جزوه درس هندسه ۲

مهندس نیما خانعلی پور

سرفصل های هندسه پایه یازدهم ریاضی:

شهرستان زیبای لنگرود

۰۹۱۱ ۸۴۱۱۵۹۱

Nima.khanalipoor@gmail.com

t.me/Riazi_khanalipoor

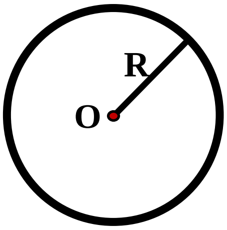
برای دریافت پاسخ تست ها به کانال سر بزنید

تازه کلی جزوه و نمونه سوال و مباحث آموزشی و مشاوره ای دیگه هم پیدا می کنید...!

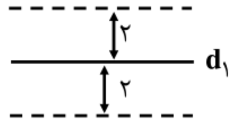
t.me/Riazi_khanalipoor

دایره

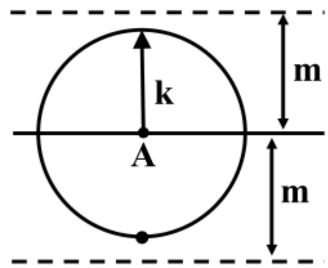
مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله ی آن ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره به اندازه ی R یا شعاع می باشد.



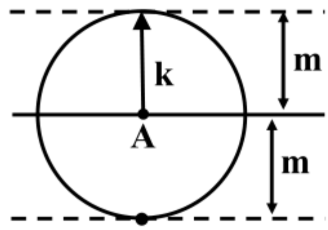
دو خط موازی:



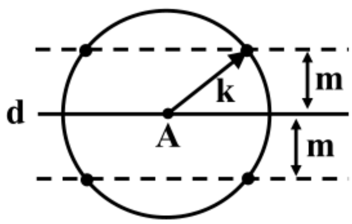
تذکر: حالاتی که نقاطی را بخواهیم که از نقطه A به فاصله K باشند و از خط d فاصله m را داشته باشند یکی از حالات زیر است.



$k < m$
(بدون جواب)

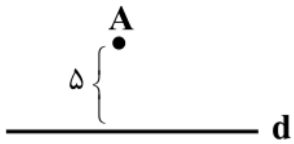


$k = m$
(۲ جواب)



$k > m$
(۴ جواب)

نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. چند نقطه وجود دارد که فاصله‌اش از A برابر ۴ و از خط d برابر ۲ باشد؟

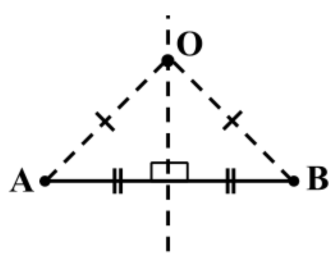


۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

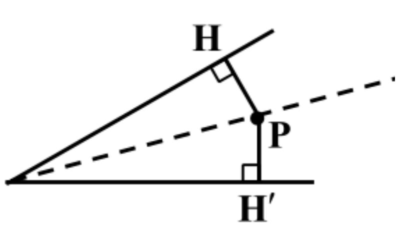
مربع $ABCD$ به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع $ABCD$ وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر ۱/۵ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

عمود منصف:

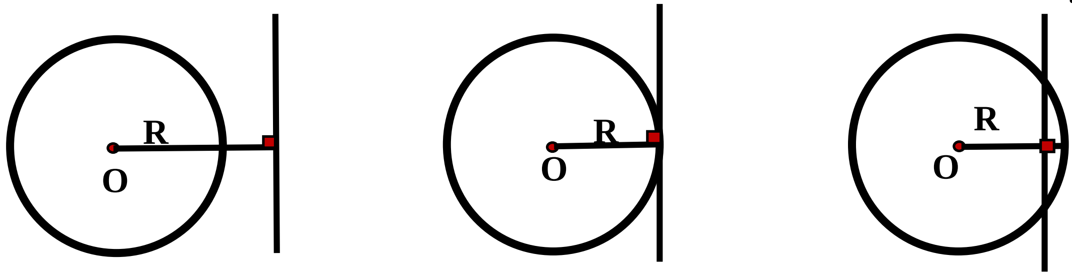


نیمساز:



وضعیت نسبی خط و دایره

کافی است فاصله ی مرکز دایره تا خط را به دست آوریم و با شعاع مقایسه کنیم، آن گاه خواهیم داشت:



«خط و دایره یکدیگر را قطع نمی کنند» $OH > R$

«خط بر دایره مماس است» $OH = R$

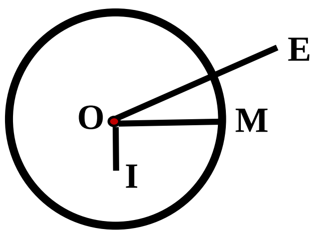
«خط دایره را در دو نقطه قطع می کند» $OH < R$

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است. $OI < R$

۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است. $OM = R$

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است. $OE > R$



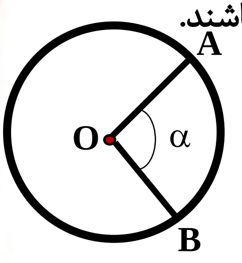
کمان در دایره

دو نقطه A , B واقع بر محیط دایره را اگر به هم وصل کنیم کمان AB را تشکیل می دهند که هر کمان قسمتی از محیط دایره است.

زاویه مرکزی

به زاویه ای گفته می شود که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع های آن شعاع های دایره باشند.

اندازه ی زاویه ی مرکزی با کمان روبه روی آن برابر است.



زاویه مرکزی $\hat{\alpha}$

$$AB = \alpha$$

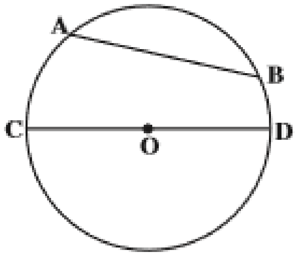
زاویه ی محاطی

زاویه ای است که رأسش روی محیط دایره و ضلع هایش وترهای دایره باشند.

اندازه ی زاویه ی محاطی نصف کمان روبه روی آن است.

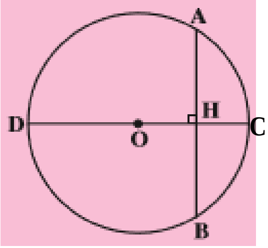
وتر

پاره خطی است که دو سر آن روی محیط دایره است. بزرگترین وتر در دایره قطر است. ($2R$)



قضیه

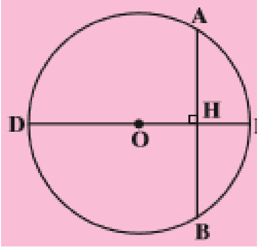
ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود به وتر، کمان نظیرش را نصف می کند.



$$\begin{cases} OB = OA = R \\ H_1 = H_2 = 90 \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow[\text{وتر و یک ضلع}]{\overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{BOH}} \begin{cases} AH = BH \\ O_1 = O_2 \rightarrow AC = BC \end{cases}$$

قضیه

ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن (که از مرکز دایره نگذشته باشد) وصل می کند، به آن عمود است.



$$\begin{cases} AH = HB \\ OB = OA = R \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow[\text{ض ض ض}]{\overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{BOH}} H_1 = H_2$$

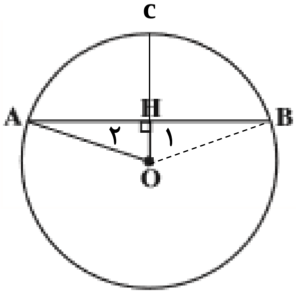
$$H_1 + H_2 = 180$$

$$2H_1 = 180$$

$$H_1 = H_2 = 90$$

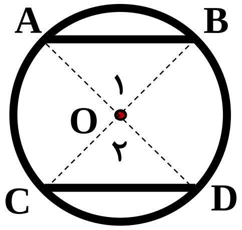
قضیه

ثابت کنید در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن وصل می کند، به آن وتر عمود است.



قضیه

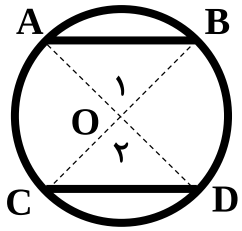
ثابت کنید در هر دایره کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.



$$\begin{cases} AB = CD \\ OA = OD \xrightarrow[\text{ض ض ض}]{\overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{COH}} O_۱ = O_۲ \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} AB = CD \\ OB = OC \end{cases}$$

عکس قضیه

ثابت کنید در هر دایره وترهای نظیر کمان های مساوی با هم برابرند.

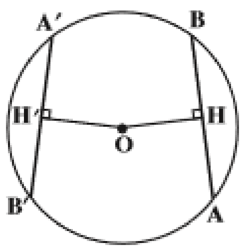


$$AB = CD \to \begin{cases} O_۱ = O_۲ \\ CO = OB \\ AO = OD \end{cases}$$

قضیه

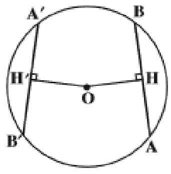
ثابت کنید در هر دایره وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله اند و برعکس.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$



$$\begin{cases} \frac{AB}{۲} = \frac{A'B'}{۲} \to A'H' = AH \\ H = H' = ۹۰ \\ OA = OA' \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} OH = OH'$$

اثبات عکس قضیه

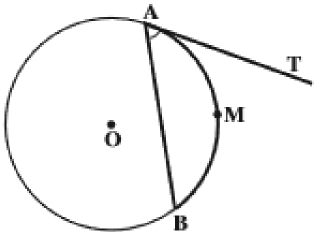


$$\begin{cases} OH = OH' \\ H = H' = ۹۰ \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} A'H' = AH \xrightarrow{\times ۲} AB = A'B' \\ OA = OA' = R \end{cases}$$

زاویه ظلی

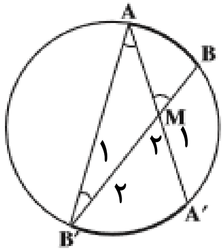
زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره است. یکی از اضلاعش مماس بر دایره است و ضلع دیگرش وتری از دایره است.

اندازه ی زاویه ی ظلی نصف کمان روبروی آن است.



زاویه ی بین دو وتر متقاطع

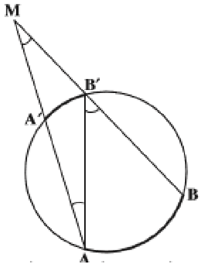
قضیه: ثابت کنید هرگاه از یک نقطه داخل دایره دو وتر رسم کنیم، زاویه ی حاصل بین دو وتر برابر است با نصف مجموع کمان های روبه رو به آن با کمان های محصور بین دو وتر.



$$M_{۱} = \frac{AA' + BB'}{۲} \qquad M_{۲} = \frac{AB' + A'B}{۲}$$

زاویه ی بین دو قاطع (امتداد دو وتر)

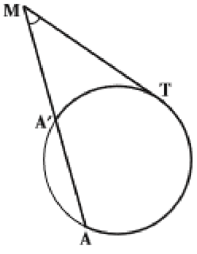
قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین دو قاطع (امتداد دو وتر) برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور بین دو وتر یا کمان های روبه رو به زاویه ی M.



$$M = \frac{AA' - BB'}{۲}$$

زاویه ی بین یک قاطع و یک مماس

قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین یک قاطع و یک مماس برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور بین قاطع و مماس (کمان های روبه رو به زاویه ی M)

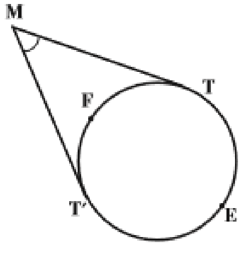


از B به T وصل می کنیم سپس خواهیم داشت:

$$M = \frac{|AT - BT|}{۲}$$

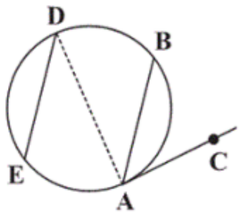
زاویه ی بین دو مماس

قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین دو مماس برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور بین دو مماس یا به عبارتی کمان های رو به رو به زاویه ی M.



$$M = \frac{|TET' - TFT'|}{۲}$$

– در شکل روبه‌رو $DE \parallel AB$ ، AC مماس بر دایره و $\overset{\frown}{AE} = ۱۱۰^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ کدام است؟ (AD قطر دایره است.)

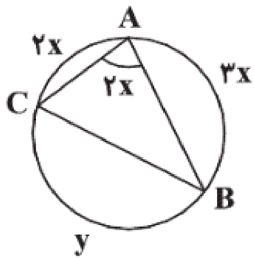


۱) ۳۵°
۲) ۷۰°
۳) ۴۰°
۴) ۴۵°

چون $DE \parallel AB$ ، پس $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{AE} = ۱۱۰^\circ$ است. لذا: $\overset{\frown}{AB} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{DB} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$

زاویهٔ $B\hat{A}C$ زاویه‌ای ظلی است پس: $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \dfrac{۷۰^\circ}{۲} = ۳۵^\circ$

با توجه به شکل مقابل، حاصل $y - x$ کدام است؟



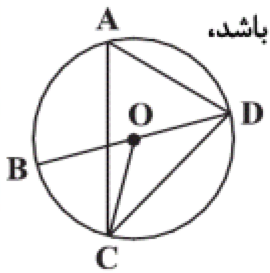
۱) ۹۰°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۳۵°

اندازهٔ زاویهٔ محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن است یعنی $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$ پس $۲x = \dfrac{y}{۲}$ ، در نتیجه: $y = ۴x$. با توجه به این‌که در هر دایره مجموع کمان‌ها برابر ۳۶۰° است، داریم:

$$۲x + y + ۳x = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{y=۴x} ۵x + ۴x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۹x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴۰^\circ \\ y = ۱۶۰^\circ \end{cases} \qquad y - x = ۱۶۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر $\hat{A} = ۷\alpha - ۱۰^\circ$ ، $C\hat{O}D = ۱۰\alpha + ۲۰^\circ$ و O مرکز دایره باشد، کمان $\overset{\frown}{BC}$ چند درجه است؟

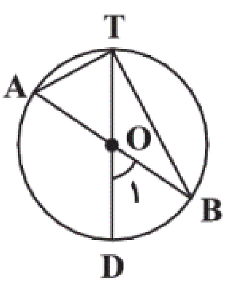


۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

$$\left.\begin{aligned} &\text{زاویهٔ محاطی } \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \\ &\text{زاویهٔ مرکزی } C\hat{O}D \Rightarrow C\hat{O}D = \overset{\frown}{DC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{C\hat{O}D}{۲} \Rightarrow C\hat{O}D = ۲\hat{A} \quad \Rightarrow ۱۰\alpha + ۲۰^\circ = ۲(۷\alpha - ۱۰^\circ) \Rightarrow ۱۰\alpha + ۲۰^\circ = ۱۴\alpha - ۲۰^\circ$$

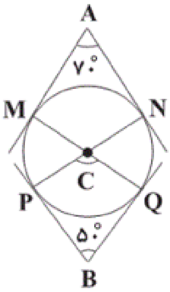
$$\Rightarrow ۴\alpha = ۴۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \;,\quad C\hat{O}D = ۱۲۰^\circ \quad \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - C\hat{O}D = ۶۰^\circ$$

در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = ۶۵^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ $O_۱$ کدام است؟



۱) ۶۵°
۲) ۶۰°
۳) ۵۰°
۴) ۴۵°

در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایرهٔ مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟



۱) $۱۰۰°$
۲) $۱۲۰°$
۳) $۸۰°$
۴) $۱۴۰°$

$$\begin{cases}\hat{A}=\dfrac{\widehat{MPN}-\widehat{MN}}{۲}\Rightarrow ۷۰°=\dfrac{\widehat{MPN}-\widehat{MN}}{۲}\Rightarrow \widehat{MPN}-\widehat{MN}=۱۴۰°\\ \hat{B}=\dfrac{\widehat{PMQ}-\widehat{PQ}}{۲}\Rightarrow ۵۰°=\dfrac{\widehat{PMQ}-\widehat{PQ}}{۲}\Rightarrow \widehat{PMQ}-\widehat{PQ}=۱۰۰°\end{cases}$$

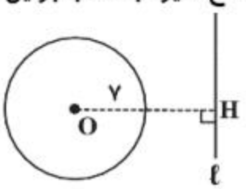
$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{MN}=\widehat{MPN}-۱۴۰°\\ \widehat{PQ}=\widehat{PMQ}-۱۰۰°\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\widehat{MN}=۳۶۰°-\widehat{MN}-۱۴۰°\Rightarrow\\ \widehat{PQ}=۳۶۰°-\widehat{PQ}-۱۰۰°\Rightarrow\end{cases}\begin{cases}\widehat{MN}=۱۱۰°\\ \widehat{PQ}=۱۳۰°\end{cases}$$

$$\hat{C}=\frac{\widehat{PQ}+\widehat{MN}}{۲}=\frac{۱۳۰°+۱۱۰°}{۲}=\frac{۲۴۰°}{۲}=۱۲۰°$$

دایرهٔ $C(O\,,۷)$ و خط ℓ به فاصلهٔ $۳a+۱$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطهٔ تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

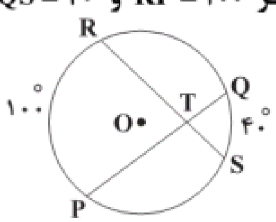
۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

می‌دانیم زمانی خط و دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند که فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مذکور، بیش‌تر از طول شعاع دایره باشد. بنابراین:



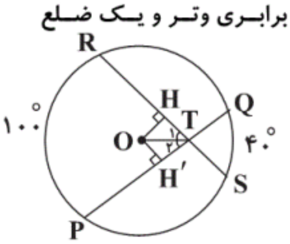
$$OH>۷\Rightarrow ۳a+۱>۷\Rightarrow ۳a>۶$$
$$\Rightarrow a>۲$$

در دایرهٔ $C(O\,,r)$، وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطهٔ T قطع کرده‌اند. اگر $\widehat{RP}=۱۰۰°$ و $\widehat{QS}=۴۰°$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OTR کدام است؟



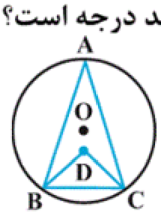
۱) $۷۰°$ ۲) $۳۵°$ ۳) $۳۰°$ ۴) $۴۰°$

از O به وترهای RS و PQ عمود می‌کنیم و پای عمود را به ترتیب H و H' نام‌گذاری می‌کنیم. چون وترهای RS و PQ برابرند پس فاصلهٔ آن‌ها از مرکز برابر است یعنی $OH=OH'$. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHT و $OH'T$ به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند (وتر OT و اضلاع OH' و OH). پس $\hat{T}_۱=\hat{T}_۲$ و در نتیجه OT نیمساز زاویهٔ PTR است. پس:



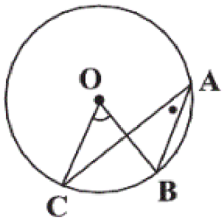
$$O\hat{T}R=\frac{۱}{۲}P\hat{T}R=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۰۰°+۴۰°}{۲}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲}(۷۰°)=۳۵°$$

در شکل زیر، نقطهٔ D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ B و C است. اگر $B\hat{D}C=۱۰۰°$، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟



۱) ۲۰
۲) ۸۰
۳) ۶۰
۴) ۴۰

دایرهٔ $C(O\,,\,۶)$ مفروض است. اگر $\hat{O} = (۲x + ۱۰)^\circ$ و $\hat{A} = (۳x - ۳۵)^\circ$ باشد، طول کمان BC کدام است؟



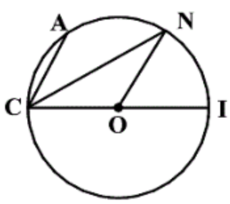
۱) $\frac{۵\pi}{۳}$

۲) ۲π

۳) $\frac{۸\pi}{۳}$

۴) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

در شکل مقابل، CI قطر دایره و $ON \parallel CA$. اگر $\widehat{AC} = ۴۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



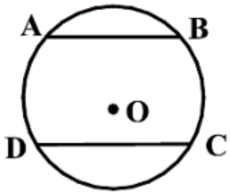
۱) $۲۷/۵^\circ$

۲) ۳۰°

۳) ۳۵°

۴) $۳۲/۵^\circ$

مطابق شکل زیر، در دایرهٔ به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = ۶$ و $CD = ۸$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟



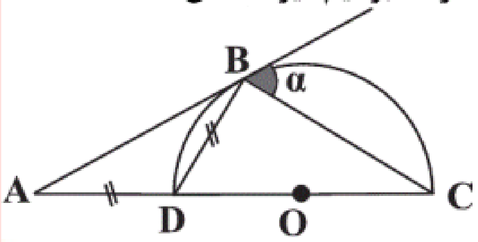
۱) ۵۶

۲) ۴۹

۳) ۴۲

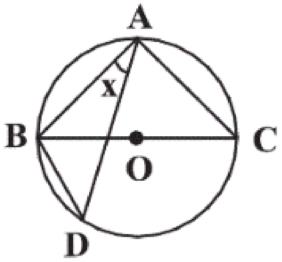
۴) ۳۵

مطابق شکل در نیم‌دایره‌ای به مرکز O، زاویهٔ α چند درجه است؟ (AB در B بر نیم‌دایره مماس است.)



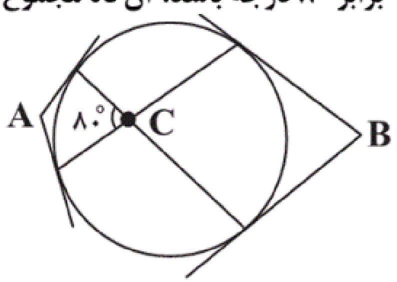
۱) ۴۵
۲) ۵۰
۳) ۵۵
۴) ۶۰

در شکل مقابل، $AB = AC$ و $\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC} = 130^\circ$ می‌باشد. اندازهٔ $B\hat{A}D = x$ کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



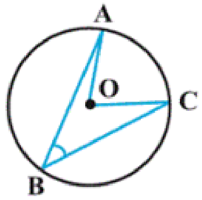
۱) 10°
۲) 20°
۳) 30°
۴) 35°

مطابق شکل از نقاط A و B بر دایره مماس‌هایی رسم می‌کنیم. اگر اندازهٔ زاویهٔ C برابر ۸۰ درجه باشد، آن‌گاه مجموع دو زاویهٔ A و B چند درجه است؟



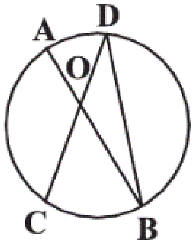
۱) ۸۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۶۰
۴) ۲۰۰

مطابق شکل مقابل، دایرهٔ C(O , ۲) مفروض است. اگر طول کمان AC برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ ABC کدام است؟



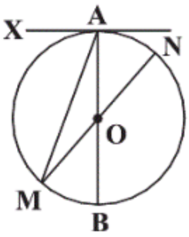
۱) $22/5^\circ$
۲) 45°
۳) 60°
۴) 75°

در شکل زیر، AB قطر دایره می‌باشد و نقاط C و D به گونه‌ای قرار دارند که $CD = BD$. اگر $A\hat{O}D = 45^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ ADC کدام است؟



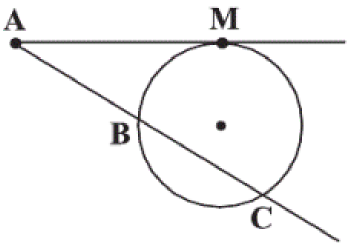
۱) 75°
۲) 60°
۳) 30°
۴) 15°

در شکل زیر، AB و MN قطرهای دایره‌ای به مرکز O هستند. اگر AX در نقطهٔ A مماس بر دایره و $\widehat{BN} = 5\widehat{AN}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ XAM کدام است؟



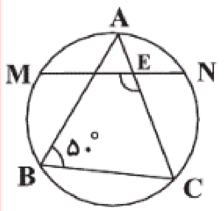
۱) 80°
۲) 75°
۳) 60°
۴) 50°

در شکل زیر، AM مماس بر دایره و $\widehat{BC} = \widehat{CM} = \frac{3}{2}\widehat{BM}$ می‌باشد. زاویهٔ A چند درجه است؟ (A، B و C در یک امتدادند.)



۱) ۲۲/۵
۲) ۳۵
۳) ۲۵
۴) ۳۲/۵

در شکل مقابل، A وسط $\widehat{MN}$ است. اگر E محل برخورد MN با AC باشد، اندازهٔ $M\hat{E}C$ کدام است؟



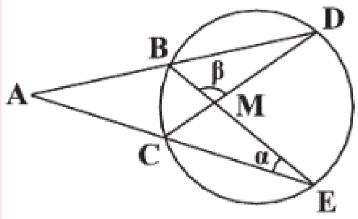
۱) °۱۰۰

۲) °۱۵۰

۳) °۱۳۰

۴) °۱۰۵

در شکل زیر، امتداد وترهای BD و CE یکدیگر را در نقطهٔ A و وترهای BE و CD یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. اگر $\alpha = 20^\circ$ و $\beta = 110^\circ$ باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟



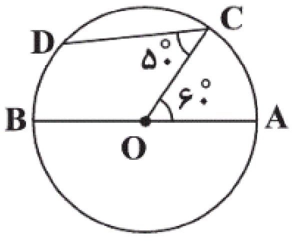
۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۳۰

۴) ۳۵

در شکل زیر، دایره‌ای به مرکز O و قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی محیط دایره طوری قرار گرفته‌اند که $A\hat{O}C = 60^\circ$ و $O\hat{C}D = 50^\circ$. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟



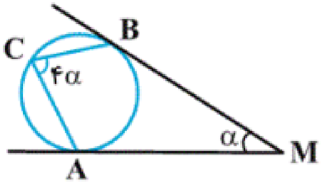
۱) ۷۰

۲) ۶۰

۳) ۵۰

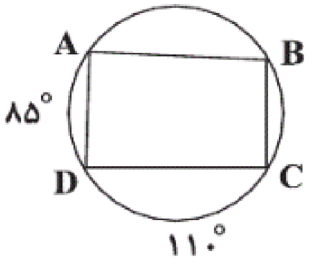
۴) ۴۰

در شکل زیر، MA و MB بر دایره مماس‌اند و اندازهٔ زوایای M و C به‌ترتیب برابر α و 4α است. مقدار α چند درجه است؟



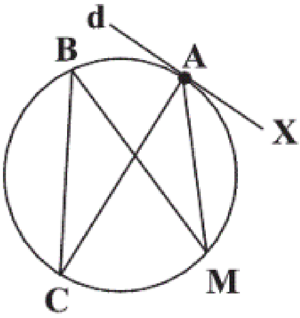
۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۱۵

در شکل مقابل، قطرهای چهارضلعی ABCD با هم برابرند. اندازهٔ کمان AB چند درجه می‌تواند باشد؟



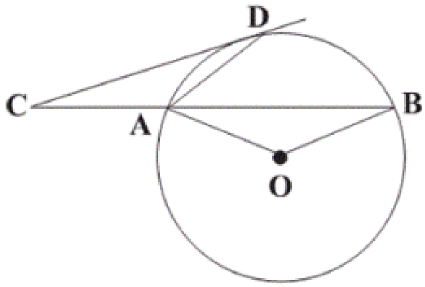
۱) ۷۰
۲) ۸۰
۳) ۹۰
۴) ۸۵

در شکل روبه‌رو، خط d در نقطهٔ A بر دایره‌ای به قطر AC مماس است. اگر زاویهٔ MAX برابر ۴۴ درجه باشد، اندازهٔ زاویهٔ MBC کدام است؟



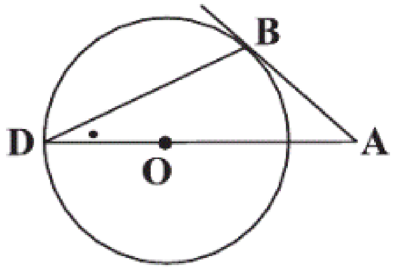
۱) °۴۲
۲) °۴۴
۳) °۴۶
۴) °۴۸

در شکل زیر CD (در نقطهٔ D) مماس بر دایره‌ای به مرکز O است. اگر $AC = AD$ باشد، زاویهٔ AOB چند برابر زاویهٔ ACD است؟ (A، B و C در یک امتدادند.)



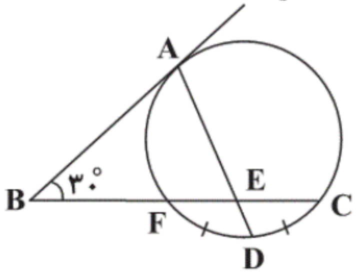
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

مطابق شکل در دایرهٔ $C(O, ۵)$، هرگاه طول مماس AB برابر ۵ باشد، اندازهٔ زاویهٔ D کدام است؟ (D محل برخورد امتداد AO با دایره است.)



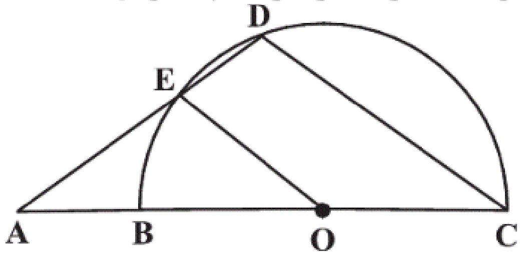
۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) ۶۰°
۴) $۲۲/۵^\circ$

در شکل زیر، نیم‌خط BA در نقطهٔ A بر دایره مماس است و $\widehat{FD} = \widehat{DC}$. اگر $\hat{B} = ۳۰^\circ$ باشد، $A\hat{E}C$ کدام است؟



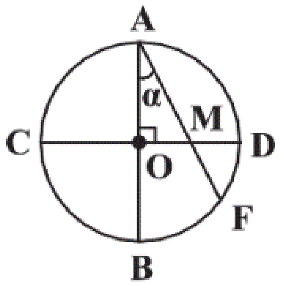
۱) ۱۱۵°
۲) ۱۱۰°
۳) ۱۰۵°
۴) ۱۰۰°

در شکل زیر، امتداد قطر BC و وتر DE یکدیگر را در نقطهٔ A قطع نموده‌اند. اگر O مرکز نیم‌دایره و $\widehat{BE} = 30^\circ$ باشد، زاویهٔ A کدام است؟ $(OE \parallel CD)$



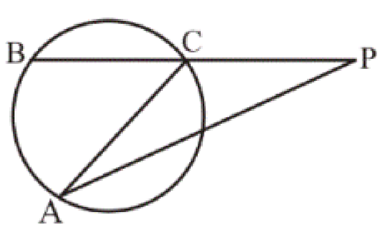
۱) 25°
۲) 35°
۳) 45°
۴) 30°

در شکل زیر، $OM = MF$ و دو قطر AB و CD بر هم عمودند. در این صورت اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟



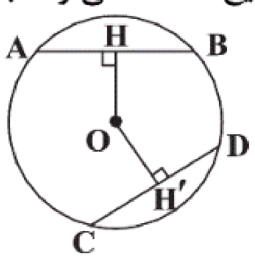
۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۶۰

در شکل زیر، اگر $\hat{P} = 32^\circ$ و مثلث ACP متساوی‌الساقین باشد $(AC = CP)$، کمان AB چند درجه است؟



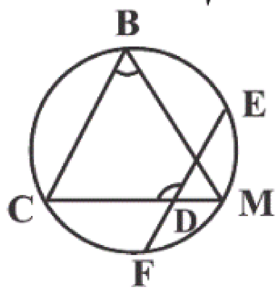
۱) ۶۹
۲) ۷۴
۳) ۸۶
۴) ۱۲۸

در دایرهٔ مقابل، $OH < OH'$ و داریم $AB = 2x - 1$ و $CD = 3 - x$. مقدار x چند عدد صحیح مختلف می‌تواند باشد؟



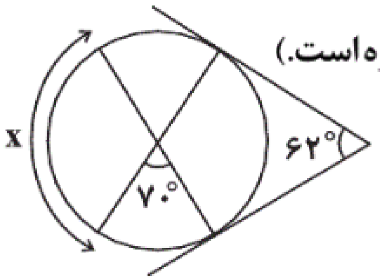
۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

در شکل مقابل، M وسط کمان EF و $\widehat{BC}=50^\circ$ است. حاصل $\hat{B}+\hat{D}$ کدام است؟



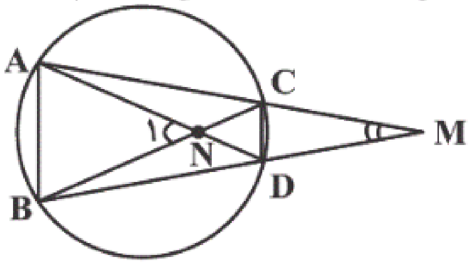
۱) 160°
۲) 175°
۳) 180°
۴) 230°

در شکل زیر، زاویهٔ بین دو مماس و زاویهٔ بین دو وتر درون دایره به‌ترتیب برابر با 62° و 70° می‌باشد، اندازهٔ کمان x کدام است؟ (محل برخورد مماس‌ها با وترها روی محیط دایره است.)



۱) 110°
۲) 102°
۳) 105°
۴) 98°

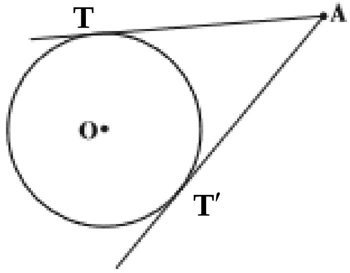
در شکل مقابل، AB ضلع یک هشت‌ضلعی منتظم و CD ضلع یک دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره می‌باشند. حاصل $|\hat{M}-\hat{N}_1|$ کدام است؟



۱) ۴۵ درجه
۲) ۴۰ درجه
۳) ۳۵ درجه
۴) ۳۰ درجه

خطوط مماس بر دایره

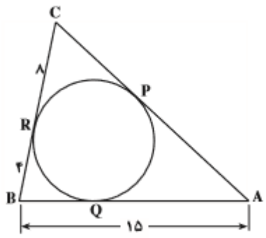
اگر از نقطه ای خارج از دایره دو خط بر دایره مماس کنیم، قطعا طول این مماس ها با هم برابر است و روابطی را در دایره ایجاد می کند.



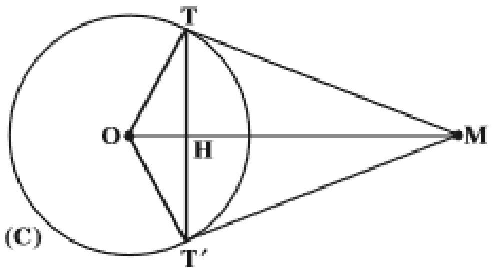
$$AT = AT'$$

مثال

در شکل زیر ضلع های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در نقطه های Q , P , R بر دایره مماس اند. با توجه به مقدارهای داده شده، ضلع AC را به دست آورید.

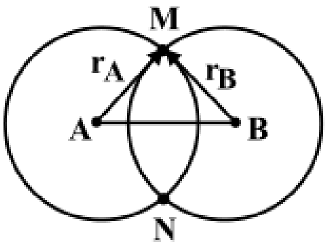


- OM نیمساز $\hat{O}$ و نیمساز $\hat{M}$ است.
- OM عمود منصف TT' است.
- $OH \times OM = R^{2}$
- $TT'^{2} = 4OH \times MH$
- $TT' \times OM = 2R \times MT$
- $MT = MT'$

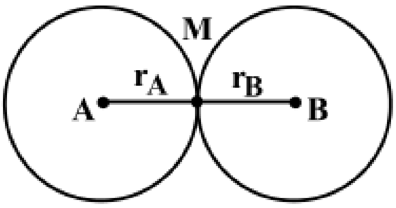


وضعیت دو دایره نسبت به هم

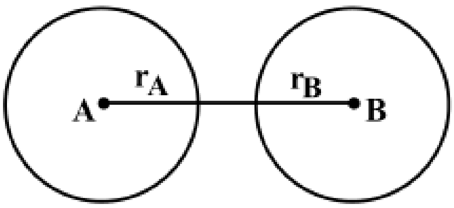
باید فاصله ی دو مرکز را به دست آورده (خط المرکزین) و AB بنامیم و آن را با جمع و تفاضل دو شعاع مقایسه کنیم.



طول $r_A + r_B > AB$
(مساله ۲ جواب دارد)



طول $r_A + r_B = AB$
(مساله ۱ جواب دارد)



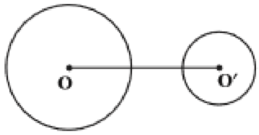
طول $r_A + r_B < AB$
(مساله جواب ندارد)

یادآوری

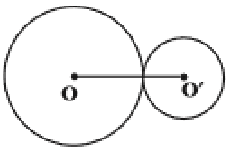
فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\sqrt{(x_A-x_B)^{۲}+(y_A-y_B)^{۲}}$$

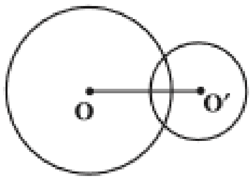
«متخارج» : $d>R+R'$



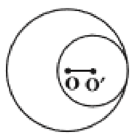
«مماس خارج» : $d=R+R'$



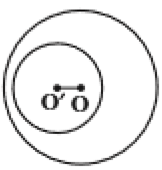
«متقاطع» : $|R-R'|<d<R+R'$



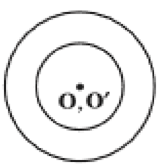
«مماس داخل» : $d=|R-R'|$



«متداخل» : $d<|R-R'|$



«هم مرکز» : $d=۰$



مثال

اگر دو دایره را به مراکز $O(۲,-۳)$ و $O'(۱,۴)$ داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی دوم ۳ باشد، دو دایره در چه وضعیتی نسبت به هم قرار دارند؟

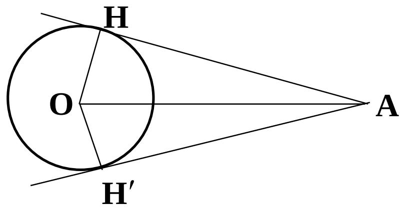
$$R=۲,R'=۳$$

$$d=\sqrt{(۱-۲)^{۲}+(۴+۳)^{۲}}=\sqrt{۱+۴۹}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

$$d=۵\sqrt{۲},R+R'=۵\to d>R+R'$$ متخارج

قضیه

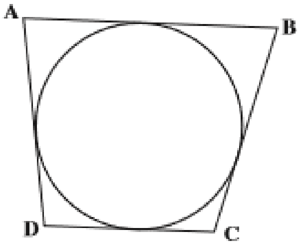
ثابت کنید طول مماس های رسم شده از نقطه خارج از دایره بر دایره، با هم برابرند.



$$\begin{cases} OH = OH' \\ H = H' = ۹۰^\circ \rightarrow AH = AH' \\ AO = AO \end{cases}$$

چندضلعی های محیطی

چندضلعی که همه ی اضلاع آن بر دایره ای مماس باشد، چندضلعی محیطی است و به آن دایره، دایره ی محاطی گوییم.



نکته

در هر چهارضلعی محیطی، جمع اضلاع مقابل با هم برابر است.

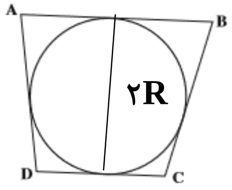
$$AB + DC = BC + AD \longleftrightarrow \text{چهارضلعی محیطی}$$

نکته

یک چهارضلعی محیطی است اگر نیمسازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس باشند. (آن نقطه مرکز دایره ی محاطی است.)

در بین چهارضلعی های معروف فقط مربع و لوزی همواره محیطی هستند.

شرط لازم و کافی برای این که یک ذوزنقه محیطی باشد، آن است که:



$$(\underbrace{۲R}_{\text{ارتفاع}})^۲ = AB \times CD$$

تمرین

یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

$$S = ۴۵$$

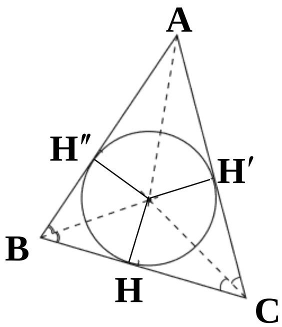
$$۴۵ = \frac{۱}{۲}(a+b)\times ۶ \rightarrow ۴۵ = ۳(a+b) \rightarrow a+b = ۱۵ \div ۲ = ۷/۵$$

$$= AD + BC \rightarrow a+b = AD + BC$$ قاعده بزرگ+قاعده کوچک، چون چهارضلعی محیطی

$$۱۵ = AD + BC \rightarrow AD = BC = ۷/۵$$

دایره محاطی مثلث

قبلا در رابطه با دایره ی محاط مثلث توضیح داده بودیم شعاع آن $r=\dfrac{S}{P}$ بود و $OH=OH'=OH''$ و همچنین گفتیم که هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد که شعاع های آن ها برابر است با: (S مساحت مثلث و P نصف محیط است)

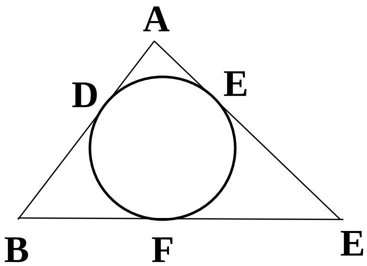


$r_a=\dfrac{S}{P-a}$: دایره بر ضلع مثلث به طول a مماس است

$r_b=\dfrac{S}{P-b}$: دایره بر ضلع مثلث به طول b مماس است

$r_c=\dfrac{S}{P-c}$: دایره بر ضلع مثلث به طول c مماس است

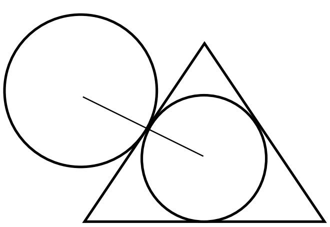
محاسبه ی هر قطعه که دایره محاطی داخلی مثلث روی اضلاع آن جدا می کند برابر است با نصف محطی منهای اندازه ی ضلع مقابل به زاویه ی رأس.



$$\begin{cases}AD=AE=P-a\\BD=BF=P-b\\CE=CF=P-c\end{cases}$$

مثال

در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ ، طول خط المرکزین دو دایره ی محاطی داخلی و محاطی خارجی آن کدام است؟



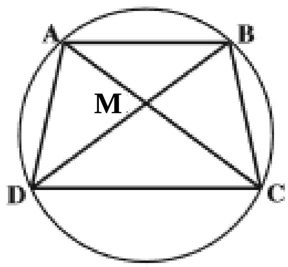
$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳a}{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳})^{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۳}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

$$r'=\frac{S}{P-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳a}{۲}-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳})^{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۳}{\frac{۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳}{۲}$$

$$r+r'=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

چندضلعی محاطی

اگر همه رأس های چندضلعی روی دایره قرار داشته باشند، آن چندضلعی را محاطی می گوییم و به آن دایره، دایره ی محیطی چندضلعی گفته می شود.



- مرکز دایره ی محیطی چندضلعی، محل برخورد عمودمنصف های اضلاع آن چندضلعی است.
- اگر در یک چهارضلعی زاویه های روبرو مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است و برعکس.
- یک چهارضلعی محاطی است اگر:

$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$$

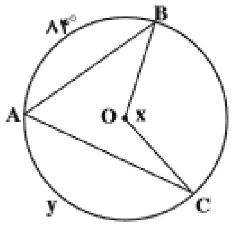
$$\begin{cases} MA\times MC=MB\times MD \\ AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD \end{cases}$$

مثال

دو زاویه ی مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰ و ۱۲۰ درجه می باشند. تفاضل دو زاویه دیگر چقدر است؟ $100^\circ-60^\circ=40^\circ$

چند مسئله از کتاب درسی

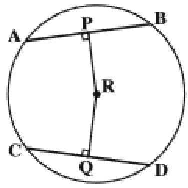
۱- در شکل روبرو:



الف) اگر $\overset{\frown}{y}=140^\circ$، آن گاه اندازه ی زاویه ی x را به دست آورید.

ب) اگر $x=165^\circ$ آن گاه اندازه ی کمان $\overset{\frown}{y}$ را به دست آورید.

۲- با توجه به شکل روبرو:



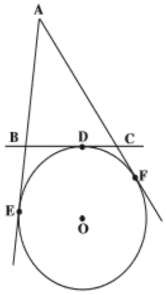
الف) اگر طول شعاع ۱۰ و $PR=6$، آن گاه طول AP , AB را به دست آورید.

$$r^2=36+AP^2 \to r^2=100 \to AP^2=100-36 \to AP=8 \to 2AP=8$$

ب) اگر $CQ=RQ, RC=\sqrt{2}$ باشد، آن گاه طول پاره خط های CQ , DQ , CD را به دست آورید.

$$2x^2=2 \to x=1$$

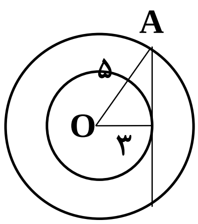
۳- خط های BC , AF , AE به ترتیب در نقاط D , F , E بر دایره O مماس هستند. مماس BC، خط های AF , AE را به ترتیب در نقاط B , C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه ی D روی دایره بین دو نقطه ی E , F ثابت محیط مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ثابت می ماند.



محیط مثلث
$$AB+BC+AC=AB+(BD+DC)+AC=$$
$$AB+EB+CF+AC=AE+AF\xrightarrow{AE=AF}$$
$$=AE+AE=۲AE=۲AF$$

بنابراین محیط به نقطه ی D بستگی ندارد و جابه جایی تأثیری در آن نخواهد داشت.

۴- شعاع های دو دایره ی هم مرکز ۳ و ۵ سانتی متر هستند. اندازه ی وتری از دایره بزرگتر که بر دایره ی کوچکتر مماس است را پیدا کنید.



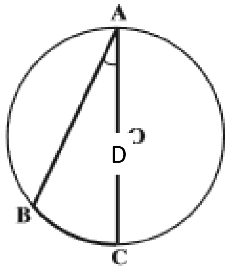
$$OH^۲+AH^۲=OA^۲$$
$$۹+AH^۲=۲۵$$
$$AH^۲=۱۶\rightarrow AH=۴\rightarrow AA'=۲\times AH=۲\times۴=۸$$

قضیه

ثابت کنید اندازه ی زاویه ی محاطی نصف کمان روبه روی آن است. این قضیه در ۳ حالت اثبات می شود:

الف) یکی از اضلاع زاویه از مرکز دایره عبور کند.

از مرکز دایره به نقطه ی B وصل می کنیم تا مثلث OAB به دست آید:



حکم $A_۱=\frac{BD}{۲}$

متساوی الساقین $\overset{\Delta}{OAB}:OA=OB=r\rightarrow B_۱=A_۱$

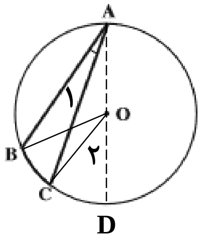
$$O_۱=A_۱+B_۱\rightarrow O_۱=۲A_۱\rightarrow O_۱=BD=۲A_۱\rightarrow A_۱=\frac{BD}{۲}$$

ب) دو ضلع زاویه در یک طرف مرکز باشند.

از رأس A قطر گذرنده از مرکز را رسم می کنیم و از مرکز به نقطه ی B رسم می کنیم:

$$O_۱=A+B_۱\xrightarrow{OA=OB=r}O_۱=۲A\rightarrow BD=۲A\rightarrow A=\frac{BD}{۲}(۱)$$

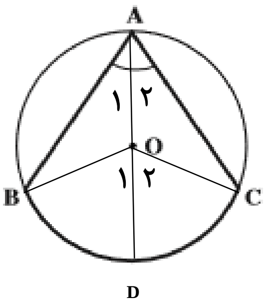
سپس از مرکز دایره به نقطه ی C وصل می کنیم آن گاه چون مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ متساوی الساقین است :



$$OA=OC=r\rightarrow C_۱=A_۲$$
$$O_۲=A_۲+C_۱=۲A_۲\Rightarrow CD=۲A_۲\Rightarrow A_۲=\frac{CD}{۲}(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow A-A_۲=\frac{BD}{۲}-\frac{CD}{۲}=\frac{BC}{۲}\rightarrow A_۱=\frac{BC}{۲}$$

پ) دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز باشند

از رأس A قطر گذرنده از مرکز را رسم می کنیم. سپس از B , C به مرکز وصل می کنیم. آن گاه:



$$\overset{\triangle}{OAB}: OA = OB = r \rightarrow A_1 = B$$

$$O_1 = A_1 + B = 2A_1 \rightarrow A_1 = \frac{O_1}{2} = \frac{BD}{2} \; (1)$$ زاویه خارجی

$$\overset{\triangle}{OAC}: OA = OC = r \rightarrow A_2 = C$$

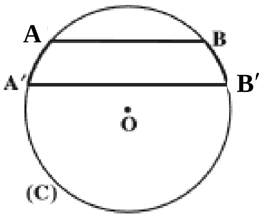
$$O_2 = A_2 + C = 2A_2 \rightarrow A_2 = \frac{O_2}{2} = \frac{CD}{2} \; (1)$$ زاویه خارجی

$$A = A_1 + A_2 \xrightarrow{(1),(2)} A = \frac{BD}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2}$$

قضیه

ثابت کنید در هر دایره کمان های محصور بین وترهای موازی با هم برابرند.

از A به B' وصل می کنیم سپس خواهیم داشت:

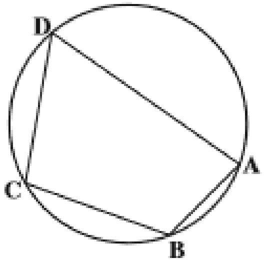


$$AB \parallel A'B', AB' \text{ مورب} \rightarrow B_1 = A_1$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{BB'}{2} \quad \text{محاطی} \\ B_1 &= \frac{AA'}{2} \quad \text{محاطی} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{BB'}{2} = \frac{AA'}{2} \Rightarrow AA' = BB'$$

قضیه

ثابت کنید در چهارضلعی محاطی زوایای روبرو مکمل اند.

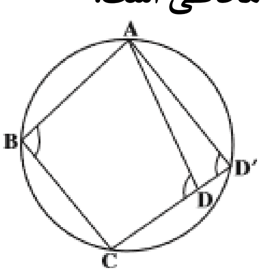


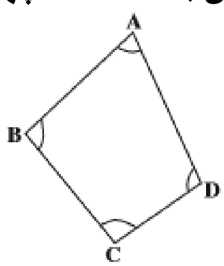
$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{BCD}{2} \quad \text{محاطی} \\ C &= \frac{BAD}{2} \quad \text{محاطی} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} A + C = \frac{BCD + BAD}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{ADC}{2} \quad \text{محاطی} \\ D &= \frac{ABC}{2} \quad \text{محاطی} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} B + D = \frac{ADC + ABC}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

عکس قضیه

ثابت کنید هر گاه در یک چهارضلعی زوایای روبه رو مکمل باشند، آنگاه چهارضلعی محاطی است.





اثبات

می دانیم از هر سه نقطه حتما یک دایره می گذرد. بنابراین از سه نقطه ی A,B,C دایره ای عبور می دهیم و فرض می کنیم این دایره از نقطه ی D عبور نمی کند. CD را ادامه می دهیم تا دایره را در D' قطع کند آن گاه خواهیم داشت: چون $ABCD'$ محاطی است:

$$\left.\begin{array}{l} B+D'=۱۸۰ \\ B+D=۱۸۰ \end{array}\right\} \rightarrow D=D'(۱)$$

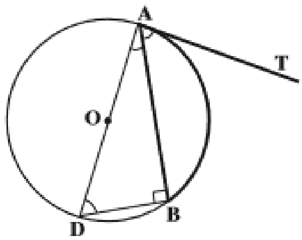
از طرفی طبق شکل D زاویه ی خارجی $\overset{\Delta}{AD'D}$ می باشد:

$$D=A+D' \rightarrow D>D'(۲)$$

طبق رابطه ی (۱)و(۲) به تناقض در فرض اولیه می رسیم.پس چهار نقطه روی یک دایره اند.

قضیه

ثابت کنید اندازه ی زاویه ی ظلی نصف کمان روبروی آن است.



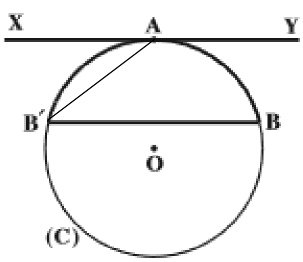
$$\left.\begin{array}{l} B=۹۰^\circ \to A_۲+D=۹۰^\circ \\ AT \to A_۱+A_۲=۹۰^\circ \end{array}\right\} \to A_۱=D(۱)$$

$$D=\frac{AB}{۲}\xrightarrow{(۱)}A_۱=\frac{AB}{۲}$$

تمرین

خط xy در نقطه ی A بر دایره ی C مماس است. وتر BB' از دایره را موازی xy رسم کرده ایم.

ثابت کنید: $AB=AB'$



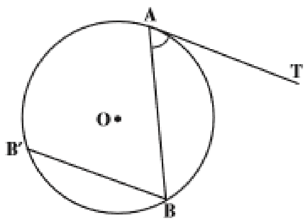
از A به B وصل می کنیم:

$$xy \parallel BB', AB' \to A_۱=B_۱(۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ظلی}\quad A_۱=\frac{AB'}{۲} \\ \text{محاطی}\quad B_۱=\frac{AB}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{(۱)} \frac{AB'}{۲}=\frac{AB}{۲} \to AB'=AB$$

تمرین

زاویه ی ظلی TAB در دایره به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB' که موازی خط مماس AT رسم شده است ثابت کنید: $TAB=\frac{AB}{۲}$



$$AT \parallel BB', AB \to A_۱=B_۱(۱)$$

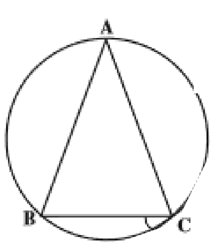
$$B_۱=\frac{AB'}{۲}\xrightarrow{(۱)}A_۱=\frac{AB'}{۲}\longrightarrow A_۱=\frac{AB}{۲}$$

کمان بین وترهای مساوی باهم برابرند

تمرین

با استفاده از تعریف زاویه ی محاطی نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

از هر نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می گذرد.



$$A=\frac{BC}{۲},B=\frac{AC}{۲},C=\frac{AB}{۲}$$

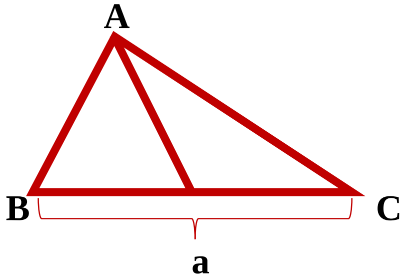
$$A+B+C=\frac{BC}{۲}+\frac{AC}{۲}+\frac{AB}{۲}=\frac{BC+AC+AB}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰^\circ$$

تمرین

در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ضلع $A=\alpha, BC=a$ و میانه AM=ma داده شده است. مثلث را رسم کنید:

پاره خط BC را به اندازه ی مفروض کشیده و سپس عمود منصف BC را رسم می کنیم و نقطه ای دلخواه مانند P روی آن در نظر می گیریم. نیم خط Px را طوری کشیده که با عمود منصف زاویه α بسازد و سپس از نقاط B,C دو خط موازی Px تا نقاط O و O' که محل برخورد این خطوط با عمودمنصف است به دست آید سپس به مرکز O و شعاع OB دایره ای رسم کرده که کمان بزرگتر کمان درخور زاویه ی α وابسته به پاره خط BC می باشد.

نقطه ی M را وسط BC اختیار کرده سپس به مرکز M و شعاع AM کمانی زده تا کمان درخور را در نقاط A و A' قطع کند مثلث های ABC و $AB'C$ جواب مسئله اند. با توجه به اینکه همین کارها را در کمان درخور پایین BC نیز می توان انجام داد مسئله حداکثر ۴ جواب دارد ولی یک جواب آن منحصر به فرد است.



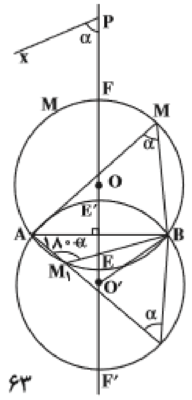
کمان درخور یک زاویه α وابسته به یک پاره خط

مکان هندسی رأس زاویه ای که دو ضلع آن از دو نقطه ی ثابت می گذرند، کمان هایی از دو دایره ی مساوی است که از آن دو نقطه ی ثابت می گذرند و زاویه ی مرکزی روبه رو به وتر مشترک برابر ۲α می باشد.

ابتدا پاره خط BC را به اندازه ی داده شده رسم کرده و سپس عمودمنصف آن را کشیده و نقطه ی دلخواه P را روی آن اختیار کرده و نیم خط Px را طوری رسم می کنیم که با عمود منصف زاویه ی α بسازد. سپس از نقاط B , C دو نیم خط به موازات Px رسم کرده تا عمودمنصف را در نقاط O و O' قطع کند.

چهارضلعی $BOCO'$ لوزی است. (زیرا قطرهای آن بر هم عمودند و یکدیگر را نصف می کنند)، بنابراین زاویه ی O وO' برابر ۲α می باشند، حال به مرکز O و O' و به شعاع OB دو دایره رسم کرده به طوری که از B , C بگذرند.

کمان BFC,BEC مکان هندسی رأس A می باشند و بالعکس اگر نقطه ی A روی این دو کمان نباشد، در این صورت یا خارج از این دو کمان است و یا داخل، خواهیم داشت:



خارجی $A' > \alpha$ غیر قابل قبول

$\alpha > A''$ غیر قابل قبول

تست های آموزشی

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

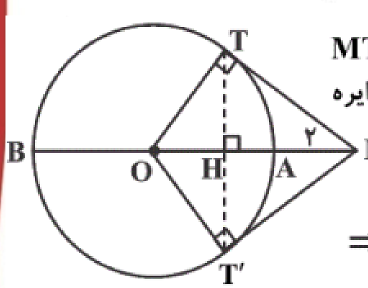
اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر r باشد، داریم: $S = rP \quad (*)$

از طرفی برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times (۶)^۲ = ۹\sqrt{۳} \\ ۲P = ۳ \times ۶ \Rightarrow P = ۹ \end{array}\right\} \xrightarrow{(*)} ۹\sqrt{۳} = r \times ۹ \Rightarrow r = \sqrt{۳}$$

کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M تا دایره‌ای به‌ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس از یکدیگر کدام است؟

۱) ۴/۸ ۲) ۵ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰



$MT^۲ = MA \times MB = ۲ \times ۱۸ = ۳۶ \Rightarrow MT = ۶$

قطر دایره $= ۱۸ - ۲ = ۱۶ \Rightarrow$ (شعاع دایره) $r = OT = OA = ۸$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OTM}$:

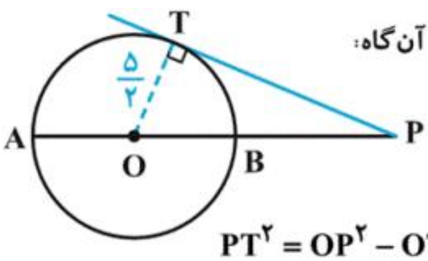
$OM = OA + AM = ۱۰$

$TH \times OM = OT \times MT \Rightarrow TH = \frac{OT \times MT}{OM} \Rightarrow TH = \frac{۸ \times ۶}{۱۰} = ۴/۸$

$\Rightarrow TT' = ۲TH = ۲ \times ۴/۸ = ۹/۶$

فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره‌ای از نقطهٔ P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصلهٔ P تا مرکز این دایره $\frac{۱۳}{۲}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطهٔ P بر این دایره کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$



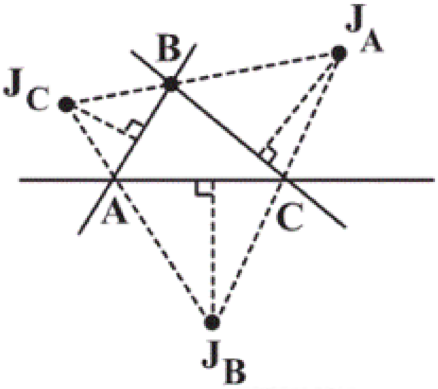
طبق فرض‌های مسئله $PA = ۹$ و $PO = \frac{۱۳}{۲}$ است، پس اگر شعاع دایره برابر R باشد، آن‌گاه:

$$R = OA = AP - OP = ۹ - \frac{۱۳}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow OT = R = \frac{۵}{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTP با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$PT^۲ = OP^۲ - OT^۲ = (\frac{۱۳}{۲})^۲ - (\frac{۵}{۲})^۲ = \frac{۱۶۹ - ۲۵}{۴} \qquad PT^۲ = \frac{۱۴۴}{۴} = ۳۶ \Rightarrow PT = ۶$$

مطابق شکل، نیمسازهای خارجی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر طول عمودهای مشخص شده ۲، ۳ و ۶ باشند، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC کدام است؟

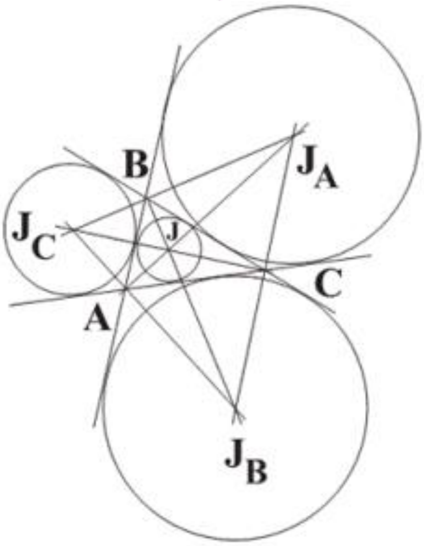


۱) ۰/۵

۲) ۰/۷۵

۳) ۱

۴) ۱/۵



محل برخورد نیمسازهای خارجی، مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث می‌باشد. اندازهٔ عمودهای مشخص شده در شکل، در واقع شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض است. طبق تمرین ۵ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی، با داشتن طول شعاع دایره‌های محاطی خارجی می‌توان شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را به دست آورد، بنابراین:

$$\begin{cases} r_a = ۶ \\ r_b = ۳ \\ r_c = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

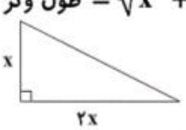
$$\Rightarrow \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۶}{۶} = \frac{۱}{r} \Rightarrow r = ۱$$

اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایرهٔ محاطی داخلی به شعاع دایرهٔ محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

۱) $\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۷-۳\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۵-\sqrt{۳}}{۵+۵\sqrt{۳}}$

در هر مثلث شعاع دایرهٔ محاطی داخلی از رابطهٔ $r = \frac{S}{P}$ و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی رو به ضلع a از رابطهٔ $r_a = \frac{S}{P-a}$ به دست می‌آید که S مساحت مثلث و P نصف محیط آن است. اگر طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را x و ۲x فرض کنیم، طبق قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر آن به دست می‌آید:

$$\text{طول وتر} = \sqrt{x^۲ + (۲x)^۲} = \sqrt{۵}x$$



$$P = \frac{x + ۲x + \sqrt{۵}x}{۲} = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}x$$

$$P - a = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}x - \sqrt{۵}x = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}x$$

$$\frac{\text{شعاع دایرهٔ محاطی داخلی}}{\text{شعاع دایرهٔ محاطی خارجی وتر}} = \frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P-a}} = \frac{P-a}{P} = \frac{\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}x}{\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}x} = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}} \times \frac{۳-\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۵}} = \frac{۹+۵-۶\sqrt{۵}}{۹-۵} = \frac{۱۴-۶\sqrt{۵}}{۴} = \frac{۷-۳\sqrt{۵}}{۲}$$

در مثلث ABC اگر $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$ و $a^2+b^2+c^2=40$ باشد، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴

۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{3}$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، دایرهٔ محاطی داخلی در نقطهٔ تماس با وتر، آن را به دو قطعه به طول‌های ۳ و ۱۰ واحد تقسیم می‌کند. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس قائمه کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن برابر ۷ و محیط آن برابر ۱۵ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

در یک ذوزنقهٔ محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط ذوزنقه کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸

در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک ۷ و طول ساق قائم آن ۹ است. طول قاعدهٔ بزرگ این ذوزنقه کدام است؟

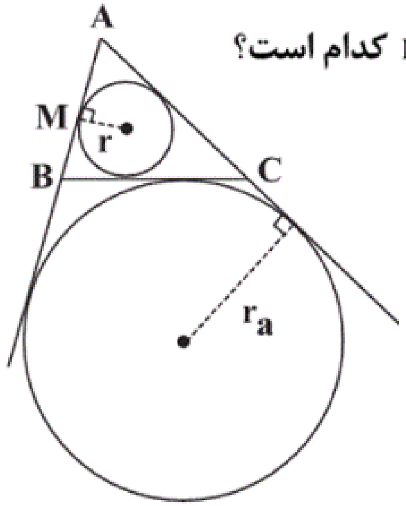
۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۲/۸

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

در شکل زیر، مثلث ABC و دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی آن رسم شده‌اند.

اگر $AM = ۲$، $BC = ۷$ و $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۶\sqrt{۶}$ باشد، حاصل rr_a کدام است؟

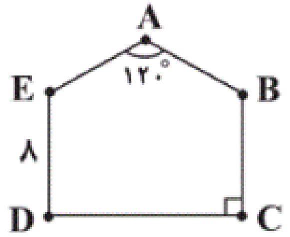


۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم برابر 720° است. اگر محل‌های تماس n ضلعی و دایرهٔ محاطی آن را متوالیاً به هم وصل کنیم، مساحت شکل جدید چقدر با مساحت شکل اولیه تفاوت دارد؟ (طول هر ضلع n ضلعی برابر ۴ است.)

۱) ۶
۲) $3\sqrt{3}$
۳) $6\sqrt{3}$
۴) ۹

در پنج‌ضلعی محاطی ABCDE ، اگر اندازهٔ ضلع DE برابر ۸ باشد، اندازهٔ قطر BD کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

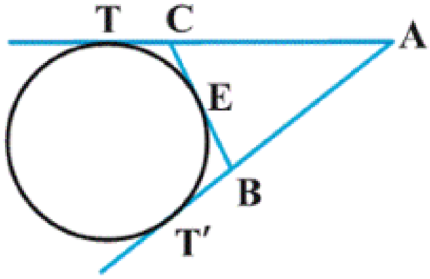
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A بر امتداد اضلاع AB و AC به‌ترتیب در T و T' مماس شده است. اندازهٔ TT' کدام است؟ ($AC=4$ و $AB=3$)

۱) $6\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{3}$

در یک چندضلعی محیطی به مساحت ۸۴، اگر طول شعاع دایرهٔ محاطی برابر ۳ باشد، آن‌گاه مجموع طول اضلاع کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۶ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

از نقطهٔ ثابت A دو مماس AT و AT' بر دایره‌ای ثابت رسم شده‌اند و پاره‌خط متغیر BC بر دایره مماس است، به‌طوری که نقطهٔ B همواره روی AT' و نقطهٔ C همواره روی AT قرار دارد. محیط مثلث ABC ، کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}AT$

۲) AT

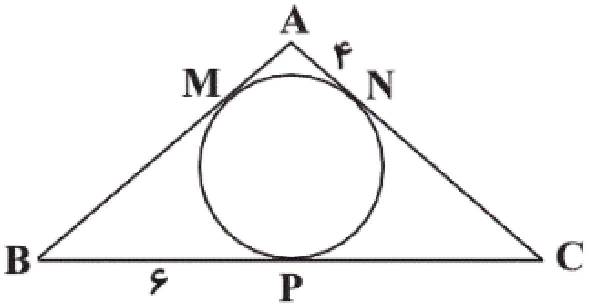
۳) $\frac{3}{2}AT$

۴) 2AT

دو دایرهٔ هم‌مرکز C_1 و C_2 را در نظر بگیرید. اگر خط d بر C_1 مماس باشد و همزمان دایرهٔ C_2 را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، به‌طوری‌که $AB = ۲۴$ و اختلاف شعاع دو دایره برابر ۸ باشد، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

مطابق شکل زیر، دایرهٔ محاطی مثلث ABC $(AB = AC)$ رسم شده است. با توجه به اندازه‌های مشخص شده، شـعاع ایـن دایـره کـدام‌است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

در مثلثی به اضلاع ۴، ۵ و ۷، نسبت مساحت کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی به مساحت دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{۶۴}{۹}$ ۴) ۶۴

دو دایرهٔ $C(O, ۱۷)$ و $C'(O, ۱۰)$ مفروضند. خط قاطع d که در دایرهٔ C وتری به طول ۳۰ به وجود می‌آورد، در دایرهٔ C' وتری با کدام طول پدیـد می‌آورد؟

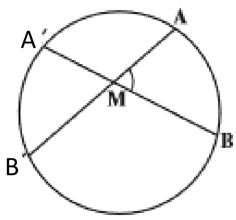
۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

در دایره‌ای به مساحت $۴\pi\sqrt{۳}$، مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

روابط طولی در دایره

قضیه: اگر از یک نقطه داخل دایره دو وتر رسم کنیم، حاصل ضرب قطعات یک وتر برابر است با حاصل ضرب قطعات روی وتر دیگر. $MA \times MB = MA' \times MB'$

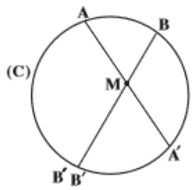


$$\begin{cases} A = A' = \frac{BB'}{۲} \\ B = B' = \frac{AA'}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\Delta \sim \Delta} \frac{MB'}{MB} = \frac{MA}{MA'} \rightarrow MA \times MB = MA' \times MB'$$

عکس قضیه

اگر نقطه ی M محل تلاقی دو پاره خط باشد، به طوری که داشته باشیم $MA \times MB = MA' \times MB'$

آن گاه از ۴ نقطه ی A, B, A', B' یک دایره می گذرد.



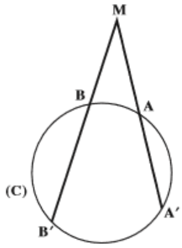
از سه نقطه ی A, B, A' یک دایره عبور می دهیم. اگر این دایره از نقطه B' عبور کند، $A'B'$ را امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه ی B'' قطع کند آن گاه طبق خود قضیه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{ll} MA' \times MB'' = MA \times MB & \text{طبق قضیه} \\ MA' \times MB' = MA \times MB & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow B' = B'' \Rightarrow$$

A, B, A', B' از یک دایره می گذرند.

قضیه

اگر از یک نقطه خارج از دایره دو قاطع بر دایره رسم کنیم، ثابت کنید حاصل ضرب قطعات یک قاطع برابر است با حاصل ضرب قطعات دیگر. $BM \times AM = B'M \times A'M$



$$\overset{\Delta}{AMB}, \overset{\Delta}{AMB'} \Rightarrow \begin{cases} A = A' = \frac{BB'}{۲} \\ B = B' = \frac{AA'}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{MB'}{MB} = \frac{AM}{A'M} \Rightarrow BM \times AM = B'M \times A'M$$

عکس قضیه

اگر نقطه ی M محل تلاقی دو پاره خط باشد، به طوری که داشته باشیم $MA \times MB = MA' \times MB'$

آن گاه از ۴ نقطه ی A, B, A', B' یک دایره می گذرد.

از سه نقطه ی A, B, A' یک دایره عبور می دهیم. اگر این دایره از نقطه B' عبور کند،

$A'B'$ را امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه ی B'' قطع کند آن گاه

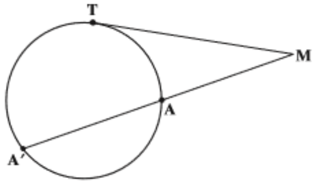
طبق خود قضیه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{ll} MA' \times MB'' = MA \times MB & \text{طبق قضیه} \\ MA' \times MB' = MA \times MB & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow B' = B'' \Rightarrow$$

A, B, A', B' از یک دایره می گذرند.

قضیه

اگر نقطه ی M محل تلاقی یک قاطع و یک مماس باشد (از نقطه ی M خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده ایم)، آن گاه طول مماس واسطه ی هندسی است بین قطعات قاطع.

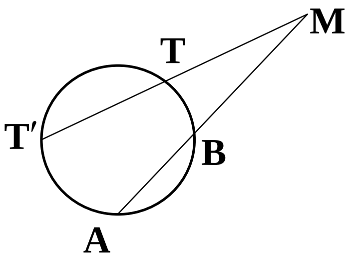


از T به A, B رسم می کنیم. آن گاه خواهیم داشت: $MT^2 = MB \times MA$

$$\overset{\Delta}{ATM}, \overset{\Delta}{BTM} \Rightarrow \begin{cases} M = M \\ A = T_1 = \dfrac{BT}{2} \end{cases} \xrightarrow{\Delta \sim \Delta} \frac{AT}{BT} = \frac{MT}{BM} = \frac{AM}{MT} \Rightarrow MT^2 = MB \times MA$$

عکس قضیه

نقطه ی M محل تلاقی دو پاره خط MT و امتداد AB است. اگر داشته باشیم $MT^2 = AM \times BM$



آن گاه از سه نقطه ی A, B, T یک دایره می گذرد.

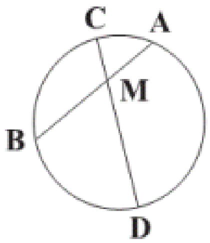
فرض می کنیم دایره ی گذرنده از سه نقطه ی A, B, T بر خط MT مماس نباشد، پس امتداد MT را در نقطه ی T' قطع می کند:

$$\left.\begin{array}{l} MA.MB = MT'.MT \\ MA.MB = MT.MT \end{array}\right\} \Rightarrow T = T' \Rightarrow$$

T و T' بر هم منطبقند و دایره ی گذرنده از سه نقطه A, B, T در نقطه ی T بر MT مماس است.

تست های آموزشی

در دایرهٔ زیر، وتر AB وتر CD را به نسبت ۱ به ۶ تقسیم کرده‌است. اگر $AB=10$ و $CD=14$ باشد، حاصل $|AM-BM|$ کدام است؟

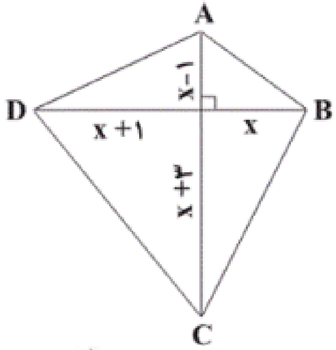


۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۱۰

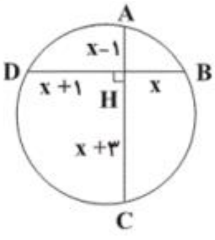
وتر CD به‌نسبت ۱ به ۶ تقسیم شده است. پس:
$$\frac{CM}{DM}=\frac{1}{6}\ ,\ CD=14\Rightarrow CM=2\ ,\ DM=12$$

طبق روابط طولی در دایره داریم:
$$CM\,.\,DM=BM\,.\,AM\ \Rightarrow BM\,.\,AM=2\times 12=24$$
$$AB=10\Rightarrow AM+BM=10$$
$$\begin{cases}AM+BM=10\\ AM\,.\,BM=24\end{cases}\ (AM+BM)^2-4AM.BM=(AM-BM)^2=4\ \Rightarrow |AM-BM|=2$$

رئوس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند. با توجه به اندازه‌های مشخص شده، مساحت چهارضلعی کدام است؟



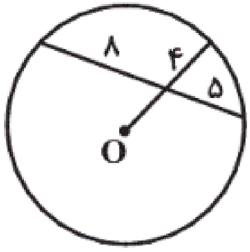
۱) ۵۶
۲) ۴۸
۳) ۲۸
۴) ۲۴



رئوس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند، پس:
$$AH\times HC=BH\times HD$$
$$\Rightarrow (x-1)(x+3)=x(x+1)\ \Rightarrow x^2+2x-3=x^2+x\Rightarrow x=3$$

لذا مساحت آن برابر است با:
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\,.\,BD=\frac{1}{2}\times 8\times 7=28$$

در شکل زیر، O مرکز دایره است. شعاع دایره کدام است؟



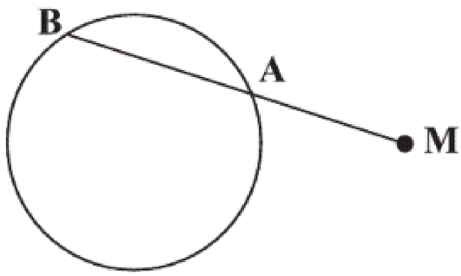
۱) ۷
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۸/۵

فرض می‌کنیم امتداد BO، دایره را در نقطهٔ E قطع کند، با فرض $OD=x$ داریم: $OE=OB=x+4$

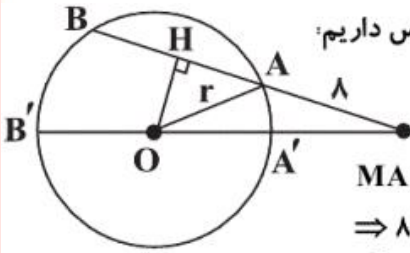
حال بنا به رابطهٔ طولی در دایره داریم:
$$DA.DC=DB.DE\Rightarrow 8\times 5=4(2x+4)\Rightarrow x=3$$

و در نتیجه:
$$R=OE=x+4=3+4=7$$

فاصلهٔ نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایرهٔ زیر از نقطهٔ M، به‌ترتیب ۶ و ۱۶ واحد است. اگر $MA = 8$ باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتـر AB کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{21}$ ۴) $2\sqrt{6}$



نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به نقطهٔ M، به‌ترتیـب نقـاط A' و B' هستند؛ پس داریم:

$$MA' = 6$$

$$MB' = 16 \Rightarrow A'B' = 16 - 6 = 10 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

از روابط طولی در دایره داریم:

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

$$\Rightarrow 8 \times MB = 6 \times 16 \Rightarrow MB = 12 \Rightarrow AB = 4$$

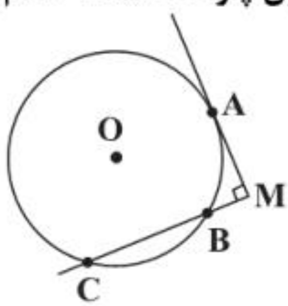
می‌دانیم اگر از مرکز دایره بر وتری از آن عمود رسم کنیم، پـاره‌خـط عمـود، وتر را نصف می‌کند:

$$AH = \frac{1}{2}AB = 2$$

از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHO داریم:

$$OH^2 + AH^2 = r^2 \Rightarrow OH^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow OH = \sqrt{21}$$

مطابق شکل دایره‌ای به مرکز O و شعاع واحد مفروض است. اگر مماس رسم‌شده در نقطهٔ A وامتداد وتر BC یکدیگر را بـا زاویــهٔ 90° قطع کنند و $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ باشد، طول پاره‌خط BC کدام است؟



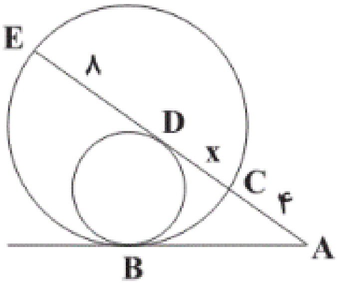
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۱

با فرض $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \alpha$ داریم:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{(360^\circ - 2\alpha) - \alpha}{2} = 90 \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 60^\circ \Rightarrow B\hat{O}C = 60^\circ \Rightarrow$ $\overset{\Delta}{BOC}$ متساوی‌الاضلاع است. $\Rightarrow BC = 1$

در شکل زیر، دو دایره در نقطهٔ B مماس درون‌اند. اگر مماس رسم شده بر دایرهٔ کوچک‌تر در نقطهٔ D، دایرهٔ بزرگ‌تر را در نقاط C و E و مماس رسم شده در نقطهٔ B را در نقطهٔ A قطع کند، آن‌گاه طول CD کدام است؟ ($DE = 8$ و $AC = 4$)



۱) ۲

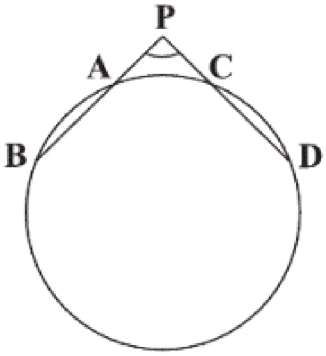
۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

در شکل زیر، امتداد وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند به طوری کـه $\hat{P}=۱۲۰^\circ$.

اگـر $PA = PC = \frac{۱}{۲}CD = \sqrt{۳}$ باشـد، طول پاره‌خط BD کدام است؟



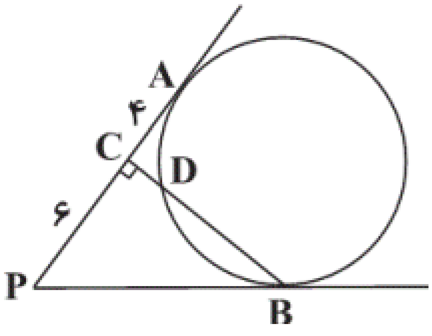
۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

در شکل زیر، PA و PB بر دایره مماس هستند و BC بر PA عمود است. اگر $PC = ۶$ و $CA = ۴$ باشند، طول CD کدام است؟



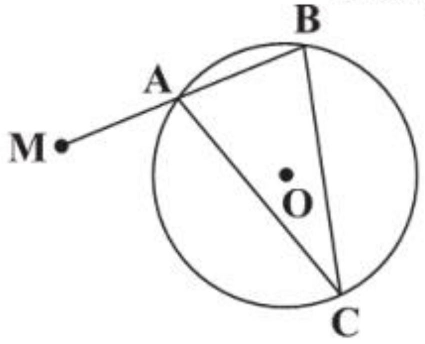
۱) ۳

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $\sqrt{۵}$

۴) ۲

در دایرهٔ زیر، قاطع MAB رسم شده است؛ به‌طوری که $MA = AB = ۶$ و $B\hat{A}C = ۷۵^\circ$.
اگر $AC = CB$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از مرکز دایــره چقدر است؟



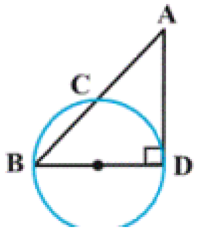
۱) $۶\sqrt{۳}$

۲) ۱۲

۳) $۸\sqrt{۳}$

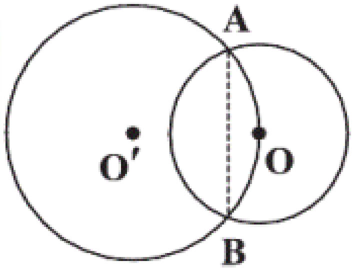
۴) ۱۶

در شکل زیر، BD قطر دایره و AD بر دایره مماس است. اگر شعاع دایره برابر ۳ و طول وتر BC برابر ۴ باشد، اندازهٔ AB کدام است؟



۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱۲

دو دایرهٔ $C(O, \sqrt{۵})$ و $C'(O', \frac{۵}{۲})$ مطابق شکل رسم شده‌اند. طول وتر AB کدام است؟



۱) ۲

۲) ۳

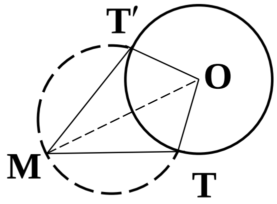
۳) ۴

۴) ۶

طریقه رسم مماس بر دایره از یک نقطه خارج از آن

نقطه دلخواه M را خارج دایره در نظر گرفته، سپس دایره ای به قطر OM رسم می کنیم به طوری که دایره ی مفروض را در نقاط T و T' قطع کند. T و T' را به O و M وصل کرده، ثابت می شود زاویه ی $OTM = ۹۰^\circ$ است، زیرا محاطی روبه قطر است.

$\Leftarrow$ چون MT بر شعاع در نقطه تماس عمود است، پس مماس بر دایره می شود. به همین ترتیب MT' نیز بر دایره مماس می شود.



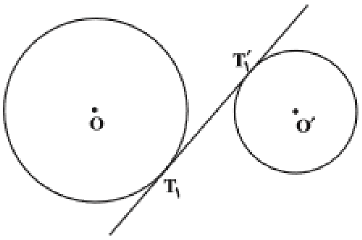
تذکر

از هر نقطه خارج دایره فقط دو مماس بر دایره می توان رسم کرد.

مماس مشترک داخلی و خارجی

اگر مراکز دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، مماس مشترک را خارجی گویند و اگر مراکز دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، مماس مشترک را داخلی گویند.

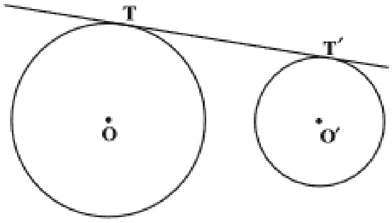
مماس مشترک داخلی



$$|TT'| = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$$

d فاصله ی دو مرکز (خط المرکزین) و R , R' شعاع های دو دایره اند.

مماس مشترک خارجی



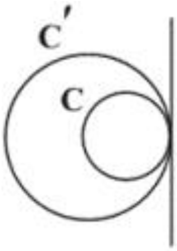
$$|TT'| = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$$

d فاصله ی دو مرکز (خط المرکزین) و R , R' شعاع های دو دایره اند.

تست های آموزشی

اگر دو دایرهٔ $C(O\,,\,a)$ و $C'(O'\,,\,۲a)$ با طول خطالمرکزین $OO'=۴-۲a$ دارای تنها یک مماس مشترک باشند، a برابر با کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$



چون دو دایره دارای یک مماس مشترک می‌باشند، قطعاً مماس درون هستند.

$$OO'=|R-R'| \qquad ۴-۲a=|۲a-a|=|a|=a \qquad ۴-۲a=a\Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

توجه داشته باشید که a طول شعاع دایره بوده، پس مثبت خواهد بود.

دو دایرهٔ متقاطع به شعاع‌های R و ۵R مفروض‌اند. اگر مرکز یکی از دو دایره، روی محیط دایرهٔ دیگر واقع شده باشد، اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها چند برابر R است؟

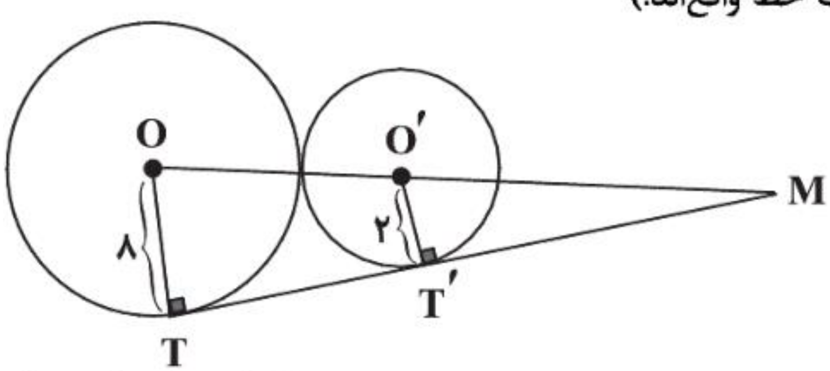
۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) $۲\sqrt{۵}$

با توجه به شکل، مشخص است که $d=۵R$. در نتیجه اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$TT'=\sqrt{(۵R)^۲-(۵R-R)^۲}=\sqrt{۲۵R^۲-۱۶R^۲}=\sqrt{۹R^۲}\Rightarrow TT'=۳R$$

در شکل زیر، دو دایره به مراکز O و O' مماس برون‌اند. اندازهٔ MT کدام است؟ (M، T و T' بر روی یک خط واقع‌اند.)

۱) ۹
۲) $\frac{۲۸}{۳}$
۳) ۱۰
۴) $\frac{۳۲}{۳}$

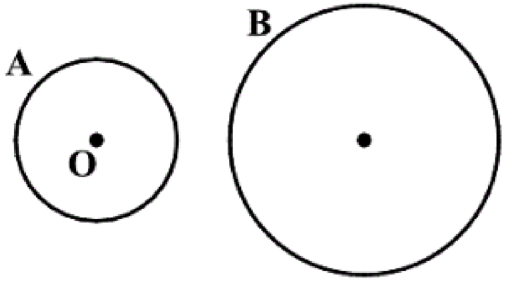


$$TT'=۲\sqrt{RR'}=۲\sqrt{۸\times۲}=۲\sqrt{۱۶}=۲\times۴=۸$$

$$\overset{\Delta}{OMT}:OT\,||\,O'T'\xrightarrow{\text{طبق تالس}}\frac{O'T'}{OT}=\frac{MT'}{MT}\Rightarrow\frac{۲}{۸}=\frac{MT'}{۸+MT'}$$

$$\Rightarrow ۸MT'=۱۶+۲MT'\Rightarrow ۶MT'=۱۶\Rightarrow MT'=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳} \qquad \Rightarrow MT=TT'+MT'=۸+\frac{۸}{۳}=\frac{۳۲}{۳}$$

نزدیک‌ترین و دورترین فاصله بین نقاط روی دو چرخ زیر برابر با ۲ و ۱۳ واحد می‌باشد. اگر شعاع چرخ کوچک برابر با ۱ واحد باشد، طول مماس رسم شده از نقطهٔ O (مرکز چرخ کوچک) بر چرخ بزرگ‌تر کدام است؟



۱) ۵

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد، برابر ۱۵ واحد است. طول خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

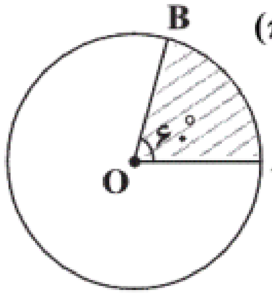
۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۷\sqrt{۶}$ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

در دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۳ واحد، اندازهٔ مماس مشترک داخلی برابر با $۴\sqrt{۳}$ است. زاویهٔ بین دو مماس مشترک داخلی آن‌ها کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

تست های مساحت

در شکل زیر، اگر O مرکز دایره و مساحت ناحیهٔ هاشورخورده برابر ۱۸ باشد، طول کمان AB کدام است؟ $(\pi = ۳)$



۱) ۴

۲) ۶

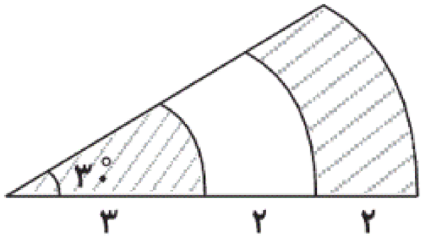
۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۶\sqrt{۲}$

$$\text{مساحت ناحیهٔ هاشورخورده}: S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow ۱۸ = \frac{۳ \times R^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow R^۲ = ۳۶ \Rightarrow R = ۶$$

$$\text{طول کمان } AB: L = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ} = \frac{۳ \times ۶ \times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۳ \times ۶}{۳} = ۶$$

در شکل زیر، قطاع‌هایی با زاویهٔ ۳۰ درجه از سه دایرهٔ هم‌مرکز نشان داده شده است. با توجه به اندازه‌های داده شده، مجموع مساحت قسمت‌های هاشورخورده چند واحد مربع است؟

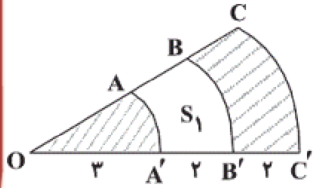


۱) $۲/۲۵\pi$

۲) $۲/۷۵\pi$

۳) $۴/۵\pi$

۴) $۵/۵\pi$



می‌دانیم مساحت قطاعی با زاویهٔ α در دایره‌ای به شعاع r، از رابطهٔ $S = \frac{\pi r^۲ \alpha}{۳۶۰^\circ}$ به‌دست می‌آید.

ابتدا $S_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S_۱ = S_{\overset{\triangledown}{BOB'}} - S_{\overset{\triangledown}{AOA'}} \Rightarrow S_۱ = \frac{\pi(۵^۲)(۳۰^\circ)}{۳۶۰^\circ} - \frac{\pi(۳^۲)(۳۰^\circ)}{۳۶۰^\circ} = \frac{۴\pi}{۳}$$

بنابراین مجموع مساحت قسمت‌های هاشورخورده برابر است با:

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\overset{\triangledown}{COC'}} - S_۱ = \frac{\pi(۷^۲)(۳۰^\circ)}{۳۶۰^\circ} - \frac{۴\pi}{۳} = \frac{۱۱\pi}{۴} = ۲/۷۵\pi$$

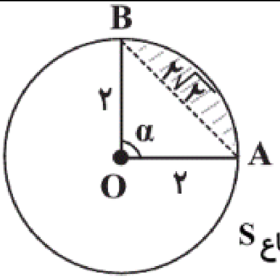
اندازهٔ شعاع یک دایره ۲ و طول وتر AB در آن برابر $۲\sqrt{۲}$ است. مساحت قطعهٔ کوچک‌تر حاصل از رسم وتر AB در دایره کدام است؟

۱) $۲\pi - ۴$

۲) $\pi - ۲$

۳) $۲\pi - ۶$

۴) $\pi - ۳$

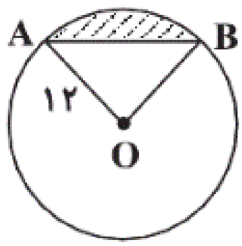


با توجه به عکس قضیهٔ فیثاغورس از آنجا که در مثلث AOB، مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است پس این مثلث قائم‌الزاویه است. در نتیجه: $\alpha = ۹۰^\circ$

$$S_{\overset{\Delta}{AOB}} = \frac{۲ \times ۲}{۲} = ۲$$

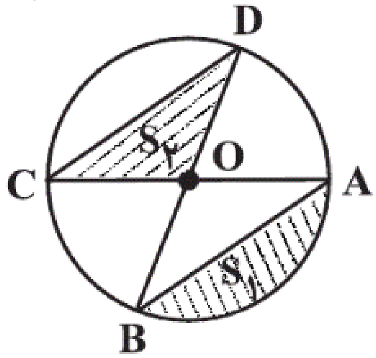
$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} \times \pi R^۲ = \frac{۹۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times \pi \times ۴ = \pi \qquad S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}} = \pi - ۲$$

در شکل زیر، طول کمان AB برابر 4π می‌باشد. مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده چند برابر $3\sqrt{3}-2\pi$ است؟ (O مرکز دایره است.)



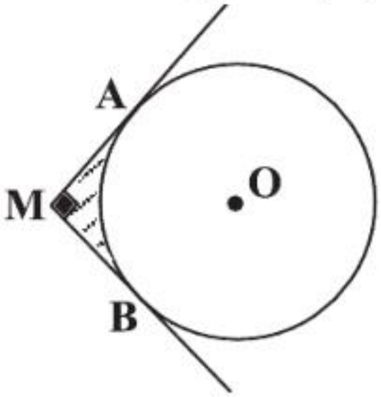
۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۴

در شکل زیر، $\widehat{AB}=\widehat{CD}=120^\circ$ و شعاع دایره برابر ۲ واحد است. مجموع مساحت‌های S_1 و S_2 کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



۱) $\frac{4}{3}\pi$ ۲) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}\pi$ ۳) $\frac{2}{3}\pi$ ۴) $\frac{\sqrt{3}+3}{3}\pi$

مطابق شکل، MA و MB به‌ترتیب در نقاط A و B بر دایرهٔ $C(O\ ,\ R)$ مماس‌اند. مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟ $(\hat{M}=90^\circ)$

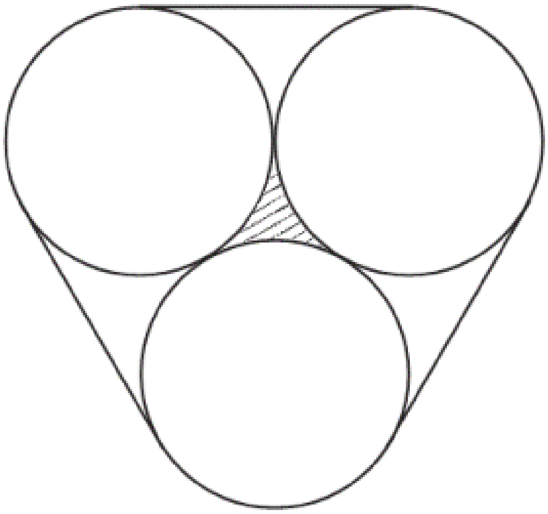


۱) $R^2(1-\frac{\pi}{4})$
۲) $2R^2(1-\frac{\pi}{4})$
۳) $R^2(1-\frac{\pi}{8})$
۴) $2R^2(1-\frac{\pi}{8})$

طول خط‌المرکزین دو دایره که نسبت به هم مماس درونی‌اند، ۴ و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن‌ها ۳۲π است. طول شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

سه دایره به شعاع‌های برابر، دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل زیر، این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر $(۲\pi - ۳\sqrt{۳})۴$ باشد، طول نخ کدام است؟



۱) $۱۲ - ۲\pi$

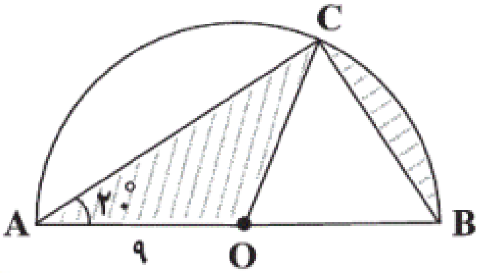
۲) $۲۴ - ۴\pi$

۳) $۱۲ + ۴\pi$

۴) $۲۴ + ۸\pi$

در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع ۹ سانتی‌متر است. اگر $\hat{A} = ۲۰°$ باشد، مجموع مساحت ناحیه‌های رنگی چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۶π ۲) ۹π ۳) ۱۲π ۴) ۱۵π



تست های متفرقه

در یک دایره طول کمان AB برابر ۴ واحد و اندازهٔ کمان AB برابر $۶۰°$ است. در این صورت طول شعاع دایره کدام است؟

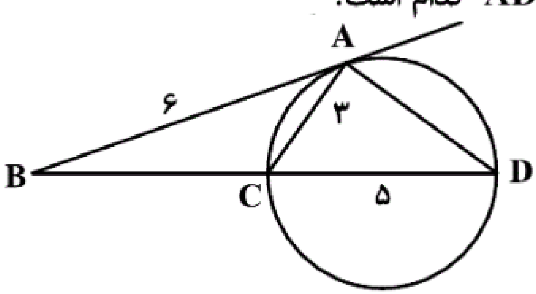
۱) ۱۲π ۲) $\frac{۱۲}{\pi}$

۳) ۲۴ ۴) ۲۴π

می‌دانیم رابطهٔ زیر برقرار است: $\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{۳۶۰°}$

پس: $\frac{۴}{۲\pi R} = \frac{۶۰°}{۳۶۰°}$ لذا: $۲\pi R = ۲۴$ و در نتیجه: $R = \frac{۱۲}{\pi}$

در شکل مقابل، AB در نقطهٔ A بر دایره مماس است. طول وتر AD کدام است؟

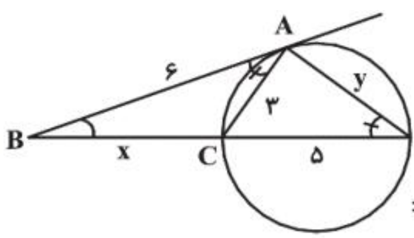


۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۵/۵

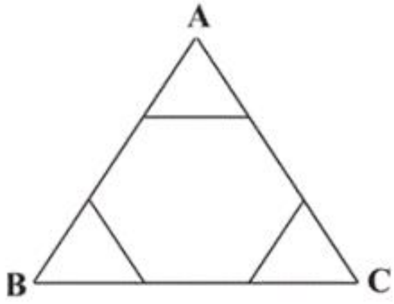


$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{B} \\ B\hat{A}C = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACB} \sim \overset{\Delta}{DAB} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{۶}{x+۵} = \frac{۳}{y} = \frac{x}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۶} = \frac{۶}{x+۵} \Rightarrow x^۲ + ۵x - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x+۹)(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

$$\frac{۳}{y} = \frac{x}{۶} \Rightarrow y = \frac{۱۸}{۴} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی منتظم مقابل به ضلع ۲ واحد، یک مثلث ساخته‌ایم. اگر O نقطه‌ای دلخواه درون شش ضلعی باشد، مجمـــوع فواصل نقطهٔ O از سه ضلع مثلث ABC کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۳}$

نقطهٔ M درون دایرهٔ C(O, R) قرار دارد. اگر طول کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از M به‌ترتیب ۴ و ۶ باشد، فاصلهٔ M از مرکز دایره برابر است با:

۱) $\sqrt{۳}$

۲) ۲

۳) $\sqrt{۵}$

۴) ۳

در بین همهٔ شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت، بیش‌ترین مساحت برابر با ۳۶ می‌باشد. محیط هر یک از این اشکال کدام است؟

۱) $۶\sqrt{\pi}$

۲) ۲۴

۳) $۱۲\sqrt[۴]{۲۷}$

۴) $۱۲\sqrt{\pi}$

دو وتر موازی به طول‌های ۴ و ۱۰ در دو طرف مرکز دایره به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ مرکز دایره از وتر کوچک‌تر، دو برابر فاصلهٔ آن تا وتر بزرگ‌تر است. طول شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۸