

هندسه تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادله خط

الف معادله یک خط راست، به صورت کلی $y = ax + b$ یا $Ax + By + C = 0$ است. معادله اول را فرم تابعی خط و معادله دوم را فرم کانونیک خط می نامند.

ب شیب خط: هر خط با جهت مثبت محور x ها زاویه ای می سازد، تانژانت این زاویه را شیب خط می نامند. اگر خطی از دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ بگذرد، شیب آن خط از رابطه زیر به دست می آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B

پ شرط موازی بودن دو خط آن است که شیب های آن دو خط برابر باشند.

ت اگر معادله خطی به صورت $y = ax + b$ باشد، عدد a برابر با شیب خط و عدد b ، عرض نقطه برخورد، این خط با محور y هاست (b را عرض از مبدأ می نامند).

تست

کدام نقطه، روی خطی قرار دارد که شیب آن ۲ و عرض از مبدأ آن ۳- است؟

(۱) (۱, ۵) (۲) (۲, ۲) (۳) (۳, ۳) (۴) (۴, -۳, ۶)

پاسخ | گزینه ۳ اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، آن گاه $a = ۲$ و $b = -۳$ است؛ پس معادله خط به صورت $y = ۲x - ۳$ است. تنها نقطه گزینه ۳ در این معادله صدق می کند.

هندسهٔ تحلیلی و جبر: درس نامه

تست

اگر خطی از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(3, -4)$ بگذرد، عرض از مبدأ آن کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۵ (۴) -۳

پاسخ | گزینه ۱

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - 2}{3 - 1} = -3$$

پس معادلهٔ خط به صورت $y = -3x + b$ است. نقطه $A(1, 2)$ باید

$$2 = -3 \times 1 + b \Rightarrow b = 5$$

روی این خط صدق کند:

یعنی عرض از مبدأ خط، برابر با ۵ است.

شرط عمود بودن دو خط: اگر شیب‌های دو خط، برابر با m و m' باشند، آن‌گاه

وقتی $mm' = -1$ باشد، دو خط بر هم عمود هستند (یا $m' = -\frac{1}{m}$)، پس

می‌توان گفت:

«شرط آن که دو خط بر هم عمود باشند، آن است که حاصل ضرب

شیب‌های آن دو خط، برابر با -1 باشد یا شیب یکی از آن‌ها قرینه و

معکوس دیگری باشد.»

تست

اگر دو خط $y = 3x + 1$ و $y = ax + 1$ بر هم عمود باشند، مقدار a کدام

است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ | گزینه ۴

شیب خط اول، برابر با $+3$ است؛ پس برای این که

دو خط بر هم عمود باشند، باید شیب خط دوم قرینه و معکوس 3 ؛

یعنی $-\frac{1}{3}$ باشد، در نتیجه $a = -\frac{1}{3}$ است.



تست

اگر نقطه‌های $A(1,2)$ ، $B(3,4)$ و $C(4,1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع نظیر رأس C کدام است؟

$$y = -x + 2 \quad (1)$$

$$y = x - 3 \quad (2)$$

$$y = -x + 5 \quad (3)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 3 \quad (4)$$

پاسخ | گزینه ۳ ارتفاع نظیر رأس C بر ضلع AB عمود است و

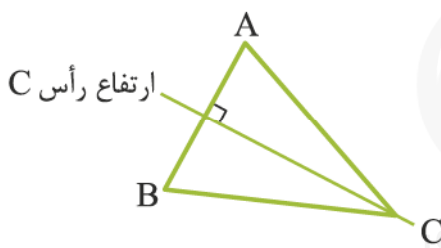
چون $m_{AB} = \frac{4-2}{3-1} = 1$ ؛ پس شیب ارتفاع نظیر رأس C برابر با -1

و معادله آن به صورت $y = -x + b$ است، چون ارتفاع نظیر رأس

C از نقطه C می‌گذرد، پس نقطه C باید در این معادله صدق کند:

$$1 = -4 + b \Rightarrow b = 5$$

پس معادله خط به صورت $y = -x + 5$ است.



فاصله دو نقطه (طول پاره خط)

اگر نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو سر پاره خط AB باشند، فاصله نقطه A از B (که همان طول پاره خط AB است) از رابطه زیر به

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad \text{دست می‌آید:}$$

تذکره: اگر دو نقطه دارای عرض‌های مساوی باشند، آن‌گاه

$$AB = |x_A - x_B| \quad \text{و اگر دو نقطه طول‌های مساوی داشته باشند،}$$

$$AB = |y_A - y_B| \quad \text{آن‌گاه}$$

هندسهٔ تحلیلی و جبر: درس‌نامه

تست

اگر نقاط $A(4,1)$ ، $B(-6,1)$ و $C(0/4, 5/8)$ سه رأس مثلث ABC باشند، محیط مثلث کدام است؟

$$۱۸ (۱) \quad ۲۴ (۲) \quad ۳۰ (۳) \quad ۳۶ (۴)$$

پاسخ | گزینه ۲ می‌دانیم محیط یک مثلث، مجموع طول سه ضلع آن است، پس باید اندازه هر ضلع مثلث را پیدا کنیم.

$$AB = |4 - (-6)| = 10 \Rightarrow \text{عرض‌های } A \text{ و } B \text{ برابرند}$$

$$AC = \sqrt{(4 - 0/4)^2 + (1 - 5/8)^2}$$

$$= \sqrt{3/6^2 + 4/8^2} = \sqrt{12/96 + 23/04} = \sqrt{36} = 6$$

$$BC = \sqrt{(0/4 - (-6))^2 + (5/8 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{6/4^2 + 4/8^2} = \sqrt{40/96 + 23/04} = \sqrt{64} = 8$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = 10 + 6 + 8 = 24$$

مختصات وسط یک پاره‌خط

اگر نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مختصات دو سر پاره‌خط AB باشند، آن‌گاه مختصات نقطهٔ M ، وسط پاره‌خط AB ، از رابطهٔ زیر به

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ دست می‌آید:}$$

تست

اگر $A(2,2)$ ، $B(3,-1)$ و $C(-1,1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ میانهٔ AM کدام است؟

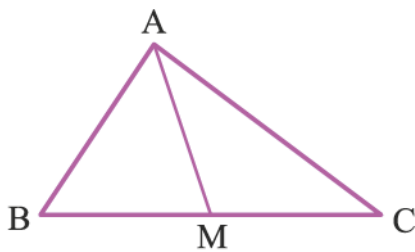
$$y = 3x - 4 \quad (۲)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1 \quad (۱)$$

$$y = 2x - 2 \quad (۴)$$

$$y = x \quad (۳)$$





پاسخ | گزینه ۴ میانه، پاره‌خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل به آن رأس وصل می‌کند، پس اگر AM میانه باشد، نقطه M وسط ضلع BC خواهد بود و داریم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \text{ وسط BC}$$

$$= \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-1 + 1}{2}\right) = (1, 0)$$

اکنون معادله AM را پیدا می‌کنیم:

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{0 - 2}{1 - 2} = 2$$

پس معادله AM به صورت $y = 2x + b$ است. چون نقطه A روی این خط است؛ پس باید مختصات نقطه A در معادله این خط صدق کند:

$$2 = 2 \times 2 + b \Rightarrow b = -2$$

در نتیجه معادله میانه AM به صورت $y = 2x - 2$ است.

◀ دو نقطه منطبق بر هم

اگر دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ بر هم منطبق باشند، باید طول‌های این دو نقطه با هم برابر باشند و عرض‌هایشان نیز برابر باشند؛ یعنی باید $x_A = x_B$ و $y_A = y_B$ باشد.

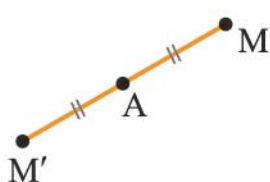
”تست“

مختصات قرینه نقطه $M(3, -2)$ نسبت به نقطه $A(1, 3)$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 8)$ (۲) $(3, 7)$ (۳) $(1, -8)$ (۴) $(7, 3)$

هندسه تحلیلی و جبر: درس نامه

پاسخ | گزینه ۱ اگر قرینه نقطه M نسبت به نقطه A ، نقطه $M'(a, b)$ باشد، آن گاه نقطه A وسط پاره خط MM' است.



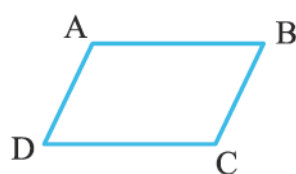
$$A\left(\frac{x_M + x_{M'}}{2}, \frac{y_M + y_{M'}}{2}\right) \\ = \left(\frac{3 + a}{2}, \frac{-2 + b}{2}\right)$$

چون $A(1, 3)$ است و این دو نقطه بر هم منطبق هستند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{3 + a}{2} = 1 \\ \frac{-2 + b}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 2 \\ -2 + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow M'(-1, 8)$$

شرط متوازی الاضلاع بودن یک چهارضلعی

اگر نقاط $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ ، $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ چهار رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، آن گاه باید داشته باشیم:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

تست

اگر نقاط $A(1, 2)$ ، $B(3, -1)$ ، $C(6, 0)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، طول پاره خط OD کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ | گزینه ۲ چون $ABCD$ متوازی الاضلاع است، پس داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 6 = 3 + x_D \\ 2 + 0 = -1 + y_D \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 3 \end{cases} \Rightarrow D(4, 3), OD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

◀ فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خطی به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{مقابل به دست می آید:}$$

تذکره: برای پیدا کردن فاصله یک نقطه از یک خط، باید معادله خط به صورت کانونیک (یعنی به صورت $ax + by + c = 0$) باشد.

» تست

فاصله نقطه $M(2, -3)$ از خط $y = \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ | گزینه ۴ ابتدا معادله خط را به صورت کانونیک تبدیل می کنیم.

$$y = \frac{5}{12}x + \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{در ۱۲ ضرب}} 12y = 5x + 6 \Rightarrow 5x - 12y + 6 = 0$$

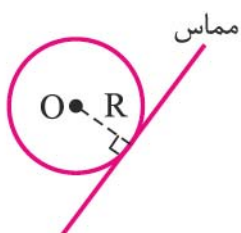
$$\text{فاصله } M \text{ از خط: } d = \frac{|5 \times 2 - 12 \times (-3) + 6|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|10 + 36 + 6|}{\sqrt{169}} = \frac{52}{13} = 4$$

» تست

اگر خط $4x - 3y = 4$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-2, 1)$ مماس باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

هندسه تحلیلی و جبر: درس نامه



پاسخ | گزینه ۳ می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خطی که بر آن مماس باشد، برابر با شعاع دایره است؛ پس باید فاصله نقطه O را از خط $4x - 3y - 4 = 0$ پیدا کنیم.

$$R = d = \frac{|4 \times (-2) - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8 - 3 - 4|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

◀ فاصله دو خط موازی

اگر دو خط با یکدیگر موازی باشند، برای پیدا کردن فاصله دو خط از یکدیگر، کافی است نقطه‌ای دلخواه روی یکی از دو خط اختیار کنیم و فاصله این نقطه را از خط دیگر به دست آوریم.

”مثال“

فاصله دو خط $3x + 4y - 1 = 0$ و $6x + 8y - 12 = 0$ چه قدر است؟

پاسخ | شیب خط اول $-\frac{3}{4}$ و شیب خط دوم $-\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$ است و چون شیب‌های این دو خط با هم برابرند، پس با هم موازی هستند. یک نقطه روی یکی از این دو خط، مثلاً روی خط $6x + 8y - 12 = 0$ پیدا می‌کنیم. برای این منظور به x عددی دلخواه؛ مثلاً $x = -2$ را نسبت می‌دهیم و y را پیدا می‌کنیم.

$$6 \times (-2) + 8y - 12 = 0 \Rightarrow 8y = 24 \Rightarrow y = 3$$

پس آن نقطه را $A(-2, 3)$ در نظر گرفته‌ایم. اکنون فاصله A را از خط $3x + 4y - 1 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|3 \times (-2) + 4 \times 3 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-6 + 12 - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فاصله A از خط اول



نکته اگر معادلات دو خط به صورت‌های $ax + by + c_1 = 0$ و $ax + by + c_2 = 0$ باشند، آن‌گاه فاصله این دو خط موازی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در مثال قبل، اگر طرفین خط دوم را بر ۲ تقسیم کنیم، خواهیم داشت $3x + 4y - 6 = 0$ و چون معادله خط اول نیز به صورت $3x + 4y - 1 = 0$ است، پس خواهیم داشت:

$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|-1 - (-6)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

تست

معادلات دو ضلع مربعی $5x - 12y = 9$ و $24y - 10x = 8$ هستند. مساحت مربع کدام است؟

۴ (۴)

سایت کنکور (۳) ۳

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ | گزینه ۱ طرفین معادله دوم را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا به صورت $12y - 5x = 4$ یا $5x - 12y + 4 = 0$ درآید. معادله خط اول نیز به صورت $5x - 12y - 9 = 0$ است. این دو خط موازی هستند (چرا؟)، پس فاصله آن‌ها از یکدیگر برابر است با:

$$d = \frac{|-9 - 4|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{13} = 1$$

فاصله دو ضلع مقابل هر مربع، برابر با طول ضلع مربع است؛ یعنی طول ضلع مربع برابر ۱ است و در نتیجه مساحت آن $1^2 = 1$ می‌باشد.

معادله و تابع درجه دوم

«یادآوری» یک معادله درجه دوم به صورت کلی $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن باید $a \neq 0$ باشد. در چنین معادله‌ای $\Delta = b^2 - 4ac$ است.

الف اگر $\Delta < 0$ ، معادله، ریشه حقیقی ندارد.

ب اگر $\Delta = 0$ ، معادله دارای یک ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ است.

پ اگر $\Delta > 0$ ، معادله دارای دو ریشه متمایز است که عبارت‌اند از:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

◀ حل معادلات با روش تغییر متغیر

گاهی با تغییر نام یک عبارت و جایگزین کردن آن در معادله، آن معادله به معادله ساده‌تری تبدیل می‌شود. پس از حل معادله جدید و به دست آوردن ریشه‌های آن، به جای متغیر جدید، مقدار اولیه را قرار می‌دهیم تا ریشه‌های معادله اصلی به دست آیند.

» مثال

معادله $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ را حل کنید.

پاسخ این معادله از درجه چهارم است ولی اگر فرض کنیم $x^2 = A$

باشد، آن‌گاه $x^4 = (x^2)^2 = A^2$ است و در نتیجه معادله به صورت

مقابل تبدیل می‌شود: $4A^2 - 5A + 1 = 0$

هرچند معادله درجه دوم فوق را با روش Δ نیز می‌توان حل نمود، اما

چون در این معادله مجموع ضرایب صفر است (یعنی $a + b + c = 0$)،

پس یک ریشه آن $A=1$ و ریشه دیگر $A=\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$ است. اما A برابر با x^2 بود، پس:

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1, \quad x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

یعنی معادله دارای چهار ریشه است که عبارتند از $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

تست

معادله $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

(۱) هیچ (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

پاسخ | گزینه ۲ اگر $x^2 = A$ باشد، آن گاه $x^4 = (x^2)^2 = A^2$ و

معادله به صورت $A^2 - 8A - 9 = 0$ تبدیل می‌شود. چون در این معادله $a+c=b$ است، پس یک ریشه آن $A=-1$ و دیگری

$$A = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{غیرممکن است.} \quad A = -\frac{c}{a} = 9$$

$$A = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

بنابراین معادله فقط دو ریشه حقیقی دارد.

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه مانند x_1 و x_2 باشد،

$$\text{آن گاه:} \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

هندسهٔ تحلیلی و جبر: درس‌نامه

”مثال“

بدون حل معادلهٔ $3x^2 + 5x + 1 = 0$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را پیدا کنید.

پاسخ چون $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 1 = 13 > 0$ ؛ پس معادله دارای دو

ریشهٔ حقیقی است و در نتیجه: $S = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$ مجموع دو ریشه

حاصل‌ضرب دو ریشه $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

”مثال“

بدون حل معادلهٔ $2x^2 + 5x + 1 = 0$ ، علامت ریشه‌های آن را مشخص کنید.

پاسخ چون $\Delta > 0$ است، پس حتماً دو ریشه دارد. از طرفی

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ است و چون

حاصل‌ضرب ریشه‌ها، عددی مثبت است، پس دو ریشه، هم‌علامت هستند (هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند). اما مجموع ریشه‌ها

$S = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2} < 0$ است و زمانی مجموع دو عدد هم‌علامت، عددی

منفی است که هر دو عدد منفی باشند، پس معادله دارای دو ریشهٔ منفی است.

یادآوری یک اتحاد فرعی: می‌دانیم $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ است و

چون $a + b$ ، مجموع a و b و هم‌چنین ab ، حاصل‌ضرب a و b است،

پس $a + b = S$ و $ab = P$ است و در نتیجه: $a^2 + b^2 = S^2 - 2P$



تست

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + 7x - 1 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل

$$A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{53}{2} \text{ (۱)} \quad 26 \text{ (۲)} \quad -\frac{53}{2} \text{ (۳)} \quad -26 \text{ (۴)}$$

پاسخ | گزینه ۳ واضح است که $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{2}$ و

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \text{ اکنون داریم:}$$

$$A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{49}{4} + 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{53}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-53}{2}$$

تشکیل معادله درجه‌دومی که مجموع و ضرب ریشه‌های آن معلوم است:

اگر مجموع ریشه‌های معادله درجه‌دومی برابر با S و حاصل ضرب آن‌ها

P باشد، آن معادله به صورت مقابل است: $x^2 - Sx + P = 0$

تست

ریشه‌های کدام‌یک از معادلات زیر، $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ هستند؟

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ (۱)} \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ (۲)}$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ (۳)} \quad x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ (۴)}$$

هندسهٔ تحلیلی و جبر: درس‌نامه

پاسخ | گزینه ۲ باید مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را پیدا کنیم.

$$S = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}}{2} = 3$$

$$P = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{2 \times 2} = \frac{3^2 - (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{9 - 5}{4} = 1$$

پس معادلهٔ موردنظر به صورت $x^2 - 3x + 1 = 0$ است.

تست

مساحت مستطیلی ۷۲ و محیط آن ۳۶ است. طول قطر مستطیل کدام است؟

$$8 \quad (1) \quad 3\sqrt{5} \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 6\sqrt{5} \quad (4)$$

پاسخ | گزینه ۴ اگر طول مستطیل L و عرض آن W باشد، آن‌گاه

$$L \cdot W = 72 \quad \text{مساحت مستطیل} \quad \text{داریم:}$$

$$2(L + W) = 36 \Rightarrow L + W = 18 \quad \text{محیط مستطیل}$$

پس مجموع طول و عرض $S = L + W = 18$ و حاصل ضرب آن‌ها

$$P = L \cdot W = 72 \quad \text{است، در نتیجه } L \text{ و } W \text{ ریشه‌های معادلهٔ}$$

$$x^2 - 18x + 72 = 0 \text{ هستند.}$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 72 = 324 - 288 = 36$$

$$L \text{ و } W = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 \pm 6}{2 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{18 + 6}{2} = 12 \\ W = \frac{18 - 6}{2} = 6 \end{cases}$$



با توجه به شکل، اگر قطر مستطیل d باشد، بنا بر رابطه فیثاغورس خواهیم

$$d^2 = L^2 + W^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180 = 36 \times 5 \quad \text{داشت:}$$

$$\Rightarrow d = 6\sqrt{5}$$

◀ سهمی و ویژگی‌های آن

تابع $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$ است، تابعی درجه دوم است. نمودار این تابع یک منحنی به نام سهمی است.

الف اگر $a > 0$ باشد، نمودار آن به شکل \cup است. این نمودار دارای نقطه

مینیمم است که طول آن $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض آن $y = -\frac{\Delta}{4a}$ است.

ب اگر $a < 0$ باشد، نمودار آن به شکل \cap است. این نمودار دارای نقطه

ماکسیمم است. طول این نقطه $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض آن $y = -\frac{\Delta}{4a}$ است.

پس در هر حال (چه a منفی و چه مثبت باشد) مختصات نقطه ماکسیمم یا

مینیمم به صورت $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است. نقطه ماکسیمم یا مینیمم سهمی

را رأس سهمی می‌نامند.

تذکره ۱ در تابع درجه دوم، منظور از ماکسیمم یا مینیمم، عرض آن

نقطه است و همواره برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

۲ هر تابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ دارای یک محور

تقارن است. معادله خط محور تقارن که از رأس سهمی می‌گذرد به

صورت $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد.

تست

تابع $y = f(x) = 6 - (x-1)^2$ در کدام گزینه صدق می کند؟

(۱) دارای ماکسیمم برابر ۱ است.

(۲) دارای مینیمم برابر ۱ است.

(۳) دارای ماکسیمم برابر ۶ است.

(۴) دارای مینیمم برابر ۶ است.

پاسخ | گزینهٔ ۳ روش اول:

$$f(x) = 6 - (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x + 5$$

چون $a = -1 < 0$ ، پس تابع دارای ماکسیمم است. از طرفی:

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 24$$

$$f(x) \text{ ماکسیمم تابع} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-24}{4 \times (-1)} = \frac{-24}{-4} = 6$$

پس تابع دارای ماکسیمم برابر ۶ است.

روش دوم: $-(x-1)^2 \leq 0$ در منفی ضرب می کنیم، پس جهت عوض می شود.

$$\frac{6 \text{ واحد به طرفین اضافه می کنیم}}{\rightarrow} 6 - (x-1)^2 \leq 6 \Rightarrow f(x) \leq 6$$

پس بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر با ۶ است.

مثال

می خواهیم با نرده ای به طول ۲۰۰ متر، زمینی را به شکل مستطیل در یک طرف رودخانه محصور کنیم (در طرف رودخانه، نرده کشیده نمی شود). بیشترین مساحت این مستطیل را پیدا کنید.

پاسخ | اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y بگیریم، آن گاه طول





نرده‌ای که زمین را محدود کرده است، برابر با $x + 2y$ است. چون طول نرده ۲۰۰ متر است، پس:

$$x + 2y = 200 \quad (1)$$

مساحت زمین محصورشده برابر $S = xy$ است و می‌خواهیم بیشترین مقدار ممکن باشد. از رابطه (۱) مقدار y را برحسب x پیدا

$$2y = 200 - x \Rightarrow y = \frac{200 - x}{2} \Rightarrow y = 100 - \frac{1}{2}x$$

می‌کنیم.

$$S = xy = x(100 - \frac{1}{2}x) \Rightarrow S = -\frac{1}{2}x^2 + 100x$$

در نتیجه:

این یک تابع درجه دوم است که در آن $a = -\frac{1}{2}$ ، $b = 100$ و $c = 0$ است. چون a منفی است، پس دارای ماکسیمم است و داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \times (-\frac{1}{2}) \times 0 = 100^2$$

$$S_{\text{بیشترین مقدار}} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{100^2}{4 \times (-\frac{1}{2})} = -\frac{10000}{-2} = 5000$$

◀ صف‌های تابع درجه دوم

اگر نمودار تابع درجه دومی، محور x ها را در دو نقطه قطع کند، طول‌های این دو نقطه را صف‌های تابع درجه دوم می‌نامند (یعنی عرض‌های این نقاط، صفر هستند).

اگر نمودار تابع درجه دوم، محور x ها را قطع نکند، آن تابع دارای صفر نیست و اگر نمودار تابع درجه دوم بر محور x ها مماس باشد، آن تابع فقط دارای یک صفر است (ریشه مضاعف دارد).

هندسهٔ تحلیلی و جبر: درس‌نامه

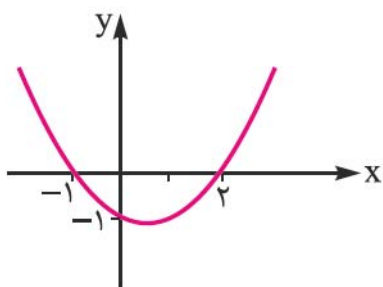
در واقع صفرهای تابع درجه‌دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ در صورت وجود، همان ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ هستند.

◀ عرض از مبدأ تابع درجه‌دوم

هر تابع درجه‌دوم مانند $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در یک نقطه قطع می‌کند؛ عرض این نقطه را اصطلاحاً عرض از مبدأ تابع درجه‌دوم می‌نامند.

چون طول هر نقطه که روی محور عرض‌ها باشد برابر صفر است، پس اگر $x = 0$ باشد، عرض آن خط $y = c$ است؛ یعنی عرض از مبدأ تابع درجه‌دوم، همان c است.

”مثال“



اگر نمودار تابع درجه‌دومی به صورت مقابل باشد، معادلهٔ آن را پیدا کنید.

پاسخ فرض کنیم معادلهٔ تابع درجه‌دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد. با توجه به نمودار، عرض از مبدأ تابع $y = -1$ است، پس $c = -1$.

تابع محور x ها را در دو نقطه با طول‌های -1 و 2 قطع می‌کند که همان صفرهای تابع یا ریشه‌های معادله هستند؛ پس:

$$S = 2 + (-1) = 1 \quad \text{و} \quad P = 2 \times (-1) = -2$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -a \quad (1)$$

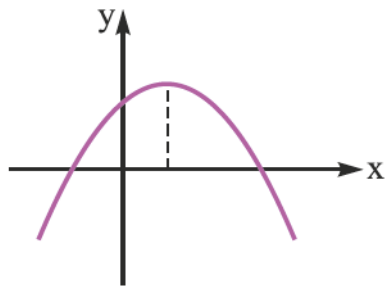


$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow -2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{c=-1} -2 = \frac{-1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

از (۱) نتیجه می‌شود $b = -\frac{1}{2}$ ؛ پس معادله تابع درجه دوم به صورت $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ است.

تست

اگر نمودار تابع درجه دومی به شکل زیر باشد، علامت‌های a ، b و c در



کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۱) $a < 0$ ، $b < 0$ و $c > 0$

(۲) $a > 0$ ، $b > 0$ و $c > 0$

(۳) $a < 0$ ، $b < 0$ و $c < 0$

(۴) $a < 0$ ، $b > 0$ و $c > 0$

پاسخ | گزینه ۴ چون تابع دارای ماکسیمم است، پس $a < 0$.

با توجه به نمودار تابع، مشخص می‌شود که تابع محور y ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است، پس عرض از مبدأ آن مثبت است؛ یعنی $c > 0$ است.

از نمودار واضح است که طول نقطه ماکسیمم، مثبت است؛ پس $-\frac{b}{2a} > 0$ یا $\frac{b}{2a} < 0$ است و چون a منفی است، پس b باید مثبت

باشد؛ یعنی $b > 0$.

پرسش‌های تستی

۱- خطی که از نقطه $A(3, 2)$ می‌گذرد و بر خط $3x + 2y = 5$ عمود باشد، از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(2, 0)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $(1, 1)$

۲- اگر $A(3, 2)$ ، $B(3, 5)$ و $C(3, 1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانه AM کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۱ (۴) $2\sqrt{2}$

۳- فاصله نقطه $A(3, -2)$ از خط $y = 2x + 2$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $5\sqrt{2}$

۴- اگر مرکز دایره‌ای $O(3, 2)$ و شعاع آن ۳ و دایره بر خط $3x + 4y + a = 0$ مماس باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) فقط ۲ (۲) فقط ۳۲
(۳) فقط ۱۷ (۴) ۲ یا ۳۲

۵- اگر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع و $A(1, 2)$ و $B(2, -6)$ و $C(3, -1)$ باشد، آن‌گاه مجموع طول و عرض نقطه D کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۵ (۳) ۴- (۴) ۸-

۶- اگر حاصل جمع دو عدد حقیقی برابر با ۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۳ باشد، عدد کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) $\frac{8 - \sqrt{71}}{2}$ (۲) $\frac{9 - \sqrt{69}}{2}$
(۳) $\frac{8 + \sqrt{71}}{2}$ (۴) $\frac{9 + \sqrt{69}}{2}$

هندسهٔ تحلیلی و جبر: تست

۷- اگر معادلهٔ محور تقارن یک سهمی $x=1$ و عرض از مبدأ آن ۳ و یکی از صفرهای آن ۳ باشد، معادلهٔ سهمی کدام است؟

$$y = -x^2 + 2x + 1 \quad (2) \qquad y = x^2 - 2x + 3 \quad (1)$$

$$y = x^2 - 2x + 1 \quad (4) \qquad y = -x^2 + 2x + 3 \quad (3)$$

۸- کدام گزینه دربارهٔ تابع $y = 2x^2 + 3x + 1$ درست است؟

(۱) دارای مینیمی برابر $-\frac{17}{8}$ است.

(۲) معادلهٔ محور تقارن آن $x = -\frac{3}{2}$ است.

(۳) صفرهای آن ۱ و ۳ هستند.

(۴) دارای مینیمی برابر $-\frac{1}{8}$ است.

۹- معادلهٔ $\frac{3}{x} + \frac{12}{x^2 - 9} = \frac{2}{x - 3}$ دارای چند ریشهٔ حقیقی است؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۱۰- جذر دو برابر عددی از خود آن عدد $1/5$ واحد کم‌تر است. آن عدد کدام است؟

(۱) $2/5$ (۲) $3/5$ (۳) $4/5$ (۴) $0/5$



پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینه «۳» خط $3x + 2y = 5$ به صورت $2y = -3x + 5$ یا $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ است. شیب این خط $-\frac{3}{2}$ است، پس شیب خطی که بر آن عمود است برابر با $\frac{2}{3}$ است، پس معادله خط عمود به صورت $y = \frac{2}{3}x + b$ می‌باشد. نقطه $A(3, 2)$ باید روی این خط باشد، پس باید مختصات آن در معادله خط صدق کند.

$$2 = \frac{2}{3} \times 3 + b \Rightarrow 2 = 2 + b \Rightarrow b = 0$$

در نتیجه معادله خط به صورت $y = \frac{2}{3}x$ است و تنها نقطه گزینه «۳» در معادله این خط صدق می‌کند و روی آن قرار دارد.

۲- گزینه «۳» نقطه M وسط پاره خط BC است، پس:

$$M\left(\frac{3+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (3, 3)$$

چون طول‌های دو نقطه A و M برابرند، پس داریم:

$$AM = |y_A - y_M| = |2 - 3| = 1$$

۳- گزینه «۱» معادله خط را به صورت $2x - y + 2 = 0$ تبدیل می‌کنیم (به فرم کانونیک):

$$d = \frac{|2 \times 3 - (-2) + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 + 2 + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

هندسه تحلیلی و جبر: پاسخنامه

۴- گزینه «۴» فاصله مرکز دایره از خطی که بر آن مماس باشد، برابر با شعاع دایره است.

$$\text{فاصله } O \text{ از خط} = R \Rightarrow \frac{|3 \times 3 + 4 \times 2 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|17 + a|}{5} = 3$$

$$\Rightarrow |17 + a| = 15 \Rightarrow 17 + a = \pm 15 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } -32$$

۵- گزینه «۱»

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 3 = 2 + x_D \Rightarrow x_D = 2 \\ 2 + (-1) = -6 + y_D \Rightarrow y_D = 7 \end{cases}$$

پس $x_D + y_D = 9$ است.

$$S = 9 \text{ و } P = 3 \Rightarrow x^2 - 9x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 81 - 12 = 69$$

$$x_1, x_2 = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{2}$$

ریشه کوچکتر $\frac{9 - \sqrt{69}}{2}$ است.

۷- گزینه «۳» اگر معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد،

$$\text{آن گاه: (۱) } 1 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow b = -2a$$

$$\text{عرض از مبدأ: (۲) } c = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 0 = a \times 3^2 + b \times 3 + c$$

$$\xrightarrow{(۲), (۱)} 0 \Rightarrow 9a + 3(-2a) + 3 = 0$$

$$3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(۱)} b = +2$$

$$\text{پس } y = -x^2 + 2x + 3$$



۸- گزینه «۴» چون ضریب x^2 مثبت است، پس مینیمم دارد:

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 \Rightarrow \text{مقدار مینیمم} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-1}{4 \times 2} = -\frac{1}{8}$$

۹- گزینه «۲» چون $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ ، پس مخرج مشترک

کسرها $x(x - 3)(x + 3)$ است. اگر طرفین معادله را در این عبارت ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$3(x - 3)(x + 3) + 12x = 2x(x + 3) \\ \Rightarrow 3x^2 - 27 + 12x = 2x^2 + 6x \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0 \Rightarrow x = -9 \text{ یا } 3$$

اما $x = 3$ لاقبل یکی از مخرجها را صفر می کند؛ پس قابل قبول نیست ولی $x = -9$ قابل قبول است، پس فقط یک ریشه دارد.

۱۰- گزینه «۳» اگر آن عدد x باشد، آن گاه جذر دو برابر آن $\sqrt{2x}$ است،

$$\sqrt{2x} = x - 1/5 \xrightarrow{\text{در ۲ ضرب می کنیم}} 2\sqrt{2x} = 2x - 3/5$$

اکنون دو طرف معادله را به توان ۲ می رسانیم.

$$2^2(2x) = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 8x = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 9 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

$$x = \frac{20 \pm 16}{2 \times 4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{20 + 16}{8} = \frac{9}{2} = 4/5 \\ x_2 = \frac{20 - 16}{8} = \frac{1}{2} = 0/5 \end{cases}$$

ریشه $x_2 = 0/5$ در معادله صدق نمی کند، پس $x = 4/5$.

تذکره: در این نوع مسائل که ریشه معادله یکی از گزینهها باشد، آزمایش

مستقیم گزینهها را سریع تر به جواب می رساند.