



آزمون غیر حضوری

دروس اختصاصی

فارغ التحصیلان ریاضی

(۷ فروردین ۱۳۹۸)

(مباحث ۱۶ فروردین ۹۸)

گروه فنی و تولید:

محمد اکبری	مسئول تولید آزمون غیر حضوری
نرگس غنی زاده	مسئول دفترچه آزمون غیر حضوری
مدیر گروه: مریم صالحی مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری	گروه مستندسازی
حسن خرم جو	حروفچین
سوران نعیمی	ناظر چاپ

بنیاد علمی آموزشی قلمچی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام داراییها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلمچی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»



دیفرانسیل

دیفرانسیل

یادآوری مفاهیم پایه، دنباله‌ها،

حد و پیوستگی

صفحه‌های ۱ تا ۱۲۰

حسابان

حد و پیوستگی

صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۵۸

۱. اگر به ازای هر عدد حقیقی مثبت h داشته باشیم: $\sqrt{a+1} + |2a-b| < h$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) ۱

۲. اگر $5 < x < 3$ باشد، کمترین مقدار a که در نامساوی $a < \left| \frac{1}{x+5} \right|$ صدق کند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{10}$

۳. در دنباله $\{a_n\}$ با جملات مثبت داریم: $a_{n+1} = \frac{ka_n}{2n+3}$ و $a_1 = 2$ ، اگر دنباله نزولی باشد، حدود k کدام است؟

- (۱) $k \leq 5$ (۲) $0 < k \leq 5$ (۳) $0 < k < 7$ (۴) $k > 0$

۴. در مجموعه اعداد طبیعی برای مقادیر $n, n \geq 1$ ، فاصله نقاط دنباله $\left\{ \frac{2n+8}{3n+4} \right\}$ از نقطه همگرایی خود کم تر از 0.4 است. کمترین مقدار n کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۳ (۴) ۴۴

۵. دنباله $\left\{ \frac{1+2^n}{3+2^{n-1}} \right\}$ چگونه است؟

- (۱) کراندار - نزولی (۲) کراندار - صعودی (۳) بیکران - نزولی (۴) بیکران - صعودی

۶. دنباله $a_n = \cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}$ از نظر همگرایی چگونه است؟

- (۱) همگرا به صفر است. (۲) همگرا به $\sin 1$ است. (۳) همگرا به $\cos 1$ است. (۴) واگرا است.

۷. اگر f تابعی فرد، $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$ باشد، حاصل جمع حد چپ و راست تابع $g(x) = [-2x]f(x)$ وقتی $x \rightarrow -2$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۱۱ (۲) ۱۱ (۳) -۵ (۴) ۵

۸. اگر $a_n = \frac{n\pi+2}{4n+1}$ و $f(x) = [\tan x] - [\cot x]$ باشند، آنگاه دنباله $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

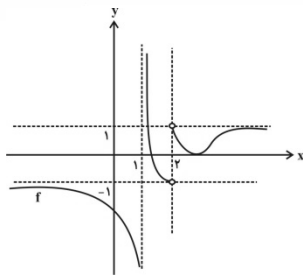
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) واگراست.

۹. حد عبارت $\left[\frac{\sin x}{x} \right] + 2 \left[\frac{x}{\sin x} \right]$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) حد ندارد.

۱۰. کدام دنباله به همراه دنباله $a_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$ می‌تواند در اثبات عدم وجود حد تابع $f(x) = \operatorname{sgn}(x-2)$ در نقطه $x=2$ به کار برده شود؟

- (۱) $b_n = \frac{2n+1}{n+1}$ (۲) $b_n = \frac{4n+3}{2n+1}$ (۳) $b_n = \sqrt{n^2 + 4n} + n$ (۴) $b_n = n - \sqrt{n^2 + 4n}$



۱۱. با توجه به نمودار f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f \circ f \circ f](x)$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۲ (۲) -۱
(۳) ۱ (۴) صفر

۱۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) $-\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x}{(4x - \pi)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{32}$ (۲) $-\frac{15}{32}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) $-\frac{15}{16}$

۱۴. اگر $H(x)$ تابع هوی ساید باشد، به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = (2x+a)H((x-3)^2(x-2))$ همواره پیوسته است؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) -۴

۱۵. تابع $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|^2+1}$ در چند نقطه صحیح پیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۱۶. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , 0 \leq x < 1 \\ x|x|+1 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ باشد، آنگاه f^{-1} روی دامنه اش چگونه است؟

- (۱) پیوسته و صعودی اکید (۲) پیوسته و نزولی اکید
(۳) ناپیوسته و صعودی اکید (۴) ناپیوسته و نزولی اکید

۱۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر، حداقل یکی از ریشه های معادله $ax^2 + 2x^2 - x + 4 = 0$ در بازه $(0, 1)$ قرار می گیرد؟

- (۱) $a < -\frac{3}{4}$ (۲) $a < -\frac{5}{2}$ (۳) $a < -3$ (۴) $a < -5$

۱۸. اگر مجانب های مایل تابع $f(x) = x + \tan^{-1} x$ به صورت دو خط $y = ax + b$ و $y = a'x + b'$ باشند، در این صورت

$|ab' - ba'|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) π

۱۹. فاصله مجانب های منحنی $y = x(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 + 4x - 2})$ از یکدیگر چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۰. یکی از مجانب های منحنی به معادله $y = \frac{2x^2 + ax^2 + 5}{x^2 + x}$ ، محور x ها را در نقطه ای به طول (-2) قطع می کند. a کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶



هندسه تحلیلی

بردارها، خط و صفحه

مقاطع مخروطی

ماتریس و دترمینان

صفحه‌های ۴ تا ۷۰ و ۱۱۳ تا ۱۲۹

هندسه تحلیلی

۲۱. اگر خط گذرنده از دو نقطه $A = (-1, 2, 3)$ و $B = (1 + m, 0, 2)$ ، عمود بر خط شامل نقاط B و

$C = (m, -2, 1)$ باشد، m کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۷ (۳) ۳ (۴) ۷

۲۲. نقطه A روی محور Z ها قرار دارد و از دو خط $D: (x = y, z = 1)$ و $D': (x = 1, y = z)$ به یک فاصله است. ارتفاع نقطه A

کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۴

۲۳. خط d به معادلات $(\frac{x+1}{2} = \frac{-y+2}{3} = \frac{z-1}{1})$ به تمامی در صفحه P به معادله $x + y + mz = n$ قرار دارد. $m + n$ برابر کدام

است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۴. نقطه تلاقی سه صفحه به معادلات $x + y = 1$ ، $y + z = 2$ و $x + z = 3$ ، چه فاصله‌ای از مبدأ مختصات دارد؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{5}$

۲۵. طول عمود مشترک خط $x = y - 1 = z + 2$ و محور y ها کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

۲۶. نقاط $A = (4 + 2\sqrt{3}, 0)$ و $A' = (4 - 2\sqrt{3}, 0)$ دو رأس کانونی یک بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، معادله

بیضی کدام است؟

$$3x^2 + 2y^2 - 18x + 9 = 0 \quad (2) \quad 2x^2 + 3y^2 - 16x + 8 = 0 \quad (1)$$

$$3x^2 + 2y^2 + 18x - 9 = 0 \quad (4) \quad 2x^2 + 3y^2 + 16x - 8 = 0 \quad (3)$$

۲۷. یکی از قطرهای دایره $x^2 + y^2 - x + ay + \frac{1}{4} = 0$ روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد. کدام یک از خطوط زیر، بر این دایره مماس

است؟

- (۱) $x = 2$ (۲) $y = 4$ (۳) $x = 3$ (۴) $y = 6$

۲۸. بیشترین فاصله نقاط دایره به معادله $(2a - 1)x^2 - 3y^2 + 12y + a - 5 = 0$ از محور x ها، کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{6}$ (۲) ۴ (۳) $4 - \sqrt{2}$ (۴) $2 + \sqrt{2}$

۲۹. قطر بزرگ یک بیضی موازی محور x ها است و دایره به معادله $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ از کانون‌های این بیضی می‌گذرد و در دو

نقطه بر آن مماس است. طول پاره‌خطی که بیضی روی محور y ها جدا می‌کند کدام است؟

- (۱) $\sqrt{12}$ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{14}$ (۴) $\sqrt{15}$

۳۰. یک سهمی محور y ها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند، رأس آن بر روی نیمساز ناحیه اول است، فاصله کانون

سهمی تا خط هادی، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$



۳۱. به ازای کدام مقدار a ، معادله $= 0$ $\begin{vmatrix} x & x & x \\ 104 & 103 & 102 \\ 101 & 102 & a \end{vmatrix}$ برای تمامی مقادیر x برقرار است؟

- (۱) ۱۰۳ (۲) ۱۰۱ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۰۴

۳۲. در ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، اگر به درایه سطر اول و ستون دوم، ۲ واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان چقدر افزوده می‌شود؟

- (۱) -۸ (۲) ۸ (۳) -۱۶ (۴) ۱۶

۳۳. اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $-D$ (۲) D (۳) $(a+b+c)D$ (۴) $abcD$

۳۴. حاصل $\begin{vmatrix} x & x-y & y-x \\ x & x-y & -1 \\ x-1 & y & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y-x & x-y \\ x-1 & y & 1 \\ -x & y-x & 1 \end{vmatrix}$ همواره مساوی کدام است؟

- (۱) x (۲) $2y^2$ (۳) y (۴) $2x^2$

۳۵. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ کدام عدد را به درایه سطر اول و ستون اول اضافه کنیم، تا همسازه سطر دوم و ستون سوم

ماتریس جدید از همسازه سطر سوم و ستون دوم ماتریس A ، ۵ واحد کم‌تر باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) -۳ (۴) -۵

ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته

گراف، نظریه اعداد

صفحه‌های ۱ تا ۵۵

ریاضی ۲

ترکیبات

صفحه‌های ۱۷۶ تا ۱۹۰

۳۶. گراف همیلتنی G از مرتبه ۵ و میانگین درجات رئوس $2/4$ مفروض است. این گراف به ترتیب

چند دور متمایز به طول‌های ۳ و ۴ دارد؟

- (۱) ۰,۱ (۲) ۱,۱ (۳) ۲,۲ (۴) ۱,۰

۳۷. اگر از گراف K_p ، ۸ یال حذف کنیم به گراف 5 -منتظم تبدیل می‌شود. مجموع درایه‌های ماتریس مجاورت گراف K_p کدام

است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۶ (۳) ۵۶ (۴) ۷۲

۳۸. در درخت T ، با حذف یک یال گرافی حاصل می‌شود که در آن مرتبه ۲ برابر اندازه است. این درخت حداکثر چند رأس درجه ۱

دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



۳۹. حاصل ضرب درجه‌های رئوس درختی برابر ۴۸ است. اگر $\Delta = 6$ باشد، این درخت حداقل چند یال دارد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۸

۴۰. در یک تقسیم، باقی‌مانده برابر ۸ است. با افزودن k واحد به مقسوم، با ثابت ماندن مقسوم‌علیه، خارج قسمت یک واحد افزایش

یافته و باقی‌مانده برابر ۲ گردیده است. k ، چند عدد طبیعی یک رقمی می‌تواند باشد؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۴۱. دو عدد صحیح a و b متعلق به $[\Delta]$ هستند. اگر $ab \in [x]$ ، آنگاه عدد $ax + b$ به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $[4]_m$ (۲) $[3]_m$ (۳) $[2]_m$ (۴) $[1]_m$

۴۲. اگر $(bab)_9 = (ab^3)_8$ باشد عدد $(aaa)_b$ کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۱۵ (۳) ۱۳ (۴) ۷

۴۳. چند عدد شش رقمی به شکل $ababab$ وجود دارد که مضرب ۴۳ باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۴. اگر کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه $\{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}\}$ برابر ۸ و $a + b = 104$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار برای

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی a و b کدام است؟

- (۱) ۳۵۲ (۲) ۳۴۴ (۳) ۳۳۶ (۴) ۳۲۰

۴۵. چند جفت عدد اول p و q وجود دارد که در رابطه $13p - 13q = 16$ صدق کنند؟

- (۱) بی‌شمار (۲) دو (۳) یک (۴) هیچ

۴۶. در یک سالن، دو ردیف صندلی و در هر ردیف، ۵ صندلی وجود دارد. ۳ دانش‌آموز سال اول، ۲ دانش‌آموز سال دوم و ۳

دانش‌آموز سال سوم به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند به گونه‌ای که سال اولی‌ها در ردیف اول و سال

دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

- (۱) ۳۶۰۰۰ (۲) ۵۴۰۰۰ (۳) ۷۲۰۰۰ (۴) ۹۶۰۰۰

۴۷. ۶ نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند به طوری که بین ۲ نفر a و b ، همواره ۲ نفر قرار گیرد؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۱۶

۴۸. چند زیرمجموعه ۳ عضوی از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ می‌توان انتخاب کرد به گونه‌ای که مجموع اعضای هر کدام از آن‌ها

بر ۳ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۳۰ (۴) ۳۶

۴۹. تعداد جایگشت‌های شش حرفی واژه $olympiad$ که در آن، حروف صدادار یک در میان قرار گیرند، کدام است؟

- (۱) $6!$ (۲) $\frac{7!}{2!}$ (۳) $3 \times 5!$ (۴) $\frac{3 \times 6!}{2!}$

۵۰. در یک ساختمان ۶ طبقه، افراد a, b, c, d, e, f هر کدام در یک طبقه زندگی می‌کنند، اگر بدانیم واحد a بالاتر از b است، در

چند حالت فرد b ساکن طبقه سوم است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۷۲ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰



فیزیک

فیزیک پیش دانشگاهی

حرکت شناسی، دینامیک، حرکت

نوسانی، موج های مکانیکی

صفحه های ۱ تا ۱۲۰

فیزیک ۲

صفحه های ۱ تا ۷۵

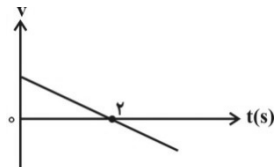
فیزیک ۳

صفحه های ۳۹، ۱۷۰ و ۱۷۱

۵۱. در شرایط خلأ، گلوله ای از سطح زمین و در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می شود. اگر قسمتی

از نمودار سرعت- زمان گلوله مطابق شکل زیر باشد، چند ثانیه پس از پرتاب، گلوله دوباره به

سطح زمین برمی گردد؟



۳ (۲)

۲ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

۵۲. در شرایط خلأ، از بالای برجی به ارتفاع ۶۰m، گلوله A را رها می کنیم. در همین لحظه از پایین برج نیز گلوله B را در

راستای قائم به طرف بالا پرتاب می کنیم. اگر در مسیر حرکت گلوله B به طرف بالا، دو گلوله به هم برخورد کنند و در همین

لحظه اندازه سرعت آن ها با هم برابر باشد، چند ثانیه پس از پرتاب، دو گلوله به هم رسیده اند؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۳ (۲)

۳ (۱)

(۴) بستگی به اندازه سرعت اولیه گلوله B دارد.

۶ (۳)

۵۳. معادله های حرکت جسمی که در صفحه xoy حرکت می کند، در SI به صورت $x = t^2 + 3t$ و $y = \frac{1}{3}t^3 + 3$ می باشد. در

لحظه ای که بردار سرعت جسم با راستای مثبت محور x ها زاویه 45° می سازد، فاصله جسم از مبدأ مختصات چند متر است؟

 $\frac{10}{3}$ (۴) $6\sqrt{5}$ (۳) $\frac{2}{3}\sqrt{61}$ (۲) $6\sqrt{13}$ (۱)

۵۴. در شرایط خلأ، گلوله ای از بالای برجی به ارتفاع ۸۰ متر به طور افقی پرتاب می شود و در فاصله افقی ۱۲۰ متری از پای برج به

سطح زمین برخورد می کند. در لحظه برخورد گلوله به سطح زمین، زاویه بین بردار سرعت گلوله و راستای قائم چند درجه

است؟ ($\sin 53^\circ = 0.8$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۶۰ (۴)

۵۳ (۳)

۴۵ (۲)

۳۷ (۱)

۵۵. در شرایط خلأ، پرتابه ای را از روی سطح زمین و با زاویه حاده نسبت به افق به طرف بالای آن پرتاب می کنیم. اگر زاویه پرتاب

پرتابه نسبت به افق را با فرض ثابت بودن اندازه سرعت اولیه آن، به تدریج تا 90° افزایش دهیم، کدام یک از کمیت های زیر

قطعاً تغییری نخواهد کرد؟

(۲) ارتفاع اوج پرتابه

(۱) زمان بازگشت پرتابه به سطح زمین

(۴) اندازه سرعت برخورد پرتابه به سطح زمین

(۳) بُرد پرتابه

۵۶. جسمی را از پایین سطح شیب داری که با افق زاویه 53° می سازد با سرعت اولیه $30 \frac{m}{s}$ در امتداد سطح شیب دار به طرف بالای

آن پرتاب می کنیم. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح برابر با $\frac{1}{3}$ باشد، حداکثر ارتفاع جسم از سطح زمین برابر با

چند متر خواهد شد؟ ($\sin 53^\circ = 0.8$ و $g = 10 \frac{N}{kg}$)

۲۰ (۴)

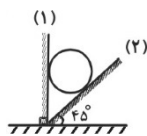
۳۰ (۳)

۳۶ (۲)

۴۵ (۱)



۵۷. مطابق شکل زیر یک کره فلزی به وزن 20N درون ناوهای با دیواره‌های صیقلی قرار دارد. اندازه نیرویی که این کره فلزی به



دیواره (۱) وارد می‌کند، چند نیوتون است؟

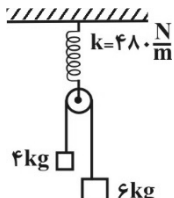
$20\sqrt{2}$ (۴)

$10\sqrt{2}$ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

۵۸. در مجموعه شکل زیر، تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی آن برابر با چند سانتی‌متر است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و از جرم فنر، قرقره و طناب و اصطکاک بین آن‌ها صرف نظر شود.)



و طناب و اصطکاک بین آن‌ها صرف نظر شود.)

۲۰ (۲)

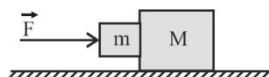
۱۰ (۱)

۲۷ (۴)

۲۵ (۳)

۵۹. در شکل زیر دو جرم به یک‌دیگر تکیه دارند و ضریب اصطکاک ایستایی بین آن‌ها برابر با $\mu_s = 0/4$ و سطح افقی بدون

اصطکاک است. حداقل اندازه نیروی افقی \vec{F} چند نیوتون باشد تا از لغزش جرم m بر روی جرم M جلوگیری کند؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



($M = 20\text{kg}$ و $m = 4\text{kg}$)

۲۴۰ (۲)

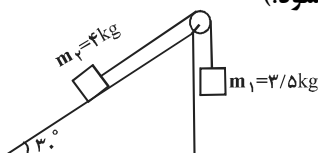
۸۰ (۱)

۲۶۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۶۰. در شکل زیر، جسم m_1 در آستانه حرکت به سمت پایین است. چند کیلوگرم از جرم m_1 کاسته شود تا این جسم در آستانه

حرکت به سمت بالا قرار گیرد؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و از جرم نخ و قرقره و اصطکاک قرقره صرف نظر شود.)



۰/۵ (۲)

۳ (۱)

۲/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۶۱. معادله بردار تکانه جسمی به جرم ۵ کیلوگرم که در صفحه xoy در حال حرکت است، در SI به صورت

$\vec{P} = (t^3 - 2)\vec{i} + (2t^2 - 3t + 6)\vec{j}$ است. اندازه شتاب جسم در لحظه $t = 2\text{s}$ چند متر بر مجذور ثانیه است؟

$2/6$ (۴)

$2/4$ (۳)

$2/2$ (۲)

۲ (۱)

۶۲. اگر دوره حرکت جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد دو برابر شود، با فرض ثابت ماندن شعاع حرکت دورانی،

اندازه شتاب مرکزگرا و انرژی جنبشی آن به ترتیب از راست به چپ چند برابر می‌شوند؟

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (۳)

۲, ۴ (۲)

۴, ۲ (۱)

۶۳. یک پیچ افقی برای حرکت یک سورت‌مه‌سوار با زاویه 45° شیب عرضی داده شده است. هنگامی که سورت‌مه‌سوار با بیشینه

سرعت مجازش این پیچ را بدون لغزش طی می‌کند، اندازه شتاب مرکزگرای آن چقدر است؟ (مسیر بدون اصطکاک فرض شود و

g اندازه شتاب گرانش زمین است.)

$\frac{1}{4}g$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}g$ (۳)

$\sqrt{2}g$ (۲)

g (۱)



۶۴. جسم کوچکی روی یک صفحه افقی دوار و در فاصله ۳ سانتی متری از مرکز آن قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک بین جسم و

سطح صفحه برابر $0/3$ باشد، بیشینه سرعت زاویه‌ای دوران صفحه چند رادیان بر ثانیه باشد تا جسم بر روی آن نلغزد؟

$$(g = 10 \frac{m}{s^2})$$

۱۰۰ (۱) ۱۰ (۲) ۱ (۳) ۰/۱ (۴)

۶۵. ماهواره‌ای در ارتفاع ۳۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین به طور یکنواخت بر روی مداری دایره‌ای شکل به دور زمین می‌گردد. بزرگی

سرعت خطی این ماهواره چند متر بر ثانیه است؟ (زمین به صورت کره‌ای به شعاع $R_e = 6400 \text{ km}$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$ فرض شود).

۴۴۰۰ (۱) ۳۲۰۰ (۲) ۱۶۰۰ (۳) ۴۸۰۰ (۴)

۶۶. رابطه بین شتاب و سرعت نوسانگری فرضی که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، در SI به صورت $a^2 = 100 - v^2$ است.

دامنه نوسان‌های این نوسانگر چند متر است؟

۱ (۱) ۱۰ (۲) ۰/۱ (۳) ۱۰۰ (۴)

۶۷. معادله بُعد - زمان نوسانگری که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، در SI به صورت $y = 2 \sin(100\pi t)$ است. در چه لحظه‌ای

بر حسب ثانیه، انرژی جنبشی نوسانگر به بیشینه مقدار خود می‌رسد؟

۱ (۱) صفر ۱۰۰ (۲) $\frac{1}{100}$

۱ (۳) $\frac{1}{50}$ ۴ (۴) هر سه گزینه (۱)، (۲) و (۳) صحیح هستند.

۶۸. معادله حرکت نوسانی ذره‌ای در SI به صورت $y = A \sin(20\pi t)$ است. برای اولین بار در کدام بازه زمانی انرژی پتانسیل

کشسانی ذره بیش تر از انرژی جنبشی آن است؟

۱ (۱) صفر تا $\frac{1}{10}$ s ۲ (۲) صفر تا $\frac{1}{40}$ s تا $\frac{1}{80}$ s ۳ (۳) $\frac{1}{80}$ s تا $\frac{1}{40}$ s ۴ (۴) $\frac{1}{40}$ s تا $\frac{3}{40}$ s

۶۹. نوسانگری روی پاره خطی حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد. اگر در لحظه‌ای که بُعد نوسانگر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر بُعد بیشینه است، انرژی

جنبشی آن برابر با 10 J باشد، انرژی مکانیکی نوسانگر چند ژول است؟

۴۰ (۱) $\frac{40}{3}$ ۲ (۲) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ۳ (۳) ۴۰ ۴ (۴) ۲۰

۷۰. ساده ترین معادله زاویه انحراف یک آونگ ساده از راستای قائم که حرکت نوسانی کم دامنه انجام می‌دهد، بر حسب زمان در SI

به صورت $\theta = 0/08 \sin(\frac{5\pi}{3} t)$ است. طول این آونگ برابر با چند سانتی متر است؟ $(g = \pi^2 \frac{m}{s^2})$

۰/۶ (۱) ۶۰ (۲) ۰/۳۶ (۳) ۳۶ (۴)



شیمی پیش‌دانشگاهی: صفحه‌های ۲ تا ۱۰۵ / شیمی ۳: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰ و ۹۷ تا ۱۰۴

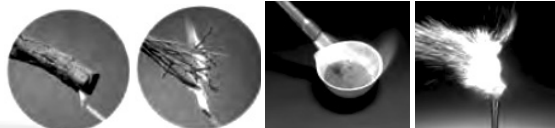
۷۱- کدام گزینه درست است؟

- (۱) در واکنش تجزیه‌ی کلسیم کربنات، با گذشت زمان غلظت کلسیم اکسید افزایش می‌یابد.
- (۲) اگر واکنشی گرماده و با افزایش بی‌نظمی همراه باشد، می‌توان گفت با سرعت زیادی انجام می‌شود.
- (۳) دو شکل زیر، دو نمونه از واکنش‌های تند و سریع را نمایش می‌دهد.



(الف) (ب)

(۴) دو شکل زیر، نشان‌دهنده‌ی تأثیر عامل یکسان در سرعت واکنش هستند.



(الف) (ب)

۷۲- مقداری پتاسیم کلرات در ظرفی دو لیتری مطابق واکنش $2\text{KClO}_3(\text{s}) \rightarrow 2\text{KCl}(\text{s}) + 3\text{O}_2(\text{g})$ تجزیه می‌شود. با توجه به اطلاعات داده شده،

زمان (s)	۵	۱۰	۱۵	۲۰
غلظت (mol.L^{-1})	۰/۱۶	۰/۲۴	۰/۳	۰/۳

سرعت متوسط واکنش چند mol.min^{-1} است؟

- (۱) ۲/۴
- (۲) ۰/۸
- (۳) ۱/۲
- (۴) ۰/۶

۷۳- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (۱) نگهداری فراورده‌های گوشتی به حالت منجمد، سرعت فاسد شدن آن‌ها را به صفر می‌رساند.
- (۲) در نظریه‌ی حالت گذار، ذره‌های واکنش‌دهنده به صورت گوی‌های سخت در نظر گرفته می‌شوند.
- (۳) واکنش تولید گاز نیتروژن مونوکسید از گازهای نیتروژن و اکسیژن، در دماهای بالا قابل انجام است.
- (۴) محلول بنفش رنگ پتاسیم منگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق به کندی واکنش می‌دهد.

۷۴- چه تعداد از موارد زیر صحیح هستند؟

- برطرف شدن برخی از نارسایی‌های نظریه‌ی برخورد در نظریه‌ی حالت گذار.
- توجیه واکنش بین محلول‌های نقره‌نیترات و سدیم کلرید توسط نظریه‌ی برخورد.
- نزدیک تر بودن سطح انرژی فراورده‌ها به حالت گذار در واکنش گرماگیر با $\Delta H \geq E'_a$ یا $\Delta H < E'_a$.
- امکان انجام واکنش بین فراورده‌ها در تمامی واکنش‌ها و تولید واکنش‌دهنده‌ها.
- امکان نگهداری مخلوط H_2 و O_2 در دمای اتاق برای مدتی طولانی.

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۷۵- با توجه به جدول زیر که مربوط به واکنش $2\text{A}(\text{g}) + \text{B}(\text{g}) \rightarrow 2\text{C}(\text{g}) + \text{D}(\text{g})$ است، کدام مطلب زیر درست است؟

شماره آزمایش	[A]	[B]	سرعت آغاز واکنش ($\frac{\text{mol}}{\text{L.s}}$)
۱	۰/۱۵	۰/۴	6×10^{-6}
۲	۰/۰۷۵	۰/۲	8×10^{-8}
۳	۰/۷۵	۰/۴	7×10^{-6}
۴	۰/۱۵	۰/۸	7×10^{-8}

(۱) تغییرات غلظت A تأثیر بیش‌تری نسبت به تغییرات غلظت B روی سرعت واکنش دارد.

(۲) این واکنش با نظریه‌ی برخورد قابل توجیه است.

(۳) اگر غلظت‌های A و B به ترتیب ۸۰٪ و ۴۰٪ نسبت به حالت اولیه کاهش یابند،

سرعت واکنش ۰/۰۲۴ برابر سرعت حالت اولیه خواهد شد.

$$\frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot \frac{1}{\text{s}}$$

(۴) یکای ثابت سرعت این واکنش خواهد بود.

۷۶- درباره‌ی تعادل مقابل چند مورد صحیح است؟ $\text{CaCO}_3(\text{s}) \rightleftharpoons \text{CaO}(\text{s}) + \text{CO}_2(\text{g})$

الف- در دمای 25°C ، واکنش رفت تقریباً انجام نمی‌شود.

ب- یک تعادل ناهمگن ۲ فازی است.

پ- با افزودن مقداری کلسیم کربنات به تعادل اولیه در دمای ثابت، سرعت واکنش رفت افزایش می‌یابد.

ت- یکای ثابت تعادل آن mol.L^{-1} است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

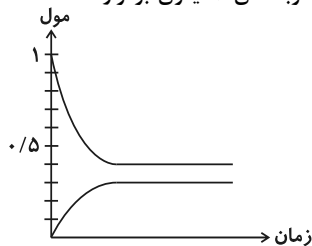


۷۷- در دمای 30°C در ظرفی به حجم ۲ لیتر، ۰/۵۱ گرم آمونیاک براساس واکنش $2\text{NH}_3(\text{g}) \rightarrow 3\text{H}_2(\text{g}) + \text{N}_2(\text{g})$ تجزیه می‌شود و پس از برقراری تعادل، ۰/۰۶ گرم گاز هیدروژن در ظرف وجود دارد. ثابت تعادل واکنش چند $\text{mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$ است؟

($\text{H} = 1, \text{N} = 14 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۱) $7/5 \times 10^{-5}$ (۲) $6/75 \times 10^{-5}$ (۳) $7/5 \times 10^{-4}$ (۴) $6/75 \times 10^{-4}$

۷۸- با توجه به نمودار زیر، کدام گزینه برای تعادل گازی $2\text{NO}_2 \rightleftharpoons \text{N}_2\text{O}_4 + \text{q}$ که در دمای ثابت و در ظرف سرپسته‌ی ۲ لیتری برقرار شده است، نادرست می‌باشد؟



(۱) ثابت تعادل این واکنش در جهت برگشت در دمای مورد نظر تقریباً برابر $0/267 \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ است.

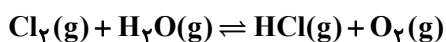
(۲) با افزایش دما شدت رنگ قهوه‌ای افزایش می‌یابد.

(۳) در مخلوط تعادلی، شمار مولکول‌های NO_2 ، دو برابر شمار مولکول‌های N_2O_4 است.

(۴) با افزایش فشار در دمای ثابت، شدت رنگ قهوه‌ای افزایش یافته و ثابت تعادل تغییری نمی‌کند.

۷۹- در ظرفی به حجم ۵۰۰ میلی‌لیتر در یک دمای معین نیم‌مول گاز کلر، ۱ مول بخار آب، ۱ مول هیدروژن کلرید و ۲ مول گاز اکسیژن وارد شده‌اند.

اگر $K = 10 \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ باشد، واکنش در کدام جهت پیش می‌رود و اگر مخلوط واکنش را پس از رسیدن به تعادل، به ظرفی که گنجایش آن چهار برابر گنجایش ظرف اول است انتقال دهیم، تعادل در چه جهتی پیش خواهد رفت؟ (واکنش موازنه نشده است.)



(۱) رفت، برگشت (۲) رفت، رفت (۳) برگشت، برگشت (۴) برگشت، رفت

۸۰- چه تعداد از موارد زیر درباره‌ی واکنش هابر درست است؟

• در شرایط بهینه از نظر دما و فشار و کاتالیزگر، بازده درصدی آن به ۲۸ درصد می‌رسد.

• یکای ثابت تعادل آن برابر است با عکس ثابت تعادل واکنش تجزیه‌ی N_2O_5

• در دمای اتاق از نظر ترمودینامیک و سینتیک مساعد است و به آسانی به تعادل می‌رسد.

• در دمای اتاق ثابت تعادل بزرگی دارد، اما در حضور کاتالیزگر، آمونیاک بیش تری تولید نمی‌شود.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۱- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اغلب داروها، ترکیب‌های شیمیایی با خاصیت اسیدی یا بازی هستند.

(۲) آرنیوس، باز را هر ماده‌ای تعریف کرد که در ساختار خود اتم هیدروژن متصل به اکسیژن دارد.

(۳) آلومینیم اکسید ($\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$) در آب انحلال‌پذیر نیست، ولی طی یک واکنش شیمیایی، هم در اسیدها و هم در بازها حل می‌شود.

(۴) اغلب میوه‌ها دارای اسیدند و pH آن‌ها کمتر از ۷ است.

۸۲- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

(آ) در واکنش خودیونش آب در دمای 25°C ، تعادل در سمت راست قرار دارد.

(ب) نظریه‌ی لوری - برونستد فقط در محلول‌های آبی کاربرد دارد.

(پ) ترکیب آتیون حاصل از حل شدن N_2O_5 در آب (A)، با کاتیون حاصل از حل شدن BaO در آب (B)، به صورت BA_2 می‌باشد.

(ت) ترتیب قدرت اسیدی چهار روبه‌رو در دمای اتاق به صورت $\text{HNO}_3 > \text{HF} > \text{HNO}_2 > \text{HCN}$ می‌باشد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۳- در محلولی به حجم $2/5 \text{L}$ ، ۰/۰۱ مول باز قوی $\text{X}(\text{OH})_n$ حل شده و به X^{n+} و OH^- تبدیل شده است. اگر pH محلول $11/9$ باشد،

مقدار n کدام است؟ ($\log 8 = 0/9$)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۴- اگر pH محلول باز ضعیف MOH که از حل کردن ۸۰ میلی‌گرم از آن در ۵ میلی‌لیتر آب به‌دست آمده است، در دمای 25°C درجه‌ی سانتی‌گراد برابر

$3/12$ باشد، درصد تفکیک یونی آن در این شرایط کدام است؟ (جرم مولی MOH برابر ۱۶۰ گرم بر مول است و از تغییر حجم محلول به هنگام

انحلال صرف نظر و $\log 2 = 0/3$ در نظر گرفته شود.)

(۱) ۲۰ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۵ (۴) ۵۰

۸۵- چند لیتر گاز هیدروژن کلرید را به ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید ۰/۱ مولار اضافه کنیم تا pH محلول $0/3$ واحد کاهش یابد؟ (حجم

مولی گازها را در این شرایط ۲۵ لیتر بر مول در نظر بگیرید، از افزایش حجم ناشی از انحلال گاز صرف نظر کنید و $\log 5 = 0/7$ در نظر گرفته شود.)

(۱) $1/25$ (۲) $0/125$ (۳) $2/5$ (۴) $0/25$



با توجه به گزینه‌ها دنباله یا صعودی است یا نزولی، از طرفی چون جمله اول آن برابر با $(a_1 = \frac{3}{4})$ و حد دنباله ۲ می‌باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت که جملات این دنباله در حال افزایش بوده و دنباله صعودی است.

۶- گزینه «۱»

دنباله را با استفاده از روابط تبدیل جمع به ضرب به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a_n = \cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}$$

$$= -2 \sin\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}\right)$$

حال داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{-2 \sin\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}\right)}_{\text{کراندار}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}\right)}_0 = 0$$

۷- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) \xrightarrow{\text{فرد}} - \lim_{x \rightarrow (2)^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} [-2x]f(x) = 4(-2) = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \xrightarrow{\text{فرد}} - \lim_{x \rightarrow (2)^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [-2x]f(x) = 3(1) = 3$$

$$\Rightarrow \text{مجموع حد چپ و راست} = -8 + 3 = -5$$

۸- گزینه «۱»

دنباله $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی و همگرا به $\frac{\pi}{4}$ است، لذا با مقادیر بیش‌تر از $\frac{\pi}{4}$ به $\frac{\pi}{4}$ میل می‌کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} f(x) = [1^+] - [1^-] = 1 - 0 = 1$$

۹- گزینه «۲»

از آنجایی که برای هر x که $|x| < \frac{\pi}{4}$ ، خواهیم داشت:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

پس $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ میل می‌کند، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0$$

به همین ترتیب $g(x) = \frac{x}{\sin x}$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ میل می‌کند، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = [1^+] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left[\frac{\sin x}{x} \right] + 2 \left[\frac{x}{\sin x} \right] \right) = 0 + 2 = 2$$

دیفرانسیل

۱- گزینه «۳»

چون به ازای هر عدد حقیقی و مثبت h نامساوی زیر برقرار است، داریم:

$$0 \leq \sqrt{a+1} + |2a-b| < h \Rightarrow \sqrt{a+1} + |2a-b| = 0$$

و چون $\sqrt{a+1}$ و $|2a-b|$ عبارات‌های نامنفی هستند، پس داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{a+1} = 0 \\ |2a-b| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a+b = -3$$

۲- گزینه «۲»

$$-3 < x < 5 \Rightarrow 2 < x+5 < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{x+5} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x+5} \right| < \frac{1}{2}$$

$$a < x < b \Rightarrow |x| < \max\{|a|, |b|\}$$

نتیجه:

۳- گزینه «۲»

چون جملات دنباله مثبت هستند، پس داریم:

$$k > 0$$

از طرفی دنباله نزولی است و داریم:

$$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \frac{ka_n}{2n+3} \leq a_n$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2n+3} \leq 1 \Rightarrow k \leq 2n+3$$

اگر $k \leq 2 \times 1 + 3$ باشد، نامساوی اخیر به ازای هر عدد طبیعی n برقرار خواهد بود. پس داریم:

$$0 < k \leq 5$$

۴- گزینه «۴»

ابتدا عدد همگرایی دنباله (L) را می‌یابیم:

$$a_n = \frac{2n+8}{2n+4}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+8}{2n+4} = \frac{2}{3}$$

فاصله نقاط دنباله $\{a_n\}$ از نقطه همگرایی آن (L) کم‌تر از 0.04 است، یعنی:

$$|a_n - L| < 0.04 \Rightarrow \left| \frac{2n+8}{2n+4} - \frac{2}{3} \right| < \frac{4}{100}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{6n+24-6n-8}{3(2n+4)} \right| < \frac{4}{100} \Rightarrow \left| \frac{16}{9n+12} \right| < \frac{4}{100}$$

چون $n \in \mathbb{N}$ داخل قدرمطلق همواره مثبت است بنابراین:

$$\frac{16}{9n+12} < \frac{4}{100} \Rightarrow 9n+12 > 400 \Rightarrow 9n > 388$$

$$\Rightarrow n > \frac{388}{9} = 43.11 \Rightarrow n \geq 44$$

پس کم‌ترین مقدار n_0 برابر ۴۴ است.

۵- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^n}{3+2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$

دنباله داده شده همگراست، پس کراندار نیز هست.



۱۰- گزینه «۲»

$$(n+2)^2 > n^2 + 4n \xrightarrow{\text{جذر}} n+2 > \sqrt{n^2 + 4n}$$

$$\Rightarrow 2 > \sqrt{n^2 + 4n} - n$$

دنباله $a_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$ به ۲ همگراست و با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ میل می کند. پس خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overset{\text{منفی}}{\text{sgn}(a_n - 2)} = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = -1$$

بنابراین باید دنباله b_n را طوری بگیریم که $b_n - 2 > 0$ و $b_n \rightarrow +\infty$ باشد. زیرا در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overset{\text{مثبت}}{\text{sgn}(b_n - 2)} = +1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = +1$$

$$b_n = 2 - \frac{1}{n+1} < 2$$

در گزینه ۱ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

در گزینه ۳ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -2$$

در گزینه ۴ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2, b_n = 2 + \frac{1}{2n+1} > 2$$

در گزینه ۲ داریم:

۱۱- گزینه «۱»

با توجه به شکل داریم:

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^-$$

$$\Rightarrow f(f(x)) \rightarrow -\infty \Rightarrow f(f(f(x))) \rightarrow (-1)^-$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} [f \circ f \circ f(x)] = [(-1)^-] = -2$$

۱۲- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \times \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = 2 \times 3 = 6$$

۱۳- گزینه «۱»

$$\begin{cases} t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + t) + \cos(4t + \pi)}{(4t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - \cos 4t}{16t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta t}{2} \sin \frac{3t}{2}}{16t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{\Delta}{2} \times \frac{3}{2} t^2}{16t^2} = \frac{15}{32}$$

۱۴- گزینه «۴»

عبارت درون تابع هوی باید را تعیین علامت می کنیم:

x	۲	۳
$(x-2)^2(x-3)$	-	+

با توجه به اینکه $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ داریم:

$$H((x-2)^2(x-3)) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$$

پس $H((x-2)^2(x-3))$ در $x=2$ ناپیوسته است بنابراین $f(x)$ فقط زمانیمی تواند در $x=2$ پیوسته باشد که به ازای آن $2x+a$ برابر صفر باشد.

$$2(2) + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

۱۵- گزینه «۲»

فرض کنیم $k \in \mathbb{Z}$ در این صورت:

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \frac{k+1}{k^2+1} \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \frac{(k-1)+1}{(k-1)^2+1} = \frac{k}{k^2-2k+2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{k+1}{k^2+1} = \frac{k}{k^2-2k+2}$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k^2 + 2k + k^2 - 2k + 2 = k^3 + k$$

$$\Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = 1, -2$$

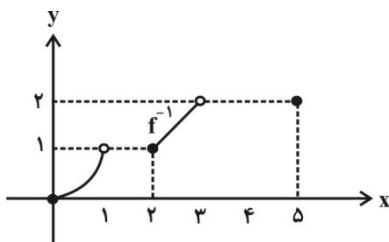
پس تابع، در دو نقطه صحیح $x=1$ و $x=-2$ پیوسته است.

۱۶- گزینه «۱»

ابتدا $f(x)$ را به صورت ساده تر نوشته و تابع وارون آن را تعیین می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & 0 \leq x < 1 \\ x+1, & 1 \leq x < 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 2 \leq x < 3 \\ 2, & x = 5 \end{cases}$$

ملاحظه می شود تابع f^{-1} روی دامنه اش پیوسته است و با توجه به نمودار صعودی اکید است.



۱۷- گزینه «۴»

با توجه به قضیه بولزانو اگر $f(0)f(1) < 0$ باشد تابع با ضابطهدر فاصله $(0, 1)$ حداقل یک ریشه دارد:

$$f(0) = 4, f(1) = a + 5$$

$$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow 4(a+5) < 0 \Rightarrow a < -5$$



۱۸- گزینه «۴»

هندسه تحلیلی

۲۱- گزینه «۳»

خط شامل $A = (-1, 2, 3)$ و $B = (1 + m, 0, 2)$ موازی \overline{BA} است و خط شامل B و $C = (m, -2, 1)$ موازی \overline{BC} ، در نتیجه باید داشته باشیم $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$.

داریم:

$$\begin{cases} \overline{BA} = (-2 - m, 2, 1) \\ \overline{BC} = (-1, -2, -1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = -(-2 - m) - 2 \times 2 - 1 \times 1 = 2 + m - 5$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

۲۲- گزینه «۲»

$A(0, 0, z)$ ، $D(1, 1, 0)$ بردار هادی از خط D ، $B(0, 0, 1)$ نقطه‌ای از خط D

$$\rightarrow \overline{AB} \times \mathbf{u} = (0, 0, 1 - z) \times (1, 1, 0) = (z - 1, 1 - z, 0)$$

$$d_1 = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{\sqrt{2(z-1)^2}}{\sqrt{2}}$$

$D'(1, 0, 0)$ بردار هادی خط D' ، $C(1, 0, 0)$ نقطه‌ای از خط D'

 $A(0, 0, z)$

$$\rightarrow \overline{AC} \times \mathbf{u}' = (1, 0, -z) \times (0, 1, 1) = (z, -1, 1)$$

$$d_2 = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}'|} = \frac{\sqrt{z^2 + 2}}{\sqrt{2}}$$

$$d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2(z-1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{z^2 + 2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow z^2 - 4z = 0, z = 0, z = 4$$

۲۳- گزینه «۲»

از آن جا که d به تمامی در صفحه P قرار دارد، پس بردار هادی خط d بر بردار نرمال صفحه P عمود است. همچنین هر نقطه دلخواه خط d در معادله صفحه P صدق می‌کند. داریم:

$$(2, -3, 1) \cdot (1, 1, m) = 0 \Rightarrow m = 1$$

پس $m + n = 3$ است.

$$(-1, 2, 1) \in P \Rightarrow -1 + 2 + 1 = n \Rightarrow n = 2$$

۲۴- گزینه «۴»

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = -1 \end{cases} \xrightarrow{x+z=3} \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

پس نقطه $P = (1, 0, 2)$ محل تلاقی سه صفحه مفروض است، که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OP = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \tan^{-1} x}{x} = 1 \\ a' &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \tan^{-1} x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \text{شیب‌های جانب مایل}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \tan^{-1} x - x) \\ &= \tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b' &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a'x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \tan^{-1} x - x) \\ &= \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$|ab' - ba'| = \left| 1 \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} \right) (1) \right| = |-\pi| = \pi$$

۱۹- گزینه «۳»

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x^2 + 4x + 1 - x^2 - 4x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{|x| + |x|} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ جانب افقی}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \text{ جانب افقی}$$

$$\text{فاصله دو جانب} = \left| \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| = 3$$

۲۰- گزینه «۴»

ابتدا توجه کنید که $x = 0$ و $x = -1$ ریشه‌های مخرج کسر هستند که معادله‌های جانب‌های قائم منحنی می‌باشند و هیچ کدام از دو خط به معادله‌های $x = 0$ و $x = -1$ ، محور x را با طول (-2) قطع نمی‌کنند. همچنین این منحنی جانب افقی ندارد.

$$\text{در معادله } y = \frac{2x^3 + ax^2 + 5}{x^2 + x}, \text{ درجه صورت کسر از درجه مخرج آن، یک}$$

واحد بیش‌تر است، پس برای پیدا کردن معادله جانب مایل، صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + ax^2 + 5 \quad | \quad x^2 + x \\ \underline{-2x^3 - 2x^2} \\ 2x + (a - 2) \\ \underline{-(a - 2)x^2 - (a - 2)x} \\ \vdots \end{array}$$

طبق فرض سؤال و با توجه به توضیحات بالا، خط به معادله $y = 2x + (a - 2)$ ، محور x را در نقطه‌ای به طول (-2) قطع می‌کند، پس مختصات نقطه $(-2, 0)$ در معادله آن صدق می‌کند، داریم:

$$0 = 2(-2) + (a - 2) \Rightarrow a = 6$$



گزینه ۲»

گزینه ۴»

در آغاز، باید معادله دایره را با دسته بندی پیدا کنیم. برای این منظور باید ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر باشند، داریم:

$$2a - 1 = -3 \Rightarrow a = -1$$

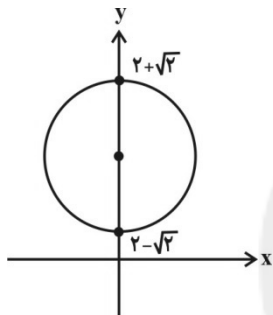
$$\rightarrow -3x^2 - 3y^2 + 12y - 1 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 - 3y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{+(-3)} x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$$

(معادله دایره‌ای به مرکز $(0, 2)$ و شعاع $\sqrt{2}$)

با توجه به شکل، روشن است که بیشترین فاصله نقاط دایره تا محور x ها، $2 + \sqrt{2}$ است.



گزینه ۳»

مرکز بیضی O' است، پس خواهیم داشت:

$$2c = FF' \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

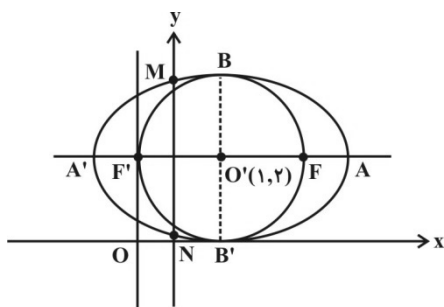
$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

معادله بیضی $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ و به ازای $x = 0$ داریم:

$$\frac{1}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \Rightarrow (y-2)^2 = \frac{14}{4} \Rightarrow y = 2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$MN = \left(2 + \frac{\sqrt{14}}{2}\right) - \left(2 - \frac{\sqrt{14}}{2}\right) = \sqrt{14}$$



$$x = y - 1 = z + 2 \Rightarrow A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_1 = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = (0, 1, 0)$$

$$\overline{AB} = (0, -1, 2), \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = (-1, 0, 1)$$

$$HH' = \frac{|\overline{AB} \cdot (\bar{u}_1 \times \bar{u}_2)|}{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|} = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

گزینه ۱»

چون رأس‌های کانونی دارای عرض یکسان هستند، پس بیضی از نوع افقی است.

$$(1) \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$A(\alpha + a, \beta) = (4 + 2\sqrt{3}, 0), A'(\alpha - a, \beta) = (4 - 2\sqrt{3}, 0)$$

$$\beta = 0, (\alpha + a = 4 + 2\sqrt{3}, \alpha - a = 4 - 2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \alpha = 4, a = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 12 - 4 = 8$$

$$(1) \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{12} + \frac{(y-0)^2}{8} = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3y^2 - 16x + 8 = 0$$

گزینه ۲»

با توجه به معادله دایره، مختصات مرکز و شعاع دایره عبارتند از:

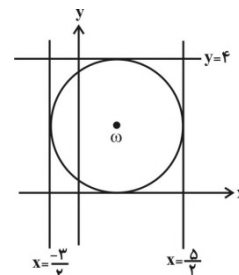
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مرکز: } \omega = \left(\frac{-(-1)}{2}, -\frac{a}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{a}{2} \right) \\ \text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{1 + a^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{|a|}{2} \end{array} \right.$$

چون مرکز دایره روی تمام قطرهای آن قرار دارد، پس مختصات ω باید در خط

$$y = 2x + 1 \text{ صدق کند.}$$

$$-\frac{a}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow \omega = \left(\frac{1}{2}, 2 \right), R = 2$$

مطابق شکل این دایره بر چهار خط مماس است:



$$x = \frac{5}{2}, x = -\frac{3}{2}, y = 4, y = 0 \text{ (محور } x \text{ ها)}$$



$$(ab)(ac)(bc) \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix}$$

سپس یک بار abc را در ستون اول و یک بار abc را در ستون دوم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ac & bc & 1 \\ ab & ac & 1 \\ bc & ab & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ترانهاده}} \begin{vmatrix} ac & ab & bc \\ bc & ac & ab \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

با جابه‌جایی سطر اول و سوم، حاصل دترمینان قرینه می‌شود.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix} = -D$$

گزینه ۴»

ماتریس دومی را D می‌نامیم و جای سطرهای دوم و سوم آن را با هم عوض می‌کنیم $|D|$ در -1 ضرب می‌شود.

$$|D| = -1 \times \begin{vmatrix} x & y-x & x-y \\ -x & y-x & 1 \\ x-1 & y & 1 \end{vmatrix}$$

عدد (-1) را در سطر دوم دترمینان D ضرب می‌کنیم.

$$|D| = \begin{vmatrix} x & y-x & x-y \\ x & x-y & -1 \\ x-1 & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{مجموع دو دترمینان} = \begin{vmatrix} x & x-y & y-x \\ x & x-y & -1 \\ x-1 & y & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y-x & x-y \\ x & x-y & -1 \\ x-1 & y & 1 \end{vmatrix}$$

سطرهای دوم و سوم دو دترمینان نظیر به نظیر با هم برابرند، بنابراین دو سطر مشترک را می‌نویسیم و سطرهای متفاوت را با هم جمع می‌کنیم.

$$= \begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ x & x-y & -1 \\ x-1 & y & 1 \end{vmatrix} = 2x(x-y+y) = 2x^2$$

گزینه ۳»

فرض کنیم ماتریسی باشد که از افزودن عدد k به درایه a_{11} در ماتریس $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ به دست می‌آید. در این صورت داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{همسازگی سطر سوم و}} A_{33} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4-3) = 7$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2+k & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ستون سوم}]{\text{همسازگی سطر دوم و}} A'_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2+k & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

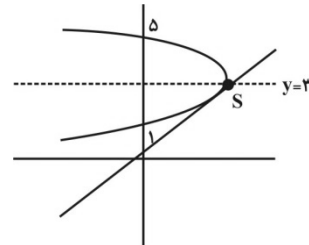
$$= -(10 + 5k + 3) = -5k - 13$$

$$\xrightarrow{\text{فرض سوال}} -5k - 13 + 5 = 7 \Rightarrow -5k = 15 \Rightarrow k = -3$$

گزینه ۱»

معادله محور تقارن سهمی $y = \frac{5+1}{2} = 3$ می‌باشد و با توجه به این که محور

تقارن از رأس سهمی می‌گذرد و با توجه به این که رأس سهمی روی خط $y = x$ است نتیجه می‌گیریم: $S = (3, 3)$ بنابراین معادله سهمی افقی به صورت زیر است.



$$(y-3)^2 = 4a(x-3) \xrightarrow{A(0, 3)} a = -\frac{1}{3}$$

$$2|a| = \frac{2}{3} = \text{فاصله کانون تا خط هادی}$$

گزینه ۱»

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 104 & 103 & 102 \\ 101 & 102 & a \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 103 & 102 \\ 101 & 102 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2+R_3 \Rightarrow R_2} x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 103 & 102 \\ 206 & 206 & a+103 \end{vmatrix} = 0$$

اگر $a+103 = 206$ باشد، در این صورت سطر سوم مضرب از سطر اول است و حاصل دترمینان همواره برابر صفر خواهد شد و معادله همواره برقرار خواهد بود.

$$a+103 = 206 \Rightarrow a = 103$$

گزینه ۴»

در حالت اول:

$$|A| = A_{11} + aA_{12} + bA_{13}$$

در حالت دوم:

$$|A| = A_{11} + (a+2)A_{12} + bA_{13}$$

پس میزان افزایش دترمینان برابر $2A_{12}$ است:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \times (-8) = 8 \Rightarrow 2A_{12} = 16$$

گزینه ۱»

اگر قرینه ستون دوم را با ستون اول جمع کنیم، داریم:

$$\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ac \end{vmatrix}$$

حال در سطر اول از ab ، در سطر دوم از bc و در سطر سوم از ac فاکتور می‌گیریم:



$$= \frac{6(6kk' + \Delta k + \Delta k' + 4) + 1}{=q} = 6q + 1$$

پس $6 \in [1]$ و در نتیجه $x = 1$. از این رو:

$$ax + b = a + b = 6(k + k' + 1) + 4$$

۴۲- گزینه «۴»

$$3 + \Delta b + 2\Delta a = b + 4a + 16b \Rightarrow 21a + 3 = 12b$$

$$\Rightarrow 7a + 1 = 4b$$

از آن جا که $0 \leq a, b \leq 3$. پس تنها جواب ممکن برای معادله فوق عبارت است از:

$$a = 1, b = 2$$

$$(aaa)_b = (111)_2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

۴۳- گزینه «۳»

با استفاده از نمایش اعداد در مبنای ۱۰ داریم:

$$\overline{ababab} = 10^5 a + 10^4 b + 10^3 a + 10^2 b + 10^1 a + 10^0 b$$

$$= 101010a + 10101b = 10101(10a + b)$$

عدد ۱۰۱۰۱ بر ۴۳ بخش پذیر نیست.

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$$

پس باید $10a + b$ یعنی ab به ۴۳ بخش پذیر باشد.

بنابراین ab می تواند ۴۳ یا ۸۶ شود و دو حالت دارد.

۴۴- گزینه «۳»

کوچک ترین عضو مثبت مجموعه، $(a, b) = 8$ است.

$$a + b = 104 \Rightarrow d(a' + b') = 104 \Rightarrow a' + b' = \frac{104}{8} = 13$$

باید ۱۳ را به مجموع دو عدد نسبت به هم اول تجزیه کنیم.

$$\begin{cases} a' = 6, 5, 4, 3, 2, 1 \\ b' = 7, 8, 9, 10, 11, 12 \end{cases}$$

چون $m = a'b'd$ و باید حداکثر باشد، لذا:

$$m = 6 \times 7 \times 8 = 336$$

۴۵- گزینه «۴»

$$q^2 - 13p = 16 \Leftrightarrow q^2 - 16 = 13p \Leftrightarrow (q-4)(q+4) = 13p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q-4=13 \\ q+4=p \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} q+4=13 \\ q-4=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=17 \\ p=21 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} q=9 \\ p=5 \end{cases}$$

پس هیچ دو جفت از اعداد اول با ویژگی گفته شده وجود ندارد.

۴۶- گزینه «۳»

تعداد راه های نشستن ۳ دانش آموز سال اول در ردیف اول و ۲ دانش آموز سال دوم در ردیف دوم به ترتیب برابر $P(5,2), P(5,3)$ است. حال ۳ دانش آموز سال سوم باید در ۵ صندلی باقیمانده قرار گیرند که تعداد راه های آن برابر است با $P(5,3)$ تعداد کل راه های موجود برابر است با:

$$P(5,3) \times P(5,2) \times P(5,3) = \frac{5!}{2!} \times \frac{5!}{3!} \times \frac{5!}{2!}$$

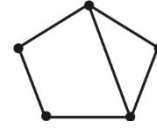
$$= 60 \times 20 \times 60 = 72000$$

ریاضیات گسسته

۳۶- گزینه «۲»

$$\frac{2q}{p} = 2/4 \Rightarrow \frac{2q}{5} = 2/4 \Rightarrow q = 6$$

و چون G همیلتنی است پس به شکل زیر می باشد.



۳۷- گزینه «۳»

$$\binom{p}{2} - 8 = \frac{5p}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} - 8 = \frac{5p}{2} \Rightarrow p^2 - p - 16 = 5p$$

$$\Rightarrow p^2 - 6p - 16 = 0 \Rightarrow (p-8)(p+2) = 0 \Rightarrow p = 8$$

مجموع درایه های ماتریس مجاورت K_8 برابر است با:

$$2q = 2 \binom{8}{2} = 2 \times 28 = 56$$

۳۸- گزینه «۲»

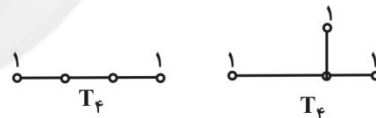
اگر p مرتبه و q اندازه درخت T باشد، آنگاه بنا بر فرض مسأله داریم:

$$p = 2(q-1) \Rightarrow p = 2q - 2$$

از طرفی در هر درخت شرط $q = p - 1$ برقرار است. لذا داریم:

$$\begin{cases} p = 2q - 2 \\ q = p - 1 \end{cases} \Rightarrow p = 2(p-1) - 2 \Rightarrow p = 4$$

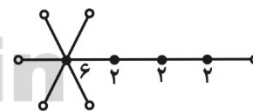
درخت مرتبه ۴ دو حالت دارد و حداکثر تعداد رئوس درجه ۱ آن برابر ۳ است.



۳۹- گزینه «۳»

کم ترین درجه ها عبارتند از:

۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۶: درجه ها



با توجه به شکل، ۶ رأس درجه ۱ داریم.

تعداد یالها برابر است با: $q = 9$.

۴۰- گزینه «۱»

$$a = bq + 8$$

$$a + k = b(q+1) + 2 \Rightarrow bq + 8 + k = bq + b + 2 \Rightarrow b = k + 6$$

$$r < b \Rightarrow 8 < k + 6 \Rightarrow k > 2$$

بنابراین k می تواند مقادیر ۳ تا ۹ را بپذیرد.

۴۱- گزینه «۱»

طبق فرض های سؤال داریم:

$$\begin{cases} a \in [5]_p, b \in [5]_p \Rightarrow a = 6k + 5, b = 6k' + 5 \\ \Rightarrow ab = (6k + 5)(6k' + 5) = 36kk' + 30k + 30k' + 25 \end{cases}$$



۴۷- گزینه «۲»

اگر جایگاه‌ها را از چپ به راست، شماره‌گذاری کنیم، a و b می‌توانند در جایگاه‌های ۱ و ۴ یا ۲ و ۵ و ۳ و ۶ قرار گیرند.

$$\begin{matrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \end{matrix}$$

از طرفی ۴ نفر دیگر می‌توانند به تعداد $4!$ ، جایگشت داشته باشند و همچنین جای a و b می‌تواند با هم عوض شود. پس کل راه‌های ممکن برابر است با:

$$4! \times 3 \times 2 = 144$$

۴۸- گزینه «۳»

مجموعه A را می‌توان به سه زیرمجموعه A_1 ، A_2 و A_3 چنان افزایش کرد که باقیمانده تقسیم اعداد هر کدام از این مجموعه‌ها بر ۳، به ترتیب برابر ۱، ۰ و ۲ باشد.

$$A_1 = \{1, 4, 7\}$$

$$A_2 = \{2, 5, 8\}$$

$$A_3 = \{3, 6, 9\}$$

برای این که مجموع سه عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ۲ حالت وجود دارد. در حالت اول، ۳ عدد را از یکی از زیرمجموعه‌ها انتخاب می‌کنیم و در حالت دوم، از هر زیرمجموعه، یک عدد انتخاب می‌کنیم.

$$\text{حالت اول: } \binom{3}{3} + \binom{3}{3} + \binom{3}{3} = 3$$

$$\text{حالت دوم: } \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 27$$

تعداد کل جواب‌ها برابر است با:

$$27 + 3 = 30$$

۴۹- گزینه «۱»

واژه olympiad دارای ۸ حرف است که ۳ حرف i ، a و o صدا دارند. تعداد جایگشت‌های مورد نظر، که در آن جایگاه‌های اول، سوم و پنجم را با حروف صدادار پر کنیم، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{matrix} ۳ & ۵ & ۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ \text{صدادار} & \text{صدادار} & \text{صدادار} & & & \end{matrix}$$

از طرفی می‌توان جایگاه اول، سوم و پنجم را با حروف بی‌صدا پر کرد. پس

تعداد کل جواب‌ها برابر است با:

$$2 \times 3! \times (\delta \times 4 \times 3) = 3! \times (\delta \times 4 \times 3 \times 2) = 3! \times 5! = 6 \times 5! = 6!$$

۵۰- گزینه «۲»

a باید ساکن یکی از طبقات ۴، ۵ و ۶ باشد، پس سه حالت برای سکونت a وجود دارد، ۴ نفر دیگر در ۴ واحد باقیمانده به $4!$ روش می‌توانند، قرار گیرند، پس کل حالات انجام این کار برابر است با:

$$3 \times 4! = 72$$

فیزیک

۵۱- گزینه «۳»

با توجه به این که گلوله در شرایط خلأ پرتاب شده است، زمان بالا رفتن و پایین آمدن آن برابر است. می‌دانیم در نقطه اوج سرعت گلوله برابر با صفر می‌شود، بنابراین طبق نمودار سرعت- زمان در لحظه $t = 2s$ گلوله در نقطه اوج قرار دارد و در نتیجه مدت زمان رفت و برگشت گلوله برابر با $4s = 2 \times 2$ خواهد شد.

۵۲- گزینه «۲»

طبق صورت سؤال، در لحظه برخورد دو گلوله به هم، اندازه سرعت آن‌ها با هم برابر است ولی چون جهت حرکت آن‌ها مخالف یکدیگر است، بنابراین سرعت آن‌ها قرینه یکدیگر می‌باشد. با انتخاب جهت مثبت به طرف بالا، داریم:

$$v_A = -gt + v_{oA} \Rightarrow v_A = -gt$$

$$v_B = -gt + v_{oB}$$

$$v_A = -v_B \Rightarrow -gt = gt - v_{oB}$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_{oB}}{2g} \Rightarrow t = \frac{v_{oB}}{20} \quad (1)$$

از طرفی در لحظه برخورد، مکان دو گلوله با هم یکسان است، بنابراین داریم:

$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oA}t + y_{oA} \Rightarrow y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 + 60$$

$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oB}t + y_{oB} \Rightarrow y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oB}t$$

$$\Rightarrow y_A = y_B \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + 60 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oB}t$$

$$\Rightarrow t = \frac{60}{v_{oB}} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{v_{oB}}{20} = \frac{60}{v_{oB}} \Rightarrow v_{oB} = 20\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow{(1)} t = \frac{v_{oB}}{20} = \frac{20\sqrt{3}}{20} \Rightarrow t = \sqrt{3}s$$

۵۳- گزینه «۱»

در لحظه‌ای که بردار سرعت جسم با راستای مثبت محور x زاویه 45° می‌سازد، اندازه مؤلفه‌های بردار سرعت در راستای محور x ها و محور y ها با یکدیگر برابر هستند، بنابراین ابتدا با مشتق‌گیری از معادله‌های حرکت جسم نسبت به زمان، معادله‌های سرعت آن‌را به دست می‌آوریم، سپس اندازه آن‌ها را مساوی قرار می‌دهیم تا لحظه مورد نظر را بیابیم و در نهایت فاصله متحرک تا مبدأ مختصات را در لحظه مورد نظر محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$x = t^2 + 3t \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = 2t + 3$$

$$y = \frac{1}{3}t^3 + 3 \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = t^2$$

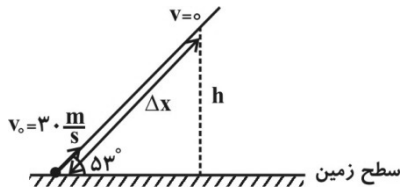
$$|v_y| = |v_x| \Rightarrow \begin{cases} t^2 = 2t + 3 \Rightarrow t = 3s \text{ ق. ق.}, t = -1s \text{ ق. ق.} \\ t^2 = -2t - 3 \Rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

$$t = 3s \Rightarrow \begin{cases} x = 3^2 + 3 \times 3 = 18m \\ y = \frac{1}{3} \times 3^3 + 3 = 12m \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} \Rightarrow d = 6\sqrt{13}m$$

گزینه «۲» - ۵۶

جسم روی سطح شیب دار حرکتی کندشونده و با شتاب ثابت دارد. اندازه شتاب ثابت حرکت جسم روی سطح شیب دار برابر است با:



$$\Rightarrow \sum F = ma \Rightarrow -mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma$$

$$\Rightarrow a = -g(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)$$

$$\Rightarrow a = -10 \times \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \right) \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2}$$

در نهایت با استفاده از رابطه مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، داریم:

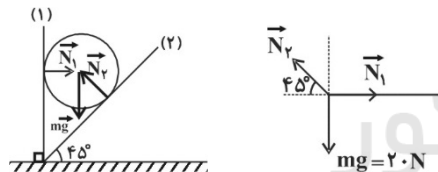
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 30^2 = 2 \times (-10) \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 45m$$

بنابراین بیشینه ارتفاعی که جسم از سطح زمین بالا می‌رود، برابر است با:

$$\sin \theta = \frac{h}{\Delta x} \Rightarrow \sin 37^\circ = \frac{h}{45} \Rightarrow h = 27m$$

گزینه «۲» - ۵۷

نیروهای وارد بر جسم را از یک نقطه رسم می‌کنیم و رابطه سینوس‌ها را برای آن به کار می‌بریم.



$$\frac{N_1}{\sin(90^\circ + 45^\circ)} = \frac{mg}{\sin(90^\circ + 45^\circ)}$$

$$\Rightarrow N_1 = mg \Rightarrow N_1 = 20N$$

گزینه «۲» - ۵۸

ابتدا اندازه نیروی کشش طناب را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \Rightarrow T = \frac{2 \times 4 \times 6}{4 + 6} \times 10 = 48N$$

حال باید نیروی کشش فنر را محاسبه کنیم. با توجه به این که قرقره ثابت است، می‌توان نوشت:

$$T' = 2T = 2 \times 48 = 96N$$

بنابراین افزایش طول فنر نسبت به حالت عادی آن برابر است با:

$$T' = k\Delta x \Rightarrow 96 = 480\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{96}{480} = \frac{1}{5}m = 20cm$$

گزینه «۱» - ۵۴

حرکت گلوله را در دو راستای افقی و قائم جداگانه بررسی می‌کنیم.
برای حرکت گلوله در راستای قائم داریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{y=-8.0m} -8.0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 4s$$

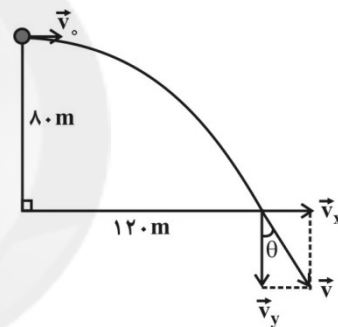
همچنین برای حرکت گلوله در راستای افقی داریم:

$$x = v_0 t \Rightarrow 12.0 = v_0 \times 4 \Rightarrow v_0 = 3.0 \frac{m}{s}$$

سرعت گلوله در راستای افقی ثابت است. برای سرعت گلوله در راستای قائم و در لحظه برخورد به زمین داریم:

$$v_y = -gt = -10 \times 4 = -40 \frac{m}{s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_x}{|v_y|} = \frac{3.0}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37^\circ$$



گزینه «۴» - ۵۵

در حرکت پرتابه، زمان اوج و زمان بازگشت پرتابه به سطح زمین به اندازه مؤلفه قائم سرعت اولیه بستگی دارد. با افزایش زاویه، مؤلفه قائم سرعت اولیه در نتیجه زمان بازگشت پرتابه به سطح زمین افزایش می‌یابد.

$$\text{ارتفاع اوج پرتابه از رابطه } h = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} \text{ به دست می‌آید، بنابراین}$$

با افزایش α ، ارتفاع اوج پرتابه زیاد می‌شود.

$$\text{برد یک پرتابه } (R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}) \text{ با تغییر زاویه می‌تواند تغییر کند (البته به}$$

شرطی که $90^\circ \neq \alpha_1 + \alpha_2$).

اندازه سرعت برخورد پرتابه به سطح زمین، فقط به ارتفاع پرتاب، شتاب گرانش زمین و اندازه سرعت اولیه پرتابه بستگی دارد و مستقل از زاویه پرتاب نسبت به سطح افق است.

$$v_y^2 - v_x^2 = 2gh$$



$$\Rightarrow 20 - 15 - m' \times 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 10m' \Rightarrow m' = 0.5 \text{ kg}$$

بنابراین مقداری که باید از جرم m_1 کاسته شود، برابر است با:

$$\Delta m = m_1 - m' = 3/5 - 0.5 = 3 \text{ kg}$$

۶۱- گزینه «۴»

با مشتق گرفتن از رابطه تکانه- زمان برای جسم در حال حرکت روی صفحه

XOY بر حسب زمان، معادله نیرو- زمان را به دست می آوریم:

$$\vec{P} = (t^2 - 2)\vec{i} + (2t^2 - 3t + 6)\vec{j}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \left(\frac{dP_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dP_y}{dt}\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (2t)\vec{i} + (4t - 3)\vec{j}$$

در لحظه $t = 2s$ اندازه بردار نیرو را به دست می آوریم:

$$\xrightarrow{t=2s} \vec{F} = (3 \times 2)\vec{i} + (4 \times 2 - 3)\vec{j} = 12\vec{i} + 5\vec{j} \text{ (N)}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ N}$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون، اندازه شتاب جسم را در این لحظه به دست

می آوریم:

$$F = ma \xrightarrow{m=0.5 \text{ kg}} 13 = 0.5a \Rightarrow a = \frac{13}{0.5} = 26 \text{ m/s}^2$$

۶۲- گزینه «۳»

با استفاده از رابطه اندازه شتاب مرکزگرا در حرکت دایره ای یکنواخت، داریم:

$$a = r\omega^2 = r \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{2T_1}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

همچنین با استفاده از تعریف انرژی جنبشی، می توان نوشت:

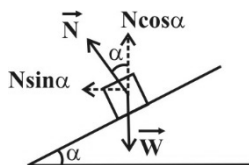
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2 \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{2T_1}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

۶۳- گزینه «۱»

مطابق شکل زیر، مؤلفه افقی نیروی عمود بر سطح، نیروی مرکزگرای لازم برای

حرکت دایره ای یکنواخت و بدون لغزش را تأمین می کند، بنابراین داریم:



$$\left. \begin{aligned} N \sin \alpha &= F \\ N \cos \alpha &= W \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{F}{W} = \frac{ma}{mg}$$

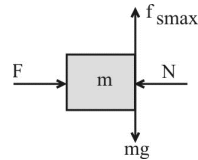
$$\Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g$$

۵۹- گزینه «۳»

برای این که جرم m بر روی جرم M نلغزد، باید $f_{s \max} \geq mg$ باشد. حداقل

مقدار نیروی \vec{F} زمانی به دست می آید که $f_{s \max} = mg$ باشد، بنابراین با

توجه به شکل زیر داریم:

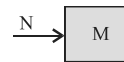


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow f_{s \max} = mg \xrightarrow{f_{s \max} = \mu_s N} \mu_s N = mg$$

$$\xrightarrow{\mu_s = 0.4} 0.4N = 4 \times 10 \Rightarrow N = 100 \text{ N}$$

واکنش نیروی \vec{N} به جسم M وارد شده و به آن شتاب می دهد، اندازه شتاب

این جسم برابر است با:



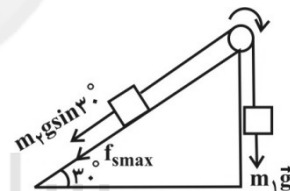
$$N = Ma \xrightarrow{M=20 \text{ kg}} 100 = 20a \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

چون جرم m بر روی جرم M نمی لغزد، هر دو با شتاب یکسان حرکت می کنند.

بنابراین می توان نوشت:

$$F = (m + M)a = (4 + 20) \times 5 \Rightarrow F = 120 \text{ N}$$

۶۰- گزینه «۱»



وقتی جرم m_1 در آستانه حرکت به طرف پایین قرار دارد، جرم m_2 در آستانه

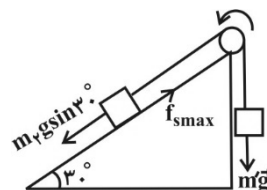
حرکت به طرف بالا قرار می گیرد، بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جرم

m_1 بیشینه مقدار خود را دارد و به طرف پایین است (نیروی اصطکاک بین جرم

m_1 و سطح شیب دار برابر با $f_{s \max}$ و به طرف پایین سطح است). داریم:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - m_2 g \sin \alpha - f_{s \max} = 0$$

$$\Rightarrow 3/5 \times 10 - 4 \times 10 \times \frac{1}{2} - f_{s \max} = 0 \Rightarrow f_{s \max} = 15 \text{ N}$$



اگر جرم m_1 را کاهش دهیم و به m' برسائیم، وقتی جرم m' (پس از کاستن

جرم m_1) در آستانه حرکت به طرف بالا قرار گیرد، $f_{s \max}$ وارد بر جرم

به طرف بالای سطح است و داریم:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g \sin 30^\circ - f_{s \max} - m' g = 0$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 100\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{50} \text{ s} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{1}{100} \text{ s}$$

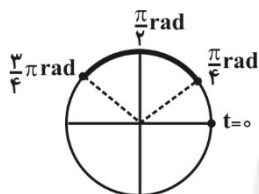
بنابراین نوسانگر در لحظه‌های صفر، $\frac{1}{100} \text{ s}$ و $\frac{1}{50} \text{ s}$ از مرکز نوسان عبور می‌کند و در نتیجه اندازه سرعت و انرژی جنبشی آن بیشینه خواهد بود.

۶۸- گزینه «۳»

ابتدا دوره حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\omega = 20\pi \Rightarrow 20\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0.1 \text{ s}$$

در لحظه $t = 0$ ، ذره از مبدأ مکان عبور می‌کند و انرژی جنبشی آن بیش‌تر از انرژی پتانسیل کشسانی‌اش است. اگر متحرک در فاز $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ قرار گیرد، انرژی جنبشی و پتانسیل‌اش برابر است و از فاز $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ تا $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ ، انرژی پتانسیل کشسانی آن بیش‌تر از انرژی جنبشی آن است.



این فازها مربوط به لحظه‌های $\frac{T}{8}$ تا $\frac{3T}{8}$ است، بنابراین داریم:

$$T = \frac{1}{10} \text{ s} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{80} \text{ s}, t_2 = \frac{3}{80} \text{ s}$$

۶۹- گزینه «۳»

در حرکت نوسانی ساده، بیشینه انرژی جنبشی برابر با انرژی مکانیکی نوسانگر است. از طرفی با استفاده از تعریف بُعد و انرژی جنبشی نوسانگر داریم:

$$x = A \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{x}{A} = \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) = E \cos^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{K}{E} = \cos^2(\omega t) \quad (2)$$

$$\frac{(1) \cdot (2)}{(1)} \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \frac{K}{E} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{E} = 1 \Rightarrow E = 40 \text{ J}$$

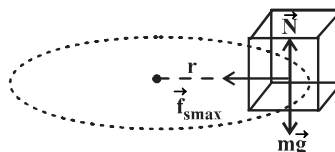
۷۰- گزینه «۴»

آونگ ساده وزنه کوچکی به جرم m است که با نخ سبکی به طول l از یک نقطه آویخته شده است. اگر زاویه انحراف وزنه از راستای قائم کوچک باشد (کم‌تر از ۶ درجه)، آنگاه حرکت نوسانی آونگ ساده به صورت یک حرکت هماهنگ ساده است و آن را آونگ ساده کم‌دامنه می‌نامیم. با استفاده از رابطه بسامد زاویه‌ای آونگ ساده کم‌دامنه و معادله داده شده، می‌توان نوشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{\Delta\pi}{3} = \sqrt{\frac{g}{l}} \xrightarrow{g = \pi^2 \frac{m}{s^2}} \frac{\Delta\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{l}} \Rightarrow l = 0.36 \text{ m} = 36 \text{ cm}$$

۶۴- گزینه «۲»

مطابق شکل زیر، بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای جسم را تأمین می‌کند، بنابراین می‌توان نوشت:



$$f_{s \max} = m\omega^2 r \Rightarrow \mu_s N = m\omega^2 r$$

و چون برآیند نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم برابر صفر است، $N = mg$ بوده و می‌توان نوشت:

$$\mu_s mg = m\omega^2 r \Rightarrow \omega^2 = \frac{\mu_s g}{r}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{0.3 \times 10}{0.03} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

۶۵- گزینه «۱»

با استفاده از قانون دوم نیوتون در حرکت دایره‌ای یکنواخت، داریم:

$$F = ma \Rightarrow G \frac{M_e m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \xrightarrow{g = \frac{GM_e}{R_e^2}} g \frac{R_e^2}{r} = v^2$$

$$\Rightarrow v = R_e \sqrt{\frac{g}{r}} = R_e \sqrt{\frac{g}{R_e + h}} = 64 \times 10^5 \times \sqrt{\frac{10}{(6400 + 3600) \times 10^3}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{64 \times 10^5}{10^3} \Rightarrow v = 6400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۶۶- گزینه «۲»

در مرکز نوسان، $a = 0$ و v بیشینه مقدار است، بنابراین:

$$0 = 100 - v_{\max}^2 \Rightarrow 100 = v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در دو انتهای مسیر نوسان، $v = 0$ و a بیشینه مقدار است، بنابراین:

$$a_{\max}^2 = 100 - 0 \Rightarrow a_{\max} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

حال با استفاده از تعریف سرعت و شتاب بیشینه در حرکت هماهنگ ساده، داریم:

$$a_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{A} \Rightarrow 10 = \frac{100}{A} \Rightarrow A = 10 \text{ m}$$

۶۷- گزینه «۴»

انرژی جنبشی نوسانگر هماهنگ ساده زمانی بیشینه می‌شود که نوسانگر از مرکز نوسان عبور کند، در این حالت اندازه سرعت نوسانگر بیشینه است. از طرفی

می‌دانیم نوسانگر در لحظه‌های صفر، T و $\frac{T}{2}$ از مرکز نوسان عبور می‌کند،

بنابراین داریم:

شیمی پیش دانشگاهی

۷۱- گزینه «۴»

دو شکل نشان داده شده در گزینه «۴» بیان کننده تأثیر سطح تماس واکنش دهنده‌ها بر سرعت واکنش می‌باشند.
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) کلسیم اکسید یک ترکیب جامد بوده و غلظت آن ثابت است و تغییر نمی‌کند.

(۲) اگر واکنشی گرماده و با افزایش بی‌نظمی همراه باشد، می‌توان گفت از لحاظ ترمودینامیکی مساعد بوده و امکان وقوع آن وجود دارد، اما در مورد سرعت آن نمی‌توان اظهار نظر کرد.

(۳) شکل (الف) نشان دهنده زنگ‌زدن آهن در هوای مرطوب است که به کندی انجام می‌شود و شکل (ب)، افزودن محلول سدیم کلرید به محلول نقره نیترات را نشان می‌دهد که باعث تشکیل سریع رسوب سفید رنگ نقره کلرید می‌شود.

۷۲- گزینه «۲»

چون غلظت ماده‌ی داده شده در حال افزایش است، پس باید یکی از فرآورده‌ها باشد و چون غلظت ماده‌ی جامد ثابت است، بنابراین اطلاعات داده شده مربوط به گاز اکسیژن است. از ثانیه ۱۵ به بعد واکنش متوقف شده پس بازه‌ی انجام واکنش از صفر تا ثانیه‌ی ۱۵ خواهد بود و تغییر غلظت نیز از صفر تا ۰/۳ مولار است.

$$\Delta n = \Delta[\text{O}_2] \times V = 0 / 3 \times 2 = 0 / 6 \text{ mol}$$

$$\Delta t = 15 \text{ s} = 0 / 25 \text{ min}$$

$$\bar{R}_{\text{O}_2} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{0 / 6}{0 / 25} = 2 / 4 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{\text{O}_2}}{\text{ضریب O}_2} = \frac{2 / 4}{3} = 0 / 8 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

۷۳- گزینه «۳»

واکنش بین N_2 و O_2 در دماهای بالای موتور خودروها انجام شده و گاز NO را تولید می‌کند. تشریح سایر گزینه‌ها:

(۱) نگهداری فرآورده‌های گوشتی به حالت منجمد، سرعت فاسد شدن آن‌ها را کاهش می‌دهد ولی به صفر نمی‌رساند.

(۲) در نظریه‌ی برخورد، ذره‌های واکنش دهنده به صورت گوی‌های سخت در نظر گرفته می‌شوند.

(۴) محلول بنفش رنگ پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق به کندی واکنش می‌دهد.

۷۴- گزینه «۳»

• درست - مثلاً نظریه‌ی حالت گذار علاوه بر فاز گازی برای فاز محلول نیز کاربرد دارد.

• نادرست - نظریه‌ی برخورد فقط برای واکنش‌های فاز گازی (نه محلول) کاربرد دارد.

• درست - با توجه به مقدار عددی E_a و E'_a مقدار عددی ΔH می‌تواند از E'_a بزرگ‌تر یا کوچک‌تر یا با آن مساوی باشد، ولی از آن جایی که واکنش گرماگیر است، همواره سطح انرژی فرآورده‌ها به حالت گذار نزدیک‌تر از سطح انرژی واکنش دهنده‌ها به حالت گذار است.

• نادرست - تنها در واکنش‌های برگشت پذیر امکان واکنش دادن فرآورده‌ها و تبدیل آن‌ها به واکنش دهنده‌ها وجود دارد.

• درست - تا زمانی که انرژی فعال سازی واکنش تأمین نشود این مخلوط در دمای اتاق قابل نگهداری است و انفجاری رخ نمی‌دهد.

۷۵- گزینه «۳»

از مقایسه‌ی آزمایش‌های ۱ و ۳ مرتبه واکنش نسبت به A برابر ۱ به دست می‌آید؛ زیرا با ۵ برابر شدن غلظت A و غلظت ثابت B سرعت واکنش نیز ۵ برابر شده است. همچنین از مقایسه‌ی آزمایش‌های ۱ و ۴ مرتبه‌ی واکنش نسبت به B را برابر ۲ به دست می‌آوریم، زیرا با ۲ برابر شدن غلظت B و غلظت ثابت A سرعت واکنش ۴ برابر شده است. پس رابطه‌ی سرعت این واکنش به صورت

$$R = k[A][B]^2$$

روبرو است:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: با توجه به مرتبه‌های مواد موجود در واکنش، تأثیر تغییرات غلظت B از A بر سرعت واکنش بیش‌تر است.

گزینه «۲»: از آن‌جا که مرتبه‌ها با ضرایب استوکیومتری یکسان نیستند، پس واکنش بنیادی نیست و با نظریه‌ی برخورد توجیه نمی‌شود.

گزینه «۳»: با کاهش غلظت‌های A و B به ترتیب به میزان ۸۰٪ و ۴۰٪، مقدار باقی مانده‌ی آن‌ها به ترتیب برابر ۲۰٪ و ۶۰٪ مقدار اولیه خواهد بود، پس قانون سرعت به این صورت خواهد شد:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= k[A][B]^2 \\ \Rightarrow R_1 &= k[0 / 6A][0 / 2B]^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{R_1}{R_0} = 0 / 024$$



$$K = \frac{[H_2]^3 \times [N_2]}{[NH_3]^2} = \frac{(15 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1})^3 \times (5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1})}{(5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1})^2}$$

$$= 6 / 75 \times 10^{-4} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$$

۷۸- گزینه «۳»

$$K_1 = \frac{[N_2O_4]}{[NO_2]^2} = \frac{(\frac{0}{2})}{(\frac{0}{2})^2} = 3 / 75 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \quad (1)$$

$$K_2 = \frac{[NO_2]^2}{[N_2O_4]} \approx 0 / 75 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

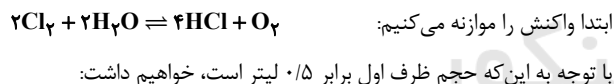
(۲) با افزایش دما و با جابه‌جایی تعادل به سمت چپ، شدت رنگ قهوه‌ای افزایش می‌یابد.

(۳) با توجه به غلظت‌های تعادلی } که برای NO_2 برابر $0/2$ می‌باشد
که برای N_2O_4 برابر $0/15$ می‌باشد

$$\Leftarrow \text{غلظت } NO_2 = \frac{4}{3} \text{ برابر غلظت } N_2O_4 \text{ است.}$$

(۴) درست است که تعادل به سمت راست جابه‌جا می‌شود، اما با افزایش فشار غلظت گونه‌ها افزایش می‌یابد، اما افزایش غلظت $[N_2O_4]$ بیش‌تر از افزایش غلظت $[NO_2]$ می‌باشد.

۷۹- گزینه «۴»



$$Q = \frac{(\frac{1}{0/5})^4 \times (\frac{2}{0/5})}{(\frac{0}{0/5})^2 \times (\frac{1}{0/5})^2} = 16$$

واکنش در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود. $Q > K \Rightarrow$

پس از برقراری تعادل اگر مخلوط واکنش را به ظرف بزرگ‌تر (چهار برابر ظرف اول) انتقال دهیم واکنش به سمت تولید مول‌گازی بیش‌تر یعنی به سمت فراورده‌ها پیش می‌رود.

۸۰- گزینه «۱»

مورد اول نادرست است: درصد مولی آمونیاک در مخلوط واکنش به 28% می‌رسد، نه بازده درصدی.

مورد دوم نادرست است: یکای ثابت تعادل آن $\text{mol}^{-2} \cdot \text{L}^2$ است ولی در مورد تجزیه‌ی N_2O_5 ، یکا $\text{mol}^3 \cdot \text{L}^{-3}$ است.

گزینه‌ی «۴»: مرتبه‌ی واکنش برابر ۳ است که با جای‌گذاری، یکای ثابت سرعت به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$s^{-1} \cdot (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})^{(1-3)} = \text{یکای ثابت سرعت واکنش}$$

$$= (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})^{(1-3)} \cdot s^{-1} = \text{mol}^{-2} \cdot \text{L}^2 \cdot s^{-1}$$

در صورتی که یکای ذکرشده در صورت سؤال به صورت $\text{mol}^2 \cdot \text{L}^{-2} \cdot s^{-1}$ است.

۷۶- گزینه «۲»

موارد «الف» و «ت» صحیح می‌باشند. تشریح موارد:

الف- در دمای 25°C مقدار عددی ثابت تعادل بسیار کوچک است و گویی در این دما واکنش رفت انجام نمی‌شود. (درست)

ب- این تعادل یک تعادل ناهمگن 3 فازی است. (نادرست)

پ- سرعت واکنش رفت به غلظت واکنش‌دهنده بستگی دارد، درحالی‌که غلظت مواد جامد تغییر نمی‌کند. پس افزودن و یا کاستن از مقدار کلسیم کربنات، هیچ تأثیری بر روی سرعت واکنش ندارد. (نادرست)

ت- تنها ماده‌ی شرکت‌کننده در عبارت ثابت تعادل، $CO_2(g)$ می‌باشد. بنابراین یکای ثابت تعادل آن $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ است. (درست)

۷۷- گزینه «۴»

مقدار مول آمونیاک و هیدروژن را به دست می‌آوریم:

$$? \text{ mol } NH_3 = 0 / 5 \text{ g } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} = 0 / 29 \text{ mol } NH_3$$

$$? \text{ mol } H_2 = 0 / 06 \text{ g } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} = 0 / 03 \text{ mol } H_2$$



	•	•	•	
مول اولیه	$0 / 29 \text{ mol}$	0	0	
مول تعادلی	$0 / 29 - 2x$	$3x$	x	
	$\Rightarrow 3x = 0 / 29 \text{ mol } H_2$	$\Rightarrow x = 0 / 01 \text{ mol}$		

$$NH_3 \text{ مول تعادلی} = 0 / 29 - 2x \xrightarrow{x=0/01} = 0 / 01 \text{ mol } NH_3$$

$$\xrightarrow{V=2L} [NH_3] = 5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$H_2 \text{ مول تعادلی} = 3x \xrightarrow{x=0/01} = 0 / 03 \text{ mol } H_2$$

$$\xrightarrow{V=2L} [H_2] = 15 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$N_2 \text{ مول تعادلی} = x \xrightarrow{x=0/01} = 0 / 01 \text{ mol } N_2$$

$$\xrightarrow{V=2L} [N_2] = 5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$



از آن جایی که این باز قوی و ظرفیت آن n است، باید غلظت OH^- موجود در این محلول n برابر غلظت باز باشد، بنابراین:

$$[\text{OH}^-] = n[\text{X}(\text{OH})_n]$$

$$8 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}} = n \times 4 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \Rightarrow n = 2$$

۸۴- گزینه «۱»

ابتدا به کمک pH محلول، غلظت OH^- را به دست می آوریم:

$$\text{pH} = 12/3 \Rightarrow \text{pOH} = 1/3 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-1/3} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

حال کافی است غلظت MOH را تعیین کنیم تا درجه یونش مشخص شود:

$$? \text{ molMOH} = 8 \cdot \text{mg} \times \frac{1 \text{ gMOH}}{100 \cdot \text{mg}} \times \frac{1 \text{ molMOH}}{16 \cdot \text{gMOH}}$$

$$= 5 \times 10^{-4} \text{ molMOH}$$

$$\Rightarrow [\text{MOH}] = \frac{5 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3}} = 0.1 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [\text{OH}^-] = [\text{MOH}] \times \alpha$$

$$\Rightarrow 0.5 = 0.1 \times \alpha \Rightarrow \alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha\% = 0.5 \times 100 = 50\%$$

۸۵- گزینه «۴»

ابتدا pH محلول اولیه KOH را تعیین می کنیم:

$$[\text{KOH}] = [\text{OH}^-] = 0.1 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \Rightarrow \text{pOH} = -\log 0.1 = 1$$

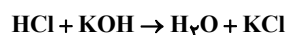
$$\Rightarrow \text{pH} = 14 - 1 = 13$$

چون pH ۰/۳ واحد کاهش می یابد، پس pH محلول ثانویه برابر ۱۲/۷ خواهد بود.

$$\text{pH}_{\text{ثانویه}} = 12/7 \Rightarrow \text{pOH} = 1/3 \Rightarrow [\text{OH}^-] = [\text{KOH}]$$

$$= 10^{-1/3} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به واکنش زیر، از مقدار مصرفی KOH ، به مقدار مصرفی HCl



می رسیم.

$$? \text{ LHCl} = \frac{(0.1 - 0.05) \text{ molKOH}}{\text{L}} \times 0.2 \text{ L} \times \frac{1 \text{ molHCl}}{1 \text{ molKOH}}$$

غلظت مصرفی KOH

$$\times \frac{25 \text{ LHCl}}{1 \text{ molHCl}} = 0.25 \text{ LHCl}$$

مورد سوم نادرست است: از نظر سینتیک مساعد نیست، به خاطر همین دما را بالا برده و از کاتالیزگر استفاده می کنند.
مورد چهارم درست است.

۸۱- گزینه «۲»

بررسی گزینه نادرست: آرنیوس، باز را ماده ای تعریف کرد که به هنگام حل شدن در آب یون هیدروکسید پدید می آورد ولی لزوماً در ساختار خود یون هیدروکسید ندارد. (مثل آمونیاک)

۸۲- گزینه «۲»

بررسی موارد:

(آ) نادرست - با توجه به ثابت تعادل واکنش خودیونش آب در دمای 25°C ($K_w = 1 \times 10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$)، می توان متوجه شد که تعادل در سمت چپ قرار دارد.

(ب) نادرست - نظریه آرنیوس تنها در حالت محلول، آن هم هنگامی قابل استفاده است که از آب به عنوان حلال استفاده شود. این مطلب در مورد نظریه لوری - برونستد صدق نمی کند.

(پ) درست

آنیون حاصل از حل شدن N_2O_5 در آب: $\text{A} = \text{NO}_3^-$



کاتیون حاصل از حل شدن BaO در آب: $\text{B} = \text{Ba}^{2+}$

(ت) درست - با توجه به مقدار ثابت های تعادل در صفحه های ۶۶ و ۶۷ کتاب ترتیب مذکور کاملاً صحیح است.

۸۳- گزینه «۲»

مولاریته محلول $\text{X}(\text{OH})_n$ برابر است با:

$$\text{باز } M = \frac{n}{V} = \frac{10^{-2} \text{ mol}}{2/5 \text{ L}} = 4 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = 11/9 \Rightarrow \text{pH} + \text{pOH} = 14 \Rightarrow 11/9 + \text{pOH} = 14 \Rightarrow \text{pOH} = 2/9$$

$$[\text{OH}^-] = 10^{-\text{pOH}} = 10^{-2/9} = 10^{0.9-3} = 10^{0.9} \times 10^{-3}$$

$$= 8 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

