جزوه جمع‌بندی ریاضی دوازدهم

ویژه شب امتحان

شامل تمام تمرین‌ها و کار در کلاس‌های مهم کتاب درسی همراه با پاسخ تشریحی

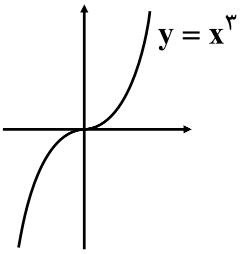
مهندس مجتبی لشینی

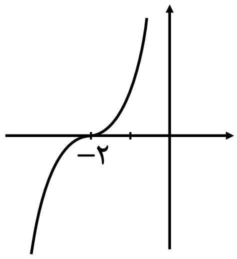
@riaziT

سوالات مربوط به رسم تابع درجه سوم

۱- با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^۳$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را مشخص کنید.

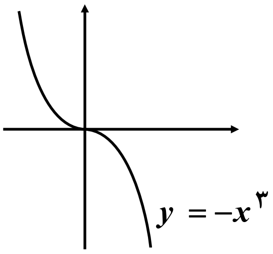
الف) $y = (x+۲)^۳$

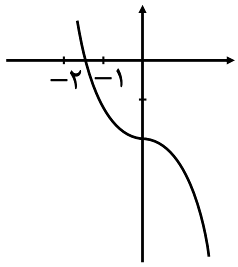




$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{R}$

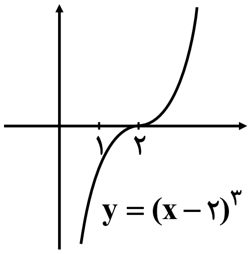
ب) $y = -x^۳ - ۲$

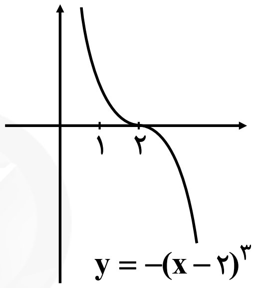




$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{R}$

پ) $y = -(x-۲)^۳$

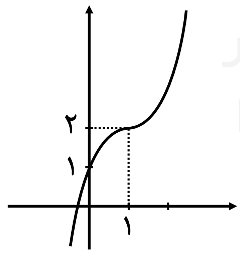




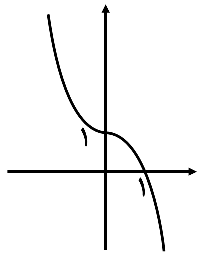
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = \mathbb{R}$

۲- به کمک نمودار تابع $y = x^۳$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

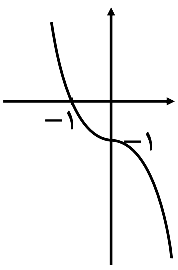
۱) $y = (x-۱)^۳ + ۲$



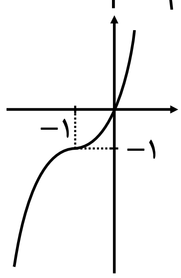
۲) $y = -x^۳ + ۱$



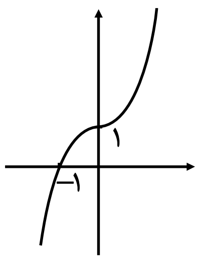
۳) $y = -x^۳ - ۱$



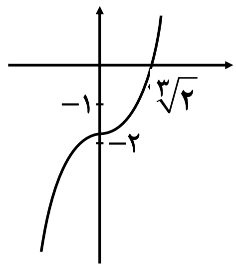
۴) $(x+۱)^۳ - ۱$



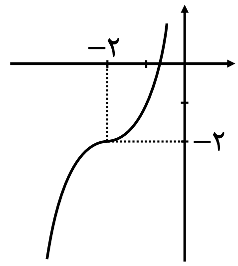
۵) $y = x^۳ + ۱$



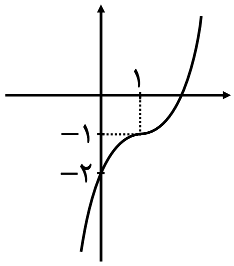
۶) $y = x^۳ - ۲$



۸) $y=(x+2)^3-2$

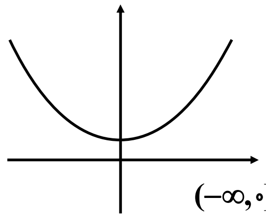


۷) $y=(x-1)^3-1$



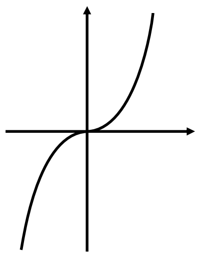
سوالات مربوط به صعودی و نزولی بودن

۱- مشخص کنید نوابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

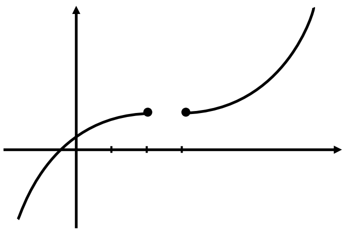


اکیداً نزولی $\to (-\infty,0]$

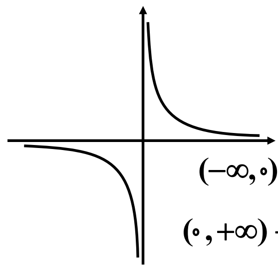
اکیداً صعودی $\to [0,+\infty)$



اکیداً صعودی

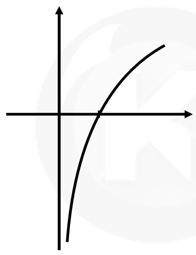


صعودی

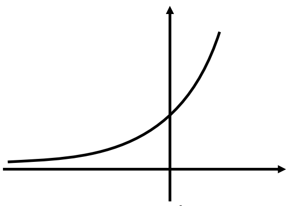


اکیداً نزولی $\to (-\infty,0)$

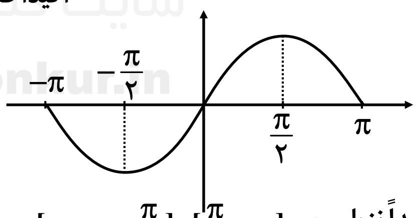
اکیداً نزولی $\to (0,+\infty)$



اکیداً صعودی

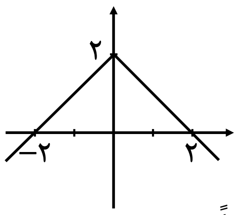


اکیداً صعودی



اکیداً نزولی $\to [-\pi,-\frac{\pi}{2}],[\frac{\pi}{2},\pi]$

اکیداً صعودی $\to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

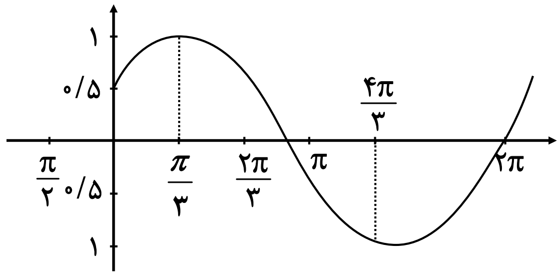


اکیداً صعودی $\to (-\infty,0]$

اکیداً نزولی $\to [0,+\infty)$

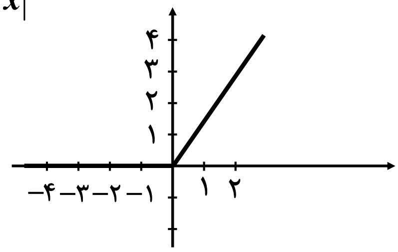
۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند؟

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$



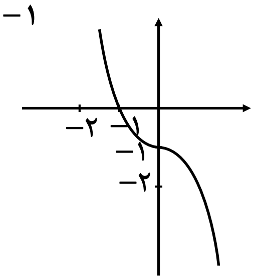
در بازه‌های $[\frac{4\pi}{3},2\pi]$ و $[0,\frac{\pi}{3}]$ صعودی و در بازه $[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ نزولی

ب) $g(x)=x+|x|$



در R صعودی، در $x \geq ۰$ اکیداً صعودی، در $x \leq ۰$ ثابت(در کل کتاب تابع صعودی است)

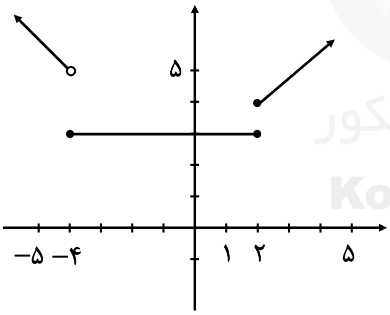
پ) $t(x)=-x^{۳}-۱$



اکیداً نزولی

۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید:

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & x<-۴ \\ ۳ & -۴\leq x<۲ \\ ۳x-۲ & x\geq ۲ \end{cases}$$

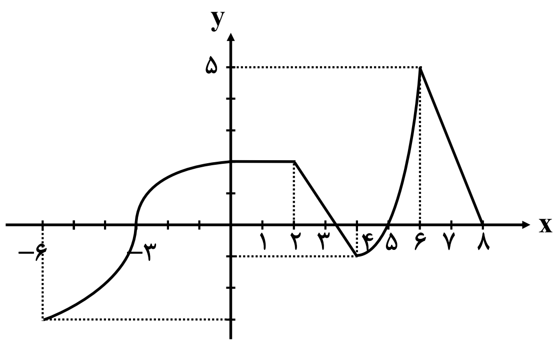


صعودی $x\in[۲,+\infty)$

نزولی $x\in(-\infty,-۴)$

ثابت $x\in[-۴,۲)$

۴- با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



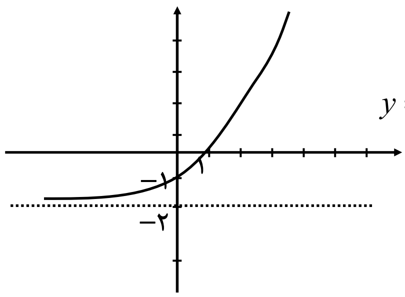
صعودی $x\in(-\infty,۰]\cup[۴,۶]$

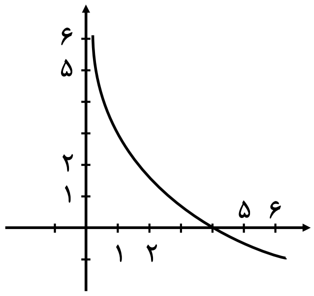
نزولی $x\in[۲,۴]\cup[۶,۸]$

ثابت $x\in[۰,۲]$

۵- تابع نمایی $y=۲^x-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_۲^x+۲$ را رسم کنید، یکنوایی آنها را مشخص کنید.

اکیداً صعودی $y=۲^x-۲$

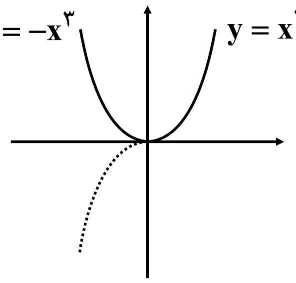




اکیداً نزولی $y=-\log_۲^x+۲$

۶- تابع $y=x^۲|x|$ در بازه‌ی $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

صفر



$$y=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۰ \\ -x^۳ & x<۰ \end{cases}$$

۷- تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً نزولی باشد.

اکیداً نزولی $\begin{cases} y=(\frac{۱}{۲})^x \\ y=-x^۳ \end{cases}$

$\begin{cases} y=۳^x \text{ اکیداً صعودی} \\ y=x^۳ \end{cases}$

سوالات مربوط به ترکیب توابع

۱- با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان بدست آورید.

الف) $fog(۱)= f(g(۱))=f(۰)=-۱$

ب) $fog(-۱)= f(g(-۱))=f(۰)=-۱$

پ) $gof(۰)= g(f(۰))=g(-۱)=۰$

ت) $gog(-۲)= g(g(-۲))=g(۳)=۸$

ث) $gof(۲)= g(g(۲))=g(۵)$ وجود ندارد

ج) $fof(۱)= f(f(۱))=f(۳)=۵$

x	$g(x)$
-۳	۸
-۲	۳
-۱	۰
۰	-۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

x	$f(x)$
-۳	-۷
-۲	-۵
-۱	-۳
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

۲- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را بدست آورید.

$$D_g=\mathbb{R}.D_f=[۱,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[۱,+\infty) \mid \sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\}=[۱,+\infty)$$

$$gof(x)=g(f(x))=۲f^۲(x)-۱=۲\times(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x^۲\geq ۱\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

۳- اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و fof را بدست آورید.

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱\},D_g=R-\{۰\}$$

$$D_{fog(x)}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R-\{۰\}\mid \frac{۳}{x}\in R-\{۱\}\}=R-\{۰,۳\}$$

$$fof(x)=f(f(x))=\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۲-x+۱}{x-۱}}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$$

$$D_{fof(x)}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_f\}=\{x\in R-\{۱\}\mid \frac{۲}{x-۲}\in R-\{۱\}\}=R-\{۱,۳\}$$

۴- اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع fog و gof را بدست آورید.

fog

$۵\rightarrow ۷\rightarrow ۸$

$۳\rightarrow ۵\rightarrow ۳$

$۷\rightarrow ۹\rightarrow ۸$

$۹\rightarrow ۱۱\rightarrow ۴$

$$fog=\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\}$$

gof

$۷\rightarrow ۸\rightarrow$ وجود ندارد

$۵\rightarrow ۳\rightarrow ۵$

$۹\rightarrow ۸\rightarrow$ وجود ندارد

$۱۱\rightarrow ۴\rightarrow$ وجود ندارد

$$gof=\{(۵,۵)\}$$

۵- در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان بدست آورید.

الف) $f(x)=x^۲-۵,g(x)=\sqrt{x+۶}$ $\qquad D_{fog},(fog)(x)$

$$D_f=R,D_g=[-۶,+\infty)\Rightarrow D_{fog}=[x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}\Rightarrow$$

$$D_{fog}=\{x\in[-۶,+\infty)\mid\sqrt{x+۶}\in R\}=[-۶,+\infty)$$

$$f(g(x))=(\sqrt{x+۶})^۲-۵=x+۱$$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x},g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$ $D_{fog},fog(x)$

$$D_f=(-\infty,\frac{۳}{۲}],D_g=R-\{\frac{۵}{۳}\}$$

$$D_{fog}=\{x\in R-\{\frac{۵}{۳}\}\mid \underbrace{\frac{۶}{۳x-۵}\in(-\infty,\frac{۳}{۲}]}_{I}\}=(-\infty,\frac{۵}{۳}]\cup[۳,+\infty)$$

$$I \rightarrow \frac{۶}{۳x-۵} \le \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۶}{۳x-۵} - \frac{۳}{۲} \le ۰ \Rightarrow \frac{۱۲-۹x+۱۵}{۲(۳x-۵)} \le ۰ \Rightarrow \frac{-۹x+۲۷}{۲(۳x-۵)} \le ۰$$

$\frac{۵}{۳}$		۳	
+		−	+
جواب			جواب

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{۳ - ۲(\frac{۶}{۳x-۵})} = \sqrt{\frac{۹x-۲۷}{۳x-۵}}$$

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲}, g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$ $\qquad D_{gof}, gof(x)$

$$D_f = [-۲,+\infty), D_g = x^۲-۱۶ \ge ۰ \rightarrow x^۲ \ge ۱۶ \rightarrow |x| \ge ۴ \rightarrow D_g = (-\infty,-۴] \cup [۴,+\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [-۲,+\infty) \mid \sqrt{x+۲} \in (-\infty,-۴] \cup [۴,+\infty)\} = [۱۴,+\infty)$$

$$I \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+۲} \le -۴ & \text{غیر قابل قبول} \\ \sqrt{x+۲} \ge ۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+۲ \ge ۱۶ \rightarrow x \ge ۱۴ \end{cases} \rightarrow x \in [۱۴,+\infty)$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{(\sqrt{x+۲})^۲ - ۱۶} = \sqrt{x-۱۴}$$

ت) $f(x)=\sin x, g(x)=\sqrt{x}$ $\qquad D_{gof}, gof(x)$

$$D_f = R, D_g = [۰,+\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in R \mid \underbrace{\sin x \in [۰,+\infty)}_{I}\} = [۲k\pi, ۲k\pi+\pi]$$

$$I \rightarrow \sin x \ge ۰ \xrightarrow{\text{ناحیه اول و دوم}} x \in [۲k\pi, ۲k\pi+\pi]$$

$$g(f(x)) = \sqrt{\sin x}$$

۶- اگر $f(g(x)) = ۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x+۴$، ضابطه $g(x)$ را بدست آورید.

برای اینکه ضابطه $g(x)$ را بدست آوریم، کافی است خودمان $f(f(x))$ را تشکیل دهیم و مساوی عبارت داده شده قرار دهیم

$$f(g(x)) = ۳x^۲-۶x+۱۴$$

$$f(x) = ۳x-۴$$

$$f(g(x)) = ۳g(x)-۴$$

$$\Rightarrow ۳g(x)-۴ = ۳x^۲-۶x+۱۴ \rightarrow ۳g(x) = ۳x^۲-۶x+۱۸ \rightarrow g(x) = x^۲-۲x+۶$$

۷- مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آنگاه $fog(۵)=-۲۵$

باید حاصل $fog(۵)$ را بدست آوریم:

$$f(g(۵)) = f(\sqrt{۲۱}) = (\sqrt{۲۱})^۲ - ۴ = ۱۷$$

$$g(۵) = \sqrt{۵^۲-۴} = \sqrt{۲۱}$$

مشاهده می‌کنیم $fog(۵)=۱۷$ می‌باشد پس قسمت الف نادرست است.

ب) برای دو تابع f و g که $f \ne g$ ، تساوی $(fog)_{(x)} = (gof)_{(x)}$ هیچ وقت برقرار نیست.

نادرست، اگر $f(x)=x$ و $g(x)=-x$ مشاهده می‌کنیم که $fog(x)=gof(x)$

$$f(g(x)) = (-x) = -x, g(f(x)) = -(x) = -x$$

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ آنگاه $(fog)(۴)=۵$

درست است

$$f(g(۴)) \xrightarrow{g(۴)=۷} f(۷) = ۵$$

۸- تابع $h(x)=(3x^2-4x+1)^5$ ترکیب کدام تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[5]{x}, g(x)=3x^2-4x+1$

$$f(g(x))=\sqrt[5]{3x^2-4x+1}\neq h(x)$$

$$g(f(x))=3(\sqrt[5]{x})^2-4(\sqrt[5]{x})+1\neq h(x)$$

ب) $f(x)=x^5, g(x)=3x^2-4x+1$

$$f(g(x))=(3x^2-4x+1)^5=h(x)$$

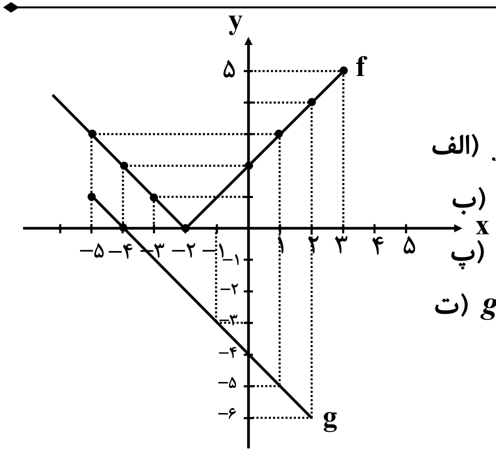
$$g(f(x))=3(x^5)^2-4x^5+1\neq h(x)$$

۹- هر یک از توابع زیر را به ورت ترکیب دو تابع بنویسید.

الف) $h(x)=\sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x} \\ g(x)=x^2+1 \end{cases} \to f(g(x))=\sqrt[3]{x^2+1}$

ب) $L(x)=\sqrt{x^2+5} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=x^2+5 \end{cases} \to f(g(x))=\sqrt{x^2+5}$

۱۰- با توجه به نموارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $fog(-1)=f(g(-1))=f(-3)=1$

ب) $gof(0)=g(f(0))=g(2)=-6$

پ) $fog(1)=f(g(1))=f(-5)=3$

ت) $gof(-1)=g(f(-1))=g(1)=-5$

۱۱- با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=2x-5, g(x)=x^2-3x+8, fog(x)=7$

$$f(g(x))=2(x^2-3x+8)-5=2x^2-6x+16-5=7\to 2x^2-6x+4=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{c}{a}=2 \end{cases}$$

ب) $f(x)=3x^2+x-1, g(x)=1-2x, gof(x)=-5$

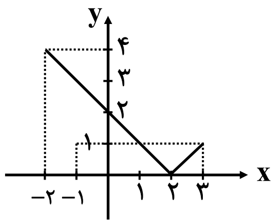
$$g(f(x))=1-2(3x^2+x-1)=-5\to -6x^2-2x+8=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

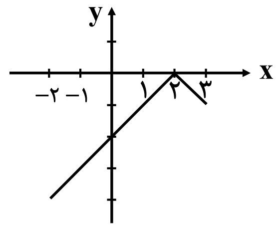
سوالات مربوط به تبدیل توابع

۱- نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازه $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.

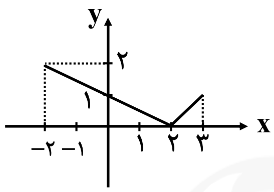
$f(x)=|x-۲|$



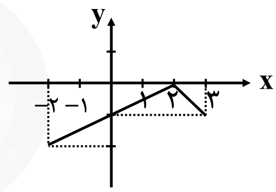
$g(x)=-|x-۲|$



$h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$

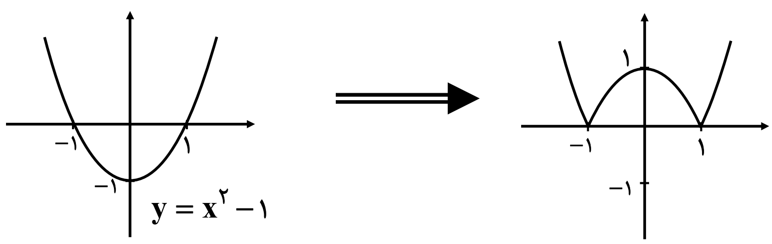


$k(x)=-\frac{۱}{۲}|۲-x|$

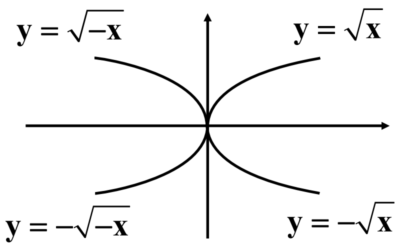


۲- نمودار تابع $y=|x^۲-۱|$ را رسم کنید:

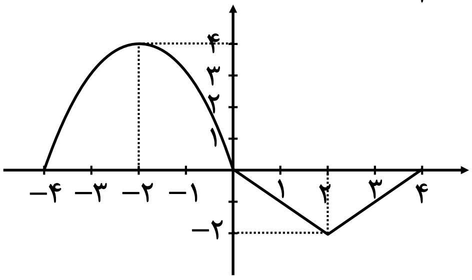
می‌دانیم اگر کل عبارت داخل قدر مطلق باشد، ابتدا نمودار را بدون در نظر گرفتن قدر مطلق رسم می‌کنیم و سپس قسمت پایین محور x ها به بالا منتقل می‌شود



۳- نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ ، $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار $y=\sqrt{x}$ را رسم کنید.



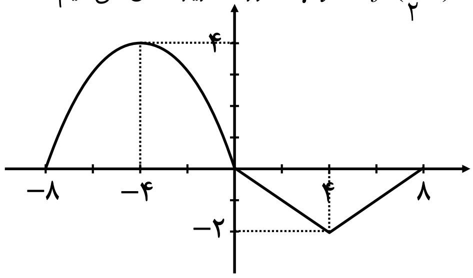
۴- نمودار تابع f با دامنه $[-۴,۴]$ به صورت زیر رسم شده‌است. نمودار تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید



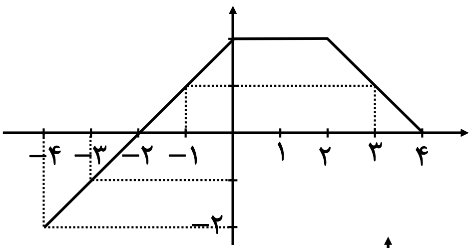
برای تعیین دامنه $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \Rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

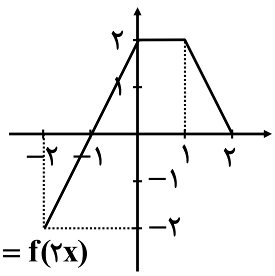
x	-۸	-۴	۰	۴	۸
$f(\frac{۱}{۲}x)$	۰	۴	۰	-۲	۰



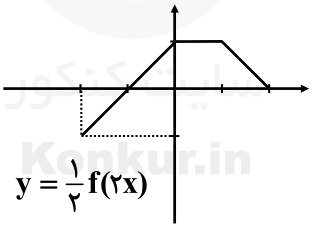
۵- با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار های خواسته شده را رسم کنید:



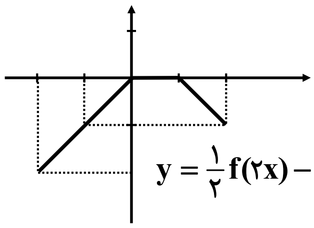
$$y = \frac{۱}{۲}f(۲x) - ۱$$



$y = f(۲x)$

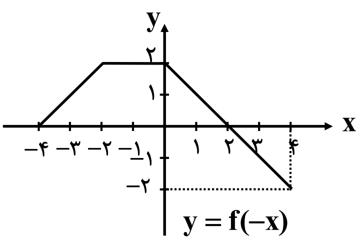


$y = \frac{۱}{۲}f(۲x)$

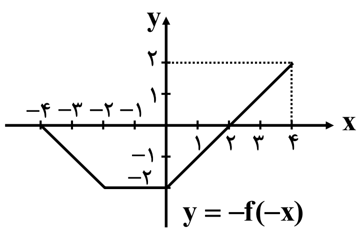


$y = \frac{۱}{۲}f(۲x) - ۱$

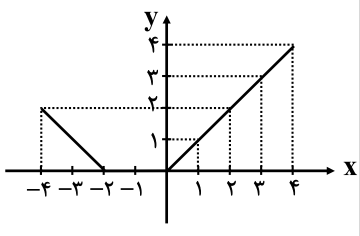
$$y = -f(-x) + ۲$$



$y = f(-x)$

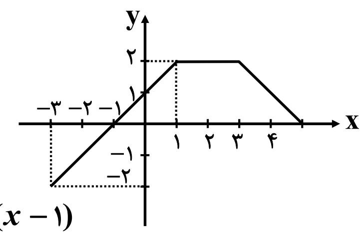


$y = -f(-x)$

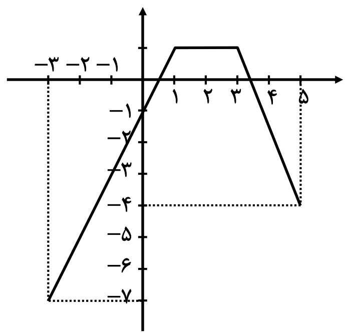


$y = -f(-x) + ۲$

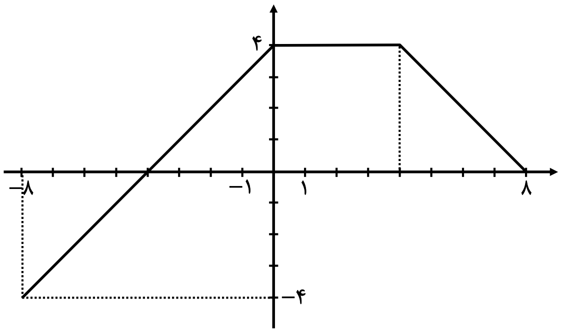
$$y = ۲f(x-۱) - ۳$$



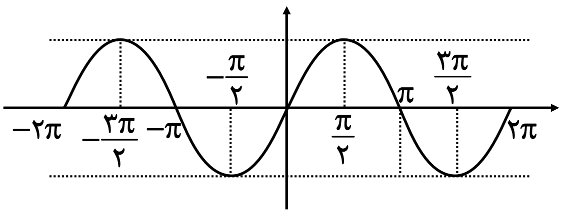
$y = f(x-۱)$



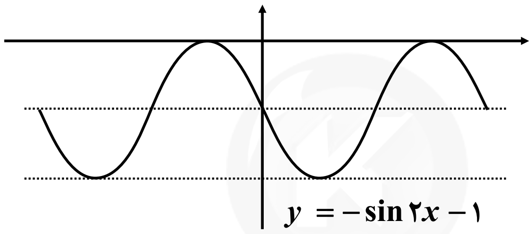
$y=2f(\frac{1}{2}x)$



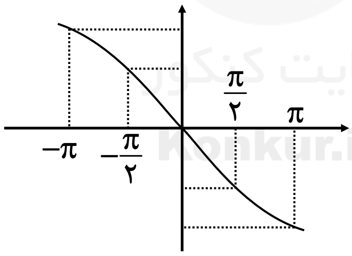
۶- توابع $y=-\sin 2x-1$ و $y=2\sin(-\frac{1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنید.



الف) $y=-\sin 2x-1$



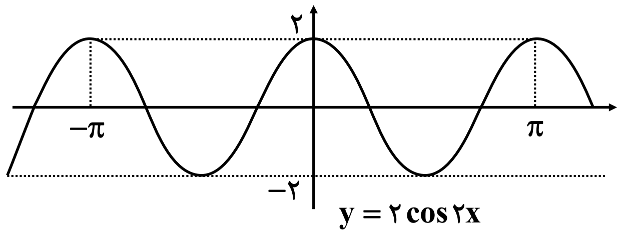
ب) $y=2\sin(-\frac{1}{3}x)$



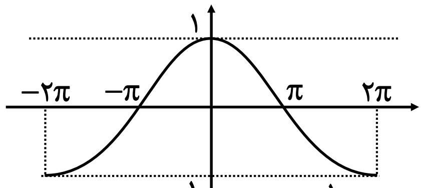
۷- با استفاده از نمودار $y=\cos x$ توابع زیر رسم شده‌است. ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$　　　ب) $y=۲\cos ۲x$

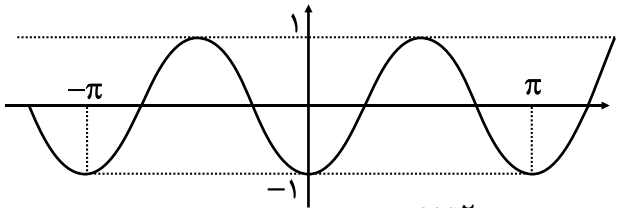
پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$　　　ت) $y=-\cos ۲x$



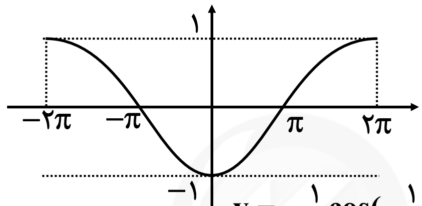
$y=۲\cos ۲x$



$y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$



$y=-\cos ۲x$



$y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$

سوالات مربوط به تابع وارون

۱- ضابطه‌ی تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

$D_f=\mathbb{R}\qquad R_f=\mathbb{R}$

$f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-\frac{۱}{۲}y+۳\to -\frac{۱}{۲}y=x-۳\to$

$y=-۲x+۶\to f^{-۱}(x)=-۲x+۶$

$D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}\qquad R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$

$D_g=[۲,+\infty)\quad R(g)=[۱,+\infty)$

$g(x)=۱+\sqrt{x-۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=۱+\sqrt{y-۲}\to\sqrt{y-۲}=x-۱\to$

$y-۲=(x-۱)^۲\to g^{-۱}(x)=(x-۱)^۲+۲$

$D_{g^{-۱}}=[۱,+\infty)\qquad R_{g^{-۱}}=[۲,+\infty)$

پ) $h(x)=x^۲+۱$

$D_h=[۰,+\infty)\quad R_h=[۱,+\infty)$

$h(x)=x^۲+۱\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=y^۲+۱\to y^۲=x-۱\to y=\sqrt{x-۱}\to h^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}$

$D_{h^{-۱}}=[۱,+\infty)\qquad R_{h^{-۱}}=[۰,+\infty)$

۲- ضابطه‌ی تابع وارون توابع یک به یک زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

$$f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\frac{-۸y+۳}{۲}\rightarrow -۸y=۲x-۳$$

$$\rightarrow y=\frac{-۲x+۳}{۸}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۲x+۳}{۸}$$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

$$g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-۵-\sqrt{۳y+۱}\rightarrow$$

$$-\sqrt{۳y+۱}=x+۵\rightarrow ۳y+۱=(x+۵)^۲\rightarrow ۳y=(x+۵)^۲-۱$$

$$\rightarrow y=\frac{(x+۵)^۲-۱}{۳}\rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{(x+۵)^۲-۱}{۳}$$

۳- در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$, $g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$

$$fog(x)=f(g(x))=-\frac{۷}{۲}(-\frac{۲x+۶}{۷})-۳=x+۳-۳=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{-۲(-\frac{۷}{۲}x-۳)+۶}{۷}=\frac{۷x-۶+۶}{۷}=x$$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}$, $g(x)=۸+x^۲ : x\leq ۰$

$$fog(x)=f(g(x))=-\sqrt{۸+x^۲-۸}=-\sqrt{x^۲}=-|x|\xrightarrow{x\leq ۰}-(-x)=x$$

ص $gof(x)=g(f(x))=۸+(-\sqrt{x-۸})^۲=۸+x-۸=x$

۴- رابطه‌ی بین درجه‌ی سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجه‌ی سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه‌ی فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را بدست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$$f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲\xrightarrow{y\leftrightarrow x}x=\frac{۹}{۵}y+۳۲\rightarrow ۵x=۹y+۱۶۰\rightarrow$$

$$۹y=۵x-۱۶۰\rightarrow y=\frac{۵}{۹}x-\frac{۱۶۰}{۹}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۵}{۹}x-\frac{۱۶۰}{۹}$$

میزان تغییرات درجه نسبت به فارنهایت را نشان می‌دهد.

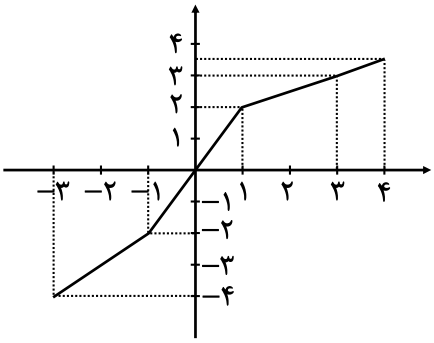
۵- توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه‌ی آنها توابعی یک به یک بسازید:

الف) $f(x)=|x|$ $x\geq ۰$

ب) $g(x)=-x^۲$ $x\leq ۰$

پ) $h(x)=(x+۲)^۲-۱$ $x\geq ۰$

۶- از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



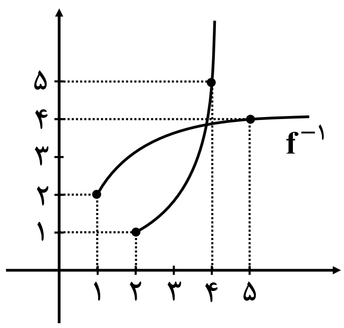
x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	-۳	-۱	۱	۳

۷- با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ ، یک تابع یک به یک بدست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$f(x)=x^{۲}-۴x+۵=(x-۲)^{۲}+۱$ $\qquad D_f=[۲,+\infty)$ $\qquad R_f=[۱,+\infty)$

$y=(x-۲)^{۲}+۱\rightarrow y-۱=(x-۲)^{۲}\rightarrow x-۲=\pm\sqrt{y-۱}\Rightarrow$

$x=\pm\sqrt{y-۱}+۲\xrightarrow{x\geq ۲} f^{-1}(x)=\sqrt{x-۱}+۲$ $\qquad D_{f^{-1}}=[۱,+\infty)$ $\qquad R_{f^{-1}}=[۲,+\infty)$



۸- اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$ ، مقادیر زیر را بدست آورید:

الف) $(fog)^{-1}(۵)$

$fog(x)=f(x^{۳})=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳\rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x^{۳}\rightarrow$

$x^{۳}=۸y+۲۴\rightarrow x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴}$

$(fog)^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$

$(fog)^{-1}(۵)=\sqrt[۳]{۸\times ۵+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

ب) $(f^{-1}of^{-1})(۶)=$ $f^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۶)}_{۸(۶+۳)=۷۲})=f^{-1}(۶)=۸(۷۲+۳)=۶۰۰$

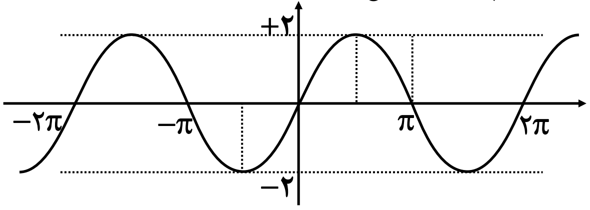
پ) $(g^{-1}of^{-1})(۵)=$ $g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۵)}_{۸(۵+۳)=۶۴})=g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

سوالات مربوط به دوره تناوب، ماکزیمم، مینیمم و تانژانت

فصل دوم

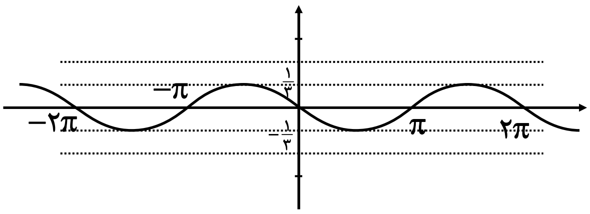
۱- در نمودارهای زیر مقدار ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب را مشخص کنید:

$y=۲\sin x$



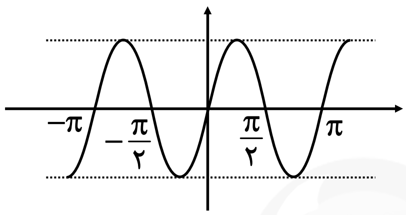
$\max=۲$ $\min=-۲$
$T=۲\pi$

$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$



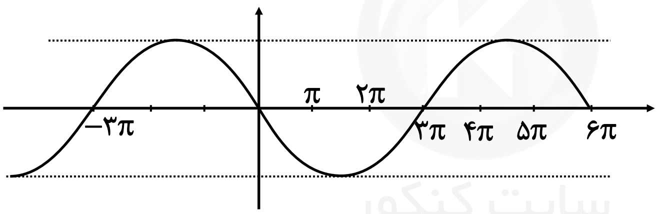
$\max=\frac{۱}{۳}$ $\min=-\frac{۱}{۳}$
$T=۲\pi$

$y=\sin(۲x)$



$\max=۱$ $\min=-۱$
$T=\pi$

$y=\sin(-\frac{x}{۳})$



$\max=۱$ $\min=-۱$
$T=۶\pi$

۲- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $y=۳\sin(۲x)-۲$

$\max=|۳|-۲=۱$ $\min=-|۳|-۲=-۵$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$

ب) $y=-\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

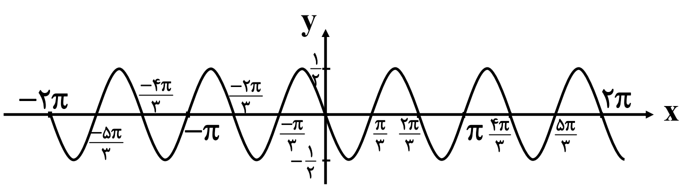
$\max=|-\frac{۱}{۴}|=\frac{۱}{۴}$ $\min=-|-\frac{۱}{۴}|=-\frac{۱}{۴}$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$

پ) $y=\pi\sin(-x)+۱$

$\max=|\pi|+۱=\pi+۱$ $\min=-|\pi|+۱=۱-\pi$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|-۱|}=۲\pi$

۳- هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه‌ای $f(x)=a\sin bx+c$ یا $f(x)=a\cos bx+c$ است. مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب و ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

الف)

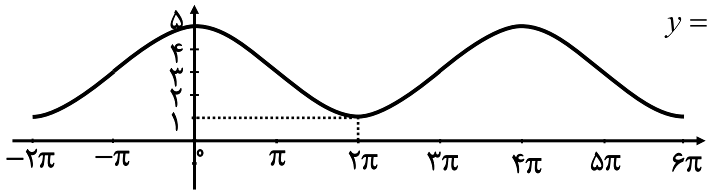


با توجه به نمودار ضابطه‌ی تابع به صورت زیر است:

$y = a\sin bx + c$

و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = ۰$ و $|a| = \frac{۱}{۲}$ و $|b| = ۳$ بدست می‌آید که در آن علامت a منفی و علامت b مثبت است. بنابراین داریم: $y = -\frac{۱}{۲}\sin ۳x$

ب)



با توجه به نمودار، ضابطه‌ی تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره‌ی تناوب برابر ۴π است. بنابراین $c = ۳$ و $|b| = \frac{۱}{۲}$ و $|a| = ۲$. لذا $a = ۲$ و $b = \frac{۱}{۲}$ و بنابراین داریم: $y = ۲\cos(\frac{x}{۲}) + ۳$.

۴- دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را بدست آورید:

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۷|} = \frac{۲\pi}{۷}$　　$\max = |۲| + ۱ = ۳$　　$\min = -|۲| + ۱ = -۱$

ب) $\sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|} = ۴$　　$\max = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱ + \sqrt{۳}$　　$\min = -|-۱| + \sqrt{۳} = -۱ + \sqrt{۳}$

پ) $-\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|} = ۴\pi$　　$\max = |-\pi| - ۲ = \pi - ۲$　　$\min = -|-\pi| - ۲ = -\pi - ۲$

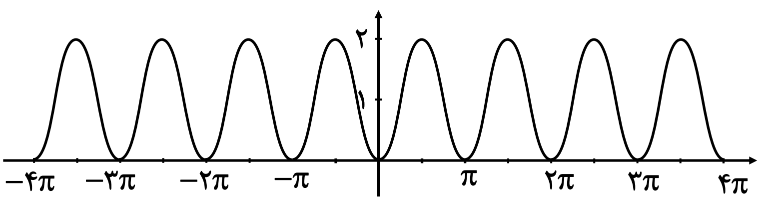
ت) $-\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲}{۳}\pi$　　$\max = |-\frac{۳}{۴}| = \frac{۳}{۴}$　　$\min = -|-\frac{۳}{۴}| = -\frac{۳}{۴}$

۵- هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

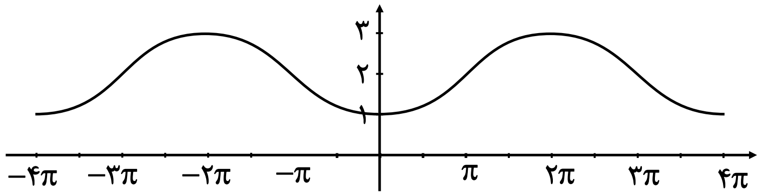
الف) $y = \sin\pi x$　　ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$　　پ) $y = \sin ۲x$　　ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

۱)

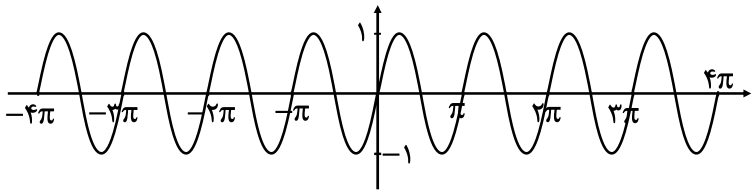


ت

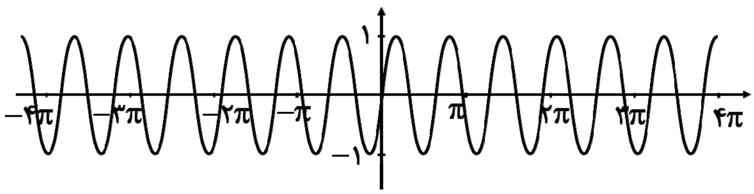
۲) ب



۳) الف



۴) ث



۶- در هر مورد ضابطه‌ی تابع مثلثاتی با دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید:

الف) $T=\pi, \max=۳, \min=-۳$

$y=a\sin bx+c \ , \max=|a|+c, \min=-|a|+c$

$a=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳ \qquad c=\frac{۳+(-۳)}{۲}=۰ \qquad \pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=۲\Rightarrow y=۳\sin ۲x$

ب) $T=۳, \max=۹ , \min=۳$

$y=a\sin bx+c \ , \max=|a|+c, \min=-|a|+c$

$a=\frac{۹-۳}{۲}=۳ \qquad c=\frac{۹+۳}{۲}=۶ \qquad ۳=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=\frac{۲}{۳}\pi\Rightarrow y=۳\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۶$

پ) $T=۴\pi, \max=-۱, \min=-۷$

$y=a\sin bx+c \ , \max=|a|+c, \min=-|a|+c$

$a=\frac{-۱-(-۷)}{۲}=۳ \qquad c=\frac{-۱+(-۷)}{۲}=-۴ \qquad ۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۳\sin(\frac{۱}{۲}x)-۴$

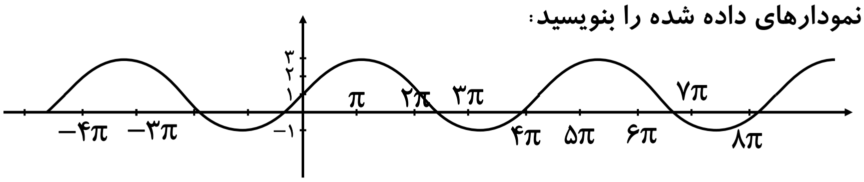
ت) $T=\frac{\pi}{۲}, \max=۱, \min=-۱$

$y=a\sin bx+c \ , \max=|a|+c, \min=-|a|+c$

$a=\frac{۱-(-۱)}{۲}=۱ \qquad c=\frac{۱+(-۱)}{۲}=۰ \qquad \frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=۴\Rightarrow y=\sin(۴x)$

۷- ضابطه‌ی مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید:

الف)

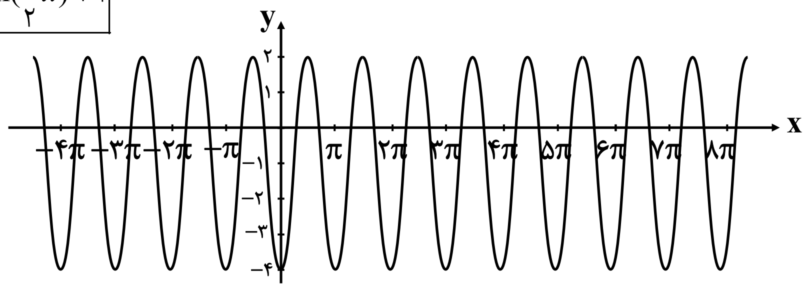


$\max = ۳, \min = -۱, T = ۴\pi$

$C = \frac{۳+(-۱)}{۲} = ۱, a = \frac{۳-(-۱)}{۲} = ۲, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$

$\boxed{y = \sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱}$

ب)

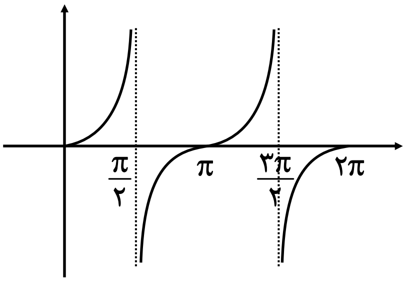


$\max = ۲, \min = -۴, T = \pi$

$C = \frac{۲+(-۴)}{۲} = -۱, a = \frac{۲-(-۴)}{۲} = ۳, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

$\boxed{y = ۳\cos(۲x) - ۱}$

۸- صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ بررسی کنید.



تابع در دامنه‌ی خود همواره صعودی است.

۹- کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. *نادرست*

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. *نادرست*

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد. *نادرست*

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. *درست*

۱۰- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را باهم مقایسه کنید.

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
sin	$۰ \nearrow$	$\frac{۱}{۲} \nearrow$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \nearrow$	۱
tan	$۰ \nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \nearrow$	$۱ \nearrow$	$\sqrt{۳} \nearrow$	$+\infty$ ت.ن

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
sin	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0
tan	ت.ن	↗	$-\sqrt{3}$	↗	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0

سوالات مربوط به نسبت‌های مثلثاتی 2α

۱- مقدار $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 30 = 1 - 2\sin^2 15 \to \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15 \to \sin^2 15 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha \Rightarrow \sin 30 = 2\sin 15 \times \cos 15$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \times \cos\alpha \to \cos 15 = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

۲- فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2 \times (\frac{5}{13})^2 - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$$

ب) $\sin 2\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\frac{5}{13})^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{در ناحیه اول } \alpha} \sin\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha - \cos\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

۳- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ بدست آورید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 45 = 1 - 2\sin^2(22/5) \Rightarrow \sin^2(22/5) = \frac{1-\cos 45}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2(22/5) = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \to \sin(22/5) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \to \cos 45 = 2\cos^2(22/5) - 1$$

$$\to \cos^2(22/5) = \frac{1+\cos 45}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \to \cos(22/5) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

سوالات مربوط به معادلات مثلثاتی

تیپ اول سینوس‌ها:

۱- معادله $\sin x = -\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + (-\frac{\pi}{۶}) = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}, k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi + (\pi + \frac{\pi}{۶}) = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰ \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۳}) = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

$$۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰ \rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{۸}}{۴} = \frac{-۲\sqrt{۲}}{۴} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \sin x = \sin(\frac{-\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + (-\frac{\pi}{۴}) = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴}, k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{۴})) = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳- معادله $\sin ۲x = \sin ۳x$ را حل کنید.

$$\sin ۲x = \sin ۳x$$

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + ۳x \Rightarrow x = ۲k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - ۳x \rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۵}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۴- معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰ \rightarrow \sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \sin ۳x = \sin(\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}, k \in \mathbb{Z} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۳} - \frac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

۵- جواب معادله $\sin x.\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را بدست آورید.

ابتدا طرفین معادله را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲\sin x.\cos x = ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۴} \to ۲\sin x.\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to \sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to \sin ۲x = \sin(\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \to x = k\pi + \frac{\pi}{۶}, k\in\mathbb{Z} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۳} \to x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}, k = \mathbb{Z} \end{cases}$$

۶- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$

$$۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \quad k\in\mathbb{Z}$$

ب) $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

$$۱ - ۲\sin^۲ x - \sin x = ۰ \Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin x = t} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t = -۱ \\ t = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۱ \to \sin x = \sin(\frac{-\pi}{۲}) \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{-\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \to \sin x = \sin(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

پ) $۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$

$$\xrightarrow{\sin x = t} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t = -۱ \\ t = +\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۱ \to \sin x = \sin\frac{-\pi}{۲} \to x = ۲k\pi + \frac{-\pi}{۲} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \to \sin x = \sin(\frac{\pi}{۶}) \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۶}) \end{cases} \end{cases}$$

ت) $\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴}$

$$۱ - \sin^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴} \to \sin^۲ x + \sin x - \frac{۳}{۴} = ۰ \xrightarrow{\sin x = t}$$

$$t^۲+t-\frac{۳}{۴}=۰\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=(۱)^۲-۴(۱)(-\frac{۳}{۴})=۴\Rightarrow\begin{cases}t_۱=\dfrac{-۱+۲}{۲}=\dfrac{۱}{۲}\\ t_۲=\dfrac{-۱-۲}{۲}=-\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}\\ x=۲k\pi+\dfrac{۵\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \sin x=\dfrac{-۳}{۲}\quad \text{غیر ممکن}\end{cases}$$

ث) $\sin x-\cos ۲x=۰$

$$\sin x-(۱-۲\sin^۲ x)=۰\rightarrow ۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰\rightarrow(\sin x+۱)(۲\sin x-۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x+۱=۰\rightarrow \sin x=-۱\rightarrow x=۲k\pi+\dfrac{۳\pi}{۲}\quad k\in\mathbb{Z}\\ ۲\sin x-۱=۰\rightarrow\sin x=\dfrac{۱}{۲}\rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۶}\quad k\in\mathbb{Z}\\ x=۲k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{۶}\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{cases}$$

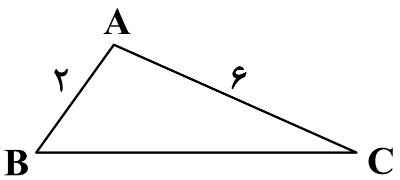
۷- یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\frac{m}{s}$ برای هم تیمی خود که در $۱۲/۸$ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ V (برحسب ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (برحسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد. آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d=\frac{V^۲\sin ۲\theta}{۱۰}$$

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^۲\sin ۲\theta}{۱۰}\rightarrow\sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times۱۰}{۲۵۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲\theta=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۶}\\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\dfrac{\pi}{۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{۱۲}\\ \theta=\dfrac{(۲k+۱)\pi}{۲}-\dfrac{\pi}{۱۲}\end{cases}$$

۸- مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$S=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC\times\sin\hat{A}$$

$$۳=\frac{۱}{۲}\times۲\times۶\times\sin\hat{A}\rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\sin\hat{A}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \\ \widehat{A} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فقط می‌توان $A = \frac{\pi}{2}$ و $\widehat{A} = \frac{5\pi}{6}$ را در نظر گرفت پس دو مثلث می‌توان ساخت.

تیپ دوم کسینوس‌ها:

۱- معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید:

$$\cos x.(2\cos x - 9) = 5 \rightarrow 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = t}$$

$$2t^2 - 9t - 5 = 0 \rightarrow (2t-1)(t+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2x}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = -5 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۲- معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \le x \le 2\pi$ حل کنید. (ویژه ریاضی)

$$\sin x + \cos x = 1 \rightarrow \sin x = 1 - \cos x \xrightarrow{\text{توان } 2} \sin^2 x = (1-\cos x)^2$$

$$\rightarrow \sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \rightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2\cos x(\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0, 2\pi \end{cases}$$

۳- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{2}) \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ب) $\cos x = \cos 2x$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm 2x$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

سوالات مربوط به بخش پذیری

۱- چند جمله‌ای $g(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر $x+۱$ بخش پذیر است؟ با انجام تقسیم درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+x^۲+۱ & x+۱ \\ \hline -(۲x^۳+۲x^۲) & ۲x^۲-x+۱ \\ -x^۲+۱ & \\ -(x^۲-x) & \\ +x+۱ & \\ -(x+۱) & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow g(x)=(x+۱)(۲x^۲-x+۱)$$

راه دوم: برای بدست آوردن باقی‌مانده در یک تقسیم می‌توانیم ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$x+۱=۰ \rightarrow x=-۱$$

$$\Rightarrow g(-۱)=۲(-۱)^۳+(-۱)^۳+۱=۰$$

چون باقی‌مانده برابر صفر شده پس $g(x)$ بر $x+۱$ بخش پذیر است.

۲- نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دو جمله‌ای $x+۲$ بخش پذیر است؟

$$x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$$

$$\Rightarrow f(-۲)=۲(-۲)^۳+۵(-۲)^۲-۳(-۲)-۱۰=-۱۶+۲۰+۶-۱۰=۰$$

$\Rightarrow$ باقی‌مانده $=۰$

پس $f(x)$ بر $x+۲$ بخش پذیر است.

۳- نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است.

$$x+۱=۰ \rightarrow x=-۱$$

$$\Rightarrow f(-۱)=۲(-۱)^۳+(-۱)^۲+۱=-۲+۱+۱=۰$$

سوالات مربوط به حد توابع کسری(حالت $\frac{۰}{۰}$)

۱- حد تابع $g(x)=\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ را در نقطه به طول $x=۵$ بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۴-(x-۱)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{\overset{-۱}{\cancel{۵-x}}}{(\cancel{x-۵})(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-۱}{۲+۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۲- حد های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $$\lim_{x\to(-۳)}\frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to(-۳)}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x(x+۳)}=\lim_{x\to(-۳)}\frac{x-۳}{x}=\frac{-۶}{-۳}=+۲$$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(x-\frac{1}{2})(4x-2)}{(x-\frac{1}{2})(2x+2)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x-2}{2x+2}=\dfrac{0}{3}=0$

پ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}=\dfrac{0}{0}$

مخرج را بر عامل صفر شونده یعنی $(x-3)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-13x^2+24x-9 & x-3 \\ \cline{2-2} -(2x^3-6x^2) & 2x^2-7x+3 \\ \cline{1-1} -7x^2+24x-9 & \\ -(-7x^2+21x) & \\ \cline{1-1} +3x-9 & \\ -(+3x-9) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x^2-7x+3)}=\dfrac{1}{0}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-2)}{2x^2-7x+3}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x-2)}{2x^2-7x+3}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

ت) $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+\sqrt{2x+3}}\times\dfrac{x-\sqrt{2x+3}}{x-\sqrt{2x+3}}=\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-(2x+3)}=$

$\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{(-2)(-2)}{(-4)}=\dfrac{4}{-4}=-1$

ث) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}\times\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{(3)(2)}=\dfrac{1}{6}$

ج) $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}\times\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{(x-1)}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\dfrac{1}{3}$

۳- حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-x}{4x^2-1}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{4}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25}=\dfrac{0}{0}$

عامل صفر کنید $(x-5)$ می‌باشد پس باید صورت را بر $x-5$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2-4x-5 & x-5 \\ \cline{2-2} -(x^3-5x^2) & x^2+x+1 \\ \hline x^2-4x-5 & \\ -(x^2-5x) & \\ \hline x-5 & \\ -(x-5) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+x+1)}{(x-5)(x+5)}=\frac{25+5+1}{5+5}=\frac{31}{10}$$

پ) $$\lim_{x\to(-4)}\frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}=\lim_{x\to(-4)}\frac{(x+4)(x-1)}{x^2(x+4)+x+4}=\lim_{x\to(-4)}\frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)}=\frac{-5}{17}$$

۴- حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x(x-1)}\times\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(2x-1)}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=0$$

ب) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{2-\sqrt{x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)}$$

$$=-(6)(2+2)=-24$$

پ) $$\lim_{x\to -8}\frac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to(-8)}\frac{2(x+8)}{\sqrt[3]{x}+2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$\lim_{x\to(-8)}=\frac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(x+8)}=2(4+2\times 2+4)=24$$

سوالات مربوط به حد های نامتناهی

۱- حد های زیر را بدست آورید.

الف) $$\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}=\frac{+10}{0^-}=-\infty$$

ب) $$\lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}=\frac{+10}{0^+}=+\infty$$

پ) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(0^+)^2}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=+\infty\end{cases}$$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{|x-3|}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2}{|x-3|}=\dfrac{2}{|0^+|}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2}{|x-3|}=\dfrac{1}{|0^-|}=+\infty\end{cases}$

ث) $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})}\dfrac{[x]}{|3x+1|}\xrightarrow{\left[-\frac{1}{3}\right]=-1}\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})}\dfrac{-1}{|3x+1|}=\dfrac{-1}{|0|}=-\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sin^2 x}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{\sin^2 x}=\dfrac{+1}{(0^+)^2}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+1}{\sin^2 x}=\dfrac{+1}{(0^-)^2}=+\infty\end{cases}$

۲- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{|0^+|}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{|0^-|}=+\infty\end{cases}$

ت) $\lim\limits_{x\to(-6)}\dfrac{9}{(x+6)^2}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-6)^+}\dfrac{9}{(x+6)^2}=\dfrac{9}{(0^+)^2}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to(-6)^-}\dfrac{9}{(x+6)^2}=\dfrac{9}{(0^-)^2}=+\infty\end{cases}$

ث) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x-3)^4}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-1}{(x-3)^4}=\dfrac{-1}{(0^+)^4}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-1}{(x-3)^4}=\dfrac{-1}{(0^-)^4}=-\infty\end{cases}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{4x+1}{(2x+1)^2}\Rightarrow\dfrac{-1}{(0)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1-5x}{x^2-9}=\dfrac{-14}{0^+}=-\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3x}{x^2-4}=\dfrac{+6}{0^+}=+\infty$

خ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{\cos x}\xrightarrow[(\cos x<0)\ \text{ربع دوم}]{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} \tan x \xrightarrow[\text{پس } \tan x>۰]{x\to\frac{\pi}{۲}^- \text{ در ناحیه اول است}} +\infty$

ذ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \tan x \xrightarrow[\text{پس } \tan x<۰]{x\to\frac{\pi}{۲}^+ \text{ در ناحیه دوم است}} -\infty$

ر) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{[x]-۳}{x-۳}$

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲-۳}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{-۱}{x-۳} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

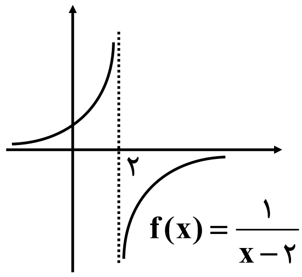
۳- الف) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟

حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر است.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟

حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر است.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند.



سوالات مربوط به حد در بی‌نهایت

۱- مقدار حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x+۲}{x-۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{۳x+۲}{x}}{\frac{x-۱}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳+\frac{۲}{x}}{۱-\frac{۱}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} ۳ + \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{۲}{x})}{\lim\limits_{x\to-\infty} (۱) - \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{۱}{x})} = \frac{۳+۰}{۱-۰}$$

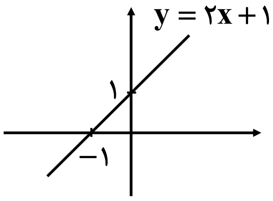
ب) $$\lim_{t\to-\infty} \frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{۱-۵t}{t^۲}}{\frac{t^۲+۳t}{t^۲}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{۱}{t^۲}-۵}{۱+\frac{۳}{t}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{۱}{t^۲}) - \lim\limits_{x\to-\infty} (۵)}{\lim\limits_{x\to-\infty} (۱) + \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{۳}{t})} = \frac{۰-۵}{۱+۰} = -۵$$

پ) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲-۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۲-۳x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{۲}{x}) - \lim\limits_{x\to+\infty} (۳)} = \frac{۰}{۰-۳} = ۰$$

۲- با توجه به نمودار هر تابع طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

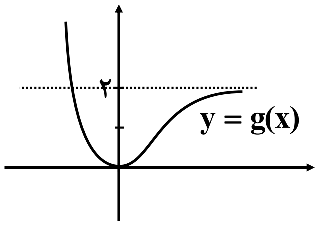
$\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x+۱)= +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x+۱)= -\infty$



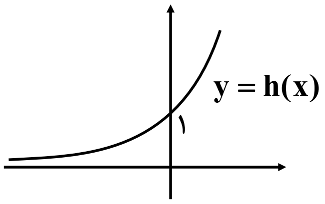
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)= +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)= ۲$



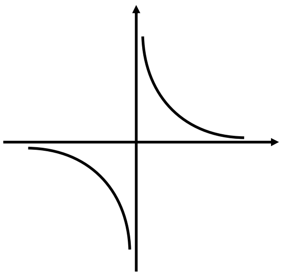
$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)= ۰$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)= +\infty$



۳- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بدست آورید.

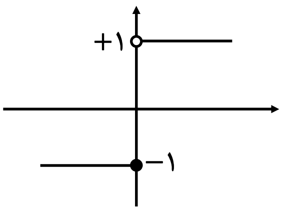
الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to۰} f(x)$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۰$ $\quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to۰^-} f(x)=-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$

ب) $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

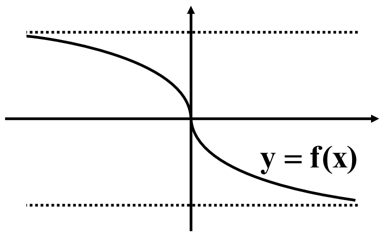


$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-۱,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+۱$

۴- با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

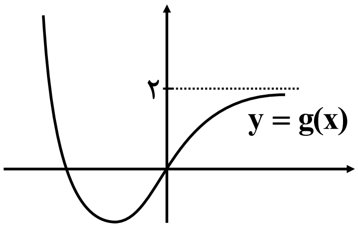
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=$ ۲

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=$ ۰



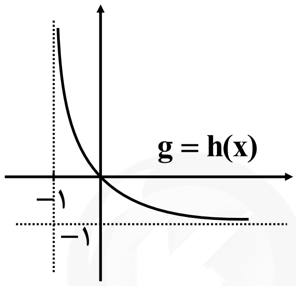
$\lim_{x\to-\infty} g(x)=$ $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=$ ۲

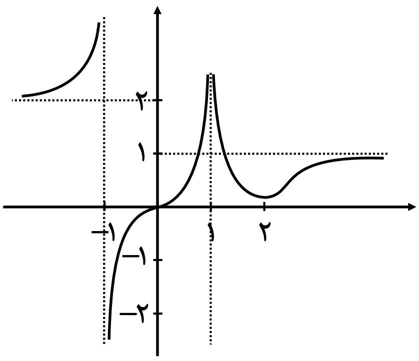


$\lim_{x\to+\infty} h(x)=$ -۲

$\lim_{x\to(-۱)^+} h(x)=$ $+\infty$



۵- نمودار تابع f به شکل زیر است. حدود خواسته شده را بنویسید.



۱) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=$ ۲

۲) $\lim_{x\to(-۱)} f(x)=$ $+\infty$

۳) $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=$ $-\infty$

۴) $\lim_{x\to۱^-} f(x)=$ $+\infty$

۵) $\lim_{x\to۱^+} f(x)=$ $+\infty$

۶) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=$ ۱

۶- حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to-\infty} (۹+\frac{۷}{x^۳}) = ۹+۰=۹$

۲) $\lim_{x\to+\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶) = \lim_{x\to+\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳) = -\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty} (\frac{۱}{۲x-۳}) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{۱}{۲x}) = ۰$

۴) $\lim_{x\to+\infty} (\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}) = \frac{\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۱}{x^۲})}{\lim_{x\to+\infty}(\frac{۴}{x}-۵)} = \frac{۳}{-۵} = \frac{-۳}{۵}$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{۲x-۱}{۳x+۱})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{۲x}{۳x})=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳x)}=\frac{۲}{۳}$

۶) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳})=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۲)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^۲)}=۲$

۷) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱})=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۵)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^۲)}=\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۳)=-\infty$

۸) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^۲+x}{۳-x})=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(x^۲)}{\lim\limits_{x\to\infty}(-x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

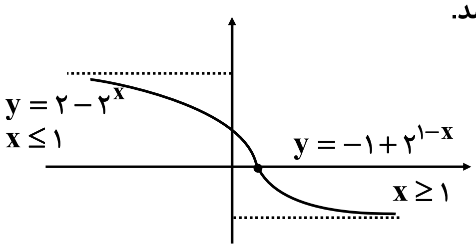
۹) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x})=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(-۶x^۳)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۳)}=\frac{-۶}{۲}=-۳$

۷- الف) هر یک از رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۲$ به چه معناست؟

اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود، تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به ۱- نزدیک کرد.

اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به ۲ نزدیک کرد.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد.



تمرین‌های فصل چهارم: مشتق

تیپ اول: تعریف حدی مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول (-2) بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(\alpha, f(\alpha))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\alpha)$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7\ ,\ f(-2+h) = (-2+h)^2 + 3 = 4 - 4h + h^2 + 3 = 7 - 4h + h^2$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{7-4h+h^2-7}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-4+h)}{\cancel{h}} = -4$$

۲- اگر $f(x) = x^2$، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

$$f(3) = 9$$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h+3)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h+9-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+6)}{\cancel{h}} = 6$$

روش دوم: می‌دانیم $f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

۳- برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$، $f'(8)$ را به دو روش حساب کنید.

روش اول:

$$f(8) = -(8)^2 + 10(8) = -64 + 80 = 16$$

$$f'(8) = \lim_{h\to 0}\frac{f(8+h)-f(8)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(8+h)^2+10(8+h)-16}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-(64+h^2+16h)+80+10h-16}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-6h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}(h+6)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(-(h+6)) = -6$$

روش دوم:

$$f'(8) = \lim_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8} = \lim_{x\to 8}\frac{-x^2+10x-16}{x-8} = \lim_{x\to 8}\frac{-\cancel{(x-8)}(x-2)}{\cancel{x-8}} = -6$$

۴- اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

پاسخ: ابتدا شیب خط مماس را به کمک فرمول حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \xrightarrow{f(2)=9} \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x+1-9}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(3x+4) = 10$$

$$\begin{cases}(2,9)\\ m = 10\end{cases} \Rightarrow y - 9 = 10(x-2) \Rightarrow y = 10x - 11 \quad \text{معادله خط مماس}$$

۵- اگر $f(x)=x^{۳}-۲$ ، $f'(-۱)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

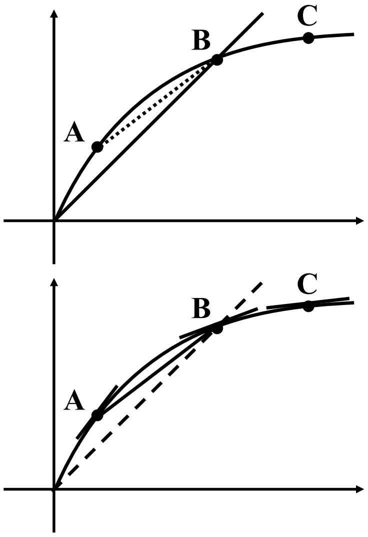
$$f(-۱)=(-۱)^{۳}-۲=-۳$$

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}-۲-(-۳)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}+۱}{x+۱}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}(x^{۲}-x+۱)}{\cancel{x+۱}}=\lim_{x\to -۱}(x^{۲}-x+۱)=۳$$

تیپ دوم: محاسبه شیب از روی نمودار

۶- برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از (الف) تا (ج) را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A :　　پاسخ: $m_{۱}$

ب) شیب نمودار در نقطه B :　　پاسخ: $m_{۲}$

پ) شیب نمودار در نقطه C :　　پاسخ: $m_{۳}$

ت) شیب خط AB :　　پاسخ: $m_{۴}$

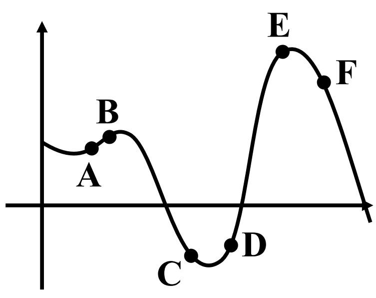
ث) شیب خط $y=۲$:　　پاسخ: $m_{۵}=۰$

ج) شیب خط $y=x$:　　پاسخ: $m_{۶}=۱$

با توجه به نمودار شیب در نقطه A بیشتر از سایر نقاط می‌باشد و ترتیب قرارگیری به صورت زیر است:

$$m_{۱}>m_{۶}>m_{۴}>m_{۲}>m_{۳}>m_{۵}$$

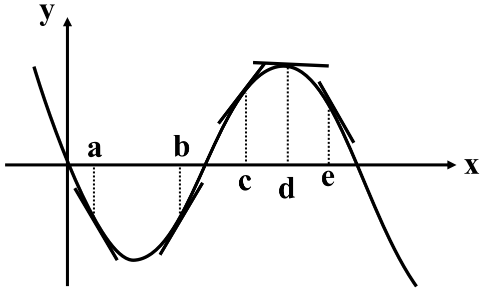
۷- نقاط داده‌شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲

پاسخ: با توجه به نمودار شیب در نقطه D از شیب در نقطه B تند است پس عدد ۲ را برای D انتخاب می‌کنیم. هم‌چنین در نقطه F با سرعت بیشتری نسبت به نقطه C در حال نزول هستیم.

۸- با در نظر گرفتن نمودار F در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم خط مماس در نقطه d موازی محور xهاست پس مشتق در آن نقطه برابر صفر است و شیب خط مماس در نقطه c تندتر از شیب در نقطه b می‌باشد و هم‌چنین در نقطه e با شیب تندتری در حال نزول هستیم.

۹- نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید. به طوری که:

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن نقطه منفی است.

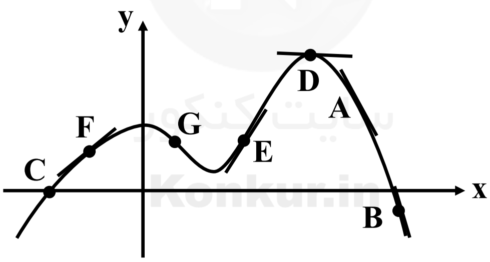
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن نقطه مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

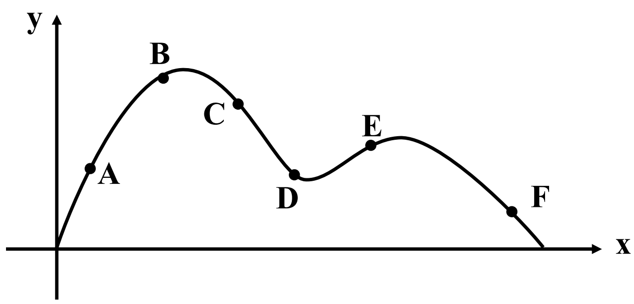
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی نمودار هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

پاسخ:



۱۰- نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه نقاط مثبت است.

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه C، D و F منفی است.

ب) $m_A < m_B$

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه A از نقطه B تندتر است.)

پ) $m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

ت) شیب منفی در نقاط F، D و C منفی است.

پاسخ: درست

ث) $m_F < m_D < m_C$

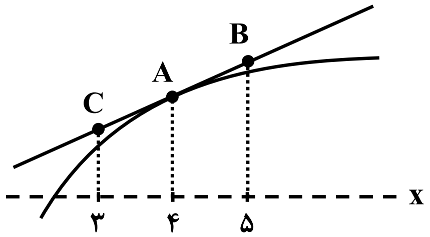
پاسخ: (شیب در نقطه D کندتر از نقطه C است.)

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

۱۱- برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$, $f(۴)=۲۵$ ، با توجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.

پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم شیب خطی که از نقاط A، B و C عبور می‌کند برابر است. مشتق در نقطه $x=۴$ یعنی $f'(۴)$.

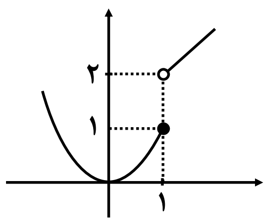


$$m=f'(۴)=۱/۵=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\frac{y_B-۲۵}{۵-۴}=۱/۵\to y_B=۲۶/۵\to B(۵,۲۶/۵)$$
$$۱/۵=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}\Rightarrow\frac{۲۵-y_C}{۴-۳}=۱/۵\to y_C=۲۳/۵\to C=(۳,۲۳/۵)$$

تیپ سوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱۲- تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(۱)$ موجود نیست.

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که حدهای چپ و راست تابع در نقطه $x=۱$ با هم برابر نیستند. پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.



۱۳- نشان دهید مشتق تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در نقطه $x=-۱$ موجود نیست.

پاسخ:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to-۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-(-۱)}=\lim_{x\to-۱}\frac{|x^۲-۱|}{x+۱}$$

حد راست: $\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{\cancel{(x+۱)}(x-۱)}{\cancel{x+۱}}=\lim_{x\to(-۱)^+}(x-۱)=-۲$

حد چپ: $\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}-(x-۱)=+۲$

مشاهده می‌کنیم مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند پس $f'(-۱)$ موجود نیست.

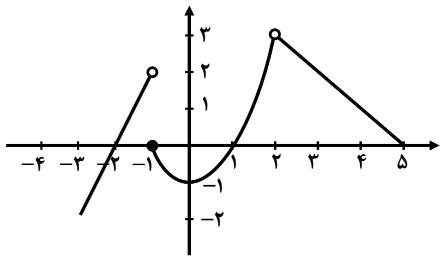
۱۳- مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

پاسخ: تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است. هرگاه f روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & -۲\le x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. چرا تابع f در بازه $[۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست؟

پاسخ: زیرا با این‌که روی بازه $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است، اما در $x=۱$ پیوستگی راست ندارد. (حد راست با مقدار تابع برابر نیست)، پس در $x=۱$ مشتق راست ندارد.

۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیر f را روی بازه‌های $[-1,1]$، $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.



پاسخ: تابع در بازه $[-2,0]$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا در $x=-1$ ناپیوسته است.

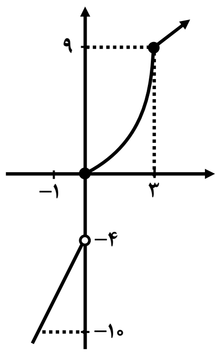
تابع در بازه‌ی $(2,5)$ مشتق‌پذیر است.

تابع در بازه $[-1,1]$ مشتق‌پذیر است.

۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

پاسخ:



ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پاسخ:

$f(0)=0$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$

$\Rightarrow$ پیوسته نیست

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-4-0}{x-0}=\dfrac{-4}{0^-}=+\infty$

$f(3)=9$

$f'_+(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x+6-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x-3}=1$

$\Rightarrow$ مشتق چپ و راست با هم برابر نیست

$f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+3)=6$

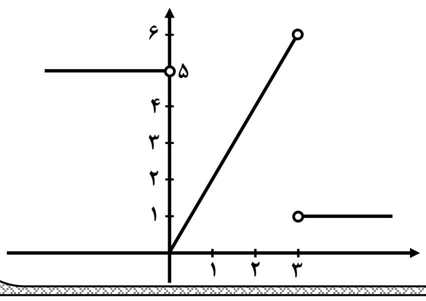
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در $x=0$ و $x=3$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

ت) نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

پاسخ:

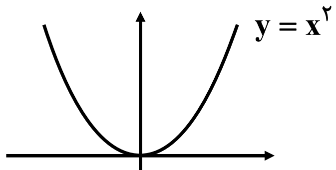


۱۷- نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

پاسخ:

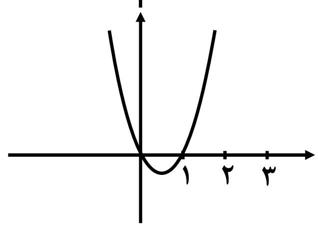
$y = x^{۲}$



ب) در ۲ = x برابر ۳ شود.

پاسخ:

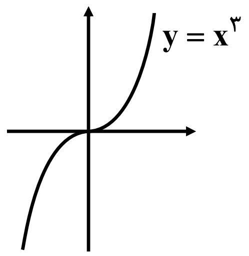
$$f(x) = x^{۲} - x$$
$$f'(x) = ۲x - ۱$$
$$f'(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$$



پ) در تمام نقاط مثبت شود.

پاسخ:

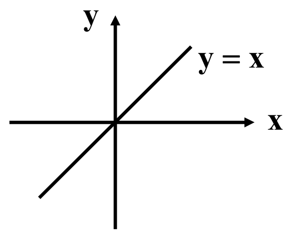
$y = x^{۳}$



ت) در تمام نقاط یکسان شود.

پاسخ:

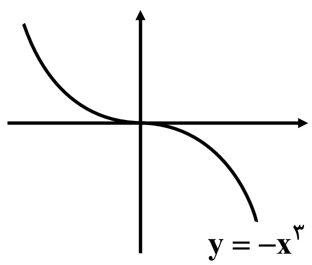
$y = x$



ث) در تمام نقاط منفی شود.

پاسخ:

$y = -x^{۳}$



۱۸- مشتق‌پذیری تابع $f(x)\begin{cases} x^{۲} + ۳ & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x^{۲} + ۳) = ۴$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۲x) = ۲$$

حد چپ و راست در نقطه $x = ۱$ برابر نیست. پس پیوسته نیست و مشتق هم در $x = ۱$ ندارد.

۱۹- اگر $f(x) = |x^{۲} - ۴|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیر f را در نقطه $x = -۲$ بررسی کنید.

پاسخ:

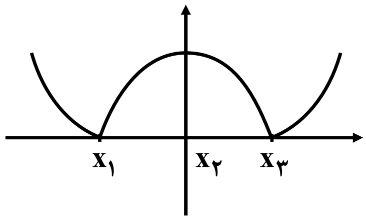
$$f'_+(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x^{۲} - ۴) - ۰}{x + ۲} = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x - ۲)(x + ۲)}{x + ۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} -(x - ۲) = +۴$$

$$f'_-(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x^{۲} - ۴) - ۰}{x + ۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x - ۲)(x + ۲)}{x + ۲} = -۴$$

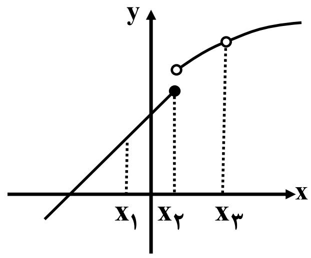
مشاهده می‌کنیم مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع f در $x=-2$ مشتق ندارد.

۲۰- در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده، مشتق‌پذیر نیست.

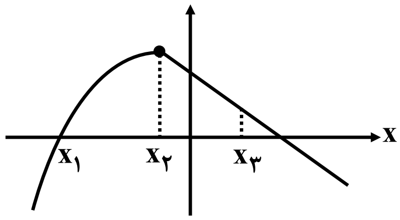
پاسخ:



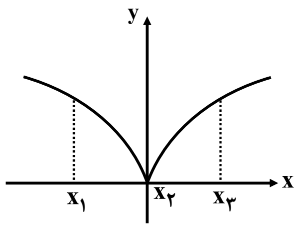
در x_1 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه‌ای



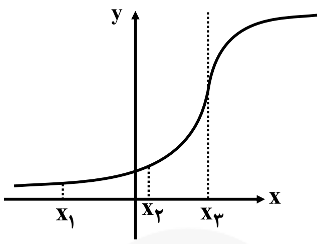
در x_2 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط ناپیوسته



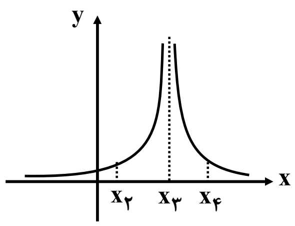
در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه



در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
مشتق نامتناهی



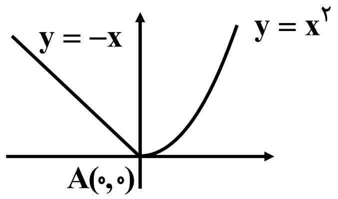
در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(مشتق نامتناهی)



در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(نقطه ناپیوستگی)

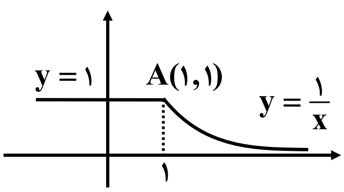
۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیرنیستند.

پاسخ:



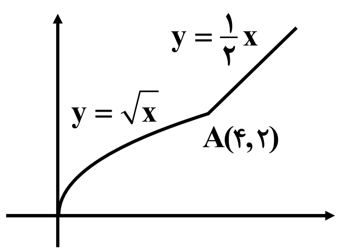
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'+(0)=0 \\ f'_-(0)=-1 \end{cases} \qquad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$



$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\geq 1 \\ 1 & x<1 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x>1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$$

$$f'_+(1)=-1 \ , \ f'_-(1)-0 \to f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

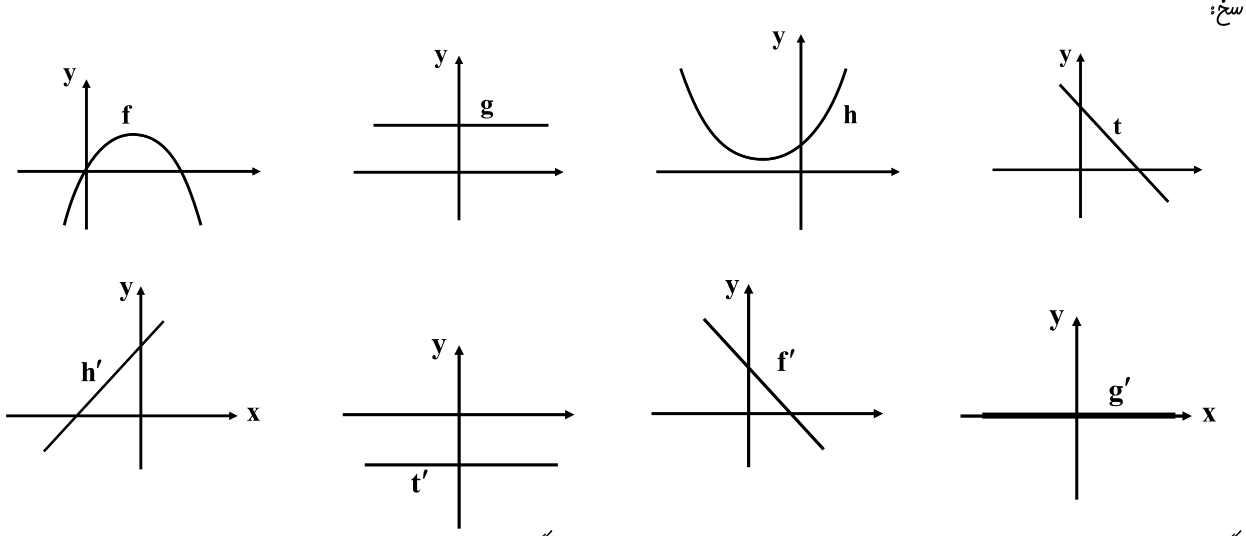


$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x\geq 4 \\ \sqrt{x} & x<4 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & x>4 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x<4 \end{cases}$$

$$f'_+(۴)=\frac{۱}{۲}\ ,\ f'_-(۴)=\frac{۱}{۴}\rightarrow f'_+(۴)\neq f'_-(۴)$$

۲۲- نمودار توابع f، g، h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

پاسخ:



۱) اگر نمودار تابع اصلی صعودی باشد، نمودار مشتق آن بالای محور xها قرار می‌گیرد.

۲) اگر نمودار تابع اصلی نزولی باشد، نمودار مشتق آن پایین محور xها قرار می‌گیرد.

۳) اگر نمودار تابع اصلی قله یا دره داشته باشد، در نمودار مشتق، آن نقاط محل برخورد با محور xها می‌شود.

تیپ چهارم: محاسبه مشتق توابع

۲۳- مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $f(x)=x^۵+۴x^۳-\sqrt{۲}x+۱$

$f'(x)=۵x^۴+۱۲x^۲-\sqrt{۲}$

۲) $f(x)=(۲x^۳+۱)(-x^۲+۷x-۲)$

$f'(x)=(۶x^۲)(-x^۲+۷x-۲)+(۲x^۳+۱)(-۲x+۷)$

۳) $f(x)=\dfrac{x^۲-۴}{۳x+۱}$

$f'(x)=\dfrac{(۲x)(۳x+۱)-(۳)(x^۲-۴)}{(۳x+۱)^۲}=\dfrac{۳x^۲+۲x+۱۲}{(۳x+۱)^۲}$

۴) $f(x)=\dfrac{۱}{x-۴}$

$f'(x)=\dfrac{۰(x-۴)-(۱)(۱)}{(x-۴)^۲}=\dfrac{-۱}{(x-۴)^۲}$

۵) $f(x)=\left(\dfrac{-۳x-۱}{x^۲+۵}\right)^۸$

$f'(x)=۸\left(\dfrac{-۳(x^۲+۵)-(۲x)(-۳x-۱)}{(x^۲+۵)^۲}\right)\left(\dfrac{-۳x-۱}{x^۲+۵}\right)^۷$

۶) $f(x)=\dfrac{x}{۲x^۲+x-۱}$

$$f'(x)=\frac{(۱)(۲x^۲+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^۲+x-۱)^۲}$$

۷) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۲$

$$f'(x)=(۶x)(۲x-۵)^۲+(۳x^۲-۴)(۲(۲)(۲x-۵)^۱)=(۲x-۵)(۲۴x^۲-۳۰x-۱۶)$$

۸) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

$$f'(x)=(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^۳+۱)+(\sqrt{۳x+۲})(۳x^۲)$$

۹) $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^۲-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^۲}=\frac{-۳x^۲+۴x-۳}{(-۳x+۲)^۲}$$

۱۰) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^۲}$$

۲۴- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$ ، $f'(۲)=۵$ و $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f.g)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲).g'(۲)=۵\times۸+۳\times(-۶)=۴۰-۱۸=۲۲$$

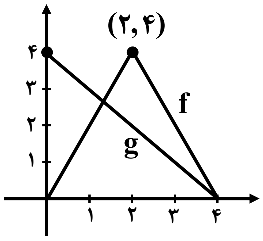
$$(\frac{f}{g})'(۲)=\frac{f'(۲).g(۲)-g'(۲).f(۲)}{(g(۲))^۲}=\frac{۵\times۸-۳\times(-۶)}{۸^۲}=\frac{۴۰+۱۸}{۶۴}=\frac{۲۹}{۳۲}$$

۲۵- اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$.

پاسخ:

$$(f+g)'(۱)=f'(۱)+g'(۱)=۳+۵=۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۳)+۲(۵)=۹+۱۰=۱۹$$



۲۶- نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) - g(x)$ مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$

پاسخ:

ابتدا ضابطه توابع f و g را می‌نویسیم:

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[2,4]$: $m_f = \dfrac{0-4}{4-2} = -2 = f'(x)\ ,\ y-0 = (-2)(x-4) \Rightarrow y = -2x+8$

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[0,2]$: $m_f = \dfrac{4-0}{2-0} = 2 = f'(x) \Rightarrow y-0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$

ضابطه تابع g: $m_g = \dfrac{0-4}{4-0} = -1 \to y-0 = (-1)(x-4) \Rightarrow y = -x+4$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+8 & 2 \le x \le 4 \\ 2x & 0 \le x \le 2 \end{cases}\ ,\ g(x) = -x+4$$

$$\begin{array}{llll} f(1)=2 & f'(1)=2 & g(1)=3 & g'(1)=-1 \\ f(2)=4 & f'_+(2)=-2\ ,\ f'_-(2)=2 & g(2)=2 & g'(2)=-1 \\ f(3)=2 & f'(3)=-2 & g(3)=1 & g'(3)=-1 \end{array}$$

$$h'(1) = f'(1).g(1) + f(1).g'(1) = 2\times 3 + (-1)\times 2 = 4$$

$$h'(2) = \begin{cases} f'_+(2).g(2) + f(2).g'(2) = (-2)\times 2 + 4(-1) = -8 \\ f'_-(2).g(2) + f(2).g'(2) = 2\times 2 + 4(-1) = 0 \end{cases}$$

در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست

$$h'(3) = f'(3).g(3) + f(3).g'(3) = (-2)\times 1 + 2(-1) = -4$$

$$k'(1) = \frac{f'(1).g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)} = \frac{2\times 3 - 2\times(-1)}{3^2} = \frac{8}{9}$$

$$k'_+(2) = \frac{f'_+(2).g(2) - g'(2)f(2)}{g^2(2)} = \frac{-2\times 2 - 4(-1)}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$$

در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

$$k'_-(2) = \frac{f'_-(2).g(2) - g'(2).f(2)}{g^2(2)} = \frac{2\times 2 - 4(-1)}{4} = 2$$

$$k'(3) = \frac{f'(3).g(3) - g'(3).f(3)}{g^2(3)} = \frac{-2\times 1 - 2\times(-1)}{1^2} = 0$$

تیپ پنجم: آهنگ تغییر

۲۷- با توجه به تابع رشد ($f(x)=7\sqrt{x}+50$) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) آهنگ متوسط رشد، در بازه زمانی $[0,25]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\begin{matrix} f(25)=7\sqrt{25}+50=85 \\ f(0)=7(\sqrt{0})+50=50 \end{matrix} \Rightarrow \frac{f(25)-f(0)}{25-0}=\frac{85-50}{25}=\frac{35}{25}=1/4$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پاسخ: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x)=7\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(25)=\frac{7}{2\sqrt{25}}=\frac{7}{10}\ ,\ f'(49)=\frac{7}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=25$ بیشتر است.

۲۸- ارتفاع یک جسم از سطح زمین از معادله $h(t)=-5t^2+40t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا زمان برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h(t)=0\Rightarrow -5t^2+40t=0\Rightarrow -5t(t-8)=0\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=8 \end{cases}$$

برای به دست آوردن معادله سرعت، کافی است از معادله $h(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم:

$$V_{(t)}=-10t+40\Rightarrow \begin{cases} V(0)=-10(0)+40=40 \\ V(8)=-10(8)+40=-40 \end{cases}$$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $35\frac{m}{s}$ و $-35\frac{m}{s}$ است.

پاسخ:

$$V=-10t+40\Rightarrow \begin{cases} -10t+40=35\rightarrow -10t=-5\rightarrow t=\frac{1}{2} \\ -10t+40=-35\rightarrow -10t=-75\rightarrow t=7/5 \end{cases}$$

۲۹- جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

پاسخ:

$$T(8)=11\ ,\ T(12)=19\Rightarrow\frac{19-11}{12-8}=\frac{8}{4}=2$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

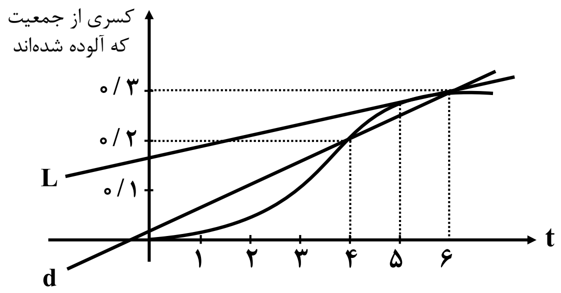
پاسخ:

$$T(12)=19\ ,\ T(18)=9\rightarrow\frac{9-19}{18-12}=-1/7$$

مشاهده می‌کنیم از ساعت ۸ تا ۱۲ به طور متوسط هوا گرم‌تر می‌شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط هوا سردتر می‌شود.

۳۰- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط L و d چه چیزی را نشان می‌دهند؟



پاسخ: در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است. یعنی هر چه زمان بیشتر گذشته شود، جمعیت کم‌تری از شهر آلوده شدند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1$ و $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

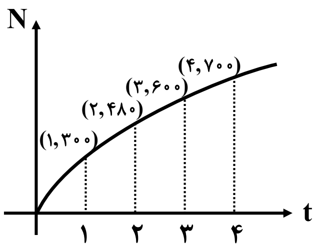
پاسخ: در $t=3$ شیب خط مماس بیشتر است.

پ) قسمت (ب) را برای $t=4$، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

پاسخ: در $t=6$ از همه کم‌تر است.

۳۱- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از ضرب t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از صفر تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



پاسخ:

$$\frac{N(1)-N(0)}{1-0}=\frac{300-0}{1}=300\ ,\ \frac{N(2)-N(1)}{2-1}=\frac{480-300}{1}=180$$

$$\frac{N(3)-N(2)}{3-2}=\frac{600-480}{1}=12\ ,\ \frac{N(4)-N(3)}{4-3}=\frac{700-600}{1}=100$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

پاسخ: چون شب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لحظه‌ای در حال کاهش است) (تقعر روی به پایین است.)

۳۲- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=10 \\ f(5)=5^2-5+10=30 \end{cases} \Rightarrow \text{سرعت متوسط}=\frac{30-10}{5-0}=4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای}: f'(t)=2t-1 \Rightarrow \text{سرعت لحظه‌ای}=\text{سرعت متوسط}$$

$$2t-1=4 \rightarrow t=\frac{5}{2}=2/5$$

۳۳- توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

t ثانیه	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ m متر	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) ۱/۲۳

ب) ۱۴/۹۱

پ) ۱۱/۵

ت) ۱۶/۰۳

پاسخ: برای این‌که سرعت توپ را در $t=0/4$ به دست آوریم می‌توانیم میانگین سرعت متوسط را در بازه‌های $[0/3,0/4]$ و $[0/4,0/5]$ به دست آوریم.

$$1)\ \frac{f(0/5)-f(0/4)}{0/5-0/4}=\frac{17/4-16/3}{0/1}=\frac{1/1}{0/1}=11$$

$$2)\ \frac{f(0/4)-f(0/3)}{0/4-0/3}=\frac{16/3-15/1}{0/1}=\frac{1/2}{0/1}=12$$

$$\text{میانگین}=\frac{11+12}{2}=11/5$$

۳۴- کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کم‌تر از شیب منحنی در نقطه است.

پاسخ: نادرست است. زیرا تابع $y=x^3$ و از $(0,0)$ و $(1,1)$ می‌گذرد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}: f'(x)=3x^2\to f(0)=0$$

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پاسخ: نادرست است. تابعی مانند $y=\sqrt{x}$ تابعی صعودی است و آهنگ تغییر متوسطش همواره نزولی است. (تقعرش رو به پایین است.)

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(\alpha)=0$ و $f(\alpha)=0$

پاسخ: نادرست است. تابع $y=x^3$ در نظر بگیرید.

$$f(0)=0$$

$$f'(x)=3x^2\to f'(0)=0$$

۳۵- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3\le t\le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

پاسخ:

$$m(4)=\sqrt{4}+2\times4^3=130$$
$$m(3)=\sqrt{3}+2\times3^3=55/7$$
$$\Rightarrow 130-55/7=74/3$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2\to m'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}+6(3)^2=\frac{1}{2\sqrt{3}}+54$$

۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = ۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰,۱]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$V(۰)=۴۰(۱-\frac{۰}{۱۰۰})^۲=۴۰ \quad , \quad V(۱)=۴۰(۱-\frac{۱}{۱۰۰})^۲=۳۹/۲۰۴ \Rightarrow \bar{V}=\frac{۳۹/۲۰۴-۴۰}{۱-۰}=-۰/۷۹۶$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می‌شود؟

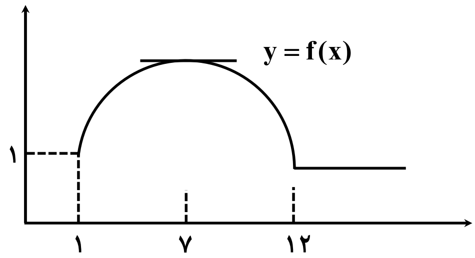
پاسخ:

$$V'=۴۰\times ۲(۱-\frac{t}{۱۰۰})\times(-\frac{۱}{۱۰۰})=\frac{-۸}{۱۰}(۱-\frac{t}{۱۰۰})$$

$$\begin{cases} V(۰)=۴۰ \\ V(۱۰۰)=۴۰\times(۱-\frac{۱۰۰}{۱۰۰})^۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \bar{V}=\frac{۰-۴۰}{۱۰۰-۰}=-\frac{۴}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{-۸}{۱۰}+\frac{۰/۸t}{۱۰۰}=-\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۸t}{۱۰۰۰}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow t=۵۰$$

۱- با توجه به نمودار مقابل جاهای خالی را پر کنید.



الف) در بازه $(1,7)$ که تابع f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است. بنابراین در این بازه علامت f' مشتق است.

ب) در بازه‌ی $(7,12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f منفی است. بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.

پ) در بازه $(12,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' صفر است.

۲- به کمک مشتق بیان کنید تابع $f(x)=x^3-3x$ در چه بازه‌های اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است.

پاسخ:

کافی است مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x)=3x^2-3\xrightarrow{f'(x)=0}3x^2-3x=0\to x=+1,x=-1$$

x		-1		$+1$	
علامت f'	$+$		$-$		$+$
یکنوایی تابع	↘	۲	↗	−۲	↘
	اکیداً صعودی		اکیداً نزولی		اکیداً صعودی

در بازه $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-1,+1)$ اکیداً نزولی

۳- بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزوی اکید باشد، کدام است؟

پاسخ:

برای حل سوال کافی است نامعادله $f'(x)<0$ را حل کنیم:

$$f'(x)=3x^2-12\xrightarrow{f(x)=0}3x^2-12=0\to x^2=4\to x=-2,x=+2$$

تابع f در بازه $(-2,2)$ نزولی اکید است.

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		↗	$+20$	↘	-12	↗	
		اکیداً صعودی		اکیداً نزولی		اکیداً صعودی	

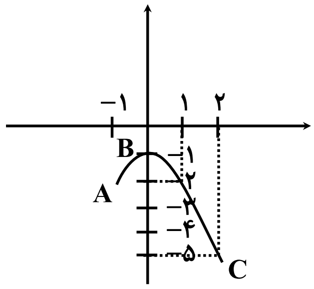
۴- با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$، مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

$$g'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\xrightarrow{g'(x)=0}-2x=0\to\boxed{x=0}$$

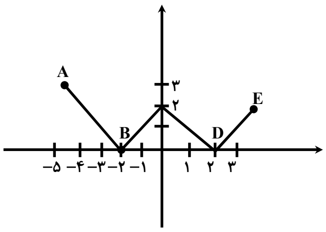
تابع در بازه‌های $(-\infty,1)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $(1,+\infty)$ نزولی اکید است.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗ صعودی		نزولی ↘	

۵- نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.

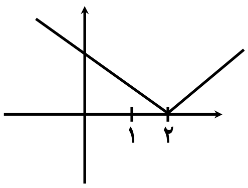


نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست		–
B	max نسبی	-۱	$f'(۰)$ برابر صفر است
C	نقطه اکسترمم نسبی نیست	–	–



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-۲)$ موجود نیست
C	max نسبی	۲	$f'(-۲)$ موجود نیست
D	min نسبی	۰	$f'(۲)$ موجود نیست
E	نه max و نه min	–	–

۶- با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$، نشان دهید که f در $x=۲$ مینیمم دارد.



$$f(x)=|x-۲| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\ge ۲ \\ -x+۲ & x<۰ \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} x & x>۲ \\ -۱ & x<۲ \end{cases}$$

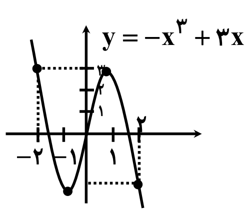
ب) آیا $f'(۲)$ موجود است؟

خیر، زیرا مشتق چپ و راست با هم برابر نیستند.

پ) آیا $x=۲$ طول نقطه بحرانی است؟

بله، زیرا تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست ولی $x=۲$ عضو دامنه است.

۷- نمودار تابع $f(x)=-x^۳+۳x$ را رسم کرده‌ایم: $y=-x^۳+۳x$



الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

از روی نمودار: $(۱,۲),(-۱,-۲)$

طول‌ها: $+۱,-۱$

به کمک مشتق: $f'(x)=-۳x^۲+۳$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x^۲+۳=۰ \rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است ریشه‌های $f'(x)=۰$ یعنی نقاط بحرانی را بدست آورید.

$$f'(x)=-۳x^۲+۳=۰ \rightarrow \pm ۱$$

$$f(۱)=+۲ \quad , \quad f(-۱)=-۲$$

۸- تابع با ضابطه $f(x)=-x^۲+۲x+۲$ را در نظر بگیرید. طول نقاط بحرانی را بدست آورید.

$$f'(x)=-۲x+۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} -۲x+۲=۰ \rightarrow \boxed{x=\pm ۱} \Rightarrow \boxed{x=+۱}$$

۹- جدول تغییرات تابع $g(x)=x^{3}-3x^{2}$ را رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن را مشخص شده باشد.

$$g'(x)=3x^{2}-6x\xrightarrow{g'(x)=0}3x(x-2)=0\Rightarrow x=0,x=2$$

x	$-\infty$	0		2		$-\infty$
بازه	$(-\infty,0)$		$(0,2)$		$(2,+\infty)$	
علامت f'	$+$		$-$		$+$	
یکنوایی تابع f	صعودی اکید ↗	0 max نسبی	نزولی اکید ↘	-8 min نسبی	صعودی اکید ↗	

۱۰- نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{4-x^{2}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^{2}}}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^{2}}}\xrightarrow{f'(x)=0}-2x=0\to\boxed{x=0}\Rightarrow f(0)=2$

به کمک مشتق؛ می‌دانیم ریشه‌های ساده مشتق تابع، نقاط بحرانی هستند.

ب) $g(x)=x^{3}+3x^{2}-4\Rightarrow g'(x)=3x^{2}+6x\xrightarrow{g'(x)=0}3x^{2}+6x=0\to3x(x+2)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\to g(0)=-4\to(0,4)\\x=-2\to g(-2)=0\to(-2,0)\end{cases}$$

پ) $h(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}\Rightarrow$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست پس نقطه $(0,0)$ نقطه بحرانی است.

۱۱- در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x)=x^{3}+3x^{2}-9x-10$

$$f'(x)=3x^{2}+6x-9\xrightarrow{f'(x)=0}3(x^{2}+2x-3)=0\to3(x-1)(x+3)=0\to x=1,x=-3$$

	$-\infty$		-3		$+1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	max 17	↘	min -15	↗	

$$\Rightarrow\begin{cases}\max(-3,+17)\\\min(1,-15)\end{cases}$$

ب) $g(x)=-2x^{3}+3x^{2}+12x-9$

$$g'(x)=-6x^{3}+6x+12\xrightarrow{g'(x)=0}-6x^{2}+6x+12=0\to-6(x^{2}-x-2)=0\to-6(x-2)(x+1)=0\to$$
$$x=2,x=-1$$

	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↘	min -16	↗	max 11	↘	

$$\Rightarrow\begin{cases}\min(-1,-16)\\\max(2,11)\end{cases}$$

پ) $h(x)=-x^{3}-3x+2$

$h'(x)=-3x^{2}-3\xrightarrow{h'(x)=0}-3x^{2}-3=0\to x^{2}=-1\to$ غیر قابل قبول(نقطه بحرانی ندارد)

۱۲- اگر نقطه $(۲,۱)$، نقطه اکسترمم تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b و d را بدست آورید.

نقطه $(۲,۱)$ عضوی از تابع است پس می‌توانیم آن را در تابع صدق دهیم.

$$f(۲)=۱\rightarrow ۸+۴b+d=۱\rightarrow \boxed{۴b+d=-۷}\quad I$$

چون $(۲,۱)$ اکسترمم است پس مشتق در نقطه $x=۲$ برابر صفر است.

$$f'(x)=۳x^۲+۲bx$$

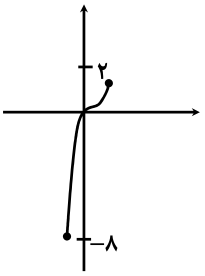
$$f'(۲)=۰\Rightarrow ۱۲+۴b=۰\rightarrow \boxed{b=-۳}$$

$$I\quad ۴(-۳)+d=-۷\rightarrow d=۵$$

۱۳- به کمک رسم نمودار توابع، مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

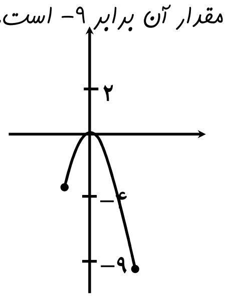
الف) $f(x)=x^۳ : x\in[-۲,۱]$

در $x=-۲$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۸- است. در $x=۱$ ماکزیمم مطلق دارد که مقدار آن ۱ است.



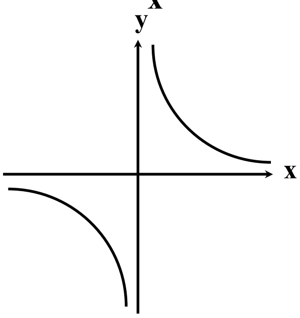
ب) $g(x)=-x^۲ : x\in[-۲,۳]$

در $x=۰$ دارای ماکزیمم مطلق و نسبی است که مقدار آن برابر صفر است. در $x=۳$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۹- است.



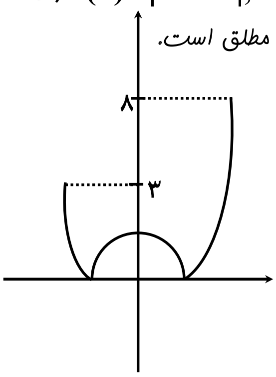
پ) $h(x)=\frac{۱}{x}$

نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم



ت) $t(x)=|x^۲-۱|, x\in[-۲,۳]$

در $x=۱$ و $x=-۱$ دارای مینمم مطلق و نسبی است و در $x=۰$ ماکزیمم نسبی است و در $x=۳$ ماکزیمم مطلق است.



۱۴- مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده در صورت وجود بدست آورید.

الف) $\mathbf{f(x)=-۲x^{۳}+۹x^{۲}-۱۳ : x\in[-۱,۲]}$

$$f'(x)=-۶x^{۲}+۱۸x=۰\rightarrow -۶x(x-۳)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۳\end{cases}$$

$x=۳$ قابل قبول نیست زیرا در بازه $[-۱,۲]$ قرار ندارد.

$$f(-۱)=-۲(-۱)^{۳}+۹(-۱)^{۲}-۱۳=-۲$$
$$f(۰)=-۱۳ \qquad \Rightarrow \underset{\text{مطلق}}{\min}(۰,۱۳),\underset{\text{مطلق}}{\max}(۲,۷)$$
$$f(۲)=-۲(-۲)^{۳}+۹(۲)^{۲}-۱۳=+۷$$

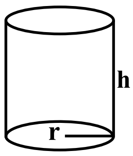
ب) $\mathbf{g(x)=x^{۳}+۲x-۵ : x\in[-۲,۱]}$

$$g'(x)=۳x^{۲}+۲=۰\rightarrow x^{۲}=\frac{-۲}{۳}$$ غ ق ق

$$g(-۲)=(-۲)^{۳}+۲(-۲)-۵=-۱۷\Rightarrow\underset{\text{مطلق}}{\min}(-۲,-۱۷),\underset{\text{مطلق}}{\max}=(۱,-۲)$$
$$g(۱)=(۱)^{۳}+۲(۱)-۵=-۲$$

۱۵- می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل روبه‌رو و درباز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

پاسخ:



$$\text{حجم استوانه}=۱(Lit)=۱۰۰۰cm^{۳}$$

$$\pi r^{۲}h=۱۰۰۰\Rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده = مساحت کل

$$\Rightarrow S=\pi r^{۲}+۲\pi rh=\pi r^{۲}+۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}})\Rightarrow S=\pi r^{۲}+\frac{۲۰۰۰}{r}$$

با یافتن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص می‌کنیم به ازای چه مقداری از r، مقدار S مینیمم می‌شود.

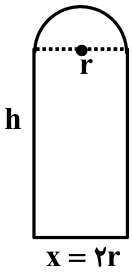
$$S'=۲\pi r-\frac{۲۰۰۰}{r^{۲}}\xrightarrow{S'=۰}۲\pi r^{۳}=۲۰۰۰\Rightarrow r=\sqrt[۳]{\frac{۱۰۰۰}{\pi}}=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\Rightarrow S(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}})=\pi(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}})+\frac{۲۰۰۰}{\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}}$$

۱۶- دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

$$x-y=۱۰\Rightarrow x=۱۰+y$$
$$S(y)=x.y=(۱۰+y)y=y^{۲}+۱۰y\Rightarrow S'_{(y)}=۲y+۱۰$$
$$\xrightarrow{s'_{(y)}=۰}۲y+۱۰=۰\Rightarrow y=-۵\Rightarrow x=۱۰+(-۵)=۵$$

۱۷- در بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد. به‌طوری که قطر نیم برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابیدکه بیشترین نوردهی را داشته باشد.

پاسخ:



$$\text{محیط} = 4/5 = 2h + 2r + \frac{1}{2}(2\pi r)$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \Rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم‌دایره + مساحت مستطیل = مساحت پنجره

$$S = 2r \times h + \frac{1}{2}(\pi r^2) = 2r \times (\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}) + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$\Rightarrow S = -(\frac{\pi + 4}{2})r^2 + \frac{9}{2}r$$

$$\Rightarrow S' = -2(\frac{\pi + 4}{2})r + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow r = \frac{-4/5}{-(\pi + 4)} = \frac{4/5}{\pi + 4}$$

		$\frac{4/5}{\pi+4}$	
$S'_{(r)}$	+	0	−
$S_{(r)}$	↗	max	↘

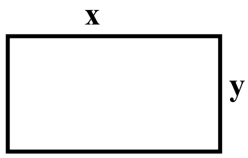
۱۸- کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

پاسخ:

الف)



پ $xy = 1000 \rightarrow y = \frac{10000}{x}$

$$p(x) = 2(2000000x) + 2(8000000 \times \frac{10000}{x}) = \frac{4 \times 10^6(x^2 + 40000)}{x}$$

ب)

$$p'(x) = 4 \times 10^6\left(\frac{2x^2 - x^2 - 10000}{x^2}\right) = 4 \times 10^6\left(\frac{x^2 - 40000}{x}\right)$$

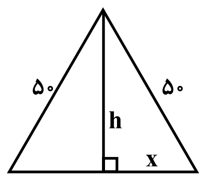
$$\xrightarrow{p'(x)=0} 4 \times 10^6\left(\frac{x^2 - 40000}{x^2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - 40000 = 0 \rightarrow x^2 = 40000 \rightarrow x = 200$$

$$x = 200 \xrightarrow{y=\frac{10000}{x}} y = 50$$

۱۹- الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز این مسئله را حل کنید.

پاسخ: الف)



$$h^2+x^2=50^2 \rightarrow h=\sqrt{2500-x^2}$$

$$S_{(x)}=\frac{1}{2}\times 2x\times h=x(\sqrt{2500-x^2}) \qquad D=[0/50]$$

$$S'_{(x)}=\sqrt{2500-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-x^2-x^2}{\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-2x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$$

$$\xrightarrow{S'_{(x)}=0} 2500-2x^2=0 \rightarrow x^2=\frac{2500}{2}=1250 \rightarrow \boxed{x=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{h=\sqrt{2500-x^2}} h=\sqrt{2500-1250}=\sqrt{1250} \rightarrow \boxed{h=25\sqrt{2}}$$

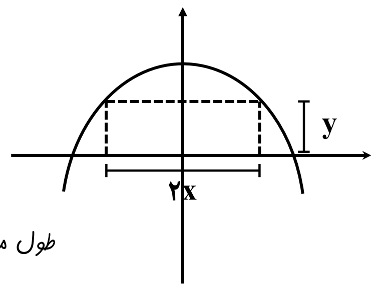
$$S_{(x)}=(25\sqrt{2})(\sqrt{2500-1250})=625\times 2=1250$$

ب) با توجه به $S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times\sin\theta$ *بیشترین مساحت وقتی است* $\sin\theta=1$ *باشد پس* $\theta=90^\circ$ *می‌شود. پس خواهیم داشت:*

$$S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times 1=1250$$

۲۰- ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگر بالای محور x ها روی سهمی $y=12-x^2$ باشند.

پاسخ:



$$S_{(x)}=2xy=2x(12-x^2)=24x-2x^3$$

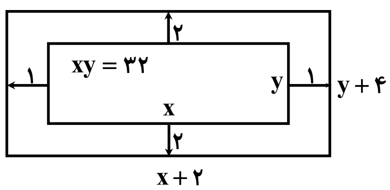
$$S'_{(x)}=24-6x^2 \xrightarrow{S'_{(x)}} 24-6x^2=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=2$$

$$\xrightarrow{y=12-x^2} y=12-4=8$$

طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن برابر ۲ است.

۲۱- هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن ثابت $32cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه 2cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

پاسخ:



$$S_{(x)}=(x+2)(y+4)=xy+4x+2y+8$$

$$\xrightarrow{xy=32} S_{(x)}=4x+2y+40 \xrightarrow{y=\frac{32}{x}} S_{(x)}=4x+\frac{64}{x}+40$$

$$S'_{(x)}=4-\frac{64}{x^2}=\frac{4x^2-64}{x^2} \xrightarrow{S'_{(x)}=0} 4x^2-64=0 \rightarrow x^2=16 \rightarrow x=4$$

ابعاد جعبه برابر است با:

$$\xrightarrow{y'=\frac{32}{x}} y=\frac{32}{4}=8$$

۲۲- آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او و بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. هم‌چنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ $\frac{m}{s}$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری بیابید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

پاسخ:

می‌دانیم زمان را می‌توانیم از فرمول $t=\frac{x}{V}$ بدست آوریم. پس:

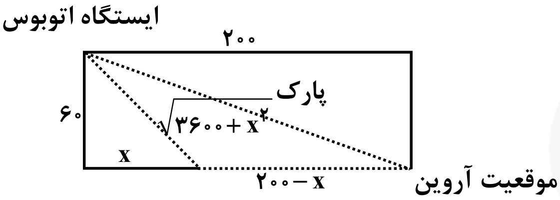
$$t=t_1+t_2 \text{ و } t_1=\frac{x_1}{v_1}=\frac{200-x}{3} \text{ و } t_2=\frac{x_2}{t_2}=\frac{\sqrt{3600+x^2}}{2}$$

$$\Rightarrow t=\frac{200-x}{3}+\frac{\sqrt{3600+x^2}}{2}=\frac{1}{6}(400-2x+3\sqrt{3600+x^2})$$

$$t'=\frac{1}{6}\left(-2+3\times\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{3600+x^2}}\right)\xrightarrow{t'=0}2=\frac{3x}{\sqrt{3600+x^2}}\Rightarrow 2\sqrt{3600+x^2}=3x$$

$$\xrightarrow{2}14400+4x^2=9x^2\rightarrow 5x^2=14400\Rightarrow x^2=2880$$

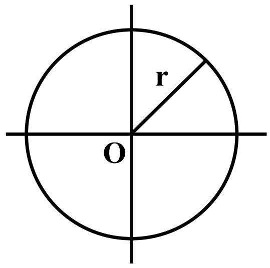
$$\Rightarrow t=\frac{1}{6}(400-2\times 24\sqrt{5}+3\sqrt{3600+2880})=100$$



۱- در حالت‌های زیر، معادله‌ی دایره را بنویسید.

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.

$x^۲ + y^۲ = ۴$



ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r.

$x^۲ + y^۲ = r^۲$

پ) دایره‌ای که از نقطه‌ی $(۱,-۳)$ بگذرد و مرکز آن $(۲,-۱)$ باشد.

$$r = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (-۱+۳)^۲} = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵} \to (x-۱)^۲ + (y+۳)^۲ = ۵$$

۲- با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید.

معادله دایره
$(x+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۴$

شعاع و مختصات مرکز دایره
$O(-۲,۳), r = ۲$

نقاط		
$C(-۲,۴)$	$B(۰,۳)$	$A(۱,۱)$
درون دایره	روی دایره	بیرون دایره

$(۱+۲)^۲ + (۱-۳)^۲ > ۴$ $(۰+۲)^۲ + (۳-۳)^۲ = ۴$ $(-۲+۲)^۲ + (۴+۳)^۲ < ۴$

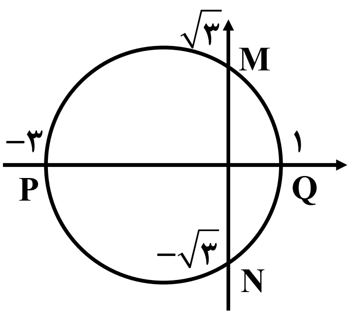
بیرون دایره $\boxed{\text{بیرون دایره}}$ $(۱,-۱)^۲ + (۱+۲)^۲ = ۹$ $\boxed{\text{دایره به مرکز } (۱,-۲) \text{ و شعاع ۳}}$ $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۹$

$(۰-۱)^۲ + (۳+۲)^۲ > ۹$ $(-۲-۱)^۲ + (۴+۲)^۲ > ۹$ روی دایره

۳- اگر معادله‌ی دایره‌ای به شکل $(x+۱)^۲ + y^۲ = ۴$ باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه‌ی شعاع دایره را بنویسید.

$O(-۱,۰), r = ۲$



ب) مختصات نقاط تقاطع این داره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$x = ۰ \to ۱^۲ + y^۲ = ۴ \to y^۲ = ۳ \to y = \pm\sqrt{۳}$ $N(۰,-\sqrt{۳}), M(۰,\sqrt{۳})$

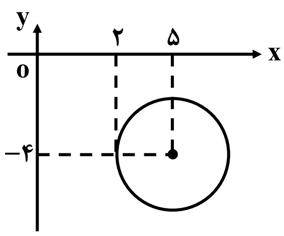
$y = ۰ \to (x+۱)^۲ = ۴ \to \begin{cases} x+۱ = ۲ \to x = ۱ \\ x+۱ = -۲ \to x+۱ = -۳ \end{cases}$ $Q(۱,۰), P(-۳,۰)$

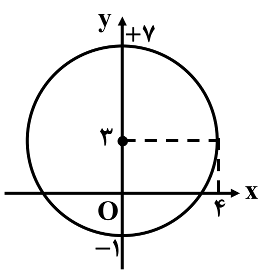
پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ‌های خود را به کمک شکل بررسی کنید.

۴- معادله‌ی دایره‌های زیر را بنویسید:

$r = ۳, O(۵,-۴)$

$(x-۵)^۲ + (y+۴)^۲ = ۹$





$r = ۴, O(۰,۳)$

$x^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶$

۵- معادله‌ی گسترده‌ی دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله‌ی دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

$$O\left|\begin{array}{l}\dfrac{-a}{2}=-\dfrac{-2}{2}=1\\[2mm] \dfrac{-b}{2}=-\dfrac{-6}{2}=3\end{array}\right. \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0\rightarrow \underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}+\underbrace{y^2-6y+9}_{(y-3)^2}=\underbrace{10-6}_{4=2^2}$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=4$$

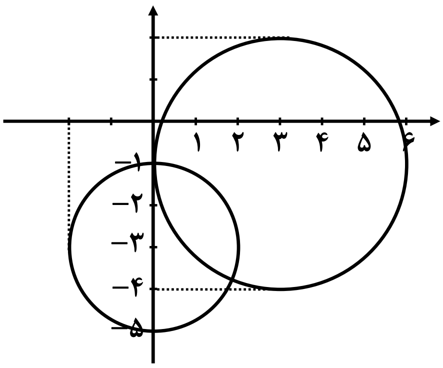
۶- در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه‌ی شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.

الف) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$

$$O\left|\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\right. \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-4}=3$$

ب) $x^2+(y+3)^2-4=0$

$$O'\left|\begin{array}{l}0\\-3\end{array}\right. \qquad r'=2$$



الف) $x=0 \quad y^2+2y+1=0\rightarrow y=-1\rightarrow A\left|\begin{array}{l}0\\-1\end{array}\right.$ بر محور y مماس است.

$y=0 \quad x^2-6x+1=0\rightarrow x_1,x_2=3\pm\sqrt{2}>0$ دایره درسمت راست مبدأ محور x ها را قطع می‌کند.

ب) $x=0 \quad (y+3)^2=4\rightarrow y=-1, y=-5$

$y=0 \quad x^2+9-4=0\rightarrow x^2=-5$ پس محور x ها را قطع نمی‌کند.

۷- در حالت‌های زیر معادله‌ی دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

$OC=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}=r \qquad (x-2)^2+(y+1)^2=5$

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطه‌ی $(-3,-9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

$CA=\sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2}=13=r \qquad (x-2)^2+(y-3)^2=169$

پ) دایره‌ای که نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

وسط دو نقطه $C\left[\dfrac{0+(-4)}{2}=-2,\dfrac{-1+3}{2}=1\right]$ وسط دو قطر برابر مرکز دایره است.

$2r=\sqrt{(-4-0)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}\rightarrow r=2\sqrt{2}$ فاصله دو نقطه برابر قطر دایره است.

$(x+2)^2+(y-1)^2=8$

۸- وضعیت نقاط $(1,0)$ ، $(0,-1)$ ، $(-1,-2)$ و $(0,0)$ را نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مشخص کنید.

نکته : اگر زمانی که نقطه را در معادله دایره صدق می‌دهیم جواب مثبت شود یعنی نقطه خارج دایره است.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$

$P(1,0)=1+0-2+0+1=0$ روی دایره

$P(0,0)=1>0$ خارج دایره

$P(-1,-2)=1+4+2-4+1=0$ روی دایره

$P(2,3)=4+9-6+2+1=10>0$ خارج دایره

۹- معادله‌ی گسترده‌ی یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه‌ی شعاع آن را پیدا کنید و معادله‌ی آن را به شکل استاندارد بنویسید.

$O\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+32}=\sqrt{10}$ $(x+1)^2+(y+1)^2=10$

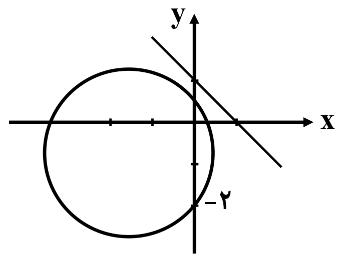
۱۰- در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) دایره‌ی $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ و خط $x+y=1$

$$x^2+y^2+2x+2y-1=0\rightarrow \underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}+\underbrace{y^2+2y+1}_{(y+1)^2}=\underbrace{3}_{(\sqrt{3})^2}$$

$O\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ $r=\sqrt{3}$ $d=\frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow d>r$

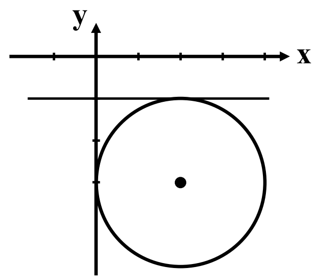
خط و دایره نقطه مشترک ندارند



ب) دایره‌ی $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$

$O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix}$ $r=2$ $d=\frac{|-3+1|}{\sqrt{0+1}}=\frac{2}{1}=2\Rightarrow d=r$

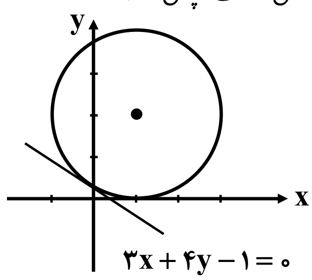
خط بر دایره مماس است.



۱۱- معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1,2)$ باشد.

چون خط بر دایره مماس است، پس فاصله نقطه تا خط برابر شعاع دایره است

$d=\frac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$ $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

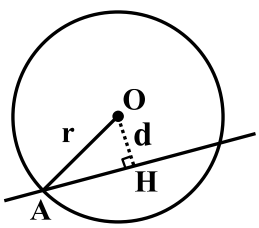


۱۲- مرکز دایره‌ای، نقطه‌ی $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله‌ی این دایره را بنویسید.

$d=\frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{5}=4$

$\overset{\Delta}{OAH}: r^2=4^2+3^2=25\rightarrow r=5$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$



۱۳- وضع خط های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $6x+4y=0 , x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$O\Big|^{2}_{2} \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{16+16-28}=1$

$d=\frac{|6(2)+4(2)|}{\sqrt{36+16}}=\frac{20}{\sqrt{52}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$

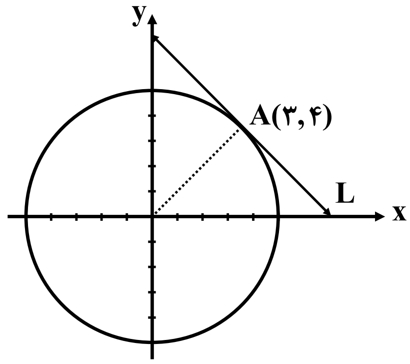
$d=\frac{10\sqrt{3}}{13}>r=1$ خط خارج دایره قرار دارد.

ب) $y=-x-2 , x^2+y^2=2$

$O\Big|^{0}_{0} \quad r=\sqrt{2}$

$x+y+2=0 \quad d=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2} \quad d=r=\sqrt{2}$ خط بر دایره مماس است.

۱۴- اگر بدانیم خط L در نقطه‌ی $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله‌ی خط مماس چیست؟



$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5=r$

$x^2+y^2=25$

$m_{OA}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}\to m'=-\frac{3}{4} \quad A\Big|^{3}_{4}$

$y-4=\frac{-3}{4}(x-3)\to 3x+4y-25=0$

m' شیب خط l است.

۱۵- معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه‌ی $(0,3)$ و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.

فاصله نقطه $(0,3)$ از خط برابر شعاع دایره است.

$d=\frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3=r$

$(x-0)^2+(y-3)^2=9\to x^2+(y-3)^2=9$

۱۶- با انجام مراحل زیر، معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر دایره $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه‌ی $O(2,-2)$ باشد:

- مختصات نقطه‌ی O'، مرکز دایره‌ی داده شده عبارت است از:

$O'\Big|^{-1}_{2}$

- اندازه‌ی r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با:

$r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$

- طول OO' برابر است با:

$OO'=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2}=5$

- شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که: $3+r=5$ پس شعاع r' باید برابر ۲ باشد.

- معادله‌ی دایره‌ی مطلوب را با معلوم بودن اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید:

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$

۱۷- برای حالت‌های زیر معادله‌ی دو دایره را بنویسید و پاسخ را با دوستانتان مقایسه کنید.

الف) دو دایره هم مرکز باشند.

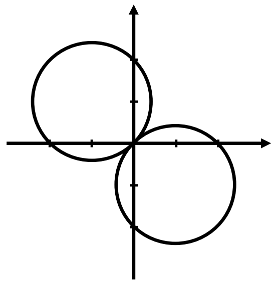
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R'^2 \qquad OO'=0$$

ب) دو دایره بیرون هم باشند.

$$(x-3)^2+(y-4)^2=4 \qquad x^2+y^2=1$$

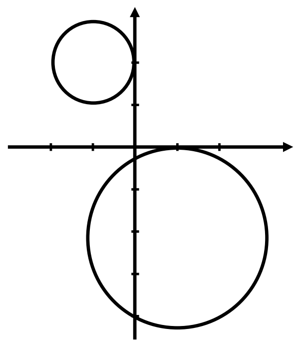
۱۸- برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2-2x+4y=0$ و $x^2+y^2+2x-4y=0$



$$O\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix} \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$$
$$O'\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix} \qquad r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$$
$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}\Rightarrow OO'=r+r'$$ دو دایره مماس خارجند

ب) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ و $(x+1)^2+(y-2)^2=1$



$$O\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix} \qquad r=1$$
$$O'\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix} \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$$
$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}\Rightarrow OO'>r+r'$$ دو دایره متقارجند

۱۹- مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2+y^2-2x+4y=4$ و $x^2+y^2+2x-4y=9$

$$O\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix} \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$$
$$O'\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix} \qquad r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+36}=\sqrt{14}$$

$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}\Rightarrow r-r'<OO'<r+r'$$ متقاطعند

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ و $x^2+(y-5)^2=5$

$$O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix} \qquad r=\sqrt{7} \qquad O'\begin{vmatrix}0\\5\end{vmatrix} \qquad r'=\sqrt{5}$$

$$OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=2\sqrt{17}\to OO'>r+r'$$ متقارجند

۲۰- معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ و با دایره‌ی $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

$$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=3+4+9 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=4^2$$

$$O\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right. \quad r=4 \quad O'\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right. \qquad d=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$d=|r-r'| \to 5=|r-4| \Rightarrow \begin{matrix} r-4=5 \to r=9 \\ r-4=-5 \to r=-1 \end{matrix} \qquad (x+1)^2+(y+1)^2=81$$

بیضی

۲۱- اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$ در این صورت فاصله کانونی را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \to a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 5^2=3^2+c^2 \to c=4$$

$$\text{فاصله کانونی}=2c=2\times 4=8$$

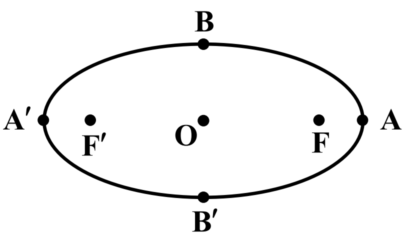
۲۲- در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4,5)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

$$\begin{cases} 2a=6 \to a=3 \\ 2b=4 \to b=2 \end{cases} \to a^2=b^2+c^2 \to c^2=3^2-2^2=5$$

$$\to c=\sqrt{5} \to \text{فاصله کانونی}=2c=2\sqrt{5}$$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.



$$O\left|\begin{matrix}\alpha=4\\ \beta=5\end{matrix}\right. \text{ و } A\left|\begin{matrix}\alpha+a=4+3=7\\ \beta=5\end{matrix}\right.$$

$$A'\left|\begin{matrix}\alpha-a=4-3=1\\ \beta=5\end{matrix}\right. \text{ و } B\left|\begin{matrix}\alpha=4\\ \beta+b=5+2=7\end{matrix}\right.$$

$$B'\left|\begin{matrix}\alpha=4\\ \beta-b=5-2=3\end{matrix}\right. \text{ و } F\left|\begin{matrix}\alpha+c=4+\sqrt{5}\\ \beta=5\end{matrix}\right.$$

$$F'\left|\begin{matrix}\alpha-c=4-\sqrt{5}\\ \beta=5\end{matrix}\right.$$

۲۳- کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

$$\begin{cases} F(1,3) \\ F'(1,-5) \end{cases} \Rightarrow |FF'|=|3-(-5)|=8=2c \to c=4$$

$$O=\frac{F+F'}{2} \Rightarrow O=\left(\frac{1+1}{2},\frac{3+(-5)}{2}\right)=(1,-1)$$

معادله قطر بزرگ: $x=1$ و معادله قطر کوچک: $y=-1$

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$a^2=b^2+c^2 \to b^2=6^2-4^2=20 \Rightarrow b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow BB'=4\sqrt{5} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۲۴- خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}\to c=\frac{۴}{۵}a \quad و \quad ۲b=۶\to b=۳$$

$$c^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵}a^۲=a^۲-۹\to a^۲=۲۵\to a=۵\to c=۴$$

$AA'=۲a=۲\times۵=۱۰\to$ طول قطر کانونی

مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

$$F\begin{vmatrix}-۴+۴=۰\\-۱\end{vmatrix} \quad و \quad F'\begin{vmatrix}-۴-۴=-۸\\-۱\end{vmatrix}$$

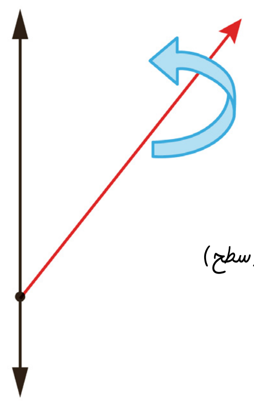
$$A\begin{vmatrix}-۴+۵=۱\\-۱\end{vmatrix} \quad و \quad A'\begin{vmatrix}-۴-۵=-۹\\-۱\end{vmatrix}$$

$$B\begin{vmatrix}-۴\\-۱+۳=۲\end{vmatrix} \quad و \quad B'\begin{vmatrix}-۴\\-۱-۳=-۴\end{vmatrix}$$

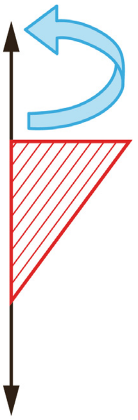
۲۵- شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آن‌ها را با هم مقایسه کنید:

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور

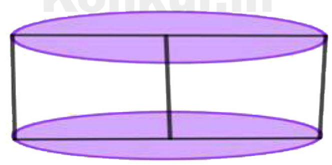
الف) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



مخروط نامتناهی (سطح)



مخروط تو پر

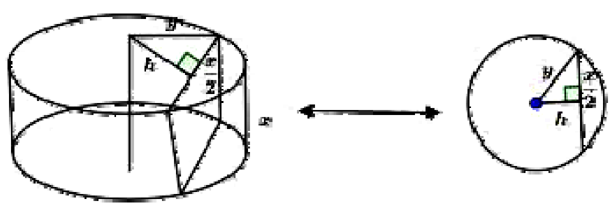


۲۶- مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

مخازن نفتی در زنجان



$$\text{فاصله صفحه قاطع تا محور دوران}=\sqrt{(\text{عرض مستطیل})^۲-\frac{۱}{۴}(\text{طول مستطیل})^۲}\Rightarrow h=\sqrt{y^۲-\frac{۱}{۴}x^۲}$$

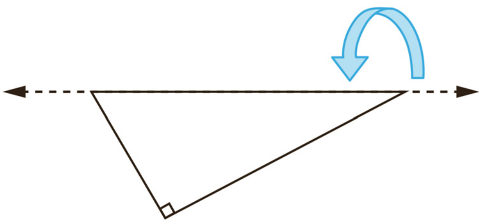
پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳و ۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده این استوانه چقدر است؟ $r=۴\to S=\pi r^۲=\pi(۴)^۲=۱۶\pi$

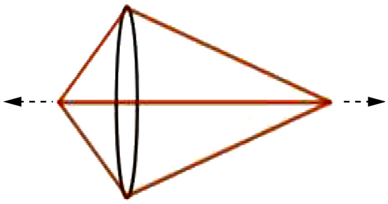
ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعده استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل قدر است؟

وقتی صفحه از محور بگذرد برقاعده عمود باشد همان مساحت مستطیلی است که طول آن دو برابر طول مستطیل و عرض آن، عرض مستطیل یعنی ۳ است.

مستطیلی به ابعاد ۳ و ۸ $S = ۳ \times ۸ = ۲۴$

۲۷- شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟

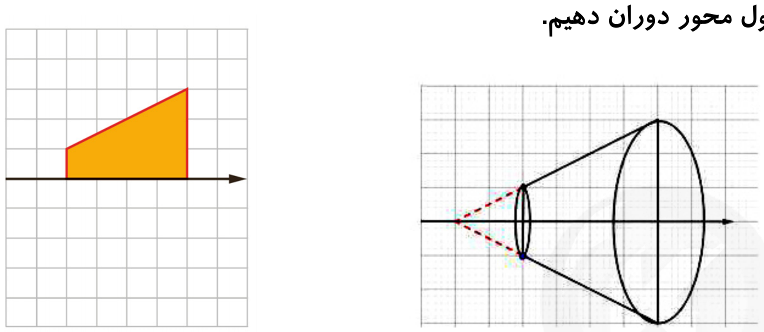




دو مخروط با قاعده مشترک

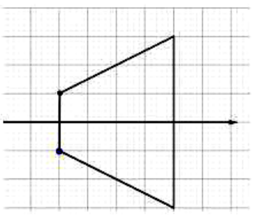
۲۸- در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.



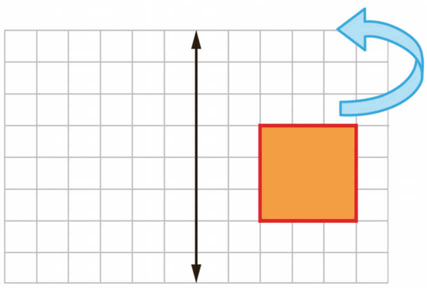
$$V - V_1 = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۶ - \frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲ \times ۲ = \frac{۵۲}{۳}\pi$$

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



$$S = \frac{۱}{۲}(۲+۶) \times ۴ = ۱۶$$

۲۹- مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.



الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

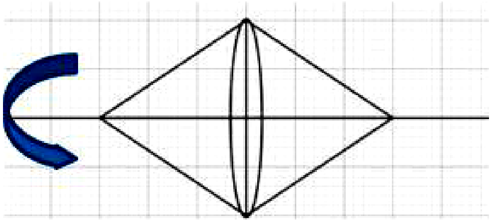
حجم شکل ـ حجم استوانه بزرگ ـ حجم استوانه کوچک

$$\pi \times ۵^۲ \times ۳ - \pi \times ۲^۲ \times ۳ = ۷۵\pi - ۱۲\pi = ۶۳\pi$$

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

سطح مقطع حوای با قاعده یک دایره تو خالی شعاع خارجی ۵ و شعاع داخلی ۲ است.

۳۰- اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

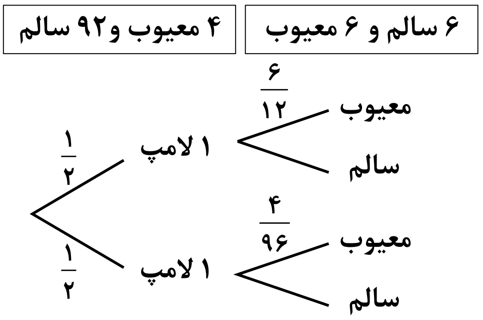


$$V = ۲\left(\frac{\pi}{۳} \times ۲^{۲} \times ۳\right) = ۸\pi$$

فصل ۷ احتمال

۱- دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن‌ها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴تا از آن‌ها معیوب‌اند به تصادف جعبه‌ای را انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چه‌قدر احتمال دارد لامپ موردنظر معیوب باشد؟

پاسخ:



$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹۶}=\frac{۴۸}{۱۹۲}+\frac{۴}{۱۹۲}=\frac{۵۲}{۱۹۲}=\frac{۱۳}{۴۸}$$

۲- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

پاسخ:

$$P(A)=\frac{۲۰}{۱۰۰}\quad,\quad P(B)=\frac{۵۰}{۱۰۰}\quad,\quad P(C)=\frac{۳۰}{۱۰۰}$$

$$P(D\,|\,A)=\frac{۳}{۱۰۰}\quad,\quad P(D\,|\,B)=\frac{۵}{۱۰۰}\quad,\quad P(D\,|\,C)=\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$P(D)=P(A)\times P(D\,|\,A)+P(B)\times P(D\,|\,B)+P(C)\times P(D\,|\,C)$$

$$=\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۵۰}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۶+۲۵+۳}{۱۰۰۰}=۰$$

$$=۰/۰۳۴=\%۳/۴$$

۳- یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$S=(R,PPPP,PPPR,PPRP,PRPP,PRRP,PRPR,PRRR,PPRR)$$

$$A=(R,PPPR,PPRP,PRPP)$$

$$P(A)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

۴- در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A و ۲تا از نوع B و ۱۵تا از نوع C وجود دارد. و احتمال این‌که عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد، برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$ برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

پاسخ:

A	۵
B	۲
C	۱۵

$$P(kh|A)=\frac{۴}{۵} \quad , \quad P(kh|B)=\frac{۹}{۱۰} \quad , \quad P(kh|C)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(kh)=P(A)\times P(kh|A)+P(B)\times P(kh|B)+P(C)\times P(kh|C)$$

$$P(kh)=\frac{۵}{۲۲}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۲۲}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱۵}{۲۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۱۱}+\frac{۹}{۱۱۰}+\frac{۱۵}{۴۴}=\frac{۴۰+۱۸+۷۵}{۲۲۰}=\frac{۱۳۳}{۲۲۰}$$

۵- مینا در انتخاب رشته‌ی خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته‌ی ریاضی، تجربی و انسانی مردود است. اگر او رشته‌ی ریاضی را انتخاب کند به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال این‌که او رشته‌ی ریاضی را انتخاب کند ۰/۱ احتمال این‌که رشته تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال این‌که رشته انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهدا شد؟

پاسخ:

$$p(\text{ق})=p(\text{ریاضی})\times p(\text{ق}|\text{ریاضی})+p(\text{تجربی})\times p(\text{ق}|\text{تجربی})+p(\text{انسانی})\times p(\text{ق}|\text{انسانی})$$

$$=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۴۵}{۱۰۰}+\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳۰}{۱۰۰}=\frac{۴۵+۶۰+۹۰}{۱۰۰۰}=\frac{۱۹۵}{۱۰۰۰}=\%۱۹/۵$$