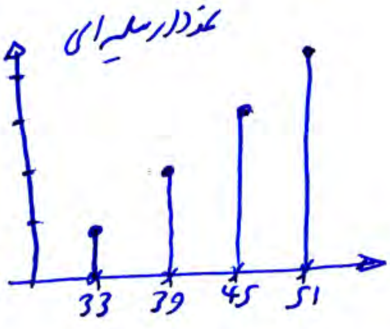


طول دسته = 6

دامنه تغییرات = 24

حدود دسته	30-36	36-42	42-48	48-54
مرکز دسته	33	39	45	51
فراوانی مطلق	4	8	12	16
فراوانی نسبی	4/40	8/40	12/40	16/40
درصد	%10	%20	%30	%40
زاویه	36°	72°	108°	144°
فراوانی تجمعی	4	12	24	40

حالا یه جدول فراوانی کامل براش تنظیم میکنیم:

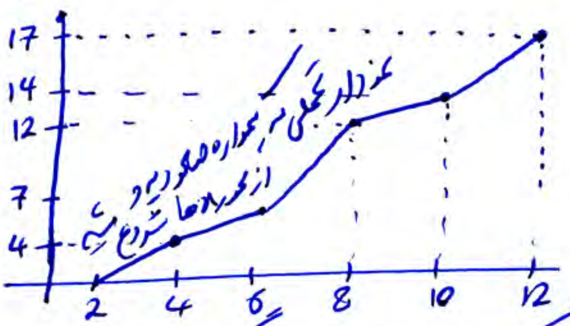


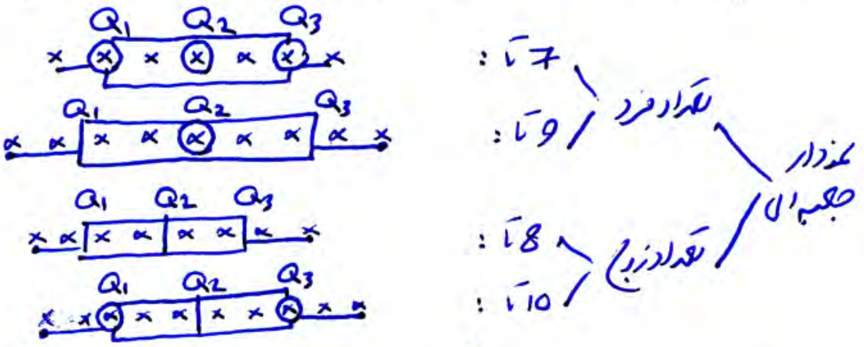
Box Plot

* اگه نوک میله‌ها رو توسط یه پاره‌خط باهم وصل کنیم چند بر فراوانی بدست میاد ولی کامل نیست

برای کامل شدن از مرکز دسته اول به اندازه طول دسته به عقب و از مرکز دسته آخر به اندازه طول دسته جلو میریم و نمودار چند بر کامل ساخته میشه. با این تدبیر سطح زیر چند بر و مستطیل‌ها باهم برابر میشن. یک مثال حل میکنیم.

حدود	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
مرکز	3	5	7	9	11
فراوانی	4	3	5	2	3
تجمعی	4	7	12	14	17





③ شاخص‌های مرکزی :

- Mean ← میانگین
  - ۱- میانگین حدسی
  - ۲- میانگین جدولی
  - ۳- میانگین ساده و وزنی
- Mode ← داده وسطی
- Median ← میانه
  - فرد: داده وسطی
  - زوج: میانگین دو داده وسطی

۱- روش میانگین حدسی

برای داده‌هایی که فراوانی ندارن بهترین راهه. اول یک عددی که تقریباً وسطه و حدس میزنیم که به میانگین نزدیکه انتخاب میکنیم. بعد انحرافات از اون عدد رو باهم جمع میکنیم و آخر تقسیم بر تعداد.

مثلاً میخوایم میانگین نمرات این بچه رو حساب کنیم:
نمرات وزن ندارن یعنی همه یه واحدن

12, 15, 16, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 20

شما حدس میزنین معدلش چنده؟ یه 12 داره 7 تا 18، 19، 20. پس معدلش بیشتر به سمت 18 باید باشه.

من حدس میزنم 18 ! اول 18 رو می‌نویسم و بعد دونه دونه از 18 کم میکنم. به اعدادی که بدست میاد میگن انحراف از میانگین که اگه میانگین حدسی درست باشه جمع اونا حتماً صفر میشه!

12-18 15-18 16-18 18-18 19-18 20-18

$$18 + \frac{-6-3-2+0+0+1+1+1+2+2}{10} = 18 - \frac{4}{10} = 17.6$$

اگه 17 هم حدس میزدم با اضافه 0.6 میشد همین عدد بدست میومد.

P.4

2 - روش میانگین جدولی

وقتی جدول فراوانی برما داده میشه دو حالت وجود داره

تعداد دسته‌ها فرد ← دسته وسط رو از همه کم میکنیم

تعداد زوج ← یا یکی از دو داده وسط کم میشه

← یا میانگین دو داده وسط

	-12	-6	0	6	12
x_i	110	116	122	128	134
f_i	5	8	15	12	10

مرکز دسته وسط 122 پس همه منهای 122

ستون اول را آخر ببین: 10 تا 12 و 5 تا 12- میشه 5 تا 12 یعنی 60 ها

ستون دوم و یکی به آخر ببین: 6 تا 12 و 8 تا 6- میشه 4 تا 6 یعنی 24 ها

$$122+\frac{60+24}{50}=122+\frac{84}{50}=122+\frac{168}{100}=122+1.68=123.68$$

میانگین 18

	-6	-2	2	6
x_i	12	16	20	24
f_i	1	2	4	3

فرض شد میانگین دو داده‌ی وسطی که چون زوج بود از همه‌ی داده‌ها 18 را هم کم کردیم.

توی ستون اول را آخر 3 تا 6 و یدونه 6- داریم که میشه $2\times6=12$

توی دو تا ستون وسط هم میشه $2\times2=4$

$$\bar{X}=18+\frac{12+4}{10}$$

$$\bar{X}=19.6$$

	-6	-3	0	3
x_i	~~12~~	~~15~~	~~18~~	~~21~~
$\%f_i$	%15	%30	%25	%30

اینجا دیگه درصد فراوانی هستن و نیازی به تقسیم بر کل نیست. اگه دقت کنید میانگین 15 و 18 میشه 16.5 و اصلاً انتخاب مناسبی نیست. اگه 18 تا از همه کم کنیم ستون دوم و آخر کاملاً قرینه میشن و باهم میپرن و فقط میمونه: $-6\times\frac{15}{100}=-0.9$: $\bar{X}=17.1$

3- روش میانگین ساقه و برگ

اگر داده‌ها برخلاف اولین نمودار ساقه و برگ در ستون اعشار داشته باشن صورت سوال به این موضوع اشاره میکنه ولی اگر چیزی نگفت یکان - دهگانه. آخرین باری که اعشاری دادن سال 86 بود. برای محاسبه میانگین تو این حالت بهتره ساقه‌ها جدا محاسبه بشه و برگها هم جدا:

ساقه	برگ
8	0 0 1 2 2 5 6 7
9	1 1 2 3 3 4 5 5
10	1 1 2 2

مثلاً تو نمودار روبرو 8 تا 8 و 8 تا 9 و 4 تا 10 داریم که در مجموع میشه 64 + 72 + 40 یعنی 176. حالا وقتشه که برگها رو بشماریم. 5 تا 0.1 داریم میشه $\boxed{0.5}$. 5 تا 0.2 داریم میشه $\boxed{1}$. دو تا 0.3 و یه 0.4 که اونم میشه $\boxed{1}$. 3 تا 0.5 که میشه $\boxed{1.5}$. آخرش هم یه 0.6 و یه 0.7 که میشه $\boxed{1.3}$ و جمع همه‌ی اعشارها 5.3 که اگه این عدد رو با 176 جمع کنیم میشه 181.3 و حالا تقسیم بر 20.

$$181.3 \div 20 = \boxed{9.06}$$

180

130

120

P.5

④ شاخص های پراکندگی

۱- دامنه تغییرات (R) ← بدرد نمی خوره چون دم دمیه!
۲- واریانس (σ^2) ← خوبه ولی دو تا اشکال داره!
۳- انحراف معیار (σ) ← یه اشکال داره!
۴- ضریب تغییرات (CV) ← اشکال نداره!!

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

روش تعیین واریانس

گام اول: میانگین ← کلا هر شاخصی رو که بخوای اول باید $\bar{X}$ رو حساب کنی

گام دوم: دونه دونه داده هارو از میانگین

$(x_1 - \bar{X}) + \dots + (x_n - \bar{X})$

گام سوم: به بالایی ها بین مجموع انحرافات از میانگین که چون صفره کمک میرانتشون به توان 2!

گام چهارم: تقسیم بر تعداد. اگر فراوانی داشتیم ثبت هر انحراف فراوانیش و آخر تقسیم بر کل!

اشکالات واریانس

۱- توی مرحله سوم مجبوریم به توان 2 برسونیم پس بعد یا معیار تغییر می کنیم پس جذر می گیریم که میشه (σ) انحراف معیار

۲- تقسیم بر میانگین نکنیم میشه ضریب تغییرات!

1, 2, 3, 4, 5

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2} \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

x_i	8	9	10	11	12
	-2	-1	0	1	2
f_i	3	2	12	6	1

بریم دونه دونه!

$$\bar{X} = 10 + \frac{-4+4}{24} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{3(8-10)^2 + 2(9-10)^2 + 6(11-10)^2 + 1(12-10)^2}{24} = 1$$

✳ اگر مجموع مربعات یا مجموع مجذورات یا میانگین مساحت ها رو داد واریانس اینجوری محاسبه میشه:

تنها فرمول کل آمار! ←

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجموع مربعات}}{\text{تعداد}} - (\bar{X})^2 = \text{میانگین مساحت ها} - (\bar{X})^2$$

⑤ اثر تغییرات بر شاخص ها

هر بلایی سر تک تک داده ها بیاد سر شاخص های مرکزی هم میاد یعنی همه داده ها a برابر بشن و با b جمع بشن میانگین و میانه و مد هم همین میشه ولی اگه بمیره! b جمع بشن σ^2 و σ تغییر نمی کنه.

فقط اگه a برابر بشن σ^2: a^2 برابر میشه و σ: $|a|$ برابر. CV هم که باید بررسی بشه.

$$\text{ضریب تغییرات جدید به قدیم} = \frac{CV_{new}}{CV_{old}} = \frac{\frac{\sigma'}{\bar{X}'}}{\frac{\sigma}{\bar{X}}}$$

بخش اول: خلاصه خالص از کل مبحث آنالیز ترکیبی و احتمال (ارم دج پ اح)

① مفاهیم اولیه لازم از آنالیز ترکیبی

* فاکتوریل: تعداد حالات کنار هم قرار گرفتن n شی متمایز در یک صف، ردیف یا لیست میشه $n!$.

$0!=1\ ,\ 1!=1\ ,\ 2!=1\times2\ ,\ 3!=1\times2\times3\ ,\ 4!=1\times2\times3\times4\ ,\ \dots$

* ترکیب: r از n $\binom{n}{r}$ یعنی انتخاب r شی متمایز از بین n شی متمایز که چون ترتیب در یک انتخاب کردن مهم نیست تعداد ترکیب‌ها همون تعداد زیرمجموعه‌هاست. یعنی وقتی میگم $\binom{n}{0}$ یعنی تهی یا $\binom{n}{1}$ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی از یک مجموعه n عضوی که n میشه و وقتی میگم $\binom{n}{n}$ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی یعنی همون 1 و یا $\binom{n}{n-1}$ تعداد زیرمجموعه‌های n-1 عضوی و اون هم n میشه.

$$\underset{1}{\binom{n}{0}}\quad \underset{n}{\binom{n}{1}}\quad \cdots \quad \underset{n}{\binom{n}{n-1}}\quad \underset{1}{\binom{n}{n}}$$

حالا اون وسطی‌ها میشن $\binom{n}{2}$ و $\binom{n}{3}$ و ...

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\ ,\ \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ ,\ \binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\longrightarrow\binom{7}{5}=\binom{7}{2}\ ,\ \binom{10}{7}=\binom{10}{3}\ ,\ \dots$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}\longrightarrow\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=\binom{9}{4}$$

کل ترکیب‌ها برای یک مجموعه n عضوی میشه کل زیرمجموعه‌ها: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$.

تذکر: وقتی تعداد زیرمجموعه‌های شامل یک عضو مشخص سفارش خواسته میشه باید اون رو انتخاب شده بدونی و کنار بذاری!

P.2

* اصل ضرب و اصل جمع : این و اون ⟵ $\otimes$

این یا اون ⟵ $\oplus$

مثال: از بین 5 تجربی و 4 ریاضی می‌خوام 3 نفر رو انتخاب کنیم که:

2 تجربی و یک ریاضی : $\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}$

2 تجربی یا 2 ریاضی : $\binom{5}{2}+\binom{4}{2}$

ما تونیم تو این مسائل حداقل و حداکثر رو هم وارد کنیم :

1- حداقل 2 تجربی : یعنی یا دو تجربی و یا 3 تجربی : $\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{5}{3}$ ⟵ هر سه تجربی

2- حداکثر 1 تجربی : یعنی یا یک تجربی و یا هیچی : $\binom{5}{1}\times\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ ⟵ هر سه ریاضی

3- حداقل یک تجربی : چون حالتاش خیلی زیاده از متمم می‌ریم یعنی هیچی : $n(A')=\binom{5}{0}\times\binom{4}{3}$

4- حداکثر 2 تجربی : چون حالتاش خیلی زیاده از متمم می‌ریم یعنی هر سه تا تجربی : $n(A')=\binom{5}{3}=10$

پس همونطور که دیدید تو حالتای 3 و 4 چون خیلی طولانی میشد از متمم رفتیم و آخرش از کل حالتها کم می‌کنیم.

* انواع جایگشت: گفتیم n شیء متمایز رو n! حالت می‌تونن کنار هم قرار بگیرن. حالا اگه اشیاء یا ارقام یا افراد یا حروف بخوان کنار هم قرار بگیرن اونها رو یک BOX یا یک شیء در نظر می‌گیریم.

* جایگشت یک در میون متمایز:

تعداد برابر : $m=n \Rightarrow m!\times n!\times 2$

یکی اختلاف : $m=n+1 \Rightarrow m!\times n!$

* با ارقام 1، 2، 3، 4، 5 چند عدد متمایز

5 رقمی: $5!=120$

4 رقمی: همون $5!$

3 رقمی: $\binom{5}{3}\times 3!=10\times 6=60$

* با ارقام 1، 1، 1، 2، 2 چند عدد

$\frac{5!}{2!\,3!}=10$

همون 10

سه دونه 1 ، 2 دونه 1 یا یه دونه 2 ، یه دونه 1 یا دو دونه 2

111 (یه دونه)

112: $\frac{3!}{2!}=3$

122: $\frac{3!}{2!}=3$

پس در مجموع میشه 7 تا عدد سه رقمی!

P.3

تکرار حالات مطلوب

② تعریف احتمال و انواع فضای نمونه ای

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(S)$ → فضای نمونه ای یعنی کل نتایج ممکن در یک پدیده تصادفی

① پایه‌ای → تولد، پرتاب سکه و تاس
② ترتیبی → انتخاب‌ها
③ جایگشتی → حالتهای کنار هم قرار گرفتن
④ عددی → مسائل عددسازی در حالات مختلف

۱- فضاهای پایه‌ای

احتمال

اولاً بچه می‌خواد بدنیا بیاد احتمال پسر بودنش چقدره؟ $\frac{1}{2}$ دختر بودن؟ $\frac{1}{2}$. برای مثال کمی

توی یه جعبه 3 تا آبی داریم و 2 تا قرمز پس آبی بودن $\frac{3}{5}$ و قرمز بودن $\frac{2}{5}$.

حالا می‌خوایم از این جعبه 2 تا مهره به صورت یکی در یکی یا یکی یکی یا متوالی خارج کنیم. احتمال اینکه

هر دو آبی $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$ ؛ هر دو قرمز: $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$ ؛ اولی آبی دومی قرمز: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$

اولی قرمز دومی آبی $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ ؛ یکی قرمز و یکی آبی: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$.

اگر این احتمال با جایگذاری بود فضای نمونه‌ای یا مخرج ثابت می‌موند. مثلاً هر دو آبی باشه: $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$!

[illegible]

گفتیم احتمال پسر بودن $\frac{1}{2}$ و دختر بودن هم همین. اگر ترتیب بچه‌ها توی خانواده معلوم باشه از همین روش بالا یعنی ضرب کسرهای یکی در یکی استفاده می‌کنیم ولی اگه معلوم نباشه مجبوریم بریم سراغ فضای نمونه‌ای. مثلاً می‌گه در یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال فرزند اول و دوم پسر و سومی دختر؟!

جواب: می‌شه $\frac{1}{8}$ یعنی $\overset{پ}{\frac{1}{2}} \times \overset{پ}{\frac{1}{2}} \times \overset{د}{\frac{1}{2}}$ چون ترتیب ذکر شده ولی اگه بگه در یک خانواده سه فرزندی با کدام احتمال دو فرزند پسر و یکی دختر هستند موضوع فرق می‌کنه. دیگه ترتیب‌ها معلوم نیست پس باید از ترتیب استفاده کنی. دو تا پسر داریم $\binom{3}{2}$ که می‌شه 3 حالت. خب معلومه که اون یکی هم دختره دیگه. پس کاری باهاش نداریم. چون خانواده سه فرزندی فضای نمونه‌ای می‌شه $2^3 = 8$. $\underline{2}$ بخاطر فرزند پسر یا دختر ؛

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

P.4

نکته خیلی مهم ①: کلاً تو احتمال اگر در مورد موضوعی صحبتی نکرد یعنی انگار اتفاقی نیافتاده مثلاً اگه توی جعبه 4 تا آبی و 3 تا قرمز داشته باشیم احتمال آبی بودن مهره میشه $4/7$. حالا اگر بدون اینکه دیده باشیم 5 تا مهره از جعبه خارج کنیم بازهم احتمال اینکه ششمی آبی باشه همون $4/7$ میشه .

نکته خیلی مهم ②: الان همیشه گفتیم اگه گفت یکی یکی یا پی در پی یا متوالی از ضرب کسرها استفاده میکنیم ولی اگه یه موقع تعداد برداشت ها زیاد بود و ترتیب هم ذکر شده بود میتونیم فرض کنیم که باهم خارج شدن و از ترکیب استفاده کنیم .

مثال ①: در یک آزمایشگاه 6 موش سالم و 4 دیابتی داریم . سه موش بطور متوالی خارج میکنیم . با کدام احتمال

الف) هر سه سالم

$$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$$

ب) دو سالم و یک دیابتی

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}$$

ج) اول و دوم سالم و سومی دیابتی

$$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$$

مثال ②: در یک خانواده ی 4 فرزندی با کدام احتمال ؟

الف) 3 فرزند اول پسر

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

ب) فقط 3 فرزند اول پسر

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

ج) سه فرزند پسر

$$\frac{\binom{4}{3}}{2^4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

مثال ③: در پرتاب 3 سکه با کدام احتمال

الف) دو رو

$$\frac{\binom{3}{2}}{2^3}=\frac{3}{8}$$

ب) حداقل دو رو

$$\frac{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

ج) حداکثر یک رو

* همیشه متمم حداقل یکی میشه هیچی

$$P(A')=\frac{\binom{3}{0}}{2^3}=\frac{1}{8}\Rightarrow P(A)=\frac{7}{8}$$

مثال ④: سکه ای را آنقدر پرتاب میکنیم تا چهارمین رو ظاهر شود . با کدام احتمال در 7 پرتاب به این نتیجه میرسیم؟

یعنی در 6 پرتاب اول باید 3 بار رو بیاد در پرتاب هفتم هم چهارمین رو

$$\frac{\binom{6}{3}}{2^6}\times\left(\frac{1}{2}\right)\longrightarrow$$ پرتاب هفتم یعنی چهارمین رو

2- فضاهای ترکیبی

هر وقت بحث انتخاب کردن k شیء از n شیء مطرح بود و ترتیب که هم ذکر نشده بود تو مخرج کسر احتمال باید بری سراغ ترکیب.

مثال ①: در ظرفی 5 مهره با شماره‌های 1 تا 5 داریم. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال؟

الف) مجموع زوج

$$\frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

ب) مجموع فرد

$$\frac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$$

ج) مجموع کمتر از 5

$\{1,2,3,4,5\}$

دیگه مجبوریم حالت‌ها رو دستی حساب کنیم:

$$\frac{2}{\binom{5}{2}}=\frac{2}{10}$$

تذکر: مجموع سه عدد:
- اگر هر سه زوج یا دو تا فرد و یک زوج ← جمع زوج
- اگر هر سه فرد یا یک فرد و دو زوج ← جمع فرد

3- فضاهای جایگشتی

در مسائل کلمه‌سازی و عددسازی این حالت پیش میاد و بحث کنار هم قرار گرفتن‌ها بسیار مهمه. اگر تو کنکور از این قسمت سوال بیاد حتماً جایگشت با تکرار رو هم داره.

تذکر: اگر 4 پسر و 3 دختر داشته باشیم:
- یه در میون: $4!\times 3!$
- هیچ دو پسری کنار هم نباشن: همون یه در میون
- هیچ دو دختری کنار هم نباشن: O b O b O b O b O ← $\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{جایگاه دخترا}}\times\underbrace{3!}_{\text{دخترا}}\times\underbrace{4!}_{\text{پسرا}}$

4- فضاهای عددی

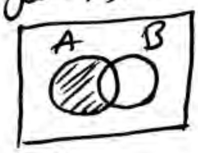
در مسائل عددسازی بحث صفر خیلی مهمه که اگر عضو مجموعه ارقام ما باشه باید حتماً حالت‌های شامل صفر رو جدا کنیم. مثلاً در زوج بودن و بخش‌پذیری بر 5 چنین حالتی پیش میاد. البته بهتره به جای زوج بودن از متمم استفاده کنیم و فرد بودن رو حساب کنیم.

③ احتمال بر پیامدها و پیامدهای مستقل

اول از همه باید بدونی دو پیامد مستقل تعریفش اینه که ربطی به هم نداشته باشن یعنی وقوع یکی تأثیری بر وقوع اون یکی نداشته باشه. در این حالت

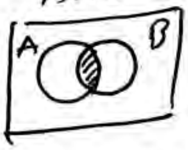
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

A, B مستقل

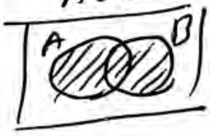


$P(A-B)$

$A\cap B$

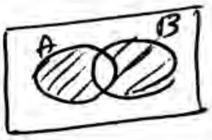


$A\cup B$



$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))$$
$$=P(A)\cdot P(B')=P(A\cap B')$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



$(A-B)\cup(B-A)$
or
$P(A\cup B)-P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=0 \leftarrow$ A, B ناسازگار $\leftarrow$

نکته مهم: نحوه تشخیص استقلال پیامدها < یا با توجه به بی‌ربط بودن پیامدها از صورت مسئله (تولدها، پرتاب تاس، برداشت‌های متوالی و بی‌ربط) همه مستقل اند. ولی گاهی اوقات نمیشه از صورت مسئله این موضوع رو تشخیص داد. مثل مثال زیر:

< یا با محاسبه $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. سه پیامد A و B و C رو تعریف می‌کنیم:

A = عدد تاس اول 4 ، B = عدد تاس اول 5 ، C = مجموع دو تاس 7

$\{(4,1),\dots,(4,6)\}$ ، $\{(5,1),\dots,(5,6)\}$ ، $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ ، $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ ، $P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$A\cap B=\phi \Rightarrow$ A, B ناسازگار

$A\cap C=\{(4,3)\} \rightarrow P(A\cap C)=\frac{1}{36}=P(A)\times P(C) \Rightarrow$ A, C مستقل

$B\cap C=\{(5,2)\} \rightarrow P(B\cap C)=\frac{1}{36}=P(B)\times P(C) \Rightarrow$ B, C مستقل

حالا اگه پیامد D رو تعریف کنیم مجموع دو تاس 11 داریم:

$\{(5,6),(6,5)\} \rightarrow P(D)=\frac{2}{36}$

$P(A\cap D)=0$ ، $P(B\cap D)=\frac{1}{36}\neq P(B)\times P(D) \leftarrow B\cap D=\{(5,6)\}$

روش استقلالی ♥

شرایط استفاده: ۱) پیشامدها مستقل باشن ۲) جاشون معلوم باشه

*فرشید اسماعیلی دوست عزیزم و بهترین بازیکن تیم فوتبال استقلال از هر ۵ شوتی که در فاصله 30 متری دروازه پرسپولیس به سمت دروازه شلیک می‌کنه ۴ تاش گل میشه ☺

پس احتمال پیروزی داداش فرشید $\frac{4}{5}$ یا $\frac{8}{10}$ یا 80 درصده. حالا قراره 3 تا شوت بزنه

الف) هر سه گل شه: $\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}$

ب) دو تای اول گل شه: $\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}$

ج) فقط دو تای اول گل شه: $\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}$

د) دو تاش گل شه: $\binom{3}{2}\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{2}{10}\right)^1$

و حالا یک سوال مهم: داداش علی آقای منصوریان به فرشید سه تا فرصت میده تا یه گل بزنه

$$P(A)=\underbrace{\frac{8}{10}}_{\text{اولی گل}}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}$$

* بهتر بود به جای این کارا از متمم می‌رفتیم و احتمال گل نشدن هیچکدوم از توپ‌ها رو محاسبه و از یک کم می‌کردیم:

$$P(A')=\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{8}{1000}\Rightarrow P(A)=0.992$$

مثال: آقایان روحانی، جهانگیری، هاشمی طبا، میرسلیم، رئیسی و قالیباف کاندیداهای دوازدهمین دوره ریاست جمهوری در کشور عزیزمون هستن. با کدام احتمال ...

الف) همه تیری

$\left(\frac{1}{12}\right)^6$

استقلالی

$\underbrace{\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\cdots\times\frac{1}{12}}_{6\text{ تا}}$

ب) همه در یک ماه

$12\left(\frac{1}{12}\right)^6=\left(\frac{1}{12}\right)^5$

$\underbrace{\left(\frac{1}{12}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{12}\right)^6}_{12\text{ تا}}$

ج) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند.

$$\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}\times\frac{8}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{P(12,6)}{12^6}=\frac{P(11,5)}{12^5}$$

هر وقت از آخر به سمت اول ضرب می‌کنیم و به یک نمی‌رسیم:

$6\times5\times4=P(6,3)$ ، $10\times9\times8\times7=P(10,4)$

④ مسائل تاس و احتمال شرطی و متغیر تصادفی

پرتاب دو تاس از همه مهمتره. فضای نمونه ایش $6^2=36$. سه تا موضوع مهمه :

① تسلط بر فضای نمونه ای

$$\begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),\dots,(1,6) \\ (2,1),\ \dots\ ,(2,6) \\ (3,1),\ \dots\ ,(3,6) \\ (4,1),\ \dots\ ,(4,6) \\ (5,1),\ \dots\ ,(5,6) \\ (6,1),\ \dots\ ,(6,6) \end{Bmatrix}$$

② تسلط بر جدول مجموع

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

③ تسلط جدول بر حاصلضرب جدول

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

اگر X رو تعریف کنیم مجموع رو تاس داریم :

$5-1=4$ 　　 $13-10=3$

① 　 5 　 7 　 10 　 ⑬

$P(X=5)=\frac{4}{36}$ 　　 $P(X=10)=\frac{3}{36}$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

به این میگن جدول توزیع احتمال که جمع احتمالات همیشه یک میشه !

مثال : با کدام احتمال حاصلضرب دو تاس مضرب 5 : ردیف 5 و ستون 5 منهای یک دونه مشترک .

مضرب 3 : ردیف 3 و 6 و ستون 3 و 6 : $24-4=20$

احتمال شرطی

همون درس قبلیه ! با این تفاوت که فضای نمونه ای تغییر میکنه . به عنوان مثال توی همین پرتاب دو تاس احتمال داره سوال شرطی مطرح بشه به این شکل :

مثال ① : دو تاس را باهم پرتاب میکنیم . اگر مجموع 7 باشد با کدام احتمال یکی از تاسها 5 است ؟

وقتی صورت سوال میگه مجموع 7 یعنی داریم :

$$S_{new}=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

پس جواب میشه $\frac{2}{6}$ یا $\frac{1}{3}$.

مثال ② : در یک خانواده 4 فرزندی فرزند اول پسر است . با کدام احتمال این خانواده دارای 3 دختر است ؟ وقتی میگه فرزند اول پسر یعنی دیگه معلوم شده ما الان دیگه فقط یک خانواده 3 فرزندی داریم که احتمال دختر بودن هر سه تا میشه $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

مثال ③ : در یک خانواده ۴ فرزندی یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده دارای ۳ دختر است؟

اینجا دیگه هیچی تموم نشده. فقط فضای نمونه‌ای ۴ فرزندی از 16 حالت به 15 حالت تقلیل پیدا می‌کنه چون حالت هر ۴ فرزند دختر حذف می‌شه.

$$S_{new} = \{(bbbb),(bbbg),(bbgg),(\underline{bggg})\}$$

$$\binom{4}{3} = 4 \rightarrow P(A) = \frac{4}{15}$$

تذکر: البته احتمال شرطی کاربرد مهم داره که اگر صورت سوال روابط بین پیشامدها رو داده بود باید ازش استفاده کنیم و در غیر این صورت نیازی به این کار نیست: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

ما می‌خونیم احتمال A به شرط B

- A ، B مستقل $\Rightarrow P(A/B) = P(A)$
- A، B ناسازگار $\Rightarrow P(A/B) = 0$

⑤ احتمال کل

یعنی احتمال تبدیل به احتمال دیگر. بچه می‌خواد به دنیا بیاد. سریع می‌گی یا پسره یا دختر. که هر کدوم میشه $\frac{1}{2}$. حالا می‌گه که اگر پسر باشه احتمال بیمار بودنش 30% و اگه دختر باشه 10%. با کدوم احتمال این بچه سالمه؟! شما می‌گی یا پسر سالم و یا دختر سالم

یا پسر سالم: $\frac{1}{2} \times \frac{70}{100}$

یا دختر سالم: $\frac{1}{2} \times \frac{90}{100}$

$= 80\%$

مثال مهم: دو جعبه داریم

A	B
۷ آبی، ۳ قرمز	۳ آبی، ۲ قرمز

مدل اول: از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال A آبی و B قرمز؟

$$\frac{7}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{28}{100}$$

مدل دوم: از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال یکی آبی و یکی قرمز؟

$$\frac{7}{10} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{46}{100}$$

مدل سوم: از هر جعبه 2 مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو تا گلوله از A آبی و دو تا کدام از B دو تا هم آبی؟!

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

مدل چهارم: یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب و مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال آبی؟

$$A\ \text{با}\ \tfrac{1}{2}\times \tfrac{7}{10} = \tfrac{7}{20} \xrightarrow{+} \tfrac{13}{20} = 0.65$$
$$B\ \text{با}\ \tfrac{1}{2}\times \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{10} = \tfrac{6}{20}$$

مدل پنجم: یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و دو مهره انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو آبی؟

$$A\ \text{با}\ \tfrac{1}{2}\times \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} =$$
$$B\ \text{با}\ \tfrac{1}{2}\times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} =$$
جمع می‌کنیم

* تذکر: دیدید که سهم هر جعبه $\frac{1}{2}$ بود. پس هر کدوم یک $\frac{1}{2}$ می‌گیرند و در احتمال خودش ضرب می‌شود!

مدل ششم: یک مهره از A خارج و به B می‌اندازیم. حال از B مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال آبی؟

مهره خروجی از A:

- با آبی: $\tfrac{7}{10} \longrightarrow \boxed{B_{new}: \text{۴ آبی، ۲ قرمز}} \times \tfrac{4}{6} = \tfrac{28}{60}$
- با قرمز: $\tfrac{3}{10} \longrightarrow \boxed{B_{new}: \text{۳ آبی، ۳ قرمز}} \times \tfrac{3}{6} = \tfrac{9}{60}$

$$\xrightarrow{+} \tfrac{37}{60}$$

مدل هفتم: دو مهره از A و یک مهره از B به داخل ظرف C انداخته و سپس مهره‌ای از C خارج می‌کنیم. احتمال آبی بودن؟

روش اول:

سهم در ظرف در C:

- از A: $\tfrac{2}{3}\times \tfrac{7}{10} = \tfrac{14}{30}$
- از B: $\tfrac{1}{3}\times \tfrac{3}{5} = \tfrac{6}{30}$

$$\xrightarrow{+} \tfrac{20}{30} = \tfrac{2}{3}$$

از همون اول هم می‌تونستیم دو ظرف رو یک کاسه کنیم که می‌شد ۱۰ تا آبی و ۵ تا قرمز یعنی ۱۵ تا مهره که چون ۱۰ تاش آبیه احتمال آبی بودن $\frac{10}{15}$ یا همون $\frac{2}{3}$ می‌شد!

6 توزیع دوجمله‌ای

می‌خوام در مورد حالت «دو» ترمینال فرشید باهات صحبت کنم. جایی که بپرسیم با کدوم احتمال دو تاش گل باشه؟! سوال مطرح شده تو ذهن تو اینه که کدوم 2 تا؟! جوابش: 2 تا از 3 تا یعنی $\binom{3}{2}$؛ گل شدن دو بار P^2 و گل نشدن یک بار q^1

P = پیروزی

q = شکست

P.11

مثال ①: ۴۰٪ عوامل تعیین کننده R_H خون منفی است. با کدام احتمال در یک خانواده 3 فرزندی

P_{RH^-} = مادر منفی × پدر منفی = %40 × %40 = %16 $\Rightarrow P_{RH^+} = \%84$

الف) 2 فرزند اول منفی

$\frac{16}{100} \times \frac{16}{100}$

ب) فقط دو فرزند اول منفی

$\frac{16}{100} \times \frac{16}{100} \times \frac{84}{100}$

ج) دو فرزند منفی ← کدام دوتا

$\binom{3}{2}\left(\frac{16}{100}\right)^2\left(\frac{84}{100}\right)^1$

انواع فرم‌های بیان پیروزی

① مثل آدمیزاد

بذری با احتمال 80٪ جوانه می‌زند

عملی با احتمال 90٪ موفقیت آمیز است

احتمال زیر سبیل حسن بودن بیش 0.2

② زبون آماری

در یک دانشگاه 500 نفر مشغول به تحصیل

100 نفر دانشجوی پزشکی

③ زبون نسبی

احتمال غالب بودن

سه برابر مغلوب بودن

$\frac{1}{4}$ = مغلوب و $\frac{3}{4}$ = غالب

④ با احتمال کل

اگر تاس زوج آمد 3 سکه اگر فرد آمد 2 سکه

اگر تیر خورد 5 مهره اگر نخورد 3 مهره

مثال ②: از جعبه‌ای شامل 7 مهره آبی و دو قرمز بطور متوالی 5 مهره خارج می‌کنیم.

با کدام احتمال

الف) 3 تاش آبی ؟!

ب) فقط 3 تاش آبی ؟!

اولاً این دو تا فرقی نداره. ثانیاً چون گفته متوالی یعنی بدون جایگذاری پس هر برداشت فضای نمونه‌ای تغییر می‌کنه و توزیع در جعبه‌ای است. ولی چون ترتیب ذکر شده می‌تونیم فرض کنیم که باهم خارج می‌کنیم و ترتیب نداریم →

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{2}{2}}{\binom{9}{5}}$$

ج) اگر این آزمایش را با جایگذاری انجام دهیم با کدام احتمال 3 مهره آبی خارج می‌شود؟

تو این حالت چون آزمایش با جایگذاریه و هر دفعه مهره خارج شده به جعبه برمی‌گرده شرایط آزمایش در هر برداشت ثابت می‌شه و می‌تونیم از پیروزی و شکست استفاده کنیم.

تو این مثال پیروزی یعنی آبی بودن $\frac{7}{9}$ و شکست یعنی قرمز بودن $\frac{2}{9}$!

تعداد آزمایشات 5 باره (چون 5 مهره خارج می‌کنیم) و انتظار 3 آبی داریم یعنی 3 بار پیروزی

$$\binom{5}{3}(\text{پیروزی})^3(\text{شکست})^2 = \binom{5}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^2$$

بخش اول : خلاصه خالص کل فصل تابع (از ج تا ح)

① انواع معادلات و نامعادلات و یادآوری اتحادهای کاربردی

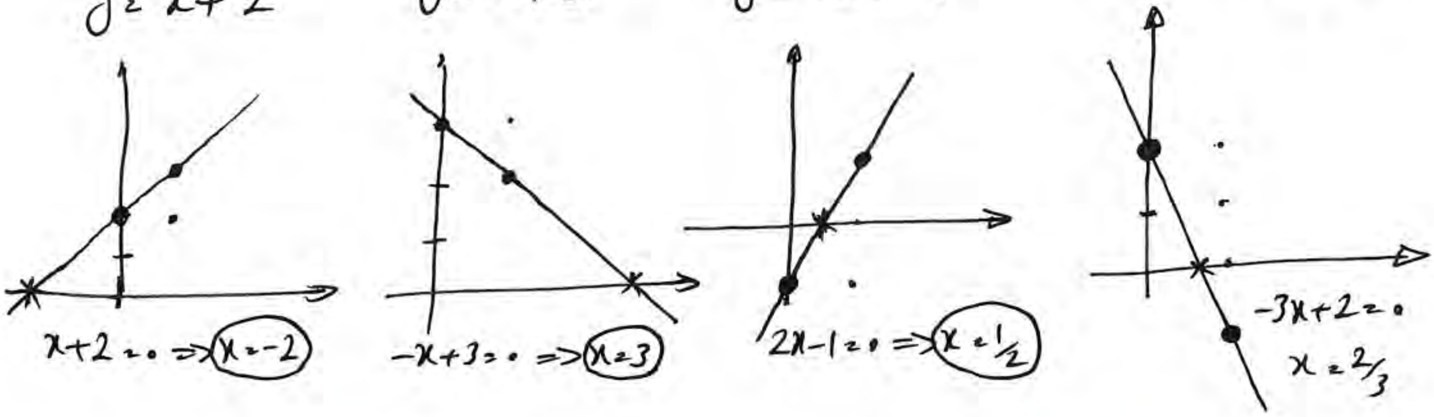
$f(x) = ax+b$: تابع (a: شیب، b: عرض از مبدأ)

$ax+b=0$: معادله

ساده‌ترین معادله که معادله‌ی درجه اوله که البته با تابع درجه اول فرق می‌کنه

شیب یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$. به معنای ساده‌تر به ازای هر یک واحدی که جلو می‌ریم اگر a واحد بالا بریم شیب می‌شه a و اگر a واحد پایین بیایم شیب می‌شه $-a$. مثلاً شیب ۲ باشه یعنی به ازای هر یک واحدی که جلو می‌ریم خط 2 واحد بالا می‌ره و اگر -3 باشه یعنی به ازای هر یک واحدی که جلو بریم خط 3 واحد پایین می‌ره . چندتا خط هم ببینیم :

$y = x+2$ $y = -x+3$ $y = 2x-1$ $y = -3x+2$



انواع معادله‌ی درجه دوم و روش‌های حل آن‌ها

$ax^2+bx+c=0$
$(a \neq 0)$

ناقص

$b=0$

$ax^2+c=0$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$
ریشه نداره

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$
$\Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2$

دو تا ریشه‌ی قرینه داره

$c=0$

$ax^2+bx=0$

خب x داره می‌گه جون مادرت از من فاکتور بگیر
پس این معادله همیشه دو تا ریشه داره که یکیش صفره

$x^2-5x=0$
$x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$

$x^2+\sqrt{3}x=0$
$x(x+\sqrt{3})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

کامل (روش‌های حل)

روش اول: دیدن رابطه بین ضرایب

۱) if $a+b+c=0$
$x_1=1 , x_2=\frac{c}{a}$
$x^2-5x+4=0$
$x=1 , x=4$

۲) if $a+c=b$
$x_1=-1 , x_2=-\frac{c}{a}$
$x^2+5x+4=0$
$x=-1 , x=-4$

روش دوم: تجزیه

اگر رابطه‌ای بین ضرایب نبود

$x^2+(a+b)x+ab$
$=(x+a)(x+b)$
$x^2+9x+20=0$
$(x+5)(x+4)=0$
$x=-5$
$x=-4$

روش آخر: Δ

اگر از رابطه بین ضرایب رونده و از تجزیه مونده شدی

$\Delta=b^2-4ac$
$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$2x^2-3x-2=0$
$x_1x_2=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}$
$x_1=2 , x_2=-\frac{1}{2}$

یادآوری اتحادهای لازم برای کنکور

① $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

② $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

⑤ $(a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

معادلات گویا

1- بهتره اگر دوتا کسر داریم طرفین وسطین کنیم.

2- اگر 3 کسر بود با اتحاد مناسب تبدیل به دو کسر شه. بهتره طوری باشه که مخرج‌ها برابر

3- اگر تو کنکور سوال بیاد حتماً ریشه‌ی مخرج یکی از جواب‌هاست که باید حذف بشه.

4- سه‌تا بزن بزن مهم داریم
① صورت و مخرج بزن بزن
② مخرج و مخرج بزن بزن
③ صورت و صورت بزن بزن بذار کنار

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6} = \frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-12} \xrightarrow{\text{گام اول}} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-3)(x+4)}$$

① صورت و مخرج بزن بزن : $(x+2)$ ها باهم می‌رن ، $\frac{(x-1)}{x-3} = \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-3)(x+4)}$

② مخرج و مخرج بزن بزن : $(x-3)$ ها باهم می‌رن : $\frac{x-1}{1} = \frac{(x-1)(2x-3)}{x+4}$

③ صورت و صورت بزن بزن بذار کنار : $(x-1)$ ها باهم می‌رن ولی $x=1$ رو به عنوان ریشه

معادله دیگر داریم :

$$\frac{1}{1} = \frac{2x-3}{x+4} \Rightarrow 2x-3 = x+4 \Rightarrow \boxed{x=-7}$$

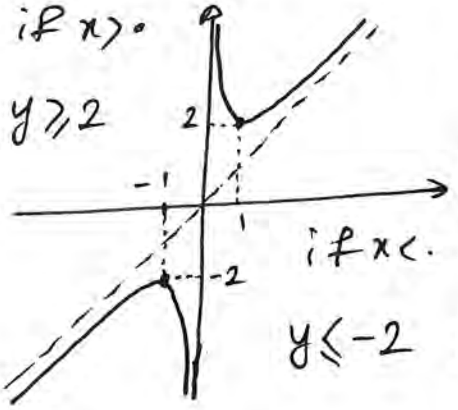
P.3

* معرفی تابع مهم $x+\frac{1}{x}$

✓ تغییر متغیر

$t+\frac{1}{t}$

یکی از مهم‌ترین که تو کنکور.



if $x>0$

$y \geq 2$

if $x<0$

$y \leq -2$

$x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=1$ مضاعف

$x+\frac{1}{x}=-2 \Rightarrow x=-1$ مضاعف

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{2x^2+1}{2x+1}+\frac{2x+1}{2x^2+1}=-2 \Rightarrow t+\frac{1}{t}=-2 \Rightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+1}{2x+1}=-1 \Rightarrow 2x^2+1=-2x-1 \Rightarrow 2x^2+2x+2=0$$

$\Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow$ a,c هم علامتن و b هم که ریقو! پس Δ منفیه و معادله جواب نداره.

* توجه: اگر a و c مختلف العلامت بود $\Delta=b^2-4ac$؛ Δ حتماً مثبت و معادله دارای دو ریشه حقیقی مختلف العلامت است!

* نحوه برخورد با معادله درجه (3) : $ax^3+bx^2+cx+d=0$

✓ با جمع ضرایب صفر ⇐ یکی از ریشه‌ها یک ⇐ یک عامل $x-1$ ⟨ عامل دیگر با تقسیم / عامل دیگر با تجزیه جبری

✓ یا $a+c=b+d$ ⇐ یکی از ریشه‌ها (-1) ⇐ یک عامل $x+1$ ⇐ بقیه مثل بالا.

$x^3-5x^2+7x-3=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{مضاعف} \\ x=3 & \text{ساده} \end{cases}$

$x^3+6x^2+10x+5=(x+1)(x^2+5x+5)=0$

✓ حالت خاص که با دسته بندی و فاکتورگیری حل میشه:

$x^3-4x^2-x+4=x^2(x-4)-(x-4)=(x-4)(x^2-1)=0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=\pm 1 \ , \ x=4$

* اصول نامساوی‌ها و حل انواع نامعادله

1) طرفین نامعادله رو می‌تونیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم: $a>b \Rightarrow a\pm c>b\pm c$

2) اگر طرفین در یک عدد ⊕ ضرب یا تقسیم بشه جهت عوض نمیشه: $a>b \Rightarrow ac>bc$

3) توان فرد و ریشه فرد هیچ مشکلی نداره: $a>b \Rightarrow a^{\text{فرد}}>b^{\text{فرد}}$ و $\sqrt[\text{فرد}]{a}>\sqrt[\text{فرد}]{b}$

4) می‌تونیم طرفین رو به توان 2 برسونیم ولی اگر منفی باشن جهت عوض میشه:

$$\left.\begin{array}{l} 5>2 \Rightarrow 25>4 \\ -2>-3 \Rightarrow 4<9 \end{array}\right\}$$

5) می‌تونیم معکوس کنیم ولی اگر هم علامت باشن جهت عوض میشه:

$$\left.\begin{array}{l} 2<5 \Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{5} \\ -10<-2 \Rightarrow -\frac{1}{10}>-\frac{1}{2} \\ -2<5 \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{1}{5} \end{array}\right\}$$

* f بالاتر از g ⇐ $f>g$
f پایین‌تر از g ⇐ $f<g$

جمع‌بندی: چه مواقعی جهت نامساوی عوض می‌شه؟

1- طرفین توی یه عدد منفی ضرب یا تقسیم بشه!

2- طرفین منفی باشن و به توان زوج برسن!

3- طرفین هم علامت باشن و معکوس بشن!

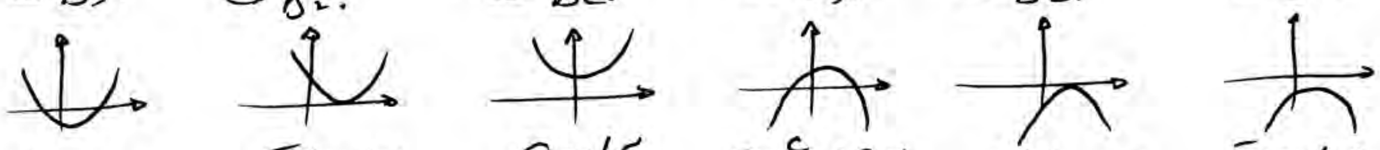
در نامعادله قدر مطلق مهم:

$|u|\leq a \Rightarrow -a\leq u\leq a$

$|u|\geq a \Rightarrow \begin{cases} u\geq a \\ \text{or} \\ u\leq -a \end{cases}$

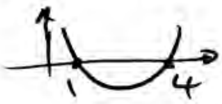
* مهم‌ترین نامعادله در کنکور نامعادله‌ی درجه دومه که قبلش باید به انواع فرم‌های سهمی مسلط باشی

① $a>0$, $\Delta>0$ ② $a>0$, $\Delta=0$ ③ $a>0$, $\Delta<0$ ④ $a<0$, $\Delta>0$ ⑤ $a<0$, $\Delta=0$ ⑥ $a<0$, $\Delta<0$



بین دو ریشه ⊖ | همواره نامنفی | همواره ⊕ | بین دو ریشه ⊕ | همواره نامثبت | همواره منفی

* $x^2-5x+4<0$
گام اول: معادله → $x^2-5x+4=0$ $\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}$ $x=1$, $x=4$
گام دوم: سهمی →



$1<x<4$

* $x^2-5x+4>0 \Rightarrow x<1$ or $x>4$

* $x^2+4x+5<0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ ③ حالت $\Rightarrow$ همواره ⊕ $\Rightarrow \varnothing$

* $x^2+4x+5>0 \Rightarrow x\in \mathbb{R}$

P.5

* مربع کامل های مهم و معروف تو کنکور :

① $x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2 = 0$ ⟨ $x = -1$ → ریشه مضاعف منفی ؛ $x = 1$ → ریشه مضاعف ⊕

② $x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2 = 0$ ⟨ $x = -2$ ؛ $x = 2$

③ $x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2 = 0$ ⟨ $x = -3$ ؛ $x = 3$

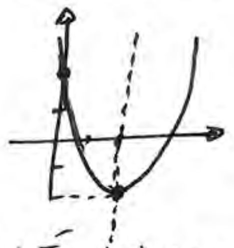
④ $4x^2 \pm 4x + 1 = (2x \pm 1)^2 = 0$ ⟨ $x = -\frac{1}{2}$ ؛ $x = \frac{1}{2}$

* رأس سهمی $\frac{-b}{2a}$ ← می‌ذاریم تو معادله ← عرض سهمی بدست میاد ← عرض از مبدأ رو هم داریم ← سهمی رو رسم میکنیم :

$x^2 - 4x + 2$ ⟵

$x_S = \frac{-b}{2a} = 2$

$y_S = -2$



معادله محور تقارن : $x = 2$

* تعیین علامت و نامعادلات گویا

① $\frac{1}{x-2} < 0$ ⟵ $x - 2 < 0$ ⟸ $x < 2$ ⟵ حال ساده‌ات : کسری که صورتش معلوم باشه ...

② $\frac{x-1}{x-2} < 0$ ⟵ $(x-1)(x-2) < 0$ ⟸ $1 < x < 2$ ⟵ علامت $\frac{a}{b}$ علامت ab ه !

③ $\frac{x^2-4x+3}{x-2} < 0$ ⟸ جدول:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

⟵ ادغام صورت و مخرج ؛ مجموع ← نیز ریشه 2 ← جدول

حالت صفر

①′ $\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$ ⟸ $3x^2 - 2x < 2x^2 + 8$ ⟸ $x^2 - 2x - 8 < 0$ ⟵ مخرج همواره ⊕ ⟸ طرفین وسطین

②′ $\frac{x^2+1}{-x^2-3} < 2$ ⟸ مخرج همواره ⊖ ⟸ طرفین ⟸ جهت عوض میشه .

رایج‌ترین حالت ③′ → ③

③′ $\frac{x^2+1}{x-1} < 2$ ⟸ مخرج ⊕ و ⊖ ⟸ طرفین ⟸ 2 میاریم سمت چپ و مخرج مشترک ← ① ② ③

حالت غیر صفر

* $\frac{x^2-2}{x} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x} - 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{x^2-2-x}{x} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x} \leqslant 0$

$\frac{(x+1)(x-2)}{x} \leqslant 0$ ⟸

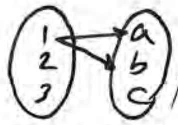
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

جواب : $(-\infty, -1] \cup (0, 2]$

② مقدمات تابع : معرفی، تعیین دامنه، اعمال روی توابع

1- بحث تابع بودن یا نبودن ! مسأله این است .

نمودار ون



تابع نیست ✗

زوج مرتب

$\{(1,a),(1,b)\}$

تابع نیست مگر اینکه $a=b$

نمودار

خطوط موازی محور y بیش از یک نقطه قطع کنند

ضابطه

$[y]$ ، $|y|$ ، y^{2k}

یا نسبت شکلی از x

معمولاً تابع نیست .

2- بحث تعیین دامنه

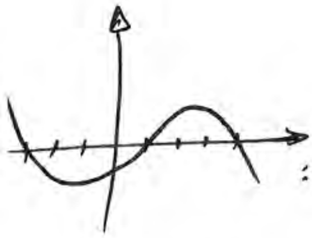
* مخرج صفر نشه * زیر رادیکال فرجزوج منفی نشه * توابع لگاریتم

$$\log_{g(x)} f(x) \rightarrow \begin{cases} f>0 \\ g>0 \\ g\neq 1 \end{cases}$$

* $\sqrt[\text{فرد}]{\text{هرچی}}$ ، $\sin(\text{هرچی})$ ، $\cos(\text{هرچی})$: دامنش دامنه هرچی !

* $\tan$ ، $\cot$ کسر مخفی هستن و مخرجشون نباید صفر باشه .

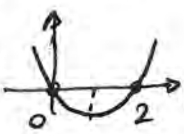
* سوالات معروف نموداری در سالهای اخیر مطرح شده . مثلاً نمودار $f(x)$ اینه :



دامنه تابع $\sqrt{x f(x)}$ رو می‌خواد که باید x و $f(x)$ هم علامت باشن : $[-3,0]\cup[1,4]$

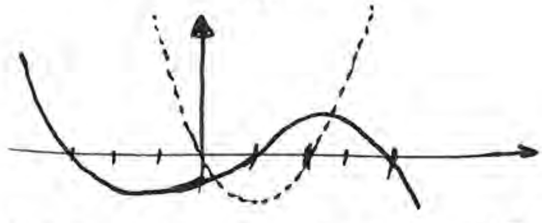
یا دامنه تابع $\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ که بازهم باید هم علامت باشن ولی $f(x)$ صفر نشه : $(-3,0)\cup(1,4)$

یا دامنه $\sqrt{(x^2-2x)f(x)}$ که چون x^2-2x این شکلیه



قبل از 3- و بین صفر و 1 و 2 تا 4 هم علامت هستن :

تو کیس دستگاه با هم ببینیم مشخص می‌شن :



$(-\infty,-3]\cup[0,1]\cup[2,4]$

P.7

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$, $g(x)=\log_{x-1}(-x^2+4)$ باشد دامنه توابع زیر؟

$D_f: -x^2+6x-5 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$

$$D_g: \begin{cases} -x^2+4>0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow |x|<2 \Rightarrow -2<x<2 \\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \;,\; x-1\neq 1 \Rightarrow x\neq 2 \end{cases}$$

اشتراک $\rightarrow 1<x<2$

$D_{f\pm g,\, f\times g} = D_f \cap D_g = (1,2)$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\} = (1,2) - \{?\}$

باید ببینیم g کجا صفر میشه؟! اول صفر میشه پس $-x^2+4=1 \Rightarrow x^2=3$ ، $x=\sqrt3$ ، $x=-\sqrt3$

$-\sqrt3$ که اصلاً تو بازه نیست ولی $\sqrt3$ تو بازه $(1,2)$ هست که باید حذف بشه.

بنابراین جواب $D_{f/g}$ میشه: $(1,2)-\{\sqrt3\}$

$f(x-2)\times g(\frac{x}{2})$

$1<x-2<5 \qquad 1<\frac{x}{2}<2$

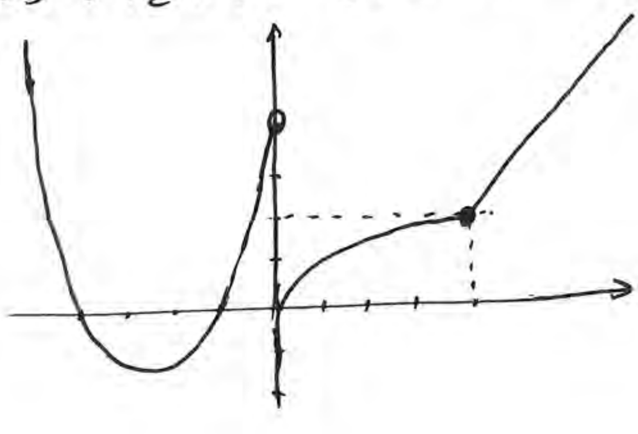
(I) $3<x<7 \qquad 2<x<4$ (II)

اشتراک II , I $\rightarrow (3,4)$

* معرفی توابع چند ضابطه‌ای و بحث در دامنه و برد:

رسم شکل خیلی کمک می‌کنه بچه‌های عزیزم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+6x+4 & , x<0 \\ \sqrt{x} & , 0\leq x\leq 4 \\ x-2 & , x>4 \end{cases}$$



تو این تابع 2 تا نقطه مرزی داریم که خیلی حائز اهمیته:

$x=0 \leftarrow$ ناپیوسته

$x=4 \leftarrow$ پیوسته

③ تابع مرکب

تیپ ① : f و g معلوم؛ مرکب مجهول

این دیگه بابلوترین سوال ممکنه که 95 هم اومد. کافیه بلد باشی تابع مرکب بنویسی. fog یعنی $f(g(x))$ ؛ تو f هرجی x داری بجاش g می‌ذاری. مثلاً همون سوال کنکور 95 رو با هم حل می‌کنیم:

$$f(x)=x^2+x\ ,\quad g(x)=\sqrt{4x+1}$$

$$gof=g(f(x))=\sqrt{4(x^2+x)+1}=\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$$

تیپ ② : f و fog معلوم؛ تابع داخلی مجهول

لنز رو $f(g)$ می‌پرسه که روی fog کی بودی تو؟! روی f میگه: بگفتا من اول ناظر بودم؛ بگفتا من اول با x بودم! ولیکن مدتی با g نشستم!

صورت سوال

$$f(x)=x+5\ ,\quad f(g(x))=3x-1 \longrightarrow g+5=3x-1 \Rightarrow \boxed{g=3x-6}$$

تیپ ③ : g و fog معلوم؛ تابع اصلی مجهول

اینجا دیگه f نداریم یعنی تابع اصلی گم شده. ازش می‌پرسیم:

" $f(x)$ کجایی دقیقاً کجایی؟ کجایی تو بی t ؛ تو بی t کجایی؟ ... "

$$g(x)=x-1\ ,\quad f(g(x))=2x+7 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\underbrace{x-1}_{})=2x+7 \\ x-1=t \Rightarrow x=t+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(t)=2(t+1)+7 \\ f(t)=2t+9 \end{array}$$

تیپ ④ : مرکب با زوج مرتب و دامنه مرکب:

x اول میره تو g بعد $g(x)$ میره تو f!

مثلاً 1 میاد تو g میشه 2 ؛ 2 میره تو f میشه 7 ؛ پس جواب میشه $(1,7)$ و به همین ترتیب

$$g=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$

$$f=\{(2,7),(4,8),(5,9)\}$$

$$f(g(x))=\{(1,7),(3,8)\}$$

حالا اگه تو سوال صفحه قبل $f+g$ یا $f-g$ یا $f\times g$ رو خواسته بود فقط زوج x های که با 5 شروع میشن باهم در ارتباطن چون شرط وجود این توابع اشتراک دامنه هاست.

$f+g=\{(5,15)\}$, $f\times g=\{(5,54)\}$

طبیعیه که اگر $g(5)$ صفر بود f/g تشکیل نمیشد. $f/g=\{(5,6/9)\}$ →

* برای تعیین دامنه تابع مرکب هم حتماً از روابط مقابل استفاده کن:

$$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

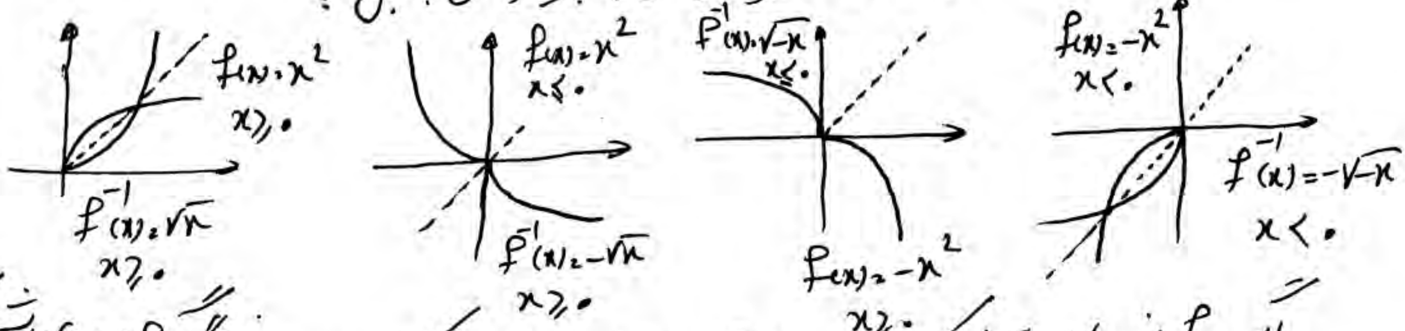
$$D_{f(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$$

4 تابع یک به یک و معکوس

اولاً که شرایط یک به یک بودن دقیقاً برعکس شرایط تابع بودنه. شرط معکوس پذیری هم یک به یک بودنه یعنی اگر تابع یک به یک نباشه معکوس که داشته باشه ولی دیگه معکوسش تابع نمیشه.

برای ساخت تابع معکوس ← از روی نمودار: تابع نمودار رو نسبت به $y=x$ قرینه کن
← از روی ضابطه: اول x ی، دوم تعویض، سوم y بر حسب x

سهمی ها یک به یک نیستن مگر از رأس به بالا یا رأس به قبل:



اگه f نیمساز رو قطع کنه معکوسش تو همون ناحیه میگذره وگرنه روبرو.

ضمناً اگه f صعودی باشه f^{-1} رو فقط روی $y=x$ قطع میکنه

P.10

ساخت معکوس از روی ضابطه :

① $f(x)=x^3 \xrightarrow{\text{اول y}} y=x^3 \xrightarrow{\text{دوم تعویض}} x=y^3 \xrightarrow{\text{سوم y برحسب x}} y=\sqrt[3]{x}$

② $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1} \xrightarrow{\text{اول y}} y=\dfrac{3x-2}{x+1} \xrightarrow{\text{دوم تعویض}} x=\dfrac{3y-2}{y+1} \xrightarrow{\text{سوم y برحسب x}} xy+x=3y-2$

$3y-xy=x+2 \Rightarrow y(3-x)=x+2 \Rightarrow y=\dfrac{x+2}{3-x} \longrightarrow$ ضابطه معکوس

③ $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1} \xrightarrow{\text{اول y}} y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1} \xrightarrow{\text{دوم تعویض}} x=\dfrac{2^y-1}{2^y+1}$

$\Rightarrow x2^y+x=2^y-1 \Rightarrow x2^y-2^y=-x-1 \Rightarrow 2^y(x-1)=-(x+1)$

$\Rightarrow 2^y=-\dfrac{(x+1)}{x-1} \Rightarrow 2^y=\dfrac{x+1}{1-x} \xrightarrow{\text{از طرفین log}} \log_2 2^y=\log_2\dfrac{x+1}{1-x}$

$\Rightarrow y=\log_2\dfrac{x+1}{1-x} \longrightarrow$ ضابطه معکوس

④ $f(x)=x^2-4x \;;\; [2,+\infty) \xrightarrow{\text{اول y}} y=x^2-4x \xrightarrow{\text{دوم تعویض}} x=y^2-4y$

$\xrightarrow{\text{سوم y برحسب x}} y^2-4y+\underbrace{4-4}=x \Rightarrow (y-2)^2=x+4 \Rightarrow |y-2|=\sqrt{x+4}$

$\overset{y\geq 2}{\Rightarrow} y-2=\sqrt{x+4} \Rightarrow y=\sqrt{x+4}+2 \longrightarrow$ ضابطه معکوس

⑤ $f(x)=x^3-3x^2+3x \xrightarrow{\text{اول y}} y=x^3-3x^2+3x \xrightarrow{\text{دوم تعویض}} x=y^3-3y^2+3y$

$\Rightarrow x=\underbrace{y^3-3y^2+3y-1}+1 \Rightarrow x=(y-1)^3+1 \Rightarrow (y-1)^3=x-1$

$\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}+1 \longrightarrow$ ضابطه وارون

P.1

خلاصه خالص کل فصل معادله درجه 2 و روابط بین ریشه‌ها

① تابع درجه دوم و ویژگیهای سهمی (یادآوری از فصل قبلی)

روش‌های پیدا کردن ریشه‌های معادله درجه دوم و رسم انواع سهمی رو تو فصل قبل یاد گرفتیم. یادگرفتیم رأس سهمی x هاش $-\frac{b}{2a}$ و اگر تو معادله جایگذاریش کنیم عرض رأس بدست میاد.

عرض رأس همون مقدار max یا min تو کل سهمی در حالت کلی هست. خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمیه. اگر صورت سوال بگه دو ریشه حقیقی متمایز $\Delta>0$ ولی اگه بگه دو ریشه حقیقی $\Delta\geq 0$.

$$\begin{cases} y = ax^2+bx+c \\ y = mx+h \end{cases}$$

این = اون

$ax^2+bx+c = mx+h$

$ax^2+(b-m)x+c-h=0$

$\Delta=(b-m)^2-4a(c-h)$

② آنالیز خط و سهمی


$:\ \Delta>0$


$:\ \Delta=0$


$:\ \Delta<0$

$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ، $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

③ کاربرد اول: روابط خاص

متقارن:

$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$

$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

$\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm2\sqrt{P}}$

نامتقارن:

یا تو خود معادله صدق میدن.

یا روابط رو میگیریم و کم و زیاد میکنیم.

سه مثال ضرب: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-5x+3=0$ باشند مطلوبست:

$S=5$

$P=3$

الف) $\alpha^2+\beta^2$

$S^2-2P=25-6=19$

اگر کسر بود مخرج مشترک میگیریم و اگر ضرب بود فاکتورگیری میکنیم.

ب) $\sqrt{\alpha^2(5\beta-3)}$ میشه:

β ریشه معادله است پس تو خود معادله صدق میکنه

$\beta^2-5\beta+3=0 \Rightarrow \beta^2=5\beta-3$

$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2\beta^2}=\alpha\beta=P=3$

ج) $\underbrace{5\alpha+3\beta}$

ضلع = 4

$4\alpha+4\beta+\alpha-\beta$

$4\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}+\underbrace{\alpha-\beta}_{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$

P.2

مثال: در معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ مجموع ریشه‌ها چند برابر حاصلضرب ریشه‌ها

$t^2-18t+72=0$

$(t-6)(t-12)=0$

$t=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \quad \begin{cases} S=-1 \\ P=-6 \end{cases}$

$t=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \quad \begin{cases} S=-1 \\ P=-12 \end{cases}$

$S_{\text{کل}}=-2$

$P_{\text{کل}}=72$

④ کاربرد دوم: ریشه‌های خاص

شرایط دو ریشه ⊕ : $P>0 ، S>0 ، \Delta>0$

شرایط دو ریشه ⊖ : $P>0 ، S<0 ، \Delta>0$

شرایط دو ریشه مختلف العلامت : $\frac{c}{a}$ منفی لازم و کافی

Tip ①: سوال مستقیم ← اول شرط Δ رو حساب کن.

Tip ②: ورود ممنوع که واقعاً هم ممنوعه

Tip ③: بزرگراه ← منفی اگه هر ۲ تا ریشه می‌اندره $(\frac{c}{a}<0)$

Tip ④: درجه چهارم دو مجذوری ← $x^4=t^2$ ← $x^2=t$

اگه t، ۲ تا ریشه مثبت بده
ارسطو چهار تا ریشه میده

Tip ⑤: $ax+b\sqrt{x}+c=0$ ← $\sqrt{x}=t$ ← $x=t^2$ ← نقش t اینجا درجه ۲ و نقش x زمانی ۲ ریشه داره که t دو ریشه ⊕ بده!

⑤ کاربرد سوم: معادله ضد سوال

تابلو:
- دو ریشه قرینه ← $b=0$
- دو ریشه معکوس ← $a=c$ ← مثال ⑥

غیر تابلو:
- کلا P علامت ← سه سوت! ← مثال ⑦
- کد و P مجهول ← سه معادله سه مجهول: مثال ⑮

⑥ کاربرد چهارم: معادله جدید

تابلو:
- معادله جدیدی بنویس که ریشه‌هاش قرینه قبلی ← b قرینه
- معادله جدیدی بنویس که ریشه‌های معکوس قبلی ← a و c عوض

غیر تابلو:
- روش t ← قدیم x رو جدید t ← جایگذاری
- کد S و P جدید: $x^2-Sx+P=0$

P.1

خلاصه درس رویایی مثلثات ؛ به قلم من ! یعنی بابک سادات
مولف اولین و آخرین کتاب آشتی با مثلثات ♡

صفحات 208 تا 212 کتاب جامع
که عکسشون رو توی کانال گذاشتم الان !

لوکس لوکس لوکس ☺

قبل از شروع مطالعه این جزوه لطفاً صفحات خواسته شده را با دقت مطالعه بنمایید

کل درس مثلثات تشکیل شده از 5 تا ها !!

1- زاویه‌ها   2- وابسته‌ها   3- اتحادها   4- معادله‌ها   5- کاربردها

اولین لازمه شروع این درس تسلط بر 16 زاویه اصلی و نسبت‌های مثلثاتی شونه !
یعنی به زبان ساده تا از شما سوال شد $\tan\frac{7\pi}{4}$ یا $\cos\frac{5\pi}{6}$ یا $\sin\frac{2\pi}{3}$ سریعاً با
تصویر ذهنی اون زاویه بتونید نسبت‌هاش رو پیدا کنید . یعنی برای $\frac{2\pi}{3}$ از $\pi-\frac{\pi}{3}$
یا برای $\frac{7\pi}{4}$ از $2\pi-\frac{\pi}{4}$ استفاده کنید . جای زاویه رو باید بلد باشید که توی صفحه 208
و 209 براتون کاملاً تشریح کردم .

در 5 مورد !
کدوم وابسته‌هاست که می‌خوام یه خلاصه‌ای خدمت عزیزانم ارائه کنم .

* اولاً : مضارب زوج π هیچ تأثیری روی هیچ کدوم ندارن . البته اگر جمع بشن !

اینجا به θ- اضافه شد !

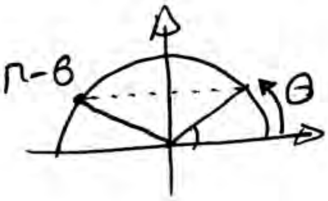
$\sin(1396\pi+\theta)=\sin\theta$, $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$

* ثانیاً : به $\tan$ و $\cot$ مضارب صحیح π هم بی‌تاثیرن ولی روی $\sin$ و $\cos$ تأثیر می‌گذارد .

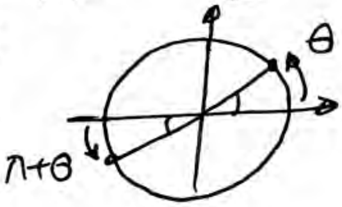
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$, $\cot(1395\pi+\theta)=\cot\theta$

P.2

* ثالثاً: مضارب صحیح π اثر نذار روی sin و cos رو با شکل یاد بگیر.

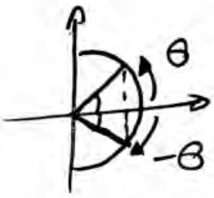


$\Rightarrow$ sin ها برابر
بقیه قرینه.



$\Rightarrow$ tan برابر
بقیه قرینه!

* رابعاً: کمان $(-\theta)$ یا $(2k\pi-\theta)$



فقط cos منفی خوره و بقیه قرینه:

$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

* خامساً: مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نسبت رو عوض می‌کنه. فقط حواست باشه اول ناحیه رو پیدا کن و علامت همون نسبت رو بذار. بعد در آخرین مرحله نسبت رو عوض کن.

$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \xrightarrow{\text{ناحیه دوم}}$ سینوس مثبته $\Rightarrow$ جواب $=\cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \xrightarrow{\text{ناحیه دوم}}$ کسینوس منفیه $\Rightarrow$ جواب $=-\sin\theta$

$\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta) \xrightarrow{\text{ناحیه چهارم}}$ tan منفیه $\Rightarrow$ جواب $=-\cot\theta$

و حالا این رسم برای اتحادهای مثلثاتی:

1) $\sin^2+\cos^2=1$
- 2) $\sin^2=1-\cos^2$
- 3) $\cos^2=1-\sin^2$
- 4) $1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$
- 5) $1+\cot^2=\frac{1}{\sin^2}$

6) $\tan\cdot\cot=1$
- 7) $\tan=\frac{1}{\cot}$
- 8) $\cot=\frac{1}{\tan}$
- 9) $\tan=\frac{\sin}{\cos}$
- 10) $\cot=\frac{\cos}{\sin}$

11) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\Rightarrow$ 14) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

12) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\Rightarrow$ 15) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

13) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ 16) $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

در مورد نتایج 15 به راحتی چند تا اتحاد دیگر

P.3

روابط 15 و نتایج ارزشمند آن

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

بیان چپ برحسب Cos

یعنی به جای $\sin^2$ بگذاریم $1-\cos^2$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$$

(17) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$$

(19) $\boxed{\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

بیان راست برحسب Sin

یعنی به جای $\cos^2$ بگذاری $1-\sin^2$

$$\cos 2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$$

(18) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$$

(20) $\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

حالا می‌رسیم به جمله‌ها را کاهش

1) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

2) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

* رابطه tan2α رو که یادتونه $\left(\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)$

* جمع و تفریق $\cot$, $\tan$

3) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{\sin}{\cos} + \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{\sin^2+\cos^2}{\sin\cos} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

4) $\tan\alpha - \cot\alpha = \dfrac{\sin}{\cos} - \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{\sin^2-\cos^2}{\sin\cos} = \dfrac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = -2\cot 2\alpha$

5) $\sin(\frac{\pi}{4}\pm\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha \pm \sin\alpha) \Rightarrow \boxed{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}\pm\alpha) = \cos\alpha \pm \sin\alpha}$

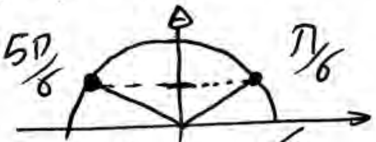
6) $\cos(\frac{\pi}{4}\pm\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha \mp \sin\alpha) \Rightarrow \boxed{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}\pm\alpha) = \cos\alpha \mp \sin\alpha}$

* هرجا $\sin+\cos$ دیدی به توان 2 برسون چون که در جمله $\sin^2+\cos^2$ به یک تبدیل میشن!

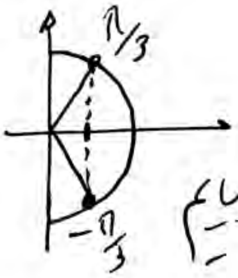
P.4

و بالاخره رسیدیم به معادلات مثلثاتی

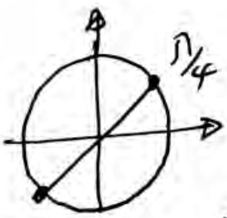
روش حل معادلات مثلثاتی به نسبت من احتیاج به هیچ فرمولی نداره. فقط کافیه زاویه‌ها رو بلد باشی. وقتی به شما بگن $\sin\frac{\pi}{6} = ?$ شما در پاسخ میگین $\frac{1}{2}$ ولی وقتی ازتون خواستن معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ رو حل کنین یک فرق داره. شما سریعاً یک دایره میکشین و $\frac{1}{2}$ رو روی محور سینوس‌ها مشخص میکنین. بعد کافیه اون نقطه رو با خط‌چین به سمت راست و چپ امتداد بدیم تا بخوره به دایره.



زاویه‌ای که معلوم شد واسه هر کدوم یه $2k\pi$ بذار چون اگه یه دور کامل بزنن دوباره به همونجا میرسن: بنابراین جواب آخر: $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$



حالا اگه معادله کسینوسی باشه. مثلاً $\cos x = \frac{1}{2}$.
اول جای اینکه روی cos ها $\frac{1}{2}$ رو مشخص کنیم. بعدش بالا بریم و پایین بیایم
cos ها همون $\frac{1}{2}$ ایه. جواب $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$



و اگه تانژانتی باشه. مثلاً $\tan x = 1$ ←
اینجا دیگه جواب Single نیست بلکه جفت نقطه است.
$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

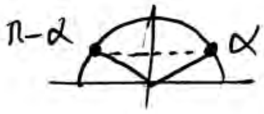
* cos و sin ها هم هر کدوم اینجا دبل میشن

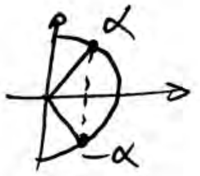
$\sin x = 0$  $\Rightarrow x = k\pi$

$\cos x = 0$  $\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

P.5 /

* اگر معادلات مثلثاتی به صورت خاص مثلاً $\sin x = \sin\alpha$ مطرح شد چه کنیم؟

* $\sin x = \sin\alpha$  $\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

* $\cos x = \cos\alpha$  $\Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

* $\tan x = \tan\alpha$  $\Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$

① مثال $\rightarrow \sin x = -\sin 3x$

$\Rightarrow \sin x = \sin(-3x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - (-3x) \Rightarrow -2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

② مثال $\rightarrow \cos x = -\cos 3x$

$\Rightarrow \cos x = \cos(\pi - 3x) \Rightarrow x = 2k\pi \pm (\pi - 3x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \cdots \\ -2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = \cdots \end{cases}$

* بیشتر سوالات دو چار معادلات مثلثاتی به حل یک معادله درجه دوم ختم می‌شه که در نهایت با تغییر متغیر به یک معادله ساده مثلثاتی می‌رسی:

مشابه سوال کنکور 295

$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \rightarrow$ دو [illegible]

! 25°

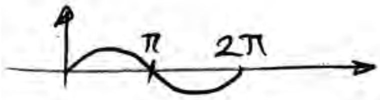
$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(2t+1) = 0 \Rightarrow t = 2$ ✗ , $t = -\frac{1}{2}$

cos که 2 [illegible]

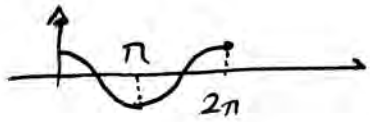
$\cos x = -\frac{1}{2}$  $\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$

P.6

نمودارها :

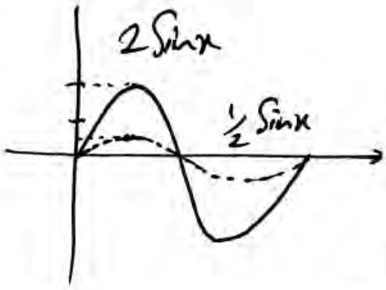


نمودار سینوس



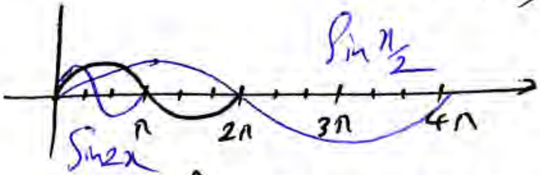
نمودار کسینوس

دوره تناوب $\overset{\text{فرد}}{\sin}(ax+b)$ و $\overset{\text{زوج}}{\cos}(ax+b)$ میشه $\frac{2\pi}{|a|}$.



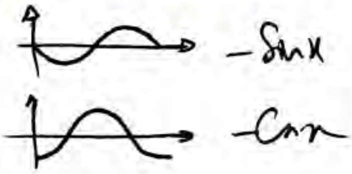
* توان زوج و قدر مطلق دوره تناوب رو نصف میکنه .

* اگر پشت نسبت عددی ضرب بشه روی برد تاثیر میذاره

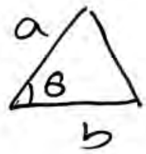


* اگر داخل کمان عددی ضرب و تقسیم بشه روی دامنه :

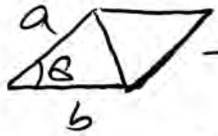
* اگر منفی پشت sin و cos بیاد قرینه میکنه



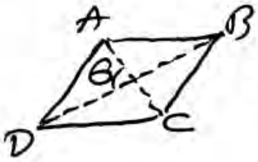
مساحت ها و قضایای سینوس ها و کسینوس ها



$\longrightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin\theta$



$\longrightarrow S = ab \sin\theta$

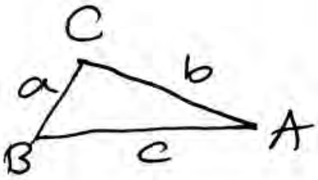


$\longrightarrow S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\theta$

قضیه کسینوس ها :

: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$

قضیه سینوس ها :



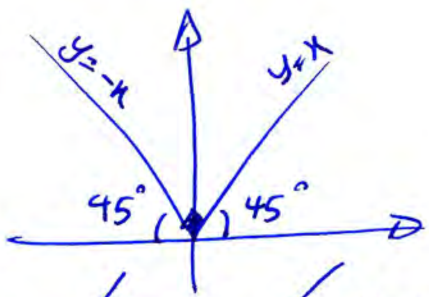
: $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$

P.1

$f(x) = |x|$

خلاصه خالص هفته چهارم

① قدر مطلق



من قدر ایکسم، من قدر ایکسم
با اینکه پیوسته ام، مشتق پذیر نیستم

1* تعریف: از ما علامت می‌خواد بر اساس قانون زیر

$$|u| = \begin{cases} u & , \text{if } u \geq 0 \\ -u & , \text{if } u < 0 \end{cases}$$

2* خواص و ویژگیهای مهم برای کنکور:

① $\sqrt{u^2} = |u|$ → البته که از زیر رادیکال با کتیبه قدر مطلق بیرون میاد

حواست باشه $(\sqrt{u})^2 = u$ چون زیر رادیکال مثبت بوده قدر نمی‌خواد!

② $|a-b| = |b-a|$ → فاصله a تا b همون فاصله b تا a

$|x-a|$ → فاصله x تا a ، $|x-0| = |x|$ → فاصله x تا صفر

بخاطر همینه که وقتی میگی $|x|=2$ تو میگی $x=\pm 2$. فهمیدی عزیزم؟!

③ $|x^2| = |x|^2 = x^2$ → همونطور که تو مورد 1 گفتیم چیزی که مثبته قدر نمی‌خواد

بعضی سوالا لازمه، بعضی سوالا لازم نیست و بعضا سوتی!!! سوتی استفاده میشه.

④ $|xy| = |x|.|y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ → خاصیت jumping

شکل بالا گاهی وقتا بهتره بکار بشه و گاهی برعکس!

⑤ $|x+y| \leq |x|+|y|$ $\xrightarrow{\text{تعمیم}}$ $|x+y+z+\cdots| \leq |x|+|y|+|z|+\cdots$

تک تک بزرگتره! یکی یکی ساییده؟!
دقت کنی علامتش!

اینم از تعمیم نامساوی مثلثی

3 * معادلات و نامعادلات قدر مطلق

① $|u| = |v| \Rightarrow u = \pm v$ بدون شرط → قدرمطلق‌ها رو با تعمیم بهش برسون یا ضرب دو به دو می‌سازن!

② $|u| = v \Rightarrow u = \pm v$ → شرط داره $v \geq 0$

③ $|u| \leq |v|$ or $|u| \geq |v|$ — * تنها حالتی که مجبوریم به توان 2 برسونیم.

④ $|u| < a \Rightarrow -a < u < a$ — بینشون

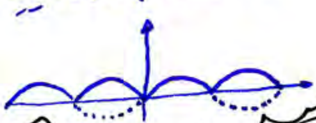
⑤ $|u| > a \Rightarrow u > a$ یا $u < -a$ — خارجشون

4 * نمودارهای قدر مطلق

① $|f(x)|$

اول f رو می‌کشیم هرچی پایینه بالا میاریم.

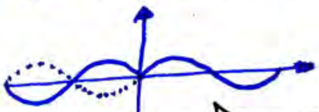
$|\sin x|$



② $f(|x|)$

اول f رو می‌کشیم هرچی چپه پاک می‌کنیم. راست کپی بوشه.

$\sin|x|$

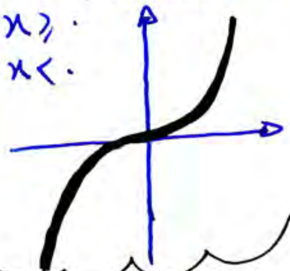


③ $|f(x)| \pm g(x)$

شرط بندی می‌کنیم یعنی براساس قانون اصلی اول درس قدر مطلق دو حالت داریم و بعد دو ضابطه رو می‌کشیم.

$$x + |x| = x + \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$x|x| = \begin{cases} x(x), & x \geq 0 \\ x(-x), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$



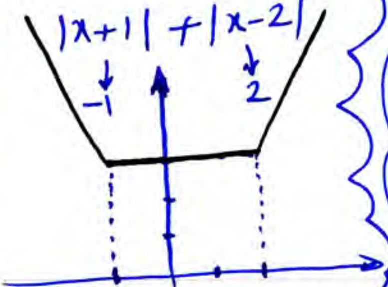
④ گلدون: $|x-a| + |x-b|$

1- ریشه‌ها رو پیدا کن

2- فاصله رو پیدا کن

3- برو بالا

$|x+1| + |x-2|$



⑤ سرسره: $|x-a| - |x-b|$

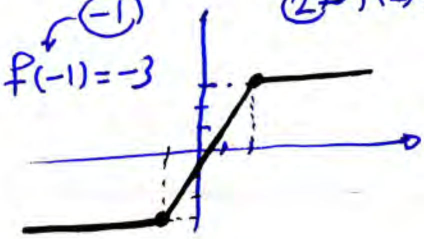
1- ریشه‌ها رو پیدا کن

2- عرضشون رو پیدا کن

3- وصلشون کن!

$f(x) = |x+1| - |x-2|$

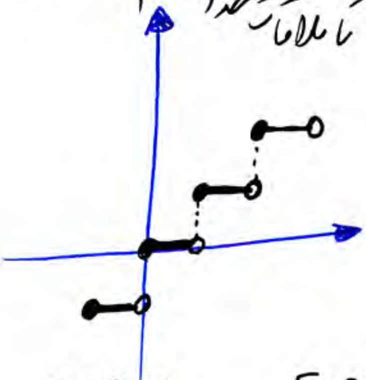
$f(-1) = -3$, $f(2) = 3$



P.3

② جزء صحیح

بیا بیا؛ تا ملاقات خدا می‌رویم ...



[2] = 2 , [-3] = -3

1 * بیمی از ما علامت می‌خواد بر اساس قانون زیر

$$[u] = \begin{cases} \text{خودش} , & \text{if } u \in \mathbb{Z} \\ \text{عدد صحیح قبلیش} , & \text{if } u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$[2,3] = 2$, $[3.9] = 3$, $[\pi] = 3$, $[e] = [2.71] = 2$, $[-1.5] = -2$

2 * خواص و ویژگی‌های مهم برای کنکور

① $$[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] , & 0 \leq \text{مجموع اجزای اعشاری } x \text{ و } y < 1 \quad (I) \\ [x]+[y]+1 , & 1 < \text{مجموع اجزای اعشاری } x \text{ و } y \quad (II) \end{cases}$$

مثال (I): $[\pi] = [3.14] = 3$, $[e] = [2.71] = 2 \Rightarrow [\pi + e] = [\pi] + [e]$

چون مجموع اجزای اعشاری π و e یعنی 0.14 و 0.71 به یک نمی‌رسه!

مثال (II): $[\sqrt{2}] = [1.4] = 1$, $[\sqrt{3}] = [1.7] = 1 \Rightarrow [\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}}_{3.1}] = \underbrace{[\sqrt{2}]}_{1} + \underbrace{[\sqrt{3}]}_{1} + 1$

چون مجموع اجزای اعشاری $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ جمع داشتن و از یکی رو رد کردن نوش جونشون!

② $[x \pm k] = [x] \pm k$ عدد صحیح بیرون بیا بیرون بیا این براته؛ با این براته

قدر طلوع؛ قدر طلوع؛ تو کاپیتان دارای ولی این داره؛ چون این براته!

③ $[kx] \neq k[x] \xrightarrow{\text{مثلاً}} [2x] \neq 2[x]$ این دو لزوماً مساوی نیستن

$x = 1.6$ $\qquad$ $x = 1.4$

$[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

$[2 \times 1.6] \neq 2[1.6]$ $\qquad$ $[2 \times 1.4] = 2[1.4]$

3 * معادلات و نامعادلات براکتی

* $[u]=k \Rightarrow k \leq u < k+1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$

* $[x]=\frac{1}{2} \rightarrow$ نداره ج و * $[x-3]=1 \Rightarrow [x]=4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$

* $[x+[x]]=2 \Rightarrow 2[x]=2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$

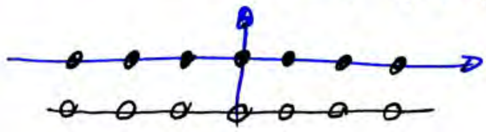
* $[x+\frac{2}{3}]+[x-\frac{1}{3}]=3 \Rightarrow [x-\frac{1}{3}+1]+[x-\frac{1}{3}]=3$

$\Rightarrow 2[x-\frac{1}{3}]=2 \Rightarrow [x-\frac{1}{3}]=1 \Rightarrow 1 \leq x-\frac{1}{3} < 2 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq x < \frac{7}{3}$

* $[3x-5]+2[x-2]=x-1 \overset{x\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} 3x-5+2x-4=x-1 \Rightarrow x=2$

* $[x]+[2x]=0 \Rightarrow \begin{cases} [x]=0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ [2x]=0 \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} [0,\frac{1}{2})$

* $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & , x\in\mathbb{Z} \\ -1 & , x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ و $0 \leq x-[x] < 1$



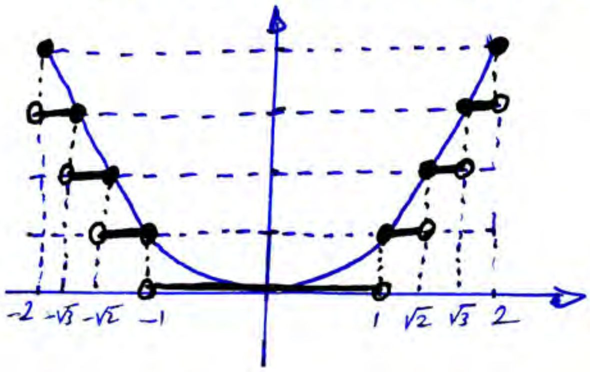
* $[x] \geq 1 \hookrightarrow x \geq 1$ * $[x] > 1 \hookrightarrow x \geq 2$ * $[x] < 1 \hookrightarrow x < 1$ * $[x] \leq 1 \hookrightarrow x < 2$

4 * نمودارهای براکتی

① $[f(x)]$

اول خودش
دوم داریت
سوم رس
چهارم ببره
پنجم شده

$f(x)=[x^2] \rightarrow x\in[-2,2]$



② $[f(x)] \pm \times \div g(x)$ ← افراز

$y=x+[x] \rightarrow x\in[-2,2]$

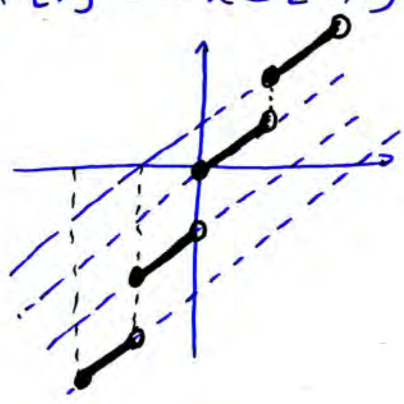
$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y=x-2$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y=x-1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow y=x$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow y=x+1$

هر خط رو موازی خودش
رسم کنیم



P.5

③ حد و پیوستگی

* 1 کجاها حد چپ و راست

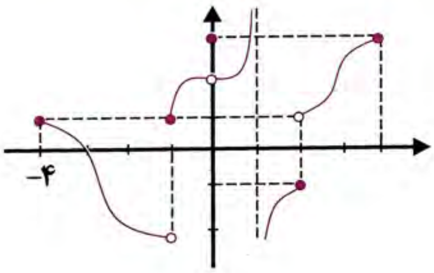
① نمودار ← رفتار شاخه‌ها را پیگیری می‌کنیم

② ریشه مخرج ← مخرج به نقاط توش صفر کن حساب

③ ریشه قدر مطلق ← قدر هم شکل مخرج ← حساب

④ صحیح کننده براکت ← براکت به نقاط توش Z کن

① نمودار



$\lim\limits_{x\to -۴} f(x)=۱,\ \lim\limits_{x\to -۲} f(x)=۰,\ \lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۳$

$\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=\begin{cases}-۱^+=۱\\ -۱^-=-۲\end{cases}\quad \otimes \quad \lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\begin{cases}۲^+=۱\\ ۲^-=-۱\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲,\ f(۰)=۳ \qquad \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\begin{cases}۱^+=-\infty\\ ۱^-=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -۲^+} f(|x|)=f(|-۲^+|)=f(|۱/۹|)=f(۱/۹)=f(۲^-)=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۴^-}[f(x)]=[۳^-]=۲,\ \lim\limits_{x\to -۴^+}[f(x)]=[۱^-]=۰$

② ریشه مخرج ← عامل درجه اول، عامل درجه دوم، عامل مثلثاتی

$\frac{+\text{عدد}}{0^+}=+\infty,\quad \frac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty,\quad \frac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty,\quad \frac{-\text{عدد}}{0^-}=+\infty$

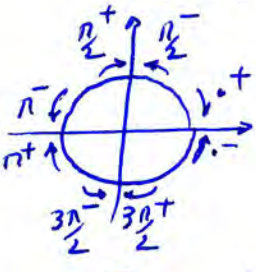
$* \lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\ \begin{cases}2^+:\ \frac{2}{2.1-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty\\ 2^-:\ \frac{2}{1.9-2}=\frac{2}{0^-}=-\infty\end{cases}$

$* 1+0^+=1^+ \qquad * 1-0^+=1^-$

$* 1+0^-=1^- \qquad * 1-0^-=1^+$

$* \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\ \begin{cases}1^+:\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{(1^+-1)(1-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{(0^+)(-1)}=\frac{2}{0^-}=-\infty\\ 1^-:\ \lim\frac{2}{(1^--1)(1-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{(0^-)(-1)}=\frac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}$

$* \lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{\sin x}\ \begin{cases}\pi^+:\ \frac{1}{0^-}=-\infty\\ \pi^-:\ \frac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$



$* \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ \begin{cases}\frac{\pi}{2}^+:\ \frac{1}{0^-}=-\infty\\ \frac{\pi}{2}^-:\ \frac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$

$* \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ \begin{cases}0^+:\ \frac{1}{0^+}=+\infty\\ 0^-:\ \frac{1}{0^-}=-\infty\end{cases}$

$* \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{1-1^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

وقتی Sin , Cos داری یک شکل همیشه ① میکشی!

$* \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{x+\pi/6}{\tan x-\sqrt{3}}=\lim\frac{\frac{\pi}{2}}{\tan\frac{\pi}{3}-3}\ \begin{cases}\frac{\pi}{3}^+:\ \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}^+-\sqrt{3}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{0^+}=+\infty\\ \frac{\pi}{3}^-:\ \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}^--\sqrt{3}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{0^-}=-\infty\end{cases}$

③ ریشه قدرمطلق

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x+1}=1 \quad , \quad \lim_{x\to -2}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to -2}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x+1} \begin{cases} -1^{+}: & \lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x+1}=1 \\ -1^{-}: & \lim\limits_{x\to -1}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1 \end{cases} \quad ⊗$$

حد تابع در صورت وجود یکتاست
دیدی که هر تابعی حد نداره!

④ صحیح کننده براکت

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}[x]=[\tfrac{1}{2}]=0 \quad , \quad \lim_{x\to 1}[x] \begin{cases} 1^{+}: & 1 \\ 1^{-}: & 0 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to 3}[\tfrac{x}{2}]=[\tfrac{3}{2}]=1$$

$$\lim_{x\to 4}[\tfrac{x}{2}] \begin{cases} 4^{+}: & [\frac{4^{+}}{2}]=[2^{+}]=2 \\ 4^{-}: & [\frac{4^{-}}{2}]=[2^{-}]=1 \end{cases} \Rightarrow$$ حد وجود نداره

* ترفند عاملی که می‌تونه حال قدر و براکت رو بگیره، بجور سوال خوب که عامل صفرکننده است.

$$\lim_{x\to 4}(x-4)[\tfrac{x}{2}]=0\times$$ عدد $=0 \rightarrow$ حالا دیگه حد دار شد!

$\boxed{2 \ * \ \text{رفع ابهام}}$

صفر صفرم ← 100 بار

$\infty-\infty$ ← 2 بار ← مخرج مشترک

$0\times\infty$ ← 1 بار ← عامل بی‌نهایت شو زده معکوس کن و بره تو مخرج

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

هم ارزی:
جبری { پرتوان ← توجه جمله پرتوان ؛ کم توان ← توجه جمله کم توان
مثلثاتی { سینوس و تانژانت u با u هم‌ارزه u ؛ $1-\cos^m u$ شبیه $m\frac{u^2}{2}$ برای m ضریب m

هوپیتال:
نقش: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \ \underline{\underline{HOP}} \ \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

موارد استثناء:
1- هم ارزی مناسبی نداریم.
2- عدد ثابت نشه.
3- $\sqrt{\ }$ دارای زیر رادیکال صفر نیست.
4- نسبت مثلثاتی دارای تانژانت صفر نیست.

P.7

3 * پیوستگی

* همون حد، فقط باید چپ و راست و مقدار هم برابر باشن که بتونیم اعلام کنیم تابع تو اون نقطه مورد نظر پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} g_1 , & x\le a \\ g_2 , & x>a \end{cases}$$

a یک نقطه مرزی

$$f(x)=\begin{cases} g_1 , & x\ne a \\ g_2 , & x=a \end{cases}$$

بالایی برای حد، پایینی مقدار

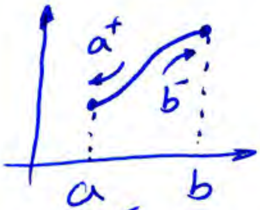
$$f(x)=\begin{cases} g_1 , & |x|<a \\ g_2 , & |x|\ge a \end{cases}$$

دو تا نقطه مرزی a و $-a$

* پیوستگی روی بازه $[a,b]$:

شرط اول: تو بازه (a,b) پیوسته باشه

شرط دوم: در a از راست و در b از چپ



4 * دنباله‌ها

سه تا صفت داریم:

1) همگرایی → حد در بی‌نهایت
- جواب عدد شد → دنباله همگراست
- در غیر اینصورت واگراست

2) کرانداری
- 1) هر دنباله همگرا کرانداره
- 2) هر دنباله‌ای که ∞ نشه کرانداره مثل $(-1)^n$ و $\sin n$

3) یکنوایی: جمله بعدی رو بنویسیم و با جمله مقایسه کنیم
- زیاد شده بود صعودی
- کم شده بود نزولی

روش‌ها برای حد دنباله همگرا:

1) قاعده پرتوان → توانی‌ها
2) قاعده پایه‌ای → نمایی‌ها
3) رادیکالها → 3 حالت
4) رشد → صورت و مخرج هم خانواده نباشن
5) $\{c^n\}$ → 4 حالت

① پرتوان

$$\frac{n^2+1}{n+3} \to \infty \quad \text{واگرا}$$

$$\frac{n+1}{n^2+1} \to \text{همگرا به صفر}$$

$$\frac{2n+1}{3n+5} = \frac{3}{5} \quad \text{همگرا}$$

② پایه‌ای

$$\frac{3^{n+1}+2^{n+5}}{3^{n+2}+2^{n+7}} = \frac{3^n\times 3^1}{3^n\times 3^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3^{n+5}+2^{2n+1}}{3^{n+8}+2^{2n+3}} = \frac{2^{2n}\times 2^1}{2^{2n}\times 2^3} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}} \simeq \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$$

تو این حالت مجبور شدیم بنویسیم

③ رادیکالها

$$\frac{n+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2n-\sqrt{n^2+1}} = \frac{n+n}{2n-n} = 2$$

$$\frac{n-\sqrt{n^2+2n}}{2n-\sqrt{4n^2-16n}} = \frac{n-\sqrt{1}\left(n+\frac{2}{2\times 1}\right)}{2n-\sqrt{4}\left(n-\frac{16}{2\times 4}\right)} = \frac{n-n-1}{2n-2n+1} = -1$$

P.8

④ قاعده رشد

$\frac{ق}{ض} = \infty$

$\frac{ض}{ق} = 0$

$n! >> a^n >> n^k >> \sqrt[k]{n} >> \log_k n$

نمایی — توانی

⑤ $\{c^n\}$

$c=1 \rightarrow 1^n = \{1,1,1,\dots\}$

$c=-1 \rightarrow (-1)^n = \{-1,1,-1,1,\dots\}$ — واگرا

$|c|<1$:

$c=\frac12 \rightarrow (\frac12)^n = \{\frac12, \frac14, \frac18, \dots\}$ — همگرا به صفر

$c=-\frac12 \rightarrow (-\frac12)^n = \{-\frac12, \frac14, -\frac18, \dots\}$ — همگرا به صفر

$|c|>1$:

$c=2 \rightarrow 2^n = \{2,4,8,\infty\}$

$c=-2 \rightarrow (-2)^n = \{-2, 4, -8, 16, -32, 64\}$ → $+\infty$ / $-\infty$ — نوسانی

برخورد با تستها:
- اول ∞ ها رو حذف کنیم ← اگه تکنیک روش شد OK
- اگه نشد شروع کنیم از $n=1$ بذاریم 2 و ...

عوامل نوسانی شکل $(-1)^n$، $\cos n\pi$ اگر مخرج قوی تر بگیرن همگرا به صفر باشن ولی اگه تو برات برگ داران.

اگر دنباله عادی بود و مریم و Marya خواسته شد: حد دنباله رو بدست بیار، ولی اگر بی خانواده بود باید بررسی بشه.

$\frac{n^3}{3^n} = \{\frac13, \frac89, 1, \frac{64}{81}, \dots\}$ — Marya (1)

همگرا به صفر ← مریم

هندسی $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$, عددی $S_n = \frac{n}{2}(a+L)$

خلاصه خالص مشتق و کاربرد

۱) مشتق گیری و قوانین

کل قوانین از بر کن

1) $y=c \Rightarrow y'=0$ 2) $(x^n)'=nx^{n-1}$ 3) $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

4) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 5) $(uv)'=u'v+v'u$ 6) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

7) $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$ 8) $\left(\frac{k}{x}\right)'=\frac{-k}{x^2}$ 9) $\left(\frac{k}{u}\right)'=\frac{-ku'}{u^2}$

10) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 11) $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ 12) $(\sqrt[m]{u^n})'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

13) $(\sin u)'=u'\cos u$ 14) $(\cos u)'=-u'\sin u$ 15) $(\tan u)'=u'(1+\tan^2 u)$

16) $(\cot u)'=-u'(1+\cot^2 u)$ 17) $(\sin^n u)'=nu'\cos u\sin^{n-1} u$ 18) $(e^x)'=e^x$

19) $(e^u)'=u'e^u$ 20) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 21) $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

۱* مشتق گیری از توابع طولانی و پیچیده :

تا حد امکان ساده کن و بعد مشتق بگیر.

$$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$y=\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x\cos 2x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 4x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

$$y=\frac{x\sqrt{x+3}+\sqrt{x}(x+3)}{\sqrt{x^2+3x}}=\frac{\cancel{\sqrt{x}\sqrt{x+3}}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+3})}{\cancel{\sqrt{x}\sqrt{x+3}}}$$ → بعد مشتق بگیر و حاصل ضرب

۲* مشتق گیری از عامل صفر شونده

کافیه از عامل صفر شونده مشتق بگیری و بقیه عدد گذاری

$$f(x)=\frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \longrightarrow f'(1)=\frac{\sqrt[5]{3(1)-2}}{(5(1)-3)^4}=\frac{1}{16}$$

P.2

* 3- مشتق گیری به کمک انتگرال

$$f(x)=(x+\sqrt{x^2+2})^5,\quad g(x)=(x-\sqrt{x^2+2})^5 \Rightarrow f'g+g'f=(fg)'$$

$$y=f\cdot g=\left((x+\sqrt{x^2+2})(x-\sqrt{x^2+2})\right)^5=(x^2-x^2-2)^5=-32 \Rightarrow y'=0$$

* 4- مشتق تابع هموگرافیک

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \longrightarrow \left(\frac{au+b}{cu+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\cdot u'$$

$$\left(\frac{2x+1}{-3x+5}\right)'=\frac{(2)(5)-(-3)(1)}{(-3x+5)^2}=\frac{13}{(-3x+5)^2} \longrightarrow \left(\frac{2\sin x+1}{-3\sin x+5}\right)'=\frac{13}{(-3\sin x+5)^2}\cdot\cos x$$

* 5- مشتق گیری از قدر مطلق و براکت

سوال مشتق در صورتی با این دو دوست عزیز سیاست حرفی: قدر مطلق علامت می‌خواهد. / براکت عدد می‌خواهد.

$$f(x)=x|x-1|+x[x] \begin{cases} 1^+: x(x-1)+x=x^2 \Rightarrow f'(1^+)=2(1)=2 \\ 1^-: x(-x+1)+0=-x^2+x \Rightarrow f'(1^-)=-2(1)+1=-1 \end{cases}$$

$$g(x)=x|\sin\pi x| \begin{cases} 1^+: x|\sin\pi^+|=x(-\sin\pi x) \leftarrow \text{حالا مشتق بگیر} \\ 1^-: x|\sin\pi^-|=x(\sin\pi x) \leftarrow \text{حالا مشتق بگیر} \end{cases}$$

$$h(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \begin{cases} 2^+: x\left|\cos\frac{\pi}{2^+}\right|=x\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right|=x\left(\cos\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{2} \text{حالا مشتق بگیر} \\ 2^-: x\left|\cos\frac{\pi}{2^-}\right|=x\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^+\right|=x\left(-\cos\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{2} \text{حالا مشتق بگیر} \end{cases}$$

* 6- تعریف مشتق:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

② مشتق گیری از ضوابط ضمنی | Explicit forms! ☺

همون مشتق گیری معمولی خودمون با این تفاوت که y که روبرو شکل ها می بینیم!

$$y^2 = \sqrt{y} + \ln y + x \sin e^y$$ ⟵ تابع ضمنی

مشتق ⟵

$$2yy' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{y'}{y} + (1)\sin e^y + y'e^y \cos e^y (x)$$

y' ها هم بر حسب x و با جایگذاری مقادیر داده شده به دست میاد. تمام!

③ نوشتن معادلات مماس و قائم بر منحنی

✱ 1 - از نقطه واقع بر منحنی

— معادله ی مماس و قائم بر منحنی $y = x^2 +$ را در نقطه $\underline{x=1}$ بنویسید:

گام اول: $x=1$ رو تو معادله جایگذاری می کنیم تا مختصات نقطه کامل بشه! $(1,\ \ )$

گام دوم: مشتق تو نقطه تماس شیب مماس رو بهمون میده: $y' = 2x \xrightarrow{x=1} m = 2$

گام سوم: اگر شیب قائم رو خواستیم، شیب مماس رو قرینه و معکوس می کنیم: $m_\perp = -\frac{1}{m_{مماس}}$

گام چهارم: حالا با داشتن (x_1, y_1) و m معادله خط رو می نویسیم: $y - y_1 = m(x - x_1)$

معادله قائم: $y - 4 = -\frac{1}{2}(x-1)$ و معادله مماس: $y - \ \ = 2(x-1)$

✱ 2 - از نقطه خارج منحنی

— معادله مماس و قائم بر منحنی $y = x^2 + 3$ از نقطه $(1, 0)$ را بنویسید.

گام اول: چک نقطه داده شده داخل معادله صدق نمی کنه پس خارج از منحنیه.

P.4

گام دوم : نقطه تماس رو به صورت فرضی α نامگذاری می‌کنیم

گام سوم : با نقطه و شیب فرضی معادله خط رو می‌نویسیم

$$y-\alpha^2-3=2\alpha(x-\alpha)$$

گام چهارم : حالا چون نقطه مورد نظر روی خط قرار داره مختصاتش در معادله خط صدق می‌کنه.

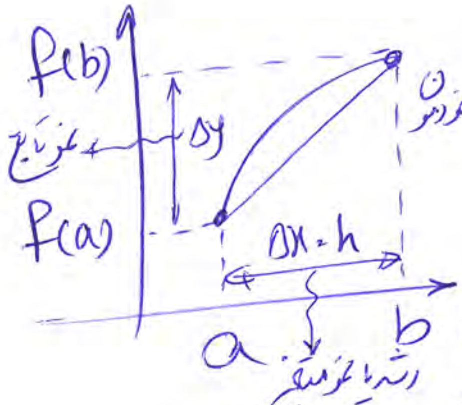
یعنی بجای x ۱ و y رو صفر قرار میدیم :

$$0-\alpha^2-3=2\alpha(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=-\frac{c}{a}=3\end{cases} \rightarrow \text{نقاط تماس}$$

تذکر : اگر معادله قائم رو می‌خواستید شیب خط می‌شه $-\frac{1}{2\alpha}$.

④ آهنگ متوسط و لحظه‌ای



$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* آهنگ متوسط و لحظه‌ای تابع $y=x^2$ در بازه و نقطه

$\frac{5^2-1^2}{5-1}=6$: $[1,5]$

$2(1)=2$: $x=1$

⑤ رابطه بین پیوستگی و مشتق‌پذیری

شعر معروف : من قدر ایکسم من قدر ایکسم ؛ با اینکه پیوسته‌ام مشتق‌پذیر نیستم.

من زاویه دارم چون زاویه دارم ؛ بفهمیم ناصافم چون صاف نیستم !

پیوستگی برای مشتق‌پذیری شرط لازمه ولی کافی نیست. هر مشتق‌پذیری پیوسته است ولی هر پیوسته‌ای مشتق‌پذیر نیست مثل همین قدر ایکس تو $x=0$!

پس اگر دو حد برابر بودن در آخر مشتق‌پذیر حتماً پیوسته هم بوده و شرطش رو لحاظ می‌کنیم.

P.5

⑥ مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

$$y=f(\bigcirc) \Rightarrow y'=(\bigcirc)'\, f'(u)$$

$$y=f(\sqrt{x}) \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\, f'(\sqrt{x})$$

$$y=f(\sin x) \Rightarrow y'=\cos x\, f'(\sin x)$$

* $y=\tan^2 \pi u \Rightarrow y'=2(\pi u')(1+\tan^2 \pi u)\tan(\pi u)$

$$u=x+\sqrt{x} \begin{cases} u_{1/4}=\frac14+\sqrt{\frac14}=\frac14+\frac24=\frac34 \\ u'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}=1+\frac{1}{2(\frac12)}=2 \end{cases}$$

→ حالا جایگذاری کن بابا!

* $y=\sqrt{2u}-\frac{1}{u} \Rightarrow y'=\frac{2u'}{2\sqrt{2u}}+\frac{u'}{u^2}$

$$u=\sin^2 x-\cos 2x \begin{cases} u_{\pi/4}=\sin^2(\pi/4)-\cos\frac{\pi}{2}=\frac12 \\ u'=\sin 2x+2\sin 2x=3\sin 2x \xrightarrow{\pi/4} 3 \end{cases}$$

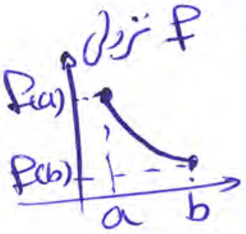
→ حالا جایگذاری کن بابا

⑦ یکنوایی و جهت تقعر

f صعودی

b>a
$f(b)>f(a)$

f نزولی



b>a
$f(b)<f(a)$

شیب $f'>0$ $\quad$ $f'<0$

$f'\geq 0$: صعودی

$f'>0$: اکیداً صعودی *

منحنی بالای خطوط مماس  رو به بالا : $f''>0$

منحنی پایین خطوط مماس  رو به پایین : $f''<0$

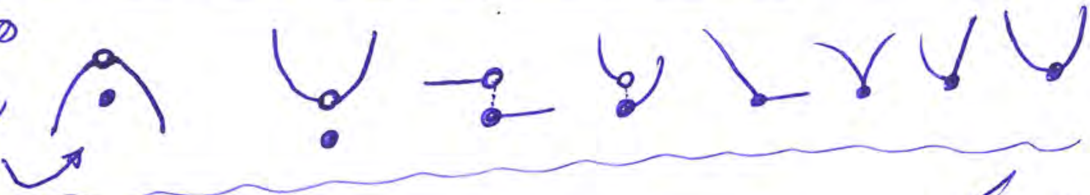
* f'' جهت تقعر رو نشون میده

P.6

⑧ انواع و اقسام اکسترمم نسبی و مطلق

اکسترمم یعنی < Max or min

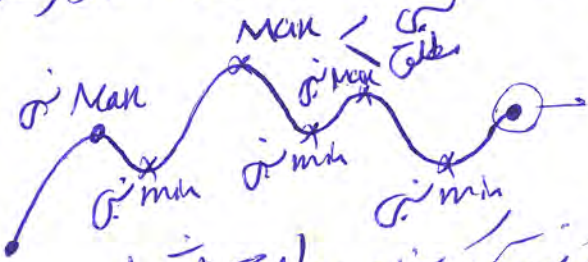
همه Max نسبی و مطلق بجز این که فقط نسبیه



همه min مطلق و نسبی بجز این که فقط نسبیه

* نقاطی که از همه همسایه‌ها بالاتر یا مساوی باشن Max نسبی و نقاطی که از همه همسایه‌ها پایین‌تر یا مساوی باشن min نسبی هستن. اگه یه طرف بالاتر و یه طرف پایین‌تر هیچی

* سر و ته بازه می‌تونن اکسترمم مطلق باشن ولی نسبی نه چون در دو طرف همسایگی ندارن.



این نقطه هیچی نیست چون اولاً همسایگی نداره که بخواد نسبی باشه و ثانیاً از همه بالاتر یا پایین‌تر نیست که بخواد مطلق باشه!

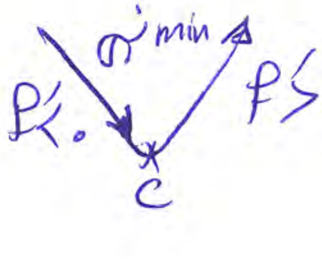
* تشخیص اکسترمم‌ها از روی ضابطه

✓ نقاط بحرانی کاندیدای اکسترمم هستن. نقطه بحرانی نقاطیه که < یا مشتقش صفره / یا مشتقش وجود نداره

✓ اگر تابع مشتق‌پذیر باشه اکسترمم‌هاش هم مشتق‌پذیره که در اینصورت مشتقش صفره.

✓ پس برای پیدا کردن نقاط بحرانی از روی ضابطه: اگر تابع مشتق‌پذیر بود مشتق رو مساوی صفر میذاریم

$f(c)=0$ اگر f قبل و بعد c تغییر علامت بده → c مرتبه اکسترمم



* اسم این کار، آزمون مشتق اول . پس ریشه ساده f' را میشه اکسترمم

✓ حالا اگر تعیین علامت f' ساده نبود از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

جایی که f' صفره:
- اگر $f''>0$ باشه نمودار اینجوریه $\cup$ و c میشه min نسبی.
- اگر $f''<0$ باشه نمودار اینجوریه $\cap$ و c میشه Max نسبی.

✓ جاهایی که تعیین علامت سخته برای تشخیص نوع اکسترمم از این آزمون استفاده می‌کنیم.

مثال ①: طول و نوع اکسترمم یا اکسترمم‌های تابع مقابل؟

$f(x)=-x^4+8x^3-18x^2$

$f'(x)=-4x^3+24x^2-36x=0 \Rightarrow -4x(x^2-6x+9)=0$

$\Rightarrow -4x(x-3)^2=0$
- $x=0 \rightarrow$ ریشه ساده f' اکسترمم
- $x=3 \rightarrow$ ریشه مضاعف f' عطف

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	−

حالا برای تشخیص نوع اکسترمم کافیه f' رو تعیین علامت کنیم. پس بر اساس آزمون مشتق اول $x=0$ طول نقطه Max نسبی.

مثال ②: طول نقاط اکسترمم نسبی منحنی تابع $f(x)=\sin x-\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$؟

$f'(x)=\cos x+\sin x=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$

حالا چون تعیین علامتش کمی سخته یا بونیت از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$f''(x)=-\sin x+\cos x \xrightarrow{x=3\pi/4} -\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}=-\sqrt2 \Longrightarrow f''(3\pi/4)<0$ Max نسبی

مثال ③: برد تابع $f(x)=x^3-12x+8$ در بازه $[-3,1]$؟

- f (ابتدای بازه)
- f (انتهای بازه)
- f (نقاط بحرانی درون بازه)

$f(-3)=17$ ، $f(1)=-3$ مطلق min

$f'(x)=3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow$
- $x=2 \rightarrow \notin D_f$
- $x=-2 \rightarrow f(-2)=24$ مطلق Max

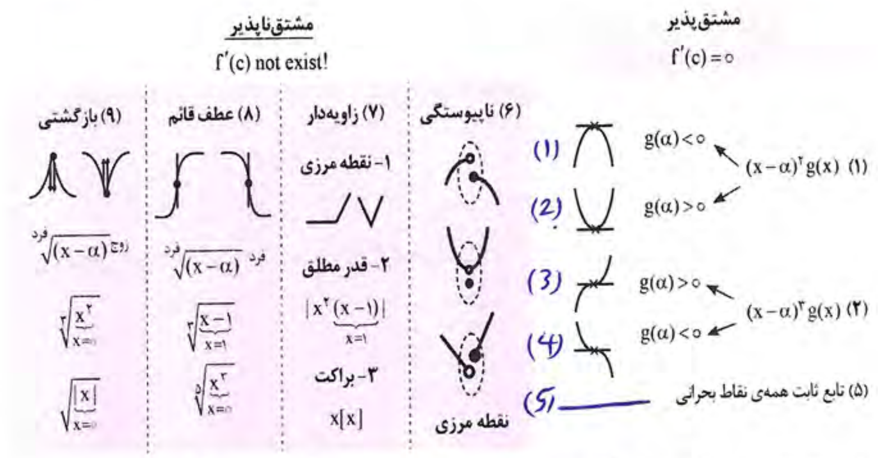
!!! برد تابع یعنی از min مطلق تا Max مطلق.

۹) نه نوع نقطه بحرانی داریم

P.8 $f'(c)=0 \leftarrow$ مشتق‌پذیر

$f'(c)$ not exist $\leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

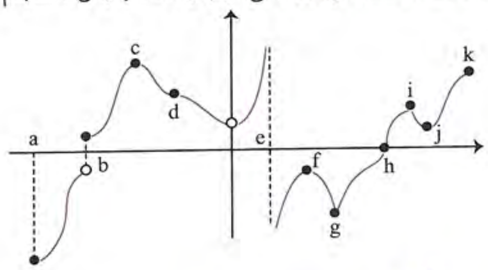
نقاط انتهایی / سر و ته بازه / بحرانی / نیست.



حالا نقاط بحرانی به چه درد می‌خورن؟! نقاط بحرانی کاندیدای اکسترممی هستن یعنی می‌رن برای کسب مقام اکسترممی. در واقع از بین نقاط بحرانی اکسترمم‌ها (Max و min نسبی) انتخاب می‌شن.

مثال ۱ در نمودار زیر، چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۹



نقاط b، c، d، f، g، h ، i و j بحرانی هستند.

برای تعیین نقاط بحرانی کافیه از روی ضابطه مشتق بگیریم. اگر مشتق خطی بود مساوی صفر قرار بدیم و اگر مشتق کسری بود هم صورت و هم مخرجش رو مساوی صفر قرار بدیم. ریشه‌های صورت و مخرج مشتق همه بحرانی‌اند! به شرطی که عضو دامنه باشن.

توابع نمایی و لگاریتمی و همگرایشان نقطه بحرانی ندارن.

فرجه‌ها فرد و $D_f=\mathbb{R}$

$*\ f(x)=x^{6/5}-12x^{1/5} \Rightarrow f'(x)=\frac{6}{5}x^{1/5}-\frac{12}{5}x^{-4/5}=0$

چون اختلاف توان‌هاشون یک واحده لذا اولی رو فاکتور بگیر که دومی بشه x^{-1} !

$\frac{6}{5}x^{1/5}(1-2x^{-1})=0 \Rightarrow \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)=0 \Rightarrow \sqrt[5]{x}\left(\frac{x-2}{x}\right)=0$

$x=2 \rightarrow$ نقطه بحرانی مشتق‌پذیر و $x=0 \rightarrow$ نقطه بحرانی مشتق‌ناپذیر

$*\ f(x)=x^{7/6}-\frac{7}{2}x^{2/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{7}{6}x^{1/6}-\frac{7}{3}x^{-1/3}=0$

$\Rightarrow \frac{7}{6}x^{1/6}=\frac{7}{3}x^{-1/3} \Rightarrow \frac{\sqrt[6]{x}}{2}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{x^2}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=2$ $\boxed{x=4}$

ولی $x=0$ سر بازه است و بحرانی نیست

۱۵ نقطه عطف

P.9

شرایط: ۱) پیوستگی ۲) خط مماس داشته باشد ۳) تغییر جهت تقعر

تو توابع مشتق‌پذیر یعنی رادیکالی که هیچ مشکل ندارن نقطه عطف ریشه ساده‌ی f'' هست ولی تو توابع رادیکالی ریشه ساده‌ی مخرج f'' هم به شرط حضور در دامنه می‌تونه عطف باشه. مثلاً

$$f(x)=x\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}=x^{4/3}-2x^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{2}{3}x^{-2/3}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{1/3}(\underbrace{2-x^{-1}}_{2-\frac{1}{x}})=0 \Rightarrow x^{1/3}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=0 \Rightarrow \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2}}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, \quad \sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow x=0$$

x		$\frac{1}{2}$	
	$-$	0	$+$
		min	

$x=\frac{1}{2}$ ریشه ساده f' است اکسترمم و با رسم جدول مشتق اول معلوم است که min است ولی $x=0$ که ریشه زوجه و f' تو صفر تغییر علامت نمی‌ده. پس $x=0$ نقطه عطف.

حالا بریم سراغ f'':

$$f''(x)=\frac{4}{9}x^{-2/3}+\frac{4}{9}x^{-5/3}=\frac{4}{9}x^{-2/3}(\underbrace{1+x^{-1}}_{1+\frac{1}{x}})=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}_{\text{همیشه مثبت}}\left(\frac{x+1}{x}\right)=0 \Rightarrow$$

$x=-1$ ریشه ساده‌ی f'' عطف

$=0 \Rightarrow$ $x=0$ ریشه ساده‌ی مخرج f'' و باز هم عطف

چون دامنه $f=\mathbb{R}$ و f'' تو صفر داره تغییر علامت می‌ده.

تابع درجه 3

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=6ax+2b=0$$

$$x_I=-\frac{b}{3a}$$

f'' درجه یک شد و همیشه یک عطف داره.

$\Delta_{f'}>0$: $a>0$، $a<0$

$\Delta_{f'}=0$: $a>0$، $a<0$

$\Delta_{f'}<0$: $a>0$، $a<0$

تابع درجه 4

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

$f'(x)=$ درجه 3

$f''(x)=$ درجه 2: $\Delta>0 \to$ دو تا عطف؛ $\Delta=0$، $\Delta<0 \to$ فاقد عطف

اگه $\Delta_{f''}$ صفر باشه ریشه مضاعف f'' می‌ده که عطف نیست

چون درجه چهار رو حالت‌هاش زیاده فقط $a>0$ ها رو می‌کشیم

f' سه ریشه داره: $a>0$، $a>0$، $a>0$

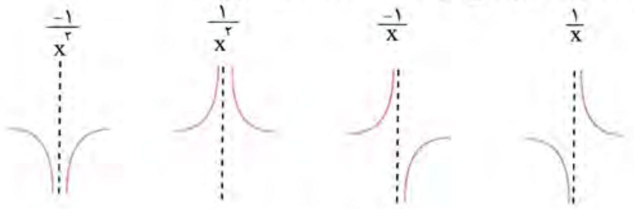
f' دو تا ریشه داره: $a>0$، $a>0$

f' یک ریشه داره: $a>0$

P.10

مجانب شاخه‌ی بی‌نهایت منحنیه و یک کمک رسم بسیار مهم در نمودارهای کسری و رادیکالیه. ۳ نوع مجانب داریم که تو یه تخته کل درسشو برات توضیح می‌دم. البته منحنی یه تابع حداکثر می‌تونه ۲ نوع مجانب رو داشته باشه یعنی افقی – قائم یا افقی – مایل یا قائم – مایل. البته یه منحنی میتونه حداکثر دو مجانب افقی و دو مجانب مایل و بیشمار مجانب قائم داشته باشه یعنی محدودیتی در تعداد مجانب قائم نداریم.

(۱۱) انواع مجانب



قائم $(x=a)$

حد بی‌نهایت $(\lim_{x\to a} f(x)=\infty)$

تو چه توابعی مجانب قائم داریم؟

فقط تو توابع کسری

* ریشه‌ی مخرج مجانب قائمه ولی نه هر ریشه‌ی مخرجی! دو تا شرط داره!

اولاً صورت رو صفر نکنه یعنی با عامل صفرکننده‌ی صورت ساده نشه!

ثانیاً: زیر رادیکال‌هایی که شاید توی کسر باشه رو منفی نکنه!

افقی $(y=b)$

حد در بینهایت $(\lim_{x\to\infty} f(x)=b)$

تو چه توابعی مجانب افقی داریم؟

تو توابع کسری و رادیکال‌های Mix!

* تو کسر اگه درجه‌ی مخرج بیشتر باشه، حد در بینهایت صفر می‌شه. پس $y=0$ میشه مجانب افقی. اگه صورت و مخرج هم توان باشن چی؟!

$$\text{مجانب افقی} = \frac{\text{ضریب جمله‌ی پر توان صورت}}{\text{ضریب جمله‌ی پر توان مخرج}}$$

* رادیکال Mix:

$$mx+h\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$$

یه افقی یه مایل $\quad$ if $|m|=\sqrt{a} \Rightarrow$

دو تا مایل $\quad$ if $|m|\neq\sqrt{a} \Rightarrow$

مایل $(y=ax+b)$

حد در بینهایت $(\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$

تو چه توابعی مجانب مایل داریم؟

توابع کسری و رادیکالی!

* تو کسر اگه صورت یه درجه بیشتر باشه مجانب مایل داریم، کافیه صورت رو به مخرج تقسیم کنیم.

* تو رادیکال خوش ترکیب عبارت هم‌ارز رادیکال (بتّا)، می‌شه مجانب مایل:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}=\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$$

به $\frac{b}{na}$ می‌گیم بتّا! البته به شرطی که: $a>0$ باشه.

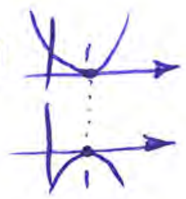
(۱۲) فقط یه نگاه

اکسترمم با یه نگاه: $\sqrt[3]{(x-\alpha)^2}$ ، $|x-\alpha|$ ، $(x-\alpha)^2$

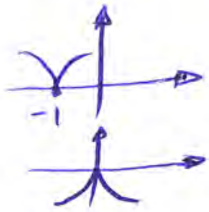
عطف با یه نگاه: $(x-\alpha)|x-\alpha|$ ، $\sqrt[3]{(x-\alpha)}$ ، $(x-\alpha)^3$

اکسترمم

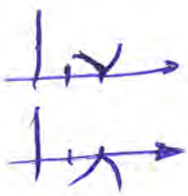
① $(x-\alpha)^{\text{زوج}}\,g(x)$: $(x-1)^2(x^2+1)$ ، $\frac{(x-1)^2}{x-3}$



② $\sqrt[\text{فرد}]{(x-\alpha)^{\text{زوج}}}\,g(x)$: $\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$ ، $\sqrt[3]{x^2}\,(x-1)$



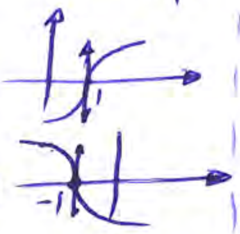
③ $|x-\alpha|\,g(x)$: $|x-2|\sin x$ ، $|x-2|\cos x$



عطف

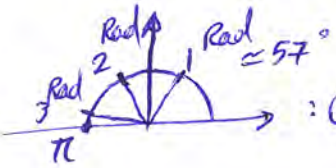
① $(x-\alpha)^{\text{فرد}}\,g(x)$: $(x-1)^3(x^2+5)$ ، $\frac{(x-1)^3}{2x-3}$

② $\sqrt[\text{فرد}]{(x-\alpha)^{\text{فرد}}}$: $\frac{\sqrt[5]{(x-1)^3}}{2x+1}$ ، $\sqrt[3]{x+1}\,(x-5)$

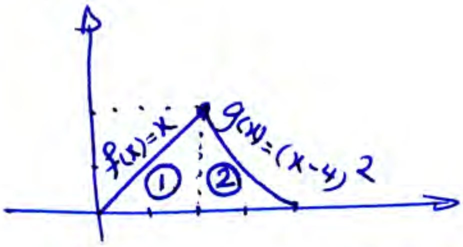


③ $(x-\alpha)|x-1|$: $x|x|$ ، $-(x-1)|x-1|$

تذکر: وقتی میگم Sin 1 یا Cos 2 منظور ۱ یا ۲ رادیانه که جاهاش اینجاس:



خلاصه خالص انتگرال



① سطوح نوع اول و دوم

در شکل مقابل سطوح نوع اول و دوم رو شاهد هستیم ! سطح نوع اول ① سطحیه که برای محاسبه‌ش نیاز به هیچ راه حل جبری نداریم و کافیه مساحت های ساده رو تو هندسه بلد باشیم. در واقع سطوح ساده هندسی سطوح نوع اول هستن. مثلاً اینجا مساحت بین منحنی $f(x)$ و محور x ها از صفر تا 2 شبیه مساحت یک مثلث یعنی $\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$ یعنی $\frac{2\times 2}{2}=2$ ؛ ولی آیا سطح زیر منحنی $g(x)$ رو هم میشه با هندسه حساب کرد؟! نه دیگه ! این تو بمیری دیگه از اون تو بمیریا نیست بچه های عزیزم . برای محاسبه مساحت بین منحنی $g(x)$ و محور x ها از 2 تا 4 نیاز به ابزاری داریم که اسمش انتگراله ! سطح زیر منحنی $g(x)$ رو بصورت ← $\int_2^4 g(x)\,dx$ نشون میدیم و من روش بدست آوردنش رو به شما یاد میدم . پس اولین قدم روش محاسبه انتگرالهای توانی ساده ست . انتگرال گیری دقیقاً برعکس مشتق گیریه . تو مشتق ما توان رو کم می کردیم و ضرب ! تو انتگرال جمع می کنیم و تقسیم !

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$ ← هر عدد ثابتی می تونه باشه

مثلاً وقتی به شما میگن $\int 2x$ یعنی می خواسته بگه چه توابع اولیه ای بودن که مشتقشون شده $2x$! شما میگین x^2 به اضافه هر عدد ثابتی یا به زبون ریاضی x^2+C !

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C \;,\; \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}+C \;,\; \int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}+C \;,\; \dots$$

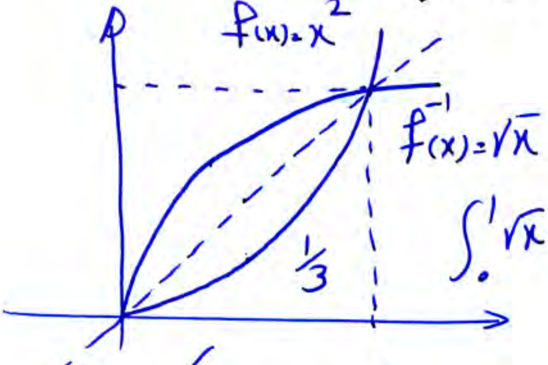
مشتق

$$\int \frac{x^2-3x}{x}\,dx = \int \frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x} = \int x-3 = \frac{x^2}{2}-3x+C$$

انتگرال

P.2

② روشهای انتگرال گیری و محاسبه انتگرال معین

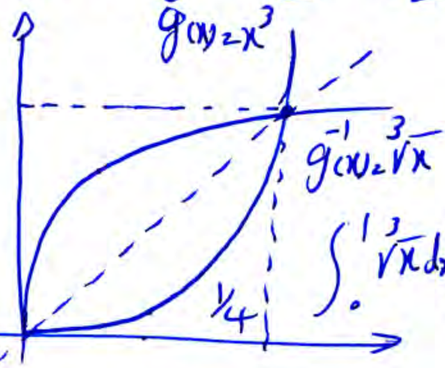


$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

بطور کلی $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$ که کافیه بالا و پایین رو جایگذاری کنیم و تفریق کنیم : $F(b)-F(a)$

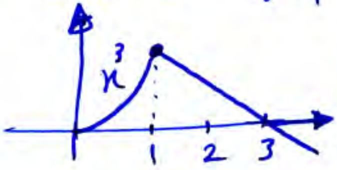
برای همین این قضیه اساسی دوم یا تکنیک تربیع ؛ دومین قضیه اساسی حساب انتگرال



$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{4/3}}{4/3}\Big]_0^1 = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big]_0^1 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

حالا $\int_0^1 x\,dx$ چی میشه ؟! خب این که نیاز به محاسبه نیست !  این سطح نوع اول و جوابش میشه $\frac{1}{2}$. حالا سطح بین این دو منحنی و محور xها چی باشه ؟



میگیم از صفر تا یک که نوع دومه و میشه $\frac{1}{4}$ و از ۱ تا 3 هم که نوع اول و مساحت مثلث $\frac{2\times 1}{2}=2$.

پس کل سطح میشه $2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$. کل انتگرالهای نامعین شما این 5 مدل هستن :

۱- معمولیا

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C$$

2- مثلثاتیا

$$\int u'\cos u = \sin u + C$$

$$\int u'\sin u = -\cos u + C$$

$$\int u'(1+\tan^2 u) = \tan u + C$$

$$\int u'(1+\cot^2 u) = -\cot u + C$$

3- توانیا

$$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int 2(2x-3)^2 = \frac{(2x-3)^3}{3}+C$$

4- بالا سریا

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|+C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$$

5- e داریا

$$\int u'e^u = e^u + C$$

$$\int e^x = e^x + C$$

تذکر مهم : معمولاً به احتمال بالای ۹۰٪ سوال انتگرال شما به شکل مقابل است

$$\int \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x}}dx = x\sqrt{x}\, f(x) + C \rightarrow$$ $f(x)$ رو به دست بیار

راه تحلیلی : $\int 5x^{3/2} + 3x^{1/2} \xrightarrow{\text{حالا انتگرال بگیر}} \frac{5x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$

سعی کن برگردانی به توان $= 2x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + C \xrightarrow{\text{از x فاکتور بگیر}} x\sqrt{x}(2x+2) + C$

ثانیاً اگر تو تغییر یا مشتق داخل نقشی که فراموش نشه لطفاً. مثلاً وقتی می‌گه $\int x\cos x^2$ مشتق شما حتماً باید به 2 ضرب و تقسیم کنی که تو تغییر هم شکل به داخل x نبود انتگرال رو نمی‌توانستید حل کنید.

$$\frac{1}{2}\int 2x \cos x^2 = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

حالا اگه بجای $\cos x^2$ ، $\cos^2 x$ بود باید چیکار می‌کردیم ؟!

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x$$

انتگرال $\frac{1}{2}$ که میشه $\frac{1}{2}x$ ولی $\int \cos 2x$ نیاز به یه 2 و یه $\frac{1}{2}$ داره تغییر داریم

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\int 2\cos 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

پس اگه انتگرال $\sin^2 x$ رو خواست از رابطه $\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنی ولی اگر که تو تغییرش بود داستان فرق می‌کنه :

$$\int \cos x \sin^2 x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

ثالثاً یک مقایسه مهم :

$$*\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \int 2x(x^2+1)^{-1/2} = \frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2} + C$$

$$*\int \frac{2x}{x^2+1} \xrightarrow[\text{مخرج کسر میره !}]{\text{دیگه نمی‌تونیم بالا بیاریم چون توان}} \ln(x^2+1) + C \rightarrow$$ بالا سری بود !

نتیجه: بالا سری شاهده که مقایسه قشنگ بود !!!

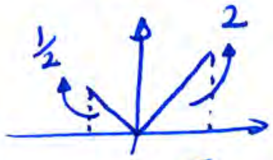
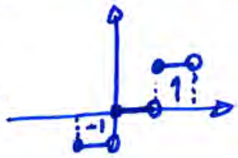
P.4

③ انتگرال‌های قدر مطلق و براکت

بسیار بسیار بسیار مهمن و احتمالاً یکی دیگر از سوالای انتگرال کنکور. به سه دسته تقسیم کنم این انتگرال‌ها رو که باهم مشاهده می‌کنیم!:

☐ دسته اول: رسمشون راحته! در واقع قدر و براکت تنهان!

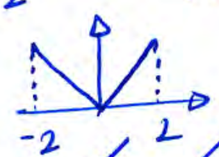
$* \int_{-1}^{2} |x| + [x]$

$= \int_{-1}^{2} |x| + \int_{-1}^{2} [x] =$  $+$  $= \frac{5}{2}$

☐ دسته دوم: بازه متقارنه و از تابع زوج و فرد استفاده می‌کنیم.

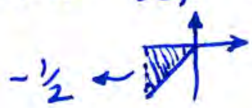
$\int_{-a}^{a}$ تابع زوج $= 2\int_{0}^{a}$ ، $\int_{-a}^{a}$ تابع فرد $= 0$ ، $\int_{-a}^{a} [$ تابع فرد $] = -a$

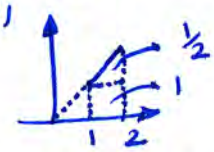
$\int_{-2}^{2} |x| = 2\int_{0}^{2} = 4$ ، $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x = 0$ ، $\int_{-3}^{3} [\sqrt[3]{x}] = -3$



☐ دسته سوم: نه قدر و براکت تکه و نه بازه متقارن. اینجاست که باید مفت بشکن بشکنه!

$\int_{-1}^{2} [x]|x| = \int_{-1}^{0} (-1)(-x) + \int_{0}^{1} (0)(x) + \int_{1}^{2} (1)(x) = \int_{-1}^{0} x + \int_{1}^{2} x = 1$





④ قضیه اساسی اول (مشتق انتگرال)

$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$

$F'(x) = f(x) \xrightarrow{\text{مثال}} G(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin 2t}{1+t^2}\,dt \Rightarrow G'(x) = \frac{\sin 2x}{1+x^2}$

$y = \frac{G(x)}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{G'(x)\cdot x^2 - 2x\,G(x)}{x^4} \rightarrow$ جایگذاری

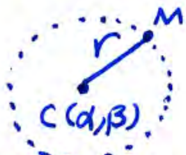
خلاصه خالص مقاطع مخروطی

① فرم گسترده همه مقاطع و ورود به دایره و شرط وجود

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

if $A=B$ دایره — if A or $B=0$ سهمی — if $A\neq B, AB>0$ بیضی — if $A\neq B, AB<0$ هذلولی

همه تقسیم بر A ← $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ← فرم گسترده دایره



اولا تعریف دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله شون از یک نقطه ثابت به نام مرکز مقدار ثابتی به نام شعاع باشه میشه دایره

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

معادله استاندارد دایره < مرکز (α,β) ، شعاع $=r$

مثلا $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ < $C(1,-3)$ ، $r=2$

طریقه بدست آوردن مرکز و شعاع تو فرم گسترده

$$C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$$

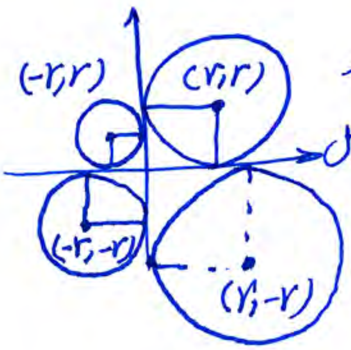
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

یعنی این مثبت باشه شرط وجود داریم!

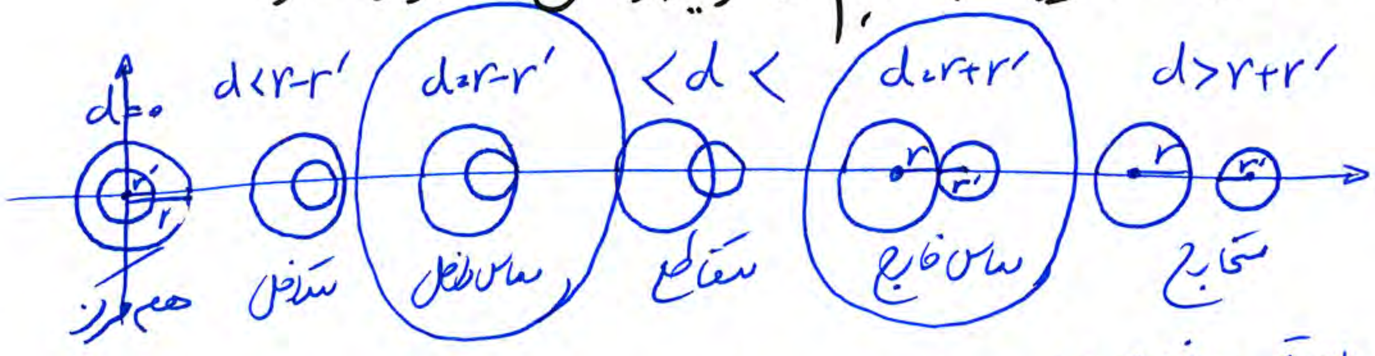
* البته مرکز رو با مشتق هم میشه بدست آورد ولی فقط مرکز

سوالات معادله دایره دیگه نگو با داشتن:

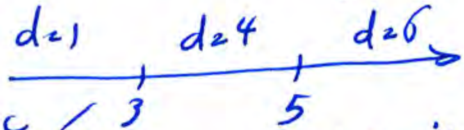
1. مرکز و شعاع ✓
2. مرکز و یک نقطه روی محیط — فاصله میشه شعاع
3. دو سر قطر (این دو تا ساده ست) — نصف فاصله شعاع و وسطش مرکز
4. سه نقطه — جاگذاری تو فرم گسترده
5. دو نقطه و خط مماس — خط مماس هم یه نقطه میده میشه سه تا
6. دو نقطه و معادله گذرنده از مرکز — طول مرکز نقطه فرض x و فاصله
7. مرکز و خط مماس — فاصله مرکز دایره تا خط مماس میشه شعاع
8. دایره مماس بر دو محور — مختصات مرکز به صورت مقابل



② وضعیت دو دایره نسبت به هم و طریقه نوشتن معادله وتر مشترک



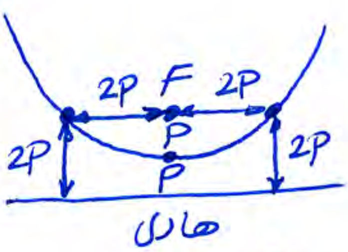
برای تعیین وضعیت اول باید $r-r'$ و $r+r'$ رو بدست بیاریم. مثلاً میشن 3 و 5.
حالا میریم فاصله بین دو مرکز یعنی d رو بدست میاریم.



اگه مثلاً $d=4$ شد متقاطع، $d=6$ شد متخارج، یا $d=0$ شد متداخل و خود 3 و 5 هم که مشخصه.

* در حالت متقاطع دو دایره وتر مشترک داریم. برای تعیین معادلش دو دایره رو به صورت گسترده نوشته و از هم کم می‌کنیم. درجه 2 ها با هم می‌پرن ولی درجه یک خالصی که باقی می‌مونه معادله وتر مشترک. البته وضعیت خط و دایره یا هر دو مقطعی نسبت به هم هم؛ مثل وضعیت خط و سهمی تو فصل چهارمه و اگه خواستی معادله رو تقاطع دستگاه درجه دوم میشه چون که اساساً مقاطع مخروطی منحنی‌های درجه دوم هستن.

③ سهمی



مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله شون از یک نقطه ثابت به نام کانون و یک خط ثابت به نام هادی برابر باشند.

* سهمی دو قدم راهه! از هادی تا کانون. وسط راه رأس که.

* سهمی چی داره؟! هادی داره، رأس داره، کانون داره و محور تقارن داره.

⊖ رو به پایین — ⊕ رو به بالا

$$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$$

* معادله استاندارد سهمی قائم

⊖ رو به چپ — ⊕ رو به راست

$$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$$

* معادله استاندارد سهمی افقی

P.7

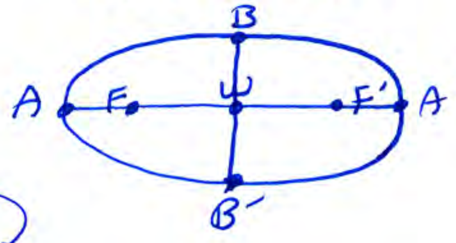
* دسته‌بندی سوالات سهمی:
① با رسم شکل برخی اجزاء رو پیدا می‌کنیم.
② فرم گسترده رو تبدیل به استاندارد کرده و بعد رسم می‌کنیم.

④ بیضی و هذلولی: سوالات شکل سهمی به دو دسته بالا تقسیم‌بندی می‌شوند.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصلشون از دو نقطه ثابت $2a$.

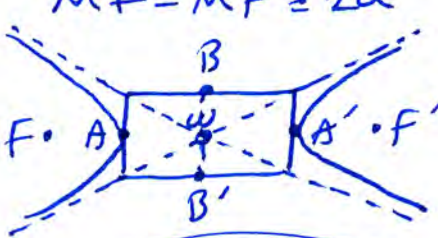
هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه که تفاضل فواصلشون از دو نقطه ثابت $2a$

$MF+MF'=2a$



$a^2=b^2+c^2$

$MF-MF'=2a$



$c^2=a^2+b^2$

فاصله‌ها:
- F تا ω میشه c
- B تا ω میشه b
- A تا ω میشه a

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \leftarrow \boxed{\text{افقی}} \rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1 \leftarrow \boxed{\text{قائم}} \rightarrow \frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

هر دو خروج از مرکز دارن که میشه همین!
$e=c/a$

هر دو وتر کانونی دارن که میشه دست اصغر!
$PQ=2b^2/a$

* محل تلاقی مجانب‌ها مرکز هذلولیه * شیب مجانب‌ها $\overset{\text{قائم}}{\pm\frac{a}{b}}$ و $\overset{\text{افقی}}{\pm\frac{b}{a}}$ * فاصله کانون از مجانب b

* مکان هندسی به صورت $M\left|\begin{array}{l}x=1+3\sin t\\ y=2\cos t\end{array}\right.$ متعلق به بیضیه چون داریم:

$\sin t=\frac{x-1}{3}$

$\cos t=\frac{y}{2}$

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \xrightarrow{\text{بیضی}} \omega(1,0)\quad a=3,\ b=2$$

* مکان هندسی نقاطی که مثلاً عرض نقاط دایره رو به نسبت $3/4$ تقسیم می‌کنه بیضیه

* نقطه M با مختصات پارامتری زیر روی هذلولی حرکت می‌کنه.

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

خلاصه خالص دنباله‌ها و تصاعد

اولاً دنباله تابعیه که دامنش اعداد طبیعیه. بنابراین هر وقت گیر کردی شروع کن از $n=1$ بخش عددهای رو جلو ببر. با همین روش هر دو سوال اول کنکور داخل و خارج 95 حل میشه. دو نوع دنباله مهم داریم، عددی یا حسابی و هندسی

هندسی		عددی
$a_n = aq^{n-1}$	جمله عمومی	$a_n = a+(n-1)d$
$q = a_n/a_{n-1}$ $1, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 81$ $q^4 = 81 \Rightarrow q=3 \Rightarrow 1,3,9,27,81$	قدر نسبت	$d = a_n - a_{n-1}$ $7, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 23 \rightarrow 4d = 16$ $\Rightarrow d=4 \Rightarrow 7, \underline{11}, \underline{15}, \underline{19}, 23$

واسطه (a, b, c):

$$b = \pm\sqrt{ac} \Leftarrow b^2 = ac \leftarrow a,b,c \rightarrow 2b = a+c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

مجموع:

هندسی		عددی
$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ $S_n = \frac{a}{1-q} : \begin{matrix} n \to \infty \\ \lvert q \rvert < 1 \end{matrix}$	مجموع	$S_n = \frac{n}{2}(a+L)$ $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

* اگر S_n رو داده بود و a_n رو خواست:

$$S_n = n^2 + 4n$$

$$S_1 = 5,\ S_2 = 12 \Rightarrow \overset{5}{a_1} + a_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow d = 2$$

$$a_n = a+(n-1)d \Rightarrow a_n = 5 + 2(n-1) \Rightarrow \boxed{a_n = 2n+3}$$

* دنباله تقریبات اعشاری:

$$11 \div 6 = 1.833$$

$$\text{دنباله} = \{1.8, 1.83, 1.833, \dots\}$$ همگرا به $\frac{11}{6}$ و دنباله تفاضلات همگرا به صفر

تبدیل عدد اعشاری به گویا

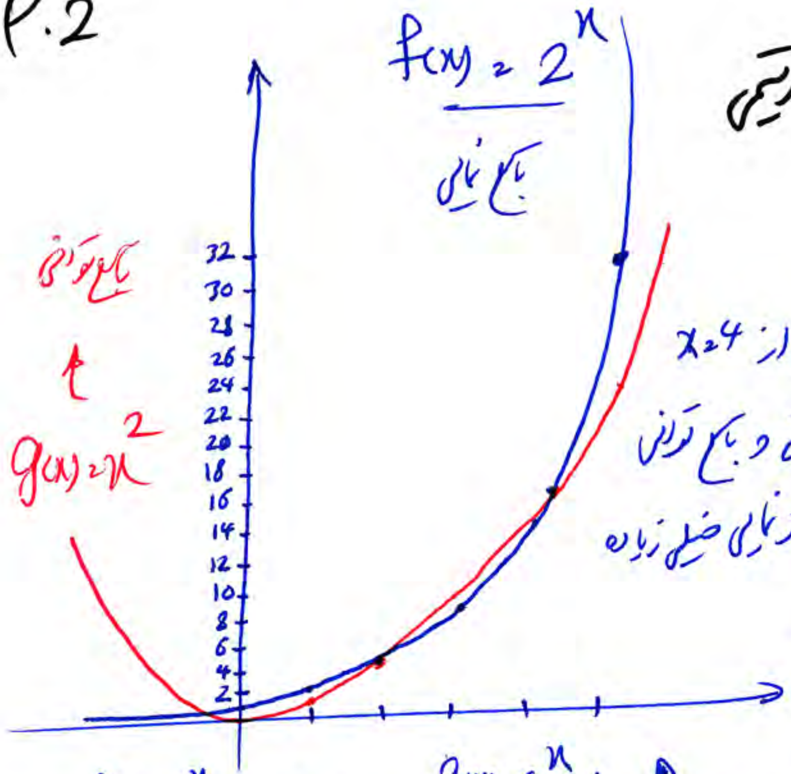
$$a,b\overline{cd} = \frac{\overset{\text{همش}}{abcd} - \overset{\text{غیر گردش}}{ab}}{99}$$

به تعداد غیر گردش صفر بعد از ۹ به تعداد گردش

$$1,\overline{45} = \frac{145-1}{99} = \frac{144}{99} \rightarrow$$ (ریاضی خ 94)

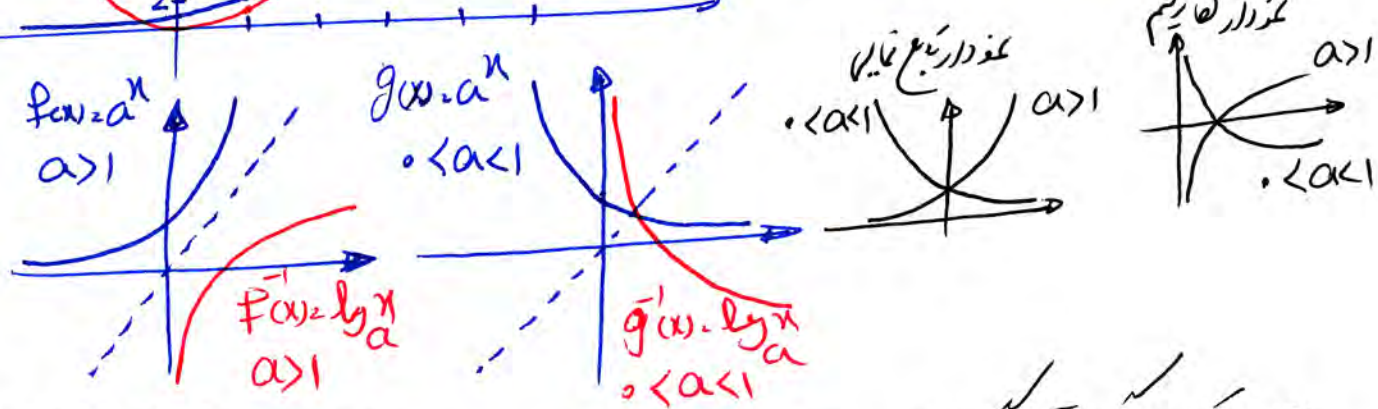
P.2

خلاصه خالص توابع نمایی و لگاریتمی



① مقایسه تابع نمایی با توانی

نوداگو تو چه نقطه باهم برخورد دارن و از $x=4$ به بعد تابع نمایی شروع به اوج گرفتن میکنه و تابع توانی میگرده باشت سیم نمیرسه. چون سرعت رشد نمایی خیلی زیاده معکوسش میکنن که میشه تابع لگاریتمی .



$x \to f^{-1} \to f \to x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$x \to f \to f^{-1} \to x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

ترکیب تابع با معکوسش میشه تابع همانی.

* معکوس لگاریتم لگاریتمی؟ میشه نمایی میشه نمایی!
کسرا و رادیکالا رادیکالا؟ میشن توانا میشن توانی!
کدوم کدوم کدوم؟ توران تو دستم !

ویژگیهای لگاریتم

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a a = 1$

4) $\log a + \log b = \log ab$

5) $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

6) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$

7) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

8) $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$

9) $a^{\log_a x} = x$

مهم ترین خاصیت

ویژگی اول

دبل فلش

$\log_a x = y$

$\Rightarrow a^y = x$

forum.konkur.in

P.3

* لگاریتم 5 و 2 خیلی مهمن و قابل تبدیل به هم :

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - \log 5$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

* ln یعنی log در مبنای عدد نپر یعنی e !

$$\ln x = \log_e x \Rightarrow \ln e = \log_e e = 1 \,,\ \ln e^n = n \ln e = n$$

* معادلات نمایی } تیپ ① : $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

تیپ ② : $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$

$$2^{2x} - \frac{2}{2^x} = \frac{255}{4} \Rightarrow (2^x)^2 - \frac{2}{2^x} = \frac{255}{4}$$

$$\Rightarrow t^2 - \frac{2}{t} = \frac{255}{4} \Rightarrow t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

* معادلات لگاریتمی : $\cancel{\log_a} f(x) = \cancel{\log_a} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

حواست به دامنه باشه ← $\log_{g(x)} f(x)$: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$

دامنه $\sqrt{\log x}$ یعنی x های بزرگتر مساوی یک .

* نامعادلات نمایی و لگاریتمی } مبنا بزرگتر از یک جهت عوض نمیشه

مبنا بین صفر و یک جهت عوض میشه .

* رشد و زوال :

$$\underbrace{A(t)}_{\text{مقدار نهایی}} = \underbrace{A(0)}_{\text{مقدار اولیه}} \underbrace{e}_{\text{عدد نپر}}^{\overset{\text{ضریب رشد}}{k}\,\overset{\text{زمان}}{t}}$$

P.4

درسنامه‌ی اول

تعریف ماتریس و انواع ماتریس

اگه یه سری عدد و رقم یا شی رو به صورت سطری و ستونی تو یه کروشه مستطیل شکل قرار بدیم یه ماتریس (Matrix) ساختیم. به اعداد یا اشیاء داخل می‌گیم درایه و ماتریس رو با حروف بزرگ نشون می‌دیم. ماتریسی که m سطر و n ستون داشته باشه بهش می‌گیم $m \times n$ (بخونید m در n)! و به این $m \times n$ می‌گیم مرتبه‌ی ماتریس. برای اینکه دو تا ماتریس با هم مساوی باشن باید اولاً هم مرتبه باشن و ثانیاً درایه‌هاشون نظیر به نظیر با هم مساوی باشه.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}_{۲\times۳} \to a_{ij} \to \begin{cases} i = \text{سطر} \\ j = \text{ستون} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً}} a_{۱۳} \to \text{درایه‌ی سطر اول ستون سوم}$$

اگه تعداد سطر و ستون‌ها با هم برابر باشن یعنی $m = n$ باشه ماتریس مربعی تشکیل می‌شه مثلاً شکل روبرو یه ماتریس مربعیه ۳×۳:

$$B = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

اگه ماتریس فقط سطر داشته باشه می‌شه سطری مثل $[۱,۳]$ و اگه فقط ستون داشته باشه می‌شه ستونی مثل $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$. راستی به هر ماتریسی که درایه‌هاش همه صفر باشن می‌گن ماتریس صفر.

مثلاً: $O = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

درسنامه‌ی دوم

اعمال جبری در ماتریس‌ها

اولاً توی ماتریس‌ها تقسیم نداریم یعنی نمی‌شه دو تا ماتریس رو به هم تقسیم کرد.
جمع و تفریق هم که همون جمع و تفریق معمولیه، فقط باید دو تا ماتریس هم مرتبه باشن اما می‌مونه ضرب ماتریس‌ها که از همه مهمتره. اولین شرط اینه که دو ماتریس ضرب‌پذیر باشن به این صورت که تعداد ستون‌های اولی با سطرهای دومی با هم برابر باشن. پس داریم:

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = AB_{m\times p}$$

تو ماتریس حاصلضرب سطر از اولی و ستون از دومیه!

حالا ضرب ماتریس‌ها رو چه جوری انجام بدیم؟

مثلاً می‌خوایم دو تا ماتریس روبرو رو تو هم ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۱} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \end{bmatrix}_{۲\times۱}$$

$a_{۱۱}$ درایه‌ی سطر اول و ستون اوله. پس سطر اول اولی رو در ستون اول دومی، درایه به درایه ضرب می‌کنیم و جواب‌ها رو با هم جمع می‌کنیم یعنی:

$$a_{۱۱} = (۲\times۷) + (۵\times۳) = ۲۹$$

$a_{۲۱}$ درایه‌ی سطر دوم و ستون اوله. پس سطر دوم اولی رو در ستون اول دومی، درایه به درایه ضرب می‌کنیم و جواب‌ها رو با هم جمع می‌کنیم. یعنی:

$$a_{۲۱} = (۱\times۷) + (۹\times۳) = ۳۴$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲} \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳} = \begin{bmatrix} ۱+۴ & -۴+۱۰ & ۰-۲ \\ ۰+۸ & ۰+۲۰ & ۰-۴ \\ -۱-۲ & ۴-۵ & ۰+۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ & -۲ \\ ۸ & ۲۰ & -۴ \\ -۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times۳} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \end{bmatrix}_{۱\times۲}$$

حالا که ضرب و ماتریس رو یاد گرفتی لازمه که ویژگی‌های ضرب رو هم بدونی.

P.5

۱) **جابجایی:** تو ضرب ماتریس‌ها به طور کلی خاصیت جابجایی وجود نداره یعنی $AB \neq BA$ البته تو یه سری ماتریس خاص این تساوی برقرار می‌شه که بهشون می‌گن ماتریس‌های تعویض‌پذیر و شما تو دبیرستان نمی‌خونین. بخاطر عدم وجودخاصیت جابجایی تو ضرب ماتریس‌ها اتحادها تو ماتریس در حالت کلی برقرار نیست.

اگه b, a عدد باشن: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اگه B, A ماتریس باشن: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

دیگه AB با BA برابر نیست و نمی‌تونیم بگیم $2AB$. متوجه شدی؟!

۲) **شرکت‌پذیری**: برقراره: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

۳) **توزیع‌پذیری**: برقراره: $A \times (B \pm C) = (A \times B) \pm (A \times C)$

تذکر ۱ یه عدد رو هم می‌تونیم تو ماتریس ضرب کنیم که بهش می‌گن ضرب اسکالر و به این ترتیب که اون عدد تو تک تک درایه‌ها ضرب می‌شه. مثلاً

$$3 \times \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

راستی اگه یه ماتریس تو عدد ۱- ضرب بشه قرینه می‌شه.

تذکر ۲ مهمترین ماتریس تو بحث ضرب ماتریس واحده که با I نشون می‌دیمش: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

این ماتریس واحد یا یکه عضو خنثی تو ضرب ماتریس‌هاست و مثل عدد یک تو مجموعه‌ی اعداد حقیقی عمل می‌کنه. پس هر ماتریس در I ضرب بشه می‌شه خودش. ضمناً I با هر ماتریس دیگه‌ای تعویض‌پذیره یعنی: $I \times A = A \times I$

درسنامه‌ی سوم

توان رسانی در ماتریس‌ها

اولاً توان‌رسانی یعنی یه ماتریس اول باید به توان ۲ برسه. A^2 یعنی A رو تو خودش ضرب کنیم: $A^2 = A \times A$. تو بحث توان‌رسانی من ماتریس‌ها رو به ۴ دسته کلی تقسیم‌بندی کردم.

۱) **ماتریس پوچ توان:**

از اسمش معلومه که $A^2 = 0$. پس A به هر توانی برسه بازم صفر می‌شه، مثلاً $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = 0, n \notin \mathbb{N}$$

۲) **ماتریس خود توان:**

اینم از اسمش معلومه که $A^2 = A$. پس A به هر توانی برسه بازم خودش می‌شه. مثلاً $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = A, n \in \mathbb{N}$$

۳) **ماتریس I توان!:**

بازم از اسمش معلومه که $A^2 = I$ البته خودم این اسمو روش گذاشتم. مثلاً $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{زوج}: A = A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I \\ \text{فرد}: A = A^{2n+1} = A^{2n} \times A^1 = I \times A = A \end{cases}$$

۴) **ماتریس منظم:**

ای بابا! اینم که از اسمش معلومه. تو توان رسانی یه نظم خاصی به وجود میاد مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P. 6

درسنامه‌ی چهارم

دترمینان و ماتریس وارون (معکوس)

اگر ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشه حاصلضرب قطر اصلی (ad) منهای حاصلضرب قطر فرعی (bc) یه عدد می‌شه که بهش می‌گیم دترمینان داریم:

$$|A| = ad - bc$$

مثلاً دترمینان ماتریس A:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (۲\times۸)-(۳\times۵)=۱$$

یا دترمینان ماتریس B:

$$B=\begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (-۳\times۴)-(-۷\times۲)=۲$$

مهم‌ترین کاربرد دترمینان تو محاسبه‌ی ماتریس وارونه.

ماتریس وارون یا معکوس به صورت مقابل محاسبه می‌شه:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

پس یک به روی دترمینان رو در یک ماتریس جدید (الحاقی) ضرب می‌کنیم. طریقه ساخت ماتریس الحاقی به این ترتیبه که جای درایه‌های روی قطر اصلی رو عوض می‌کنیم و درایه‌های قطر فرعی رو قرینه می‌کنیم. مثلاً می‌خوایم ماتریس C رو معکوس کنیم.

$$C=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = (۵\times۷)-(۸\times۴)=۳ \Rightarrow C^{-۱}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۷ & -۸ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

پس محاسبه‌ی دترمینان و ماتریس وارون رو یاد گرفتی. با توجه به تعریف ماتریس وارون شرط وارون‌پذیری یک ماتریس اینه که دترمینان A صفر نشه. $(|A|\neq ۰)$

درسنامه‌ی پنجم

خواص دترمینان و ماتریس وارون

تو کتاب قدیم که تا کنکور ۹۰ وجود داشت از دترمینان و ماتریس معکوس یه عالمه خاصیت نوشته شده بود که تو کتاب جدید تقریباً همش حذف شده. پس وقت شمارو با یه سری خاصیت بی‌خاصیت! تلف نمی‌کنم. فقط ۷ تا خاصیت مهم رو بهتون یاد می‌دم.

۱) برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس وارون نیازی به معکوس کردن ماتریس نداریم بلکه کافیه دترمینان رو معکوس کنیم یعنی: $\left|A^{-۱}\right| = \frac{۱}{|A|}$

۲) اگه دترمینان ماتریس A^n رو بخوایم کافیه $|A|$ رو به توان n برسونیم: $\left|A^n\right| = |A|^n$

۳) برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس $A\times B$ لازم نیست $A\times B$ رو بدست بیاری: $|A\times B| = |A|\times|B|$

۴) وارون $A\times B$ این شکلی می‌شه: $(A\times B)^{-۱} = B^{-۱}\times A^{-۱}$

۵) تو جمع و تفریق اجازه‌ی تک‌تک وارون کردن رو نداریم یعنی: $(A+B)^{-۱} \neq A^{-۱}+B^{-۱}$

۶) وارون وارون A می‌شه خود A. $(A^{-۱})^{-۱} = A$

۷) اگه ضرب دو تا ماتریس، واحد بشه اون دو تا ماتریس معکوس هم هستن: $AA^{-۱} = A^{-۱}A = I$

توجه کن A و $A^{-۱}$ تعویض‌پذیرن!

P.7

درسنامه‌ی ششم

حل معادله‌ی ماتریسی و دستگاه ۲×۲

دستگاه روبرو رو اولین بار تو دوم راهنمایی دیدی و روش حلش رو یاد گرفتی.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

حالا برای این دستگاه می‌تونیم یه ماتریس بنویسیم به اسم ماتریس ضرایب: $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$

و حتی می‌تونیم کل دستگاه رو به صورت ماتریسی نشون بدیم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$$

به این می‌گن معادله‌ی ماتریسی

$$A\ \ X=B \Rightarrow X=A^{-۱}\times B$$

توجه تو اعداد حقیقی هم همین بود دیگه: $ax=b \Rightarrow x=\frac{b}{a}=\frac{۱}{a}b=a^{-۱}b$

تذکر حالا اگه ماتریس X قبل از A بود چیکار کنیم؟!

$$XA=B \xrightarrow{\text{طرفین}\ A^{-۱}\times} XA\times A^{-۱}=B\times A^{-۱} \Rightarrow X=B\times A^{-۱}$$

توجه معادله‌ی ماتریسی زمانی جواب داره که دترمینان مخالف صفر باشه: $|A|\neq ۰$

مثال ۱ اگر $X+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix}$ باشد و ترمینان ماتریس X کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow a=۴, b=۶, c=۳, d=۵$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow |x|=(۴\times ۵)-(۶\times ۳)=۲$$

مثال ۲ باتوجه به معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}+۲X=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس X کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) ۵

پاسخ: ماتریس X باید هم مرتبه با دو ماتریس دیگه باشه، بنابراین فرض می‌کنیم $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشه:

در تساوی این دو ماتریس باید درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی باشن.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲+۲a & ۳+۲b \\ ۴+۲c & ۵+۲d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲+۲a=۴ \Rightarrow a=۱ \\ ۳+۲b=-۱ \Rightarrow b=-۲ \\ ۴+۲c=۳ \Rightarrow c=-\frac{۱}{۲} \\ ۵+۲d=۲ \Rightarrow d=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow |X|=-\frac{۳}{۲}-(-۲\times -\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۲}-۱=-\frac{۵}{۲}$$

P.8

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $A^۲+۲AB$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & ۴ \\ ۱۶ & ۱۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۸ \\ ۸ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۸ & ۸ \\ ۱۲ & ۲۰ \end{bmatrix}$

پاسخ

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}=۴I_{۲\times ۲} \qquad (۱)$$

بدون ضرب هم می‌تونستم بگم $A^۲$ چی میشه، چون:

$$A=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=۲I \Rightarrow A^۲=(۲I)^۲=۴I^۲=۴I$$

$$۲AB=۲\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۸ \\ ۱۲ & ۱۶ \end{bmatrix}$$ یا $A=۲I \rightarrow ۲AB=۲(۲I)B=۴I\times B=۴B$ (۲)

و حالا نتیجه‌ی نهایی:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} A^۲+۲AB=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & ۸ \\ ۱۲ & ۱۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۸ \\ ۱۲ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

مثال اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$ دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(۲,۱۱)$ ۲) $(۲,۱۳)$ ۳) $(۴,۱۱)$ ۴) $(۴,۱۳)$

پاسخ طرفین این تساوی‌رو می‌سازیم: پس $\alpha=a+d=-۲+۴=۲$ و $\beta=-|A|=-(-۱۳)=۱۳$

$$\begin{cases} A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} \\ \alpha A+\beta I=\begin{bmatrix} -۲\alpha & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲\alpha+\beta & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲\alpha+\beta & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha=۲, ۹=-۲(۲)+\beta \Rightarrow ۹=-۴+\beta \Rightarrow \beta=۱۳ \Rightarrow (\alpha,\beta)=(۲,۱۳)$$

دستگاه معادلات

۴ تا دستگاه داریم:
1. دو معادله دو مجهول
2. سه معادله دو مجهول
3. دو معادله سه مجهول
4. سه معادله سه مجهول

درسنامه‌ی اول

دستگاه ۲×۲

یعنی ۲ معادله ۲ مجهول. ۲ معادله رو که می‌دونم می‌دونی. ۲ مجهول یعنی x و y. یعنی معادله‌ی خط. پس با این دستگاه وضعیت نسبی دو خط رو در صفحه بررسی می‌کنیم. دو خط می‌تونن نسبت به هم ۳ تا حالت داشته باشن که تو یه حالت دستگاه سازگاره و اونم حالتیه که دو خط متقاطع باشن تو بخش آخر فصل قبل یاد گرفتیم دستگاه دو معادله دو مجهول زمانی جواب داره که $|A|\neq ۰$ اینجا هم این موضوع رو می‌تونیم ببینیم.

اولاً دو مجهول یعنی معادله‌ی خط $(ax+by=c)$ که مجهولات همون y و x هستن و به a و b و c می‌گن ضرایب معادله.

سه مجهول هم یعنی معادله‌ی صفحه $(ax+by+cz=d)$.

P.9

حالا می‌ریم تک تک دستگاه‌ها رو بررسی می‌کنیم؛

۱) دستگاه دو معادله دو مجهول (۲×۲)

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

دستگاه سازگاره و جواب منحصر بفرد داره؛ $:\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$  دو خط متقاطع ❶

دستگاه ناسازگاره و جواب نداره! $:\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$  دو خط موازی ❷

دستگاه بی‌شمار جواب داره و مبهمه! $:\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$  دو خط منطبق ❸

حل این دستگاه هم که بر می گرده به دوران راهنمایی که تو سال دوم راهنمایی روش حذفی رو یاد گرفتید و تو سال سوم راهنمایی روش جانشینی. دیگه اجازه بدید یه سری مسائل اینجا گفته نشه!!! Mer۳۰!

۲) دستگاه سه معادله دو مجهول (۳×۲)

$$\begin{cases} ax_1+bx_2=c \\ a'x_1+b'x_2=c' \\ a''x_1+b''x_2=c'' \end{cases} \xrightarrow{\text{به زبون آدمیزاد}} \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$$

با این دستگاه تلاقی سه خط رو در صفحه بررسی می‌کنیم؛ به این ترتیب که اول دو تا خط رو به صورت (۲×۲) با هم قطع می‌دیم یعنی در واقع اول یه دستگاه ۲×۲ رو حل می‌کنیم. حالا اگه نقطه‌ی بدست اومده تو معادله‌ی خط سوم هم صدق کرد یعنی دستگاه سازگار بوده و جواب منحصر بفرد داره. از نظر هندسی اتفاقی که افتاده این شکلیه!

مثلاً مثال دوم صفحه ۱۱۵ کتابتون رو با هم حل می‌کنیم؛

$$\begin{cases} 8x_1-3x_2=7 \\ 3x_1-2x_2=0 \\ 10x_1-2x_2=14 \end{cases}$$

بهتره اول سطر دوم و سوم رو با هم حل کنیم. البته سطر دوم رو تو یه منفی ضرب می‌کنیم:

$$\begin{matrix} II\times(-1)\Rightarrow \\ III\quad\Rightarrow \end{matrix}\begin{cases} -3x_1+\cancel{2x_2}=0 \\ 10x_1-\cancel{2x_2}=14 \end{cases}\Rightarrow 7x_1=14\Rightarrow x_1=2\Rightarrow x_2=3$$

حالا نقطه (۲,۳) رو تو خط اولی جایگذاری می‌کنیم. می‌بینیم صدق می‌کنه. $(7=8(2)-3(3))$. پس دستگاه سازگاره و جوابش هم می‌شه همون نقطه‌ی (۲,۳).

۳) دستگاه دو معادله سه مجهول (۲×۳)

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=d \\ a'x_1+b'x_2+c'x_3=d' \end{cases}$$

البته اگه دستگاه رو به زبون آدمیزاد بنویسیم اینجوری می‌شه:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

با این دستگاه تلاقی ۲ تا صفحه رو تو فضا بررسی می‌کنیم که ۳ حالت زیر پیش می‌یاد:

دو صفحه همدیگرو در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنن و دستگاه ناسازگاره: $(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'})$ دو صفحه موازی ❶

دو صفحه روی هم قرار دارن و دستگاه بی شمار جواب داره یعنی مبهمه: $(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'})$ دو صفحه منطبق ❷

فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع یک خط می‌شه: (هر حالتی بجز دو حالت بالا) دو صفحه متقاطع ❸

اینجا هم دستگاه بی‌شمار جواب داره و مبهمه.

مثلاً تو دستگاه $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-4 \\ 2x_1+x_2-3x_3=4 \end{cases}$ داریم $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{-3}{-3}\neq\frac{-4}{4}$ پس دو صفحه متقاطع و دستگاه مبهم.

پس تو حالت کلی در مورد دستگاه $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ می‌تونیم بگیم که وضعیت نسبی تو صفحه رو بررسی می‌کنیم.

فصل مشترک ۲ صفحه تو حالات کلی می‌تونه حالت متفاوتی داشته باشه که این حالت‌ها اینجورین:

موازی — دستگاه جواب نداره | متقاطع — دستگاه بی‌شمار جواب داره | منطبق — دستگاه بی‌شمار جواب داره

پس میشه گفت اگه ۲ صفحه با هم موازی باشن $(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'})$ دستگاه جواب نداره و در غیر این‌صورت دستگاه بی‌شمار جواب داره.

۴) دستگاه سه معادله سه مجهول (۳×۳)

با این دستگاه وضعیت ۳ تا صفحه رو تو فضا بررسی می‌کنیم که در حالتی که تشکیل یک کنج می‌دن دستگاه سازگار می‌شه و جواب منحصر بفرد پیدا می‌کنه.

P. 70

حل این دستگاه اینجوریه که اول یکی از مجهولات رو برحسب دو تای دیگه بدست می‌یاریم (معمولاً این بلا رو سر z می‌یاریم) و بعد توی دو معادله‌ی دیگه جاگذاری می‌کنیم. حالا دستگاه ۲×۲ جدید رو حل می‌کنیم و تو مرحله‌ی آخر با جاگذاری، مجهول حذف شده رو هم بدست می‌یاریم.

۵) دستگاه‌های همگن

به هر دستگاهی که اعداد ثابت همه‌ی معادلاتش صفر باشه، همگن می‌گن.

.مثلا دستگاه همگن سه معادله‌ی سه مجهول رو ببین:

$$\begin{cases} a_۱x+b_۱y+c_۱z=۰ \\ a_۲x+b_۲y+c_۲z=۰ \\ a_۳x+b_۳y+c_۳z=۰ \end{cases}$$

کاملاً واضحه که یک دستگاه همگن درجه ۳ حداقل دارای یک جواب $(۰,۰,۰)$ و یک دستگاه همگن درجه ۲ یک جواب $(۰,۰)$ داره، که بهش جواب صفر دستگاه می گن. به‌طور کلی در یک دستگاه همگن اگه دترمینان ضرایب مخالف صفرباشه دستگاه فقط جواب صفر داره و سازگاره، و زمانی‌که یک دستگاه همگن جواب غیرصفر داره یعنی دستگاه باید بی‌شمار جواب داشته باشه که بدرد نمی خوره.

مثال ۱ به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y+۳x=a, ۲y+ax+۵=۰, y+۲x=۰$ متقاربند؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نشدنی

اول بجای y های ۲ تا معادله ی اول می ذاریم $-۲x$:

$$\begin{cases} ۲y+ax+۵=۰ \\ y+۳x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲(-۲x)+ax=-۵ \Rightarrow -۴x+ax=-۵ \\ -۲x+۳x=a \Rightarrow x=a \end{cases}$$

$$-۴x+ax=-۵ \xrightarrow{x=a} -۴a+a^۲=-۵ \Rightarrow a^۲-۴a+۵=۰$$

آخر حل دستگاه به یه معادله‌ی درجه ۲ رسیدیم که باید صفر بشه اما چون $\Delta=۱۶-۲۰<۰$ هرگز این معادله صفر نمی‌شه، یعنی دستگاه ما جواب نداره.

مثال ۲ مهم ترین تمرین کتاب درسی : دستگاه‌های خطی زیر رو حل کنید.

الف) $\begin{cases} x_۱+۲x_۲+۳x_۳=۱۴ \\ x_۱+x_۲+x_۳=۶ \\ -۳x_۱+۲x_۲+x_۳=۴ \end{cases}$ اول z رو بر حسب y, x بدست میاریم و بعد تو دو معادله ی دیگه جاگذاری می کنیم:

$$\begin{matrix} x_۱=x \\ x_۲=y \\ x_۳=z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+۲y+۳z=۱۴ \\ x+y+z=۶ \\ -۳x+۲y+z=۴ \end{cases} \rightarrow z=۶-x-y$$

$$\begin{cases} x+۲y+۳(۶-x-y)=۱۴ \\ -۳x+۲y+۶-x-y=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+۲y+۱۸-۳x-۳y=۱۴ \\ -۴x+y=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x-y=-۴ \\ -۴x+y=-۲ \end{cases} \Rightarrow -۶x=-۶ \rightarrow x=۱$$

$$x=۱ \Rightarrow y=-۲+۴(۱)=۲ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow z=۶-۱-۲=۳$$

ب) $\begin{cases} ۳x_۱+۴x_۲-x_۳=۸ \\ ۶x_۱+۸x_۲-۲x_۳=۳ \end{cases}$

اگر به ضرایب نگاه کنی می‌بینی که داریم: $\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{۸}=\frac{-۱}{-۲}\neq\frac{۸}{۳}$، پس این دستگاه جواب نداره و نشون دهنده‌ی دو صفحه‌ی موازیه.

مثال ۳ به ازای کدام مقدار a نیمساز ناحیه‌ی دوم و دو خط به معادلات $y+۲x=a$ و $۲y+(a-۱)x+۲=۰$ متقاربند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ این دستگاه ۳ معادله دو مجهوله

اول به جای y های ۲ تا معادله شامل a می‌زاریم $-x$ چون گفته نیمساز ناحیه‌ی دوم!

$$\begin{matrix} y+۲x=a \\ ۲y+(a-۱)x+۲=۰ \end{matrix} \xrightarrow{y=-x} \begin{cases} -x+۲x=a \rightarrow x=a \\ -۲x+(a-۱)x+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow a^۲-۳a+۲=۰$$

$$a^۲-۳a+۲=۰ \quad \begin{matrix} a=۱ \\ a=۲ \end{matrix}$$

پس جواب گزینه ۱

مثال ۴ دستگاه معادلات $\dfrac{\frac{۱۶}{۳}x-\frac{۱}{۳}y}{۴}=\dfrac{۵x+y}{۳}=\dfrac{۳x+۲y}{۱}=\dfrac{۲x-y}{۲}$ **چند دسته جواب دارد؟**

۱) یک ۲) دو ۳) فاقد جواب ۴) بی‌شمار

پاسخ تو این جور سؤالا به ازای هر علامت = که می‌بینی یه معادله بنویسی! پس ۳ تا معادله بنویس.

$$\begin{cases} ۲x-y=۶x+۴y \\ ۹x+۶y=۵x+y \\ ۲۰x+۴y=۱۶x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x+۵y=۰ \\ ۴x+۵y=۰ \\ ۴x+۵y=۰ \end{cases}$$

هر سه معادله یکی شد یعنی سه خط بر هم منطبق هستن و دستگاه بی‌شمار جواب داره

هندسه مختصاتی

فصل پنجم کتاب پیش دانشگاهی شامل ۳ بخشه که بخش اولش هندسه‌ی مختصاتیه و کتابتون از صفحه ی ۱۰۸ تا ۱۱۲ در موردش صحبت کرده.
خب همونطور که عزیزانم در جریان هستن واسه‌ی تعیین وضعیت یک نقطه تو صفحه از دستگاه مختصات دکارتی (منسوب به موسیو دکارت) استفاده می‌شه.
توی این دستگاه باید ۶ تا نکته‌ی زیر رو خوب بلد باشی:

۱- نوشتن معادله‌ی خط با استفاده از مختصات دو تا نقطه روی صفحه

شیب خط:

$$\left.\begin{matrix}A(x_1,y_1)\\B(x_2,y_2)\end{matrix}\right\rangle m=\frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حالا با m و یکی از نقطه‌ها (مثلاً A) می‌تونی معادله‌ی خط رو بنویسی:

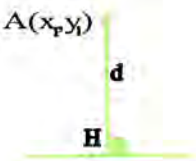
$$\left.\begin{matrix}A(x_1,y_1)\\\text{شیب}=m\end{matrix}\right\rangle y-y_1=m(x-x_1)$$

این معادله به دو فرم گسترده و استاندارد مطرح می‌شه.

الف- استاندارد: $y=mx+h$ ؛ $(m=\text{شیب})$

ب- گسترده: $ax+by+c=0$ ؛ $(-\frac{a}{b}=\text{شیب})$

۲- فاصله‌ی یک نقطه تا یک خط



فاصله نقطه $A(x_1,y_1)$ از خط $ax+by+c=0$ طول خط عمودیه که از این نقطه به خط وارد می‌شه واضحه که این فاصله کوتاه‌ترین

فاصله نقطه A از خطه، که از رابطه روبرو به‌دست میاد: $d=AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

من که تو کلاس این فرمول رو هم نمی‌گم بچه‌ها!

می‌گم اول معادله‌ی خط رو استاندارد کن و تو قدرمطلق بذار. به جای x و y هم طول و عرض نقطه رو جاگذاری کن و تو مخرج هم که یه $\sqrt{a^2+b^2}$. مثلاً فاصله‌ی خط $3x-4y=1$ از نقطه‌ی $A(-1,2)$ رو حساب کنیم، اول خط رو استاندارد کن:

$$3x-4y-1=0$$

$$d=\frac{|3(-1)+(-4)(2)+(-1)|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12}{\sqrt{25}}=\frac{12}{5}$$

۳- مختصات وسط یک پاره خط

$$M\left|\begin{matrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\[4pt]\frac{y_A+y_B}{2}\end{matrix}\right.$$

٤- فاصله‌ی دو نقطه توی صفحه

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

٥- فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ:

خب تو رابطه‌ی بالا اگه مختصات نقطه‌ی B، $(0,0)$ باشه، اینجوری میشه دیگه:

$$OA=\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}$$

۶- فاصله‌ی بین دو خط موازی

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته

$ax+by+c=0$

d

$ax+by+c'=0$

۱: اول باید ضریب x و y رو تو دو معادله یکی کنی!

۲: فاصله، فقط برای دو خط موازی تعریف میشه.

P.1

درسنامه‌ی اول

هندسه و استدلال

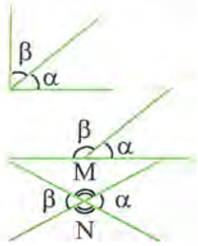
مطالب لازم برای حل تست‌های کنکور (بدون اندکی مطلب چرت و پرت!)

۱ انواع زاویه:

دو زاویه متمم: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ$

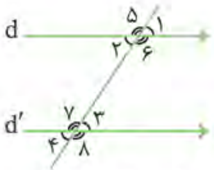
دو زاویه مکمل: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^\circ$

دو زاویه متقابل به رأس: $\hat{M}=\hat{N}\ ,\ \hat{\alpha}=\hat{\beta}$



۲ قضیه‌ی خطوط موازی و مورب:

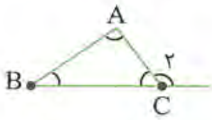
$$d \parallel d' \Rightarrow \begin{cases} \hat{1}=\hat{2}=\hat{3}=\hat{4} \\ \hat{5}=\hat{6}=\hat{7}=\hat{8} \end{cases}$$



۳ دو قضیه مهم تو مثلث

۱- مجموع زوایای داخلی می‌شه 180° — $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

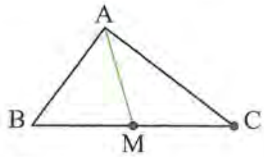
۲- زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور — $\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$



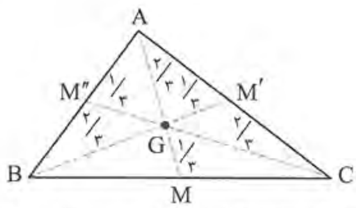
۴ اجزای داخلی مثلث

۱- میانه (AM)

از رأس به وسط ضلع مقابل



$\overset{\Delta}{ABM}=\overset{\Delta}{AMC}$



* ۶ مثلثی که تشکیل شدن هم مساحت

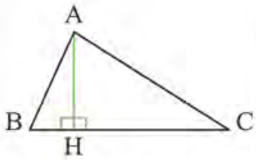
محل تلاقی مرکز ثقل مثلث است.

$$AG=2GM \Rightarrow \begin{cases} AG=\frac{2}{3}AM \\ GM=\frac{1}{3}AM \end{cases}$$

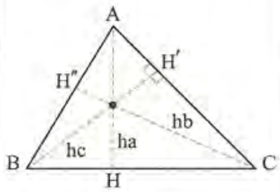
و دو میانه‌ی دیگه هم به همین ترتیب

۲- ارتفاع (AH)

از رأس عمود به ضلع مقابل

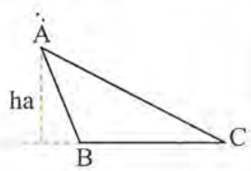


* مثلث سه تا ارتفاع داره



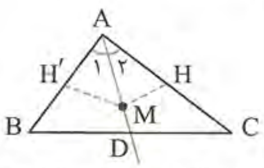
* تو مثلث قائم‌الزاویه دو ضلع قائمه خودشون ارتفاع هستن.

* اگه یه زاویه‌ی بیش‌تر از 90° باشه مثلث ارتفاع‌خارجی داره.



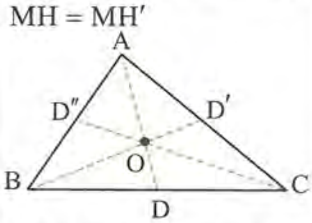
۳- نیمساز (AD)

هر زاویه رو نصف می‌کنه.



* هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

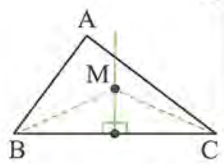
$MH=MH'$



* محل تلاقی نیمسازها (O) از سه ضلع مثلث به یک فاصله است البته ما سه تا نیمساز خارجی هم داریم که سه نقطه دیگه مثل (O) بیرون مثلث به وجود میان.

۴- عمود منصف (Δ)

از وسط ضلع عمود به سمت بالا



* هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است یعنی:

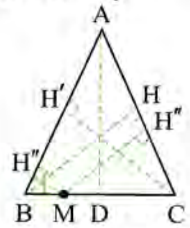
$MB=MC$

* مثل میانه و ارتفاع و نیمساز قطعاً ما تو هر مثلث سه تا عمود منصف هم داریم.

P.2

انواع مثلث

۱- متساوی‌الساقین
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\}$$

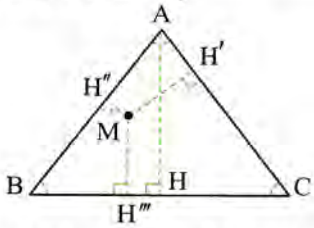


* AD هم ارتفاع، هم میانه، هم نیمساز و هم عمود منصفه!

* مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده از دو ساق برابر، با ارتفاع نظیر هر کدوم از ساق‌ها

$MH'' + MH''' = BH = CH'$

۲-متساوی الاضلاع
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC = BC \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ \end{array}\right\}$$

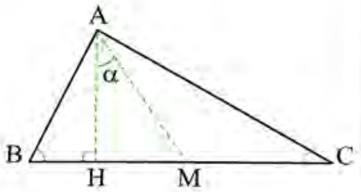


* ارتفاع و میانه و نیمساز نظیر هر کدوم از اضلاع با هم برابرن.

* مجموع فواصل هر نقطه دلخواه داخل مثلث از سه ضلع برابره با ارتفاع یعنی:

$MH' + MH'' + MH''' = AH$

۳- قائم الزاویه



* زاویه بین ارتفاع و میانه تفاضل دو زاویه غیر قائمه: $\alpha = \left|\hat{B} - \hat{C}\right|$

* ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتره.
میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتره. (عکس این قضیه هم صادقه!)

* اگه یه زاویه ۱۵° باشه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتره.

همنهشتی: دو مثلث که کاملاً به هم منطبق باشن همنهشتن به حالت‌های

۱- دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)
۲- دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)
۳- سه ضلع (ض ض ض)

انواع خم

مسطح: مجموعه نقاطی از صفحه که بتونیم بدون بلند کردن قلم از کاغذ رسم کنیم.
ساده: خم مسطحی که هیچ یک از نقاط خود را قطع نمی‌کنه مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم برسن.
بسته: اگه ابتدا و انتهای یک خم ساده به هم برسن یک خم ساده‌ی بسته تشکیل می‌شه.

قضیه خم جردن

هر خم ساده‌ی بسته، صفحه رو به سه زیر مجموعه‌ی درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کنه.
تعریف ناحیه: اجتماع یه خم ساده بسته و درون آن یک ناحیه نامیده می‌شه.
ناحیه محدب: هر دو نقطه‌ی دلخواه درون اون رو به هم وصل کنیم، خط حاصل کاملاً درون ناحیه قرار بگیره.

چند ضلعی‌های محدب: چند ضلعی یک خم ساده بسته است که

اولاً؛ از اجتماع حداقل ۳ پاره‌خط تشکیل شده باشه.
ثانیاً؛ نقاط انتهایی پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و
ثالثاً؛ هیچ سه نقطه متوالی روی یک خط قرار نگرفته باشه.

در هر n ضلعی محدب روابط زیر برقراره:

۱- مجموع زوایای داخلی: $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$

۲- مجموع زوایای خارجی: ۳۶۰°

۳- تعداد قطرها از هر رأس: $n-۳$

۴- تعداد قطرها: $\frac{n(n-۳)}{۲}$

چهارضلعی‌های خاص:

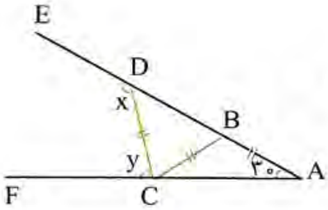
۱- متوازی الاضلاع

دو ضلع مقابل مساوی و موازی
زاویه‌های مجاور مکمل و قطرها منصف

۲- مستطیل: متوازی‌الاضلاعی که ۴ زاویه برابر داره.
۳- لوزی: متوازی‌الاضلاعی که ۴ ضلع برابر داره.
۴- مربع: متوازی‌الاضلاعی که همه چیش برابره.

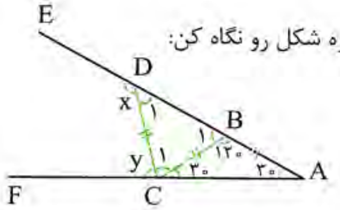
مثال‌های فصل اول

مثال با توجه به شکل روبه‌رو مقادیر y ، x را بیابید.



$$AB = BC \rightarrow A\hat{C}B = C\hat{A}B = ۳۰^\circ \rightarrow A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$$

حالا دوباره شکل رو نگاه کن:



$\hat{B}_۱ + ۱۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ$ (زاویه‌ی نیم صفحه)

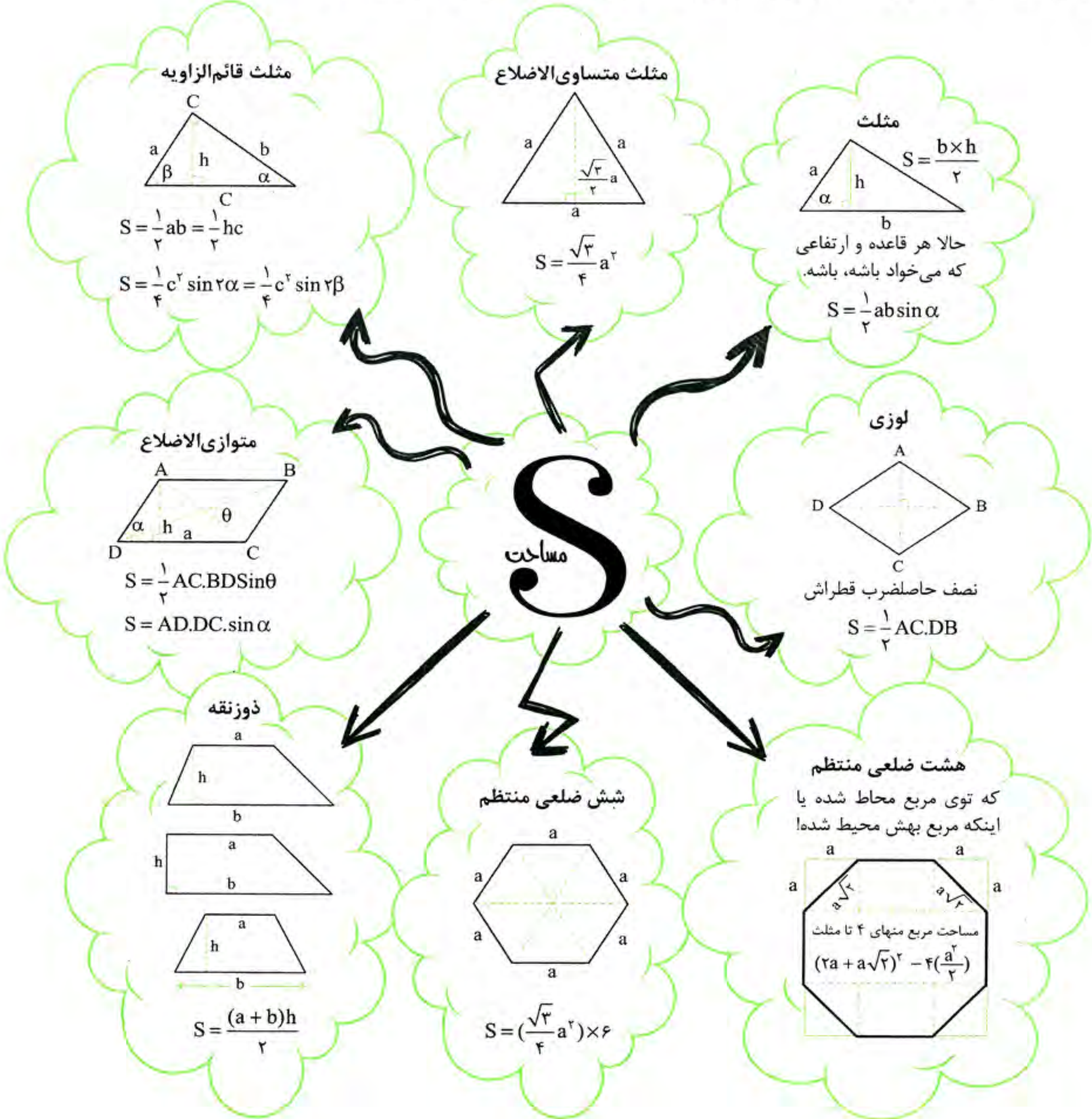
$\rightarrow \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ$ (تازه می‌تونستیم بگیم $\hat{B}_۱$ زاویه‌ی خارجیه برای ABC که بازم می‌شه ۶۰°)

$DC = BC \rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ = ۶۰^\circ \rightarrow \hat{D}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$

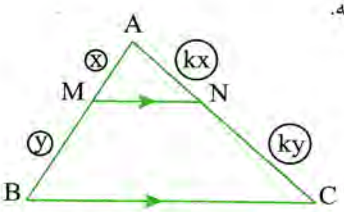
P.3

قضیه فیثاغورث رو که از راهنمایی بلدین. یادتونه؟! $c^۲ = a^۲ + b^۲$

تو مساحت هم که مساحت مربع و مستطیل رو راستش روم نشد براتون بنویسم! می‌ریم سراغ بقیه شکل‌ها.



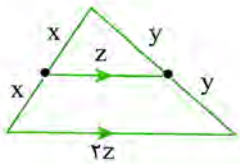
۱ قضیه تالس: هر وقت تو یه مثلثی یه خط موازی قاعده رسم بشه دو ضلع دیگه رو به یه نسبت تقسیم می‌کنه.



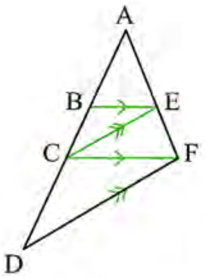
جزءبه‌جزء : $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

جزء به کل : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

این قضیه تالس دو شرطیه، یعنی عکسش هم برقراره به این ترتیب که اگه روی اضلاع یک مثلث نقاط M و N طوری انتخاب شده باشن که پاره‌خط‌های متناسب روی AB و AC به وجود اومده باشه MN موازی BC می‌شه. حالا تو یه حالت خاص خیلی مهم اگه یه پاره‌خط وسط‌های دو ضلع مثلث رو به هم وصل کنه موازی سومین ضلع و برابر نصفشه و عکس این قضیه هم برقراره.



قشنگترین سوالات کنکور تو این قضیه مثلث‌های تو در تو هستن مثل این شکل: (تالس جفت)

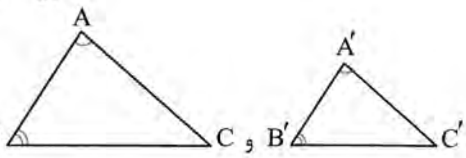


① $\frac{AE}{EF}=\frac{AB}{BC}$ ② $\frac{AE}{EF}=\frac{AC}{CD}$

①, ② $\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}}$

۲ تشابه:

دو شکل هندسی متشابه‌اند به شرطی که
- ۱- زاویه‌هاشون برابر باشه.
- ۲- اضلاعشون نظیربه‌نظیر متناسب باشن.

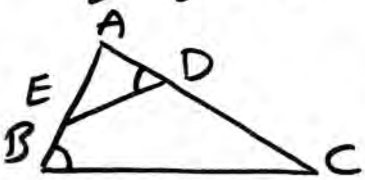


مثلاً دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه‌اند پس: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$

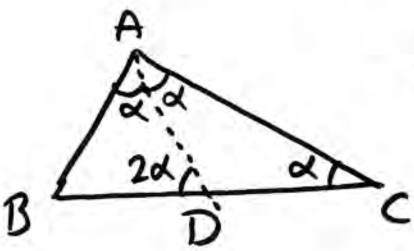
به K می‌گیم نسبت تشابه؛ نسبت محیط‌ها و ارتفاع‌ها و تمام اجزای داخلی هم K میشه ولی نسبت مساحت‌ها K^2.

حالت‌های تشابه دو مثلث در حالت کلی
- ۱- دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از اون یکی! (ز ز)
- ۲- سه ضلع با هم متناسب باشن. (ض ض ض)
- ۳- دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر. (ض ز ض)

دو تا از معروف‌ترین‌ها



$\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$



$\widehat{ABC} \sim \widehat{DBA}$

$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BA}=\frac{AC}{DA}$

تشابه مثلث‌های خاص:

۱ هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند.

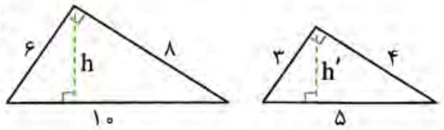
۲ هر دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین متشابه‌اند.

۳ هر مثلث قائم‌الزاویه سه حالت متشابه خاص دارن.
- برابری یک زاویه حاده
- تناسب دو ضلع قائمه
- تناسب وتر و یک ضلع قائمه

۴ دو مثلث متساوی‌الساقین سه حالت تشابه خاص دارن:
- برابری زاویه رأس
- برابری یک زاویه ساق
- تناسب ساق‌ها و قاعده

P.5

توضیح نسبت تشابه با یه مثال ساده:

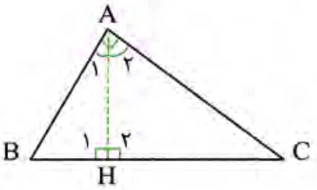


$$K=\frac{۱۰}{۵}=\frac{۸}{۴}=\frac{۶}{۳}=\frac{h}{h'}=۲$$

$$\frac{S}{S'}=K^۲=(۲)^۲=۴$$

سه کلّه‌پوک! و روابط طولی تو مثلث قائم‌الزاویه

اول می‌ریم سراغ تشابه مثلث ABC با کوچیکا!



$$ABC \sim H_۱BA_۱ \Rightarrow \frac{AB}{HB}=\frac{BC}{BA} \Rightarrow (AB)^۲=BH\times BC$$

$$ABC \sim H_۲A_۲C \Rightarrow \frac{AC}{HC}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow (AC)^۲=CH\times CB$$

حالا از این دو تا تشابه فهمیدیم که $\hat{A}_۱=\hat{C}$ و $\hat{A}_۲=\hat{B}$ پس دو تا کوچیکا هم متشابه‌اند.

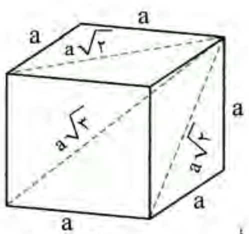
$$A_۱H_۱B \sim CH_۲A_۲ \Rightarrow \frac{AH}{CH}=\frac{HB}{AH} \Rightarrow (AH)^۲=BH\times HC$$

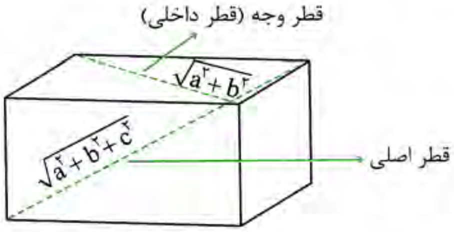
درسنامه‌ی چهارم

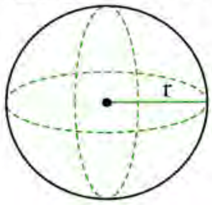
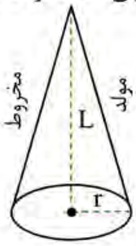
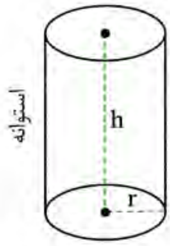
شکل‌های فضایی

وضعیت خط و صفحه تو فضا: تو مبحث دستگاه معادلات مفصل بررسی شد.

قطر وجه و قطر اصلی توی مکعب و مکعب‌مستطیل

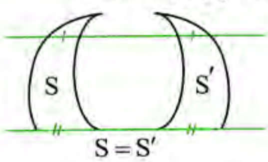




کره	هرم	منشور
کره هم که خودت می‌دونی دیگه!	کف داره ولی سقف نوک تیزه!	کف و سقف هم‌نهشت
		
$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$	$V=\frac{۱}{۳}\times$ ارتفاع × مساحت قاعده	V = ارتفاع × مساحت قاعده
مشتق بگیر نسبت به r	$S_{جانبی}=\frac{۱}{۲}\times$ مولد × محیط قاعده	$S_{جانبی}$ = ارتفاع × محیط قاعده
$S=۴\pi r^۲$	$S_{کل}$ = کف + مساحت جانبی	$S_{کل}$ = کف و سقف + مساحت جانبی

اصل کاوالیری:

اگه قاعده‌های تو شکل روی یه خط راست باشن و با هم مساوی و خط موازی قاعده در دو شکل پاره‌خط‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کنه.



$S=S'$