

## جزوه درس حسابان ۱

# مهندس نیما خانعلی پور

سرفصل های حسابان پایه یازدهم ریاضی:

**فصل ۱ کتاب حسابان پایه یازدهم :** جبر و معادله شامل ۵ درس  
درس ۱ : مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی  
درس ۲ و ۳ : معادلات درجه دوم و گویا و گنگ  
درس ۴ و ۵ : قدر مطلق و ویژگی های آن و مختصات

**فصل ۲ کتاب حسابان پایه یازدهم :** تابع شامل ۳ درس  
درس ۱ و ۲ و ۳ : انواع تابع ، تابع یک به یک و وارون پذیر ، اعمال روی تابع

**فصل ۳ کتاب حسابان پایه یازدهم :** توابع نمایی و لگاریتم شامل ۴ درس  
توابع نمایی ، لگاریتمی ، لگاریتم و خواص آن

**فصل ۴ کتاب حسابان پایه یازدهم :** مثلثات شامل ۴ درس  
رادیان ، نسبت های مثلثاتی ، توابع مثلثاتی ، اتحاد مثلثاتی

**فصل ۵ کتاب حسابان پایه یازدهم :** حد و پیوستگی شامل ۶ درس  
مفهوم حد ، حد چپ و راست ، محاسبه حد ، مفهوم حد تابع ، قضایای حد و ...

استان گیلان ، شهرستان زیبای لنگرود



۰۹۱۱۸۴۱۱۵۹۱



Nima.khanalipoor@gmail.com



t.me/Riazi\_khanalipoor



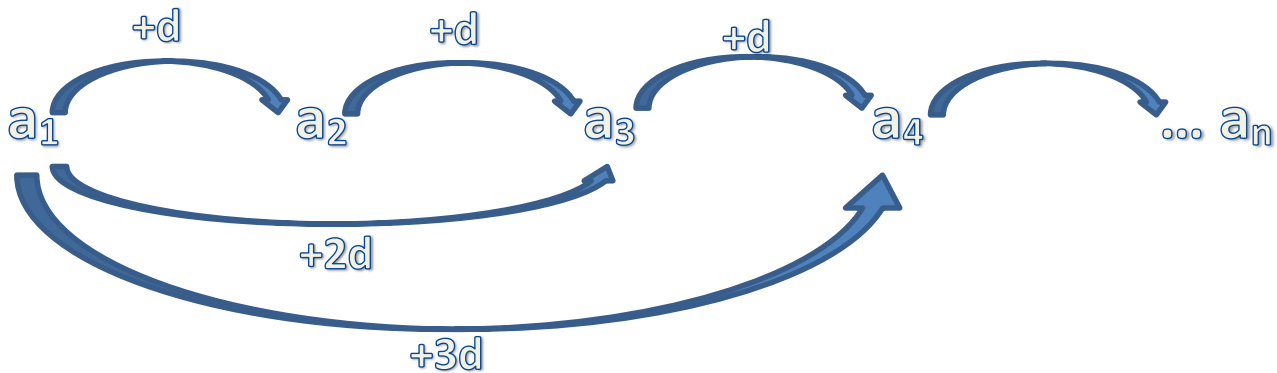
به کانال ریاضی حتما سر بزنید ، چیزی خوب پیدا می کنید!

راستی حواست باشه این جزوه رو به کیسه ندیاا...پیش خودت نگه دار که فقط خودت ۱۰۰٪ بزنی ...!!!



## مروری بر دنباله حسابی

دنباله حسابی یا عددی دنباله ای است که اختلاف هر دو جمله ی متوالی آن برابر مقدار ثابتی مانند  $d$  باشد، به نکات زیر در رابطه با دنباله حسابی توجه کنید:



آه  $a_1$  رو با  $d$  جمع کنیم، به وجود می آید.  
 آه  $a_1$  رو با  $2d$  جمع کنیم، به وجود می آید.  
 آه  $a_1$  رو با  $3d$  جمع کنیم، به وجود می آید.

آه  $a_1$  رو با  $(n-1)d$  جمع کنیم، به وجود می آید. یعنی:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

۱- جمله اول است.

۲- اگر قدرنسبت  $d$  باشد، آنگاه  $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$

۳- جمله  $n$ ام با داشتن جمله اول و قدرنسبت از رابطه  $a_n = a_m + (n-m)d$  بدست می آید.

۴- برای محاسبه قدرنسبت در صورتی که دو جمله ی غیر متوالی  $m, n$  از دنباله حسابی موجود باشد:  $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

۵- بین جملات دنباله حسابی رابطه خطی حاکم است. به طور کلی هر نمایش به فرم  $a_n = \alpha n + b$  نمایش یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $\alpha$  باشد.

۶- اگر جمله اول و جمله آخر یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  باشد تعداد جملات این دنباله از رابطه  $d = \frac{b-a}{d} + 1$  بدست می آید.

۷- درج  $m$  واسطه حسابی بین دو عدد: اگر بخواهیم بین دو عدد  $a, b$  تعداد  $m$  عدد طوری قرار دهیم که اعداد حاصل تشکیل یک دنباله حسابی

دهند، قدرنسبت از رابطه  $d = \frac{b-a}{m+1}$  بدست می آید.

۸- اگر دو دنباله  $a_n, b_n$  های حسابی با قدرنسبت های  $d_1, d_2$  باشند، جملات مشترک دو دنباله در صورت وجود دنباله حسابی با قدرنسبت

$d$  تشکیل می دهند که در آن  $d$  کوچکترین مضرب مشترک  $d_1, d_2$  است

۹- واسطه حسابی یا میانگین حسابی بین سه جمله متوالی  $a, b, c$  برابر است با:  $b = \frac{a+c}{2}$

۱۰- در هر دنباله حسابی  $a_n$  که در آن برای هر  $p, q, m, n, L$  که اعداد طبیعی هستند رابطه  $p+q=n+m=2L$  برقرار باشد داریم:

$$a_p + a_q = a_n + a_m = 2a_L$$

مقادیر  $k$  و  $k'$  و  $\frac{1}{p}$  و  $\frac{1}{q}$  چهار جمله ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. در این صورت: (آزاد پزشکی - ۷۱)

$$k + k' = 0 \quad (۱) \quad k + k' = \frac{1}{12} \quad (۲) \quad k + k' = \frac{1}{4} \quad (۳) \quad k + k' = \frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$t_{n-1} = t_n + 3 \Rightarrow t_{n+1} - t_n = 3 \Rightarrow d = 3 \left\{ \begin{array}{l} t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 4 + 3(n-1) \Rightarrow t_n = 3n + 1 \\ t_1 = 4 \text{ می دانیم} \end{array} \right.$$

اگر در یک تصاعد حسابی، جمله بیست و پنجم برابر ۷۰ و جمله سی و پنجم برابر ۱۳۰ باشد، آن گاه جمله سی ام برابر است با: (سراسری ریاضی - ۶۱)

- ۸۰ (۱)      ۹۰ (۲)      ۱۰۰ (۳)      ۱۱۰ (۴)

چندمین جمله دنباله  $1+x, 4+x, 7+x, 10+x, \dots$  برابر  $43+x$  است؟

در یک تصاعد حسابی  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$ ، اگر  $a_4 = 3$  باشد، کدام درست است؟ (ازاد ریاضی - ۶۹)

- $a_5 = 7$  (۱)       $a_5 = 6$  (۲)       $a_5 = 8$  (۳)       $a_5 = 5$  (۴)

در تصاعد حسابی  $2, \frac{7}{4}, \dots$  جملات  $a_1, a_2, a_3, \dots$  تشکیل تصاعد حسابی دیگری می دهند. قدر نسبت این تصاعد، چه قدر است؟ (ازاد پزشکی - ۷۸)

- $-\frac{1}{4}$  (۱)       $-1$  (۲)       $-4$  (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)

در تصاعدهای عددی  $3, 7, 11, \dots$  و  $4, 7, 10, \dots$  چند جمله مساوی کوچک تر از ۵۰ وجود دارد؟ (ازاد ریاضی - ۷۵)

- چهار جمله (۱)      پنج جمله (۲)      سه جمله (۳)      دو جمله (۴)

بین دو عدد ۳ و ۱۹ چند واسطه‌ی حسابی با قدر نسبت ۴ می توان درج کرد؟ (ازاد تجربی - ۷۱)

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

محل حل مسئله...

چند جمله از تصاعد حسابی  $a_1 = 170$  و  $a_2 = 161$  مثبت است؟

اگر رابطه‌ی  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 60$  بین جملات تصاعد حسابی برقرار باشد، جمله پنجم کدام است؟

- ۶ (۱)      ۸ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۲ (۴)

نکته: (قاعده‌ی اندیس‌ها)

در تصاعد حسابی با جمله عمومی  $a_n$  داریم:

$$m+n = p+q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

مجموع سه عدد که تشکیل دنباله عددی می دهند، ۲۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۶۸ می باشد. سه

عدد را به دست می آورید.

نذکره: سه جمله‌ی متوالی تصاعد عددی را که مجهول باشند به صورت زیر فرض می کنیم:

$$x-d, x, x+d$$



محل حل مسئله...

اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت  $d$  می دهند مساحت این مثلث بر حسب  $d$  چیست؟

گر  $2x - \frac{y}{3}$  و  $x$  و  $x - y$  زوایای یک مثلث باشند که سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی هستند کوچکترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

- ۱۵ (۱)      ۲۰ (۲)      ۲۵ (۳)      ۳۰ (۴)

اگر  $a, b$  و  $c$  سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند آن گاه  $2b = a + c$  پس:

$$2x = (x - y) + \left(2x - \frac{y}{3}\right) \Rightarrow 2x = 3x - \frac{4y}{3} \Rightarrow x = \frac{4y}{3}$$

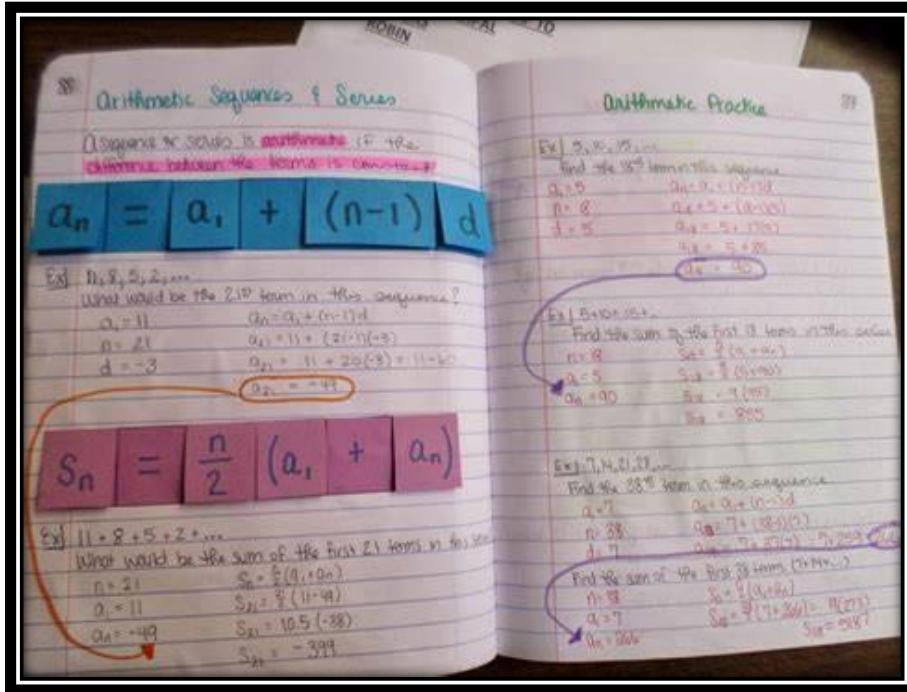
از طرفی مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر  $180^\circ$  است بنابراین

$$(x - y) + x + \left(2x - \frac{y}{3}\right) = 180 \Rightarrow 4x - \frac{4y}{3} = 180 \xrightarrow{x = \frac{4y}{3}}$$

$$4x - x = 180 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow y = 45$$

بنابراین زوایای مثلث عبارتند از:  $105^\circ, 60^\circ, 15^\circ$  و کوچکترین زاویه مثلث برابر  $15^\circ$  است.

دیدنی ها



## مجموع جملات تصاعد عددی

مجموع  $n$  جمله‌ی اول هر دنباله را با  $S_n$  نمایش می‌دهیم و داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

در دنباله حسابی  $S_n$  بر حسب  $n$  از درجه‌ی ۲ است.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

**نکته:** اگر  $a, b, c, d, e$  جملات یک تصاعد حسابی با فاصله یکسان باشند داریم:

$$a + b + c + d + e = 5c$$

$$a + e = 2c, b + d = 2c \Rightarrow a + b + c + d + e = 2c + 2c + c = 5c$$

$$S_n = n \times (\text{جمله وسط})$$

در حالت کلی مجموع  $n$  جمله با فاصله  $y$  یکسان (یعنی لزومی ندارد که متوالی باشند) مساوی  $n$  برابر جمله وسط است. (تعداد جملات باید فرد باشد)

$$a_1 + \dots + \underbrace{a_k}_{\text{جمله وسط}} + \dots + a_n = na_k$$

اگر  $a_n = 2n + 1$  باشد، مجموع ۱۵ جمله اول چه قدر است؟

$$\begin{cases} S_{15} = S_{2 \times 8 - 1} = 15 \times a_8 \\ a_n = 2n + 1 \Rightarrow a_8 = 2 \times 8 + 1 = 25 \end{cases} \Rightarrow S_{15} = 15 \times 25 = 375$$

مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی با شروع از یک، برابر است با  $\frac{n(n+1)}{2}$ . به عبارت دیگر:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع  $n$  عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲، برابر است با  $n(n+1)$ . به عبارت دیگر:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

مجموع  $n$  عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از یک برابر است با  $n^2$ . به عبارت دیگر:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \alpha n^2 + \beta n$  است. برای یافتن جمله عمومی دنباله حسابی از طریق  $S_n$ ، کافی است

**نکته:** قدرنسبت در فرمول بالا برابر است با  $2\alpha$

$S_1$  و  $S_2$  را به دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 - S_1 = a_2$$

یعنی مجموع جملات  $m$  تا  $m$  تا  $n$  یک دنباله حسابی ( $m < n$ )، از رابطه  $S_n - S_{m-1}$  به دست می‌آید.

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}_{S_{m-1}} + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \Rightarrow a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

مجموع  $n$  جمله یک تصاعد عددی از رابطه  $s_n = n^2 + 2n$  به دست می آید، مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم چقدر است؟ (آزاد تجربی - ۸۱)

۷۲ (۱)      ۵۱ (۲)      ۳۶ (۳)      ۷۶ (۴)

$$a_7 + a_8 + a_9 = s_9 - s_6 = (81 + 18) - (36 + 12) = 51$$

مجموع تمام اعداد بخشپذیر بر ۷ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

۲۴۰۸ (۱)      ۲۱۰۷ (۲)      ۲۷۰۰ (۳)      ۲۱۰۰ (۴)

برای حل این تیپ از تست هت بدین طریق عمل میکنیم: ابتدا اولین عدد بزرگتر از ۱۰۰ که بر ۷ بخشپذیر باشد را می یابیم. ۱۰۰ را بر ۷ تقسیم کنیم، باقیمانده این تقسیم برابر است با ۲ است. میدانیم اگر باقیمانده صفر میشد عدد مورد نظر بر ۷ قابل قسمت میشد یعنی  $100 - 2 = 98$  بر ۷ قابل قسمت است. بنابراین اولین عدد بزرگتر از ۱۰۰ بخشپذیر بر ۷ برابر ۱۰۵ است.

دوباره ۲۰۰ را بر ۷ تقسیم میکنیم باقیمانده برابر ۴ میگردد بنابراین عدد  $200 - 4 = 196$  بر ۷ بخشپذیر است.

حال تست تبدیل به  $S_n = 105 + 112 + \dots + 196$  میشود. ابتدا تعداد جملات را محاسبه میکنیم

$$(196 = 105 + (n-1) \times 7) \Rightarrow \frac{196}{7} = \frac{105}{7} + \frac{(n-1) \times 7}{7} \Rightarrow 28 = 15 + (n-1) \Rightarrow 28 - 15 = n$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{14}{2}(105 + 196) = 7 \times 301 = 2107$$

### تست های آموزشی

کادر نکته نویسه!

جملات پنجم و نهم از یک تصاعد حسابی به ترتیب ۱ و ۷ می باشند، مجموع ۱۲ جمله اول آن

کدام است؟

۳۳ (۱)      ۳۶ (۲)      ۴۲ (۳)      ۳۹ (۴)

$$d = \frac{a_9 - a_5}{9-5} = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2}, \quad a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 1 = a_1 + 4\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow a_1 = -5$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(-10 + 11\left(\frac{3}{2}\right)) = 39$$

در یک تصاعد عددی که ۲۱ جمله دارد، جمله وسطی برابر ۳۱ می باشد. مجموع جمله ها کدام

است؟

۶۵۰ (۱)      ۶۵۱ (۲)      ۷۲۰ (۳)      ۶۹۵ (۴)

گزینه ۲ صحیح است.

مجموع سه جمله اول یک تصاعد حسابی برابر با صفر و مجموع شش جمله اول آن ۲۷ است

چند جمله این تصاعد کوچک تر از ۱۰ می باشد؟

۵ (۱)      ۷ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)

$$\begin{cases} S_3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} (2a_1 + (3-1)d) = 0 \Rightarrow 3a_1 + 2d = 0 \Rightarrow a_1 = -d \quad (1) \\ S_6 = 27 \Rightarrow \frac{6}{2} (2a_1 + (6-1)d) = 27 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 9 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)(2)} 2(-d) + 5d = 9 \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3 \xrightarrow{(1)} a_1 = -3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + 3(n-1) = 3n - 6 \Rightarrow a_n < 10 \Rightarrow 3n - 6 < 10 \Rightarrow n < \frac{16}{3} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3, 4, 5$$

در یک تصاعد حسابی جمله اول برابر ۱ و مجموع ۵ جمله اول آن  $\frac{1}{4}$  مجموع ۵ جمله دوم آن است

جمله دوم تصاعد کدام است؟

- ۵ (۴)                      ۴ (۳)                      -۱ (۲)                      -۲ (۱)

مجموع  $n$  جمله دوم برابر است با:  $S_{2n} - S_n$

$$S_{2n} = \frac{1}{4} (S_{10} - S_5) \Rightarrow 4S_{2n} = S_{10} - S_5 \Rightarrow 5S_{2n} = S_{10}$$

$$5S_{2n} = S_{10} \Rightarrow 5 \times \frac{5}{2} (2a_1 + 4d) = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) \xrightarrow{a_1=1} \frac{5}{2} (2 + 4d) = 2 + 9d \rightarrow 10 + 20d = 4 + 18d \rightarrow d = -3$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} (2a_1 + 4d) = 2a_1 + 9d$$

$$\Rightarrow a_2 = a_1 + d = -2$$

**مثال ۳۵:** اندازه‌های زوایای داخلی یک  $n$  ضلعی محدب تصاعد عددی می‌سازند. اگر کوچک‌ترین زاویه

$110^\circ$  و بزرگ‌ترین زاویه  $170^\circ$  باشد.  $n$  کدام است؟

- ۹ (۴)                      ۸ (۳)                      ۷ (۲)                      ۶ (۱)

$$(n-2) \times 180 = \text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی محدب}$$

$$a_1 = 110, a_n = 170$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow (n-2) \times 180 = \frac{n}{2} (110 + 170) \Rightarrow n = 9$$

**مثال ۳۷:** در یک تصاعد عددی،  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اولیه و  $S_{2n-5} = 4n^2$  آن گاه  $a_1$  کدام است؟

- ۱۷ (۴)                      ۱۹۶ (۳)                      ۲۲۵ (۲)                      ۲۹ (۱)

$$a_1 = S_{10} - S_9 \Rightarrow \begin{cases} S_{10} \Rightarrow n = \frac{15}{2} \Rightarrow S_{10} = 4 \times \frac{225}{4} = 225 \\ S_9 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow S_9 = 4 \times 49 = 196 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = 225 - 196 = 29$$

در بیست جمله اول از تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ میباشد. جمله اول کدام است

؟

- ۱ (۱)                      ۲ (۲)                      ۳ (۳)                      ۴ (۴)                      (ریاضی خارج - ۸۶)



$$\begin{cases} a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 \\ a_2 + a_4 + \dots + a_{18} = 150 \end{cases} \Rightarrow \frac{(a_2 - a_1)}{d} + \frac{(a_4 - a_3)}{d} + \dots + \frac{(a_{18} - a_{17})}{d} = 150 - 135 = 10d \Rightarrow d = 1/5$$

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = \underbrace{a_1}_{a_1} + \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3} + \underbrace{a_1 + 4d}_{a_5} + \dots + \underbrace{a_1 + 18d}_{a_{19}} = 10a_1 + 90d = 135 \Rightarrow 10a_1 + 135 = 135 \Rightarrow 10a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

تست : در یک دنباله حسابی مجموع ۵ جمله اول آن،  $\frac{1}{3}$  مجموع ۵ جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

(تجربی ۹۱ - خارج) ۴ (۴) ۳ (۳)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۱)

مورد سوال نسبت  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1+d}{a_1}$  است. پس باید جمله اول و قدر نسبت و یا رابطه میان این دو را بیابیم.

$$a_1 + \dots + a_5 = \frac{1}{3}(a_6 + \dots + a_{10}) \Rightarrow 5(a_3) = \frac{1}{3}(5a_8) \Rightarrow (a_1 + 2d) = \frac{1}{3}(a_1 + 7d) \Rightarrow 3a_1 + 6d = a_1 + 7d \Rightarrow 2a_1 = d$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

### تست های ارزشیابی

در یک دنباله حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند ( $a_7 + a_8 = 0$ ) و جمله هفتم برابر چهار است ( $a_7 = 4$ ). مجموع هشت جمله اول چه قدر است؟

-۸ (۴) ۴ (۳) صفر (۲) ۱۸ (۱)

در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

ریاضی داخل ۹۰ ۳۸ (۴) ۳۴ (۳) ۳۶ (۲) ۳۲ (۱)



در دنباله حسابی  $\{a_n\}$  اگر  $a_7 + a_7 + a_{13} = 15$  باشد، مجموع ۱۳ جمله اول دنباله کدام است؟

- ۶۵ (۱)                      ۱۳۰ (۲)                      ۳۲/۵ (۳)                      ۲۶۰ (۴)

در دنباله  $a_n = n^2 - (n+1)^2$ ، مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟

- ۱ (۱)                      -۳۹۹ (۲)                      ۴۰۱ (۳)                      -۴۰۰ (۴)

مجموع جملات یک دنباله حسابی ۲۴ و جمله عمومی آن  $a_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{6}$  است. تعداد جملات کدام است؟

- ۱۲ (۱)                      ۱۸ (۲)                      ۲۴ (۳)                      ۴۸ (۴)

در دنباله حسابی  $\dots, -21, x, -27, \dots$ ، مجموع جملات منفی کدام است؟

- ۱۳۵ (۱)                      -۱۵۰ (۲)                      -۷۵ (۳)                      -۲۷۰ (۴)

در دنباله حسابی  $\dots, 8, 12, a, b, \dots$ ، مجموع جملاتی که عدد دو رقمی هستند، کدام است؟

- ۱۲۰۰ (۱)                      ۱۳۰۰ (۲)                      ۱۱۹۶ (۳)                      ۱۱۸۸ (۴)

حداقل چند جمله از دنباله حسابی  $\dots, 5, 2, -1, \dots$  را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟

- ۹ (۱)                      ۱۴ (۲)                      ۸ (۳)                      ۱۱ (۴)



مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ کدام است؟

۹۳۸ (۴)

۹۲۸ (۳)

۷۲۸ (۲)

۷۳۸ (۱)

مشابه تمرین کتاب درسی

اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد. ... (۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹, ۱۰), ...

مجموع جملات در دسته بیستم، کدام است؟

۴۰۴۰ (۴)

۴۰۳۰ (۳)

۴۰۲۰ (۲)

۴۰۱۰ (۱)

تجربی خارج ۹۴

اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته، مجذور کامل باشد: ... (۱), (۲, ۳, ۴), (۵, ۶, ۷, ۸, ۹), ...

مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

۱۷۴۸ (۴)

۱۷۲۹ (۳)

۱۷۱۰ (۲)

۱۶۹۱ (۱)

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ...

مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام، کدام است؟

۱۸۵۰ (۴)

۱۸۰۰ (۳)

۱۷۵۰ (۲)

۱۷۰۰ (۱)

تجربی داخل ۹۴



مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟

ریاضی خارج ۹۰

۱۸ (۴)

 $\frac{49}{3}$  (۳) $\frac{29}{3}$  (۲)

۹ (۱)

اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی و سه جمله اول دنباله  $S_n$  به صورت  $3, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$  باشند، جمله چهارم این دنباله  $(S_4)$  کدام است؟

انسانی داخل ۸۵

۵ (۴)

 $\frac{9}{2}$  (۳)

۴ (۲)

 $\frac{7}{2}$  (۱)

اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی  $\{a_n\}$  باشد و داشته باشیم  $S_9 = S_{10} = 12$ ، مجموع شانزده جمله اول دنباله  $a_n$  کدام است؟

۹۶ (۴)

۲۴ (۳)

صفر (۲)

۱۲۰ (۱)

در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی ۳۰ می باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

ریاضی خارج ۸۵

۹ (۴)

 $\frac{8}{5}$  (۳)

۸ (۲)

 $\frac{7}{5}$  (۱)

در یک دنباله حسابی متناهی، مجموع سه جمله اول ۱۲، مجموع سه جمله آخر ۶۶ و مجموع تمام جملات ۱۱۷ می باشد. این دنباله چند جمله دارد؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)



در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن،  $\frac{1}{3}$  مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟ **تجربی خارج ۹۱**

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۳ (۴) ۴ (۴)

در یک دنباله حسابی با ۲۰ جمله و با قدرنسبت  $d$  و جمله اول ۳-، جملات با شماره زوج را حذف می‌کنیم. اگر نسبت مجموع جملات دنباله جدید به مجموع جملات دنباله اصلی برابر  $\frac{1}{3}$  باشد، جمله بیست و پنجم دنباله، کدام است؟

- (۱) ۶ (۲)  $\frac{21}{8}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴) ۴ (۴)

در یک دنباله حسابی اگر به جمله اول ۳ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، در مجموع بیست جمله اول چه تغییری صورت می‌گیرد؟

- (۱) ۳۲۰ واحد اضافه می‌شود. (۲) ۱۶۰ واحد اضافه می‌شود. (۳) ۳۲۰ واحد کم می‌شود. (۴) ۱۶۰ واحد کم می‌شود.

مجموع اولین بیست جمله مشترک دنباله حسابی  $1, 5, 11, \dots$  و دنباله حسابی  $1, 5, 9, \dots$  کدام است؟

- (۱) ۲۳۸۰ (۲) ۲۵۰۰ (۳) ۲۶۰۰ (۴) ۲۲۸۰

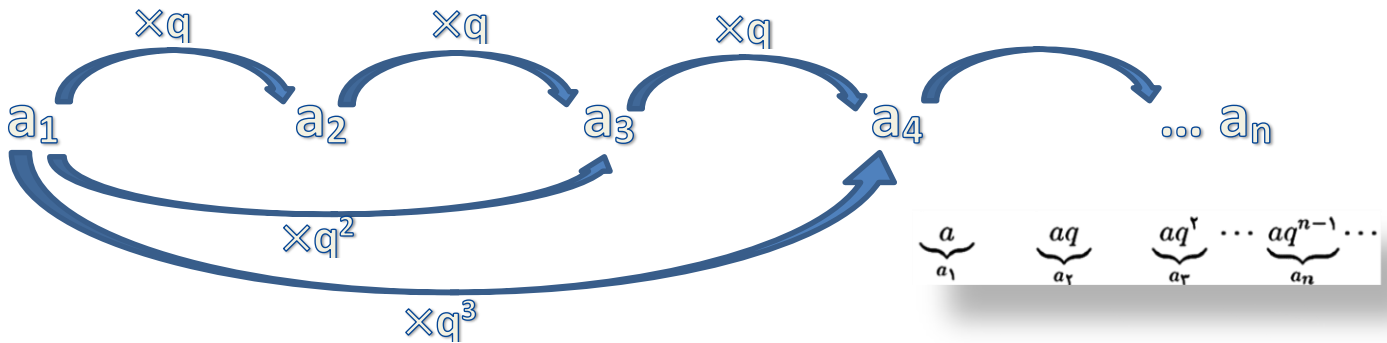
یک شرکت تولیدی تا پایان سال اول ۸۰۰ واحد کالا تولید می‌کند و در نظر دارد که پس از گذشت هر یک سال، مرتباً ۹۰ واحد کالا به تولید سال قبل بیافزاید. پس از گذشت ۴ سال جمعاً چند واحد کالا می‌تواند تولید کند؟

- (۱) ۳۶۸۰ (۲) ۳۷۴۰ (۳) ۳۷۶۰ (۴) ۳۸۶۰



## مروری بر دنباله هندسی:

دنباله هندسی: دنباله ایی است که در آن هر جمله (بغیر از جمله اول!) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت حاصل می شود که این یعنی حاصل تقسیم هر دو عدد متوالی همواره مقدار ثابتی است که این عدد همان قدر نسبت (q) دنباله هندسی می باشد.



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

فرم جمله عمومی این دنباله بشکل روبروست:

۱- واسطه هندسی: اگر سه جمله متوالی یک دنباله هندسی رو  $a$ ,  $b$ ,  $c$  فرض کنیم در این صورت  $b^2 = a \cdot c$  و  $b$  واسطه ی هندسی نامیده می شود.

۲- اگر دو جمله  $a_n$ ,  $a_m$  از یک دنباله هندسی را داشته باشیم و بخواهیم قدر نسبت را بیابیم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$$

۳- اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  تعداد  $m$  عدد قرار دهیم که تشکیل دنباله هندسی بدهند آنگاه قدرنسبت از رابطه زیر بدست می آید:

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

۴- به طور کلی هر نمایش به صورت  $a_n = kr^{\alpha n + \beta}$  نمایش یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $r^\alpha$  می باشد.

۵- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $q$  و جمله ی اول غیر صفر اگر  $q > 1$  باشد جملات دنباله صعودی هستند و اگر  $0 < q < 1$  باشد دنباله نزولی است. اما اگر  $q < 0$  باشد جملات دنباله روند افزایشی یا کاهشی مشخصی ندارند.

۶- در دنباله هندسی  $a_n$  برای هر  $m, n, p, q, L$  طبیعی که رابطه ی  $p+q = m+n = 2L$  برقرار باشد داریم:

$$a_p \times a_q = a_n \times a_m = (a_L)^2$$

"دنباله هندسی ثابت رو هم که دیگه میدونید، قدر نسبتش عدد ۱ هست"

حال اگر بخواهیم مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی را بیابیم از فرمول روبرو استفاده می کنیم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$$

تبصره: اگر جملات یک دنباله هندسی روند نزولی داشته باشند ( $0 < q < 1$ ) برای محاسبه مجموع  $n$  جمله اول آن می توانیم از حد مجموع در تصاعد هندسی استفاده کنیم که به شکل زیر است:

**نکته:** اگر در دنباله هندسی  $\{a_n\}$ ، مجموع  $n$  جمله اول را با نماد  $S_n$  نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1 \Rightarrow \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = q^n$$

**نکته ۲:** برای یافتن جمله عمومی از روی  $S_n$ ، می توان از رابطه  $a_n = S_n - S_{n-1}$  استفاده کرد. همچنین داریم  $a_1 = S_1$  و  $a_r = S_r - S_{r-1}$ ، در نتیجه

$$q = \frac{S_r - S_1}{S_1} = \frac{S_r}{S_1} - 1$$

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

**نکته ۳:** مجموع جملات  $m$  تا  $n$  ( $m < n$ )، برابر است با:

### تست های آموزشی

کلر نکته نویسه ...

مجموع سه جمله اول یک تصاعد هندسی نزولی ۵ برابر جمله ی دوم است. قدر نسبت این

تصاعد کدام است؟

$$2 + \sqrt{3} \quad (1) \quad 2 - \sqrt{3} \quad (2) \quad 2 + \sqrt{3} \quad (3) \quad 3 + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 5a_2$$

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 5a_1q \Rightarrow 1 + q + q^2 = 5q \Rightarrow q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow q = 2 \pm \sqrt{3}$$

چون تصاعد هندسی نزولی است پس  $q < 1 \Rightarrow q = 2 - \sqrt{3}$  قابل قبول است.

در یک تصاعد هندسی صعودی  $a_5 - a_3 = \sqrt{2}$  و  $a_6 - a_4 = 2\sqrt{2}$  است قدر نسبت تصاعد کدام

است؟

$$2 \quad (1) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad 2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$a_5 - a_3 = \sqrt{2} \Rightarrow a_1q^4 - a_1q^2 = \sqrt{2} \Rightarrow a_1q^2(q^2 - 1) = \sqrt{2}$$

$$\frac{a_1q^4(q^2 - 1)}{a_1q^2(q^2 - 1)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$a_6 - a_4 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a_1q^5 - a_1q^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a_1q^3(q^2 - 1) = 2\sqrt{2}$$

در یک تصاعد هندسی رابطه ی  $a_2a_6a_{10} = 4a_8^3$  برقرار است. قدرنسبت کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

گزینه ۱ صحیح است.

جمله ی دوم یک تصاعد هندسی  $\frac{1}{3}$  و جمله ی چهارم  $\frac{1}{27}$  است. جمله ی هفتم کدام است؟

$$\frac{1}{243} \quad (1) \quad \pm \frac{1}{243} \quad (2) \quad \frac{1}{729} \quad (3) \quad \pm \frac{1}{729} \quad (4)$$

$$\frac{a_4}{a_2} = q^{4-2} = q^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{729}} = q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{3}$$

$$a_7 = a_1q^6 = (a_1q)q^6 = a_2q^6 = \frac{1}{3}(\pm \frac{1}{3})^6 = \pm \frac{1}{729}$$

حاصل ضرب پنج عدد که تصاعد هندسی می سازند ۲۴۳ است.  $a_1 \times a_5$  برابر است با:

$$9 \quad (1) \quad 27 \quad (2) \quad 9\sqrt{3} \quad (3) \quad 18\sqrt{3} \quad (4)$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 243 \Rightarrow (a_1)(a_1q)(a_1q^2)(a_1q^3)(a_1q^4) = 243$$

$$a_1^5 q^{10} = 3^5 \Rightarrow a_1 q^2 = 3$$

$$a_1 \times a_5 = a_1 \times a_1 q^4 = a_1^2 q^4 = (a_1 q^2)^2 = 3^2 = 9$$

اگر میانگین حسابی دو عدد  $x$  و  $y$  دو برابر میانگین هندسی آنها باشد و  $x > y > 0$ ، مقدار  $\frac{x}{y}$

کدام است؟

$$2 - \sqrt{3} \quad (1) \quad 2 + \sqrt{3} \quad (2) \quad 3 - \sqrt{2} \quad (3) \quad 3 + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{x+y}{2} = 2\sqrt{xy} \quad x+y = 4\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{4\sqrt{xy}}{y} \quad \text{اگر: } \sqrt{\frac{x}{y}} = z \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} + 1 = 4\sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow z^2 + 1 = 4z$$

چون  $x > y > 0$  پس  $\sqrt{\frac{x}{y}} > 1$  و از آنجایی که  $2 - \sqrt{3} < 1$  پس  $2 + \sqrt{3} = \sqrt{\frac{x}{y}}$  قابل قبول است.  $\Rightarrow z^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2 \pm \sqrt{3}$

کادر نکته نویسه ...

بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ سه واسطه حسابی و سه واسطه هندسی (مثبت) درج می‌کنیم اگر جملات

وسط را به ترتیب A و B بنامیم حاصل A-B کدام است؟

۶۲ (۴)                      ۶۴ (۳)                      ۷۰ (۲)                      ۷۶ (۱)

اگر سه واسطه حسابی بین ۲ و ۱۶۲ درج کنیم قدر نسبت تصاعد به دست آمده برابر است با:  $d = \frac{162-2}{3+1} = 40$  بنابراین جملات تصاعد عبارتند از:

۲                      ۴۲                      ۸۲                      ۱۲۲                      ۱۶۲

جمله وسط این تصاعد برابر است با  $A=82$  اگر سه واسطه هندسی بین ۲ و ۱۶۲ درج کنیم داریم  $q = \sqrt[3]{\frac{162}{2}} = 3$  بنابراین جملات تصاعد هندسی حاصل عبارتند از:

۲                      ۶                      ۱۸                      ۵۴                      ۱۶۲

جمله‌ی وسط این تصاعد برابر  $B=18$  است و  $A-B=64$

در یک تصاعد هندسی، مجموع ۴ جمله دوم تصاعد ۱۶ برابر مجموع ۴ جمله اول این تصاعد

است. جمله پنجم تصاعد چند برابر جمله سوم آن است؟

۱۶۱ (۴)                      ۸ (۳)                      ۴ (۲)                      ۲ (۱)

$$(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = 16(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \Rightarrow S_8 - S_4 = 16S_4 \Rightarrow S_8 = 17S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 17 \times \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$$

$$\Rightarrow (1-q^8) = 17(1-q^4) \Rightarrow (1-q^4)(1+q^4) = 17(1-q^4) \Rightarrow 1+q^4 = 17 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1q^4}{a_1q^2} = q^2 = 4$$

حد مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی ۸ برابر جمله‌ی اول است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

$$\frac{a_1}{1-q} = 8a_1 \Rightarrow \frac{1}{1-q} = 8 \Rightarrow 1-q = \frac{1}{8} \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

در یک تصاعد هندسی نزولی جمله‌ی اول ۶ برابر مجموع از جمله‌ی دوم به بعد است. قدر نسبت

این تصاعد کدام است؟

$\frac{7}{13}$  (۴)                       $\frac{1}{5}$  (۳)                       $\frac{1}{6}$  (۲)                       $\frac{1}{5}$  (۱)

$$a_1 = \frac{6a_2}{1-q} \Rightarrow a_1 = \frac{6a_1q}{1-q} \Rightarrow 1-q = 6q \Rightarrow q = \frac{1}{7}$$

جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک تصاعد حسابی میتوانند سه جمله متوالی از یک تصاعد هندسی باشند. قدر نسبت دنباله

هندسی کدام است؟

(تقریبی ۹۳)

$\frac{7}{3}$  (۴)                       $\frac{9}{4}$  (۳)                       $\frac{7}{6}$  (۲)                       $\frac{5}{3}$  (۱)

$$\begin{cases} a_1' = a_2 = a_1 + d \\ a_2' = a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_2'^2 = a_1' \times a_3' \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d) \\ a_3' = a_{12} = a_1 + 11d \end{cases}$$

$$a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2$$

$$5d^2 = 4a_1d \Rightarrow 5d = 4a_1 \Rightarrow d = \frac{4}{5}a_1$$

$$q = \frac{a_2'}{a_1'} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{a_1 + 4 \times \frac{4}{5}a_1}{a_1 + \frac{4}{5}a_1} = \frac{1 + \frac{16}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{21}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

اعداد  $2^a$  و  $4\sqrt{2}$  و  $2^b$  سه جمله متوالی از یک تصاعد هندسی اند. واسطه عددی بین  $a, b$  کدام است؟

ریاضی ۸۷                       $\sqrt{2}$  (۳)                       $1/5$  (۳)                      ۲ (۲)                       $2/5$  (۱)

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b = 5 \quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2}$$

واسطه عددی  $a, b$  همچون  $c$  است که  $c = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2}$

در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول  $\frac{5}{4}$  مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

(۱)  $\frac{1}{16}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{5}{32}$  (۴)  $\frac{1}{4}$  (ریاضی ۸۵)

باید  $q^6 = \frac{a_1 q^6}{a_1} = \frac{a_7}{a_1}$  را بیابیم.

$$s_8 = \frac{5}{4} s_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4} \left( \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \right) \Rightarrow (1-q^8) = \frac{5}{4}(1-q^4) \Rightarrow (1-q^4)(1+q^4) = \frac{5}{4}(1-q^4) \Rightarrow$$

$$1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{5}{4} - 1 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^6 = (q^4)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$$

در یک تصاعد عددی مجموع ۱۰ جمله اول  $(4\sqrt{2} + 1)$  برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این تصاعد مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع ۴ جمله اول است؟

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۹ (آزاد - عصر ۸۹)

$$\frac{s_{10}}{s_5} = \frac{a_1(1-q^{10})}{a_1(1-q^5)} = \frac{(1-q^5)(1+q^5)}{(1-q^5)} = 1+q^5 = 4\sqrt{2} + 1 \Rightarrow q^5 = 4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow q = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{s_8}{s_4} = \frac{a_1(1-q^8)}{a_1(1-q^4)} = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{(1-q^4)} = 1+q^4 = 1+\sqrt{2}^4 = 1+4 = 5$$

### تست های ارزشیابی

بین دو عدد ۲ و  $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

ریاضی خارج ۸۸

(۱)  $30(2+\sqrt{2})$  (۲)  $48\sqrt{2}$  (۳)  $30(\sqrt{2}+1)$  (۴)  $36(\sqrt{2}+1)$

در یک دنباله هندسی به صورت  $\dots, b, 9, a, 4$  که جملات مرتباً افزایش می‌یابند، مجموع شش جمله اول کدام است؟

ریاضی خارج ۸۹

(۱)  $81\frac{3}{8}$  (۲)  $81\frac{7}{8}$  (۳)  $82\frac{3}{8}$  (۴)  $83\frac{1}{8}$





به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2$ ،  $2x$  و  $x^2 + 4$ ، به ترتیب سه جمله اول از یک دنباله هندسی هستند که جملات آن مرتباً کاهش می‌یابند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

تجربی داخل ۹۳

$$\frac{127}{8} \quad (4)$$

$$\frac{63}{4} \quad (3)$$

$$\frac{125}{16} \quad (2)$$

$$\frac{117}{16} \quad (1)$$

ریاضی داخل ۹۳

حاصل عبارت  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

در یک دنباله هندسی، هر جمله  $\frac{2}{3}$  جمله قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله اول آن  $\frac{211}{27}$  باشد، جمله اول کدام است؟ انسانی خارج ۹۰

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$



در یک دنباله هندسی مجموع ده جمله اول  $(1 + \sqrt{2})^4$  برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این دنباله مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

- ۵ (۱)      ۳ (۲)      ۹ (۳)      ۱۷ (۴)

در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- ۱۶ (۴)      ۹ (۳)      ۸ (۲)       $\frac{81}{16}$  (۱)
- ریاضی داخل ۸۹

طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم، سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌زنیم. حداقل پس از چند مرحله بیش از ۹۰ درصد مربع رنگ شده است؟

- ۶ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)
- مشابه تمرین کتاب درسی

برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

- ۷ (۴)      ۸ (۳)      ۵ (۲)      ۶ (۱)
- مشابه مثال کتاب درسی



مجموع  $n$  جمله‌ی اولیه از دنباله‌ی هندسی زیر برابر  $۱۰۲۶$  است.  $n$  کدام است؟

$۶, -۱۲, ۲۴, \dots$

۹ (۲)

۸ (۱)

(۴) هیچ‌گاه جمع جملات برابر  $۱۰۲۶$  نمی‌شود.

۱۰ (۳)

حاصل  $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x + x^2 - \dots + x^n)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟ (سراسری - ۸۲)

۵۱۶ (۴)

۵۱۲ (۳)

۵۱۱ (۲)

۵۰۷ (۱)



## درس دوم: معادله درجه ۲ و تابع درجه

هر معادله به شکل زیر را یک معادله درجه ۲ می نامیم و بصورت گفته شده مقادیر جواب آن را محاسبه می کنیم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

می دانیم اگر  $\Delta > 0$  باشد معادله دو جواب متمایز حقیقی دارد، اگر  $\Delta = 0$  باشد یک جواب مضاعف دارد و اگر  $\Delta < 0$  باشد معادله جواب حقیقی ندارد.

روش تغییر متغیر برای حل معادله درجه ۲: بچه ها بعضی معادلات هستند که از درجه ۲ نیستند اما قابل تبدیل به درجه ۲ می باشند یعنی اگر عبارتی را در آن T بنامیم، ظاهر معادله بشکل معادله درجه ۲ می شود.

$$\begin{array}{l} x^4 - x^2 - 2 = 0 \\ u^2 - u - 2 = 0 \quad \text{با نامیم } u \text{ را } x^2 \\ \Rightarrow (u+1)(u-2) = 0 \Rightarrow u = -1 \text{ یا } 2 \\ \begin{cases} u = x^2 = -1 \\ u = x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{این امکان ندارد} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} (x^2-1)^2 - 11(x^2-1) + 24 = 0 \\ x^2-1 \text{ را بگیریم:} \\ u^2 - 11u + 24 = 0 \\ \Rightarrow (u-3)(u-8) = 0 \Rightarrow u = 3 \text{ یا } 8 \\ \begin{cases} u = x^2 - 1 = 3 \\ u = x^2 - 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases} \end{array}$$

کدام معادله (ها) فقط دو جواب دارند؟

$$x^4 - 5x^2 - 24 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{(د)}$$

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \quad \text{(پ)}$$

(۴) فقط «ب» و «د»

(۳) فقط «ب» و «د»

(۲) فقط «ب»

(۱) فقط «د»

با تغییر متغیر  $u = x^2$ ، داریم:

(الف)  $u^2 - 7u + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = u = 3 \text{ یا } 4 \Rightarrow \{\pm\sqrt{3}, \pm 2\}$  برای x چهار جواب دارد.

(ب)  $u^2 - 5u - 24 = 0 \Rightarrow x^2 = u = 8 \text{ یا } -3 \Rightarrow \{\pm 8\}$  برای x دو جواب دارد.

(پ)  $u^2 - 6u + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = u = 3 \Rightarrow \{\pm\sqrt{3}\}$  برای x دو جواب دارد.

(د)  $u^2 + 5u + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = u = -1 \text{ یا } -4 \Rightarrow$  برای x جواب ندارد.

پس فقط (ب) و (پ) دو جواب داشتند.

در مورد معادله  $ax + b\sqrt{x} + c = 0$  هم با تغییر متغیر  $u = \sqrt{x}$  می توان به معادله  $au^2 + bu + c = 0$  رسید. در این جا هم فقط جواب های صفر و مثبت برای u قابل قبول اند و هر جواب مثبت برای u، یک جواب مثبت به x می دهد.

کدام معادله برای x فقط یک جواب دارد؟

$$x - 6\sqrt{x} + 5 = 0 \quad (۴)$$

$$x + 2\sqrt{x} + 1 = 0 \quad (۳)$$

$$x - \sqrt{x} + 6 = 0 \quad (۲)$$

$$x - \sqrt{x} - 1 = 0 \quad (۱)$$

گاهی باید ظاهر معادله را عوض کرد یا دقیق تر به آن نگاه کرد تا تغییر متغیر مناسب را دید.

مثلاً در معادله  $x^4 + x^2 - 2x = 0$  باید  $(x-1)^2$  را  $u$  بگیریم، پس داریم:  $u^2 + u - 1 = 0$ . دقت کردید که  $x^2 - 2x$  همان  $(x-1)^2 - 1$  است؟

یا در معادله  $0 = x^2 - \frac{6x+5}{x+1} - 13$  اول به جای  $\frac{6x+5}{x+1}$  باید بنویسیم  $\frac{2x+1+4x+4}{x+1}$  یعنی  $\frac{2x+1}{x+1}$  و پس از تغییر متغیر

$$\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 - \frac{2x+1}{x+1} - 4 - 13 = 0 \Rightarrow u^2 - u - 17 = 0 \quad \text{برویم: } \frac{2x+1}{x+1} = u$$

مجموع (S) و حاصل ضرب (P) ریشه های معادله درجه دوم:

$$x_1 + x_2 = \text{مجموع دو ریشه} = S = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \text{ضرب دو ریشه} = P = \frac{c}{a}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

بچه ها حالا که با S و P آشنا شدیم، همراهی کنید تا با کاربردهای این دو عامل هم بیشتر آشنا بشیم.

در راستای اهمیت بالای زمان برای شما دانش آموزان عزیز سعی شده تمامی سوالات ممکن بررسی شود و نکات کاربردی این مبحث استخراج شده و در سه بخش زیر در اختیار شما قرار داده می شود. بدیهی است که انتظار می رود به نکات زیر اشراف کامل داشته باشید تا در حل تست ها و سوالات شناسنامه دار با مشکل مواجه نشویم.

نکته ۱: با داشتن مقدار S و P می توان مقادیر زیر را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = \text{مجموع مربعات ریشه ها} &= S^2 - 2P & \left\| \begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 = \text{مجموع مکعبات ریشه ها} &= S^3 - 3PS \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \text{مجموع معکوس ریشه ها} &= \frac{S}{P} \end{aligned} \right. \\ |x_1 - x_2| = \text{اختلاف ریشه ها} &= \sqrt{S^2 - 4P} & \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \text{مجموع جذر ریشه های مثبت} &= \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \end{aligned}$$

نکته ۲: در معادله درجه دوم بصورت زیر با توجه به ضرایب a و b و c می توان مقدار جواب معادله را پیش بینی کرد

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a + b + c = 0 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

$$a + c = b \rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{-c}{a}$$

$$\Delta > 0, \quad b = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\Delta > 0, \quad a = c \rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$$

$$ac < 0 \rightarrow x_1 \times x_2 < 0$$

بچه ها دقت کنید گاهی اوقات یکی از ضرایب a و b و c در معادله درجه ۲ مجهول بوده و رابطه جبری بین ریشه ها داده شده، معمولاً در این موارد با استفاده از S و P یک ریشه معادله را یافته و با قرار دادن ریشه در معادله (ریشه ها در معادلات خودشان صدق می کنند) مقدار مجهول یافت می شود.



مثال: در معادله  $2x^2 - 10x + a = 0$  یک ریشه از دو برابر ریشه دیگر یک واحد بیشتر است،  $a$  را بیابید:

$$x_2 = 2x_1 + 1 \quad \rightarrow +x_1 \rightarrow x_1 + x_2 = 3x_1 + 1 \quad \rightarrow 5 = 3x_1 + 1 \quad x_1 = \frac{4}{3}$$

حال  $x_1$  را در معادله قرار می دهیم مقدار  $a$  را محاسبه می کنیم ...

نکته ۳: در حالت کلی با داشتن  $S$  و  $P$  می توانیم علامت ریشه ها را نشان دهیم:

$$S > 0, P > 0 \Leftrightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$$

$$S > 0, P < 0 \Leftrightarrow x_1 > 0, x_2 < 0 \text{ (قدرمطلق ریشه مثبت از قدرمطلق ریشه منفی بزرگ تر است.)}$$

$$S < 0, P > 0 \Leftrightarrow x_1 < 0, x_2 < 0$$

$$S < 0, P < 0 \Leftrightarrow x_1 < 0, x_2 > 0 \text{ (قدرمطلق ریشه مثبت بزرگ تر است.)}$$

نوشتن معادله درجه دوم با استفاده از  $S$  و  $P$ :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 - Sx + P = 0$$

### تست های آموزشی

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه های معادله  $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$  معکوس یکدیگرند؟ مجموع این دو ریشه کدامند؟

مثال: اگر  $a, b$  ریشه های معادله  $x(5x+3)=2$  باشند به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب های معادله درجه دوم  $4x^2 - kx + 25 = 0$  بصورت  $\{a^{-2}, b^{-2}\}$  است؟

راهنمایی: ابتدا مقادیر  $a$  و  $b$  را پیدا می کنیم لزومی آن ریشه های معادله جدید ... آیا ریشه ها در معادله صدق نمی کنند؟

مثال: در معادله  $3x^2 - 17x + m = 0$  یکی از ریشه ها از ۳ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است  $m$  کدام است؟

راهنمایی: از مجموع و حاصل ضرب ریشه ها کمک بگیرید

مثال: معادله  $(x-1)(x-3)+2+k^2=0$  چه وضعی دارد؟

راهنمایی: مشخص است که طرح میخواهد بداند شما در مورد وجود یا عدم وجود ریشه حقیقی اطلاع دارید یا نه؟ تعداد ریشه ها به چه عاملی بستگی داشت؟ ...



مثال: اگر معادله  $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$  دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد مجموعه مقادیر  $m$  را بیابید:  
**راهنمایی:** در نکات گفته شده ذکر شد که اگر قرار بر این باشد معادله حداکثر جواب خود را داشته باشد باید  $P > 0$  ,  $S > 0$  ,  $\Delta > 0$  باشد...

در معادله  $x^2 - 6x + 2 = 0$  حاصل  $x_1^2 + \frac{1}{x_1} + x_2^2 + \frac{1}{x_2}$  کدام است؟

(۱) ۳۵      (۲) ۲۱      (۳) ۲۴      (۴) ۲۵

جمع ریشه‌ها  $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 6$  و ضرب ریشه‌ها  $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2$  است.

حالا عبارت مورد نظر:

$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{S^2 - 2P} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 6^2 - 2 \times 2 + \frac{6}{2} = 36 - 4 + 3 = 35$$

ریشه‌های معادله  $2x^2 - 7x + 3 = 0$  اعداد  $x_1$  و  $x_2$  هستند. حاصل  $x_1^2 + x_2^2$  چند برابر تفاضل دو ریشه است؟

(۱) ۱۰/۳۴      (۲) ۱۰/۶۸      (۳) ۱۰/۵۱      (۴) ۱۰/۸۵

اگر ریشه‌های متمایز معادله  $mx^2 - 2x + \frac{m^2 - 3}{3} = 0$  عکس یکدیگر باشند، واسطه حسابی دو ریشه کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $-\frac{1}{3}$       (۴) نشدنی

ریشه‌های کدام معادله، از دو برابر ریشه‌های معادله  $x^2 - x - 1 = 0$  یک واحد بیشتر است؟

(۱)  $x^2 = 4x + 1$       (۲)  $x^2 = 4x - 1$       (۳)  $x^2 = 2x + 1$       (۴)  $x^2 = 2x - 1$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 2x - 6 = 0$  باشند و ریشه‌های معادله  $3x^2 + mx + n = 0$  برابر با  $\frac{\alpha}{\beta}$  و  $\frac{\beta}{\alpha}$  باشند، حاصل  $m - n$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۱۱ (۴) -۱۱

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $4x(x-8) = -1$  باشند، حاصل  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

به ازای کدام مقدار  $m$ ، عدد  $\sqrt{2}$  واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$  است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

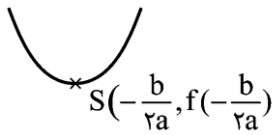
اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند و  $\alpha > \beta$ ، آن‌گاه معادله‌ای که ریشه‌هایش  $5\alpha$  و  $4\beta$  باشد، کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 15x + 9 = 0$  (۲)  $x^2 + 7x + 10 = 0$  (۳)  $x^2 - 7x + 10 = 0$  (۴)  $x^2 + 15x + 9 = 0$





ماکزیمم و مینیمم سهمی :

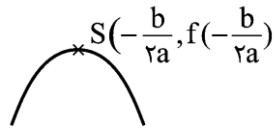


نمودار تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  به شکل یک سهمی است.

طول رأس این سهمی  $x_S = -\frac{b}{2a}$  (معادله دو ریشه) است.

برای به دست آوردن عرض رأس سهمی،  $x_S$  را در تابع قرار می‌دهیم.

الف اگر  $a > 0$  باشد، سهمی رو به بالا است و رأس آن مینیمم سهمی (کم‌ترین مقدار) است.



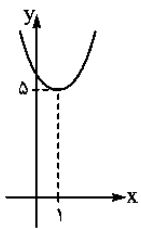
ب اگر  $a < 0$  باشد، سهمی رو به پایین و رأس آن نقطهٔ ماکسیمم (بیشترین مقدار) است.

نکته: با داشتن نقطهٔ رأس، معادلهٔ سهمی به صورت  $y = a(x - x_S)^2 + y_S$  نوشته می‌شود. برعکس اگر معادلهٔ سهمی

به صورت  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  باشد، رأس سهمی  $(\alpha, \beta)$  است. مثلاً در سهمی  $f(x) = x^2 - 2x + 6$ ، طول نقطهٔ رأس

$x_S = -\frac{(-2)}{2 \times 1} = 1$  و عرض آن  $f(1) = 1 - 2 + 6 = 5$  است و چون  $a > 0$  است، این عدد ۵ مینیمم سهمی است. نمودار سهمی

هم به شکل روبه‌رو است:



معادله حرکت یک توپ که از زمین به طرف بالا پرتاب شده،  $y = -5t^2 + 40t$  است. توپ در ثانیه پس از پرتاب،

به ارتفاع اوج در متری می‌رسد.

۱۶۰، ۸ (۴)

۸۰، ۸ (۳)

۸۰، ۴ (۲)

۱۶۰، ۴ (۱)

معادلهٔ مسیر توپ یک سهمی رو به پایین است:

پس در  $t = -\frac{b}{2a} = \frac{-40}{2(-5)} = 4$  ثانیه به اوج می‌رسد و ارتفاع اوجش برابر است با:  $y_{\max} = -5(4)^2 + 40(4) = 80$

اگر سود هر واحد از کالایی  $x + 50$  دلار باشد، میزان فروش آن  $220 - 4x$  واحد خواهد بود. سود را چه قدر انتخاب کنیم

تا سود کل ماکسیمم شود؟

۵۷/۵ (۴)

۵۵ (۳)

۵۲/۵ (۲)

۵۲ (۱)

سود کل  $(220 - 4x) \times (50 + x)$  است که به صورت تابع درجه دوم  $f(x) = -4x^2 + 20x + 11000$  در

می‌آید. این تابع در  $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-20}{2 \times (-4)} = \frac{5}{4}$  ماکسیمم دارد. پس سود هر کالا باید  $52/5$  دلار باشد تا به حداکثر سود برسیم.

روش نوشتن معادله سهمی به کمک نمودار (با داشتن محل برخورد نمودار با محور  $x$ ها (ریشه‌ها) و محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها (عرض از

مبدا)):

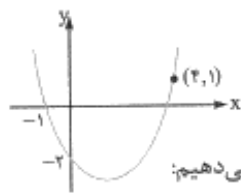
ابتدا با جاگذاری عرض از مبدا و ریشه‌ها در معادله  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$  مقدار  $a$  را می‌یابیم سپس معادله سهمی را می‌نویسیم.

اگر به جای این‌ها نقاطی دیگر از سهمی را به ما دادند و معادله سهمی را خواستند باید معادله سهمی را بصورت کلی بنویسیم و با جاگذاری نقاط داده

$$y = ax^2 + bx + c$$

شده در آن مقادیر  $a, b, c$  را بیابیم.

طول رأس سهمی شکل مقابل کدام است؟

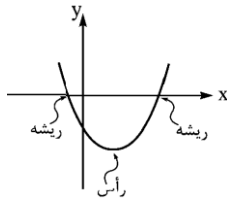


۲۱/۱۱ (۴)      ۲۹/۲۲ (۳)      ۲۹/۱۱ (۲)      ۳۱/۲۲ (۱)

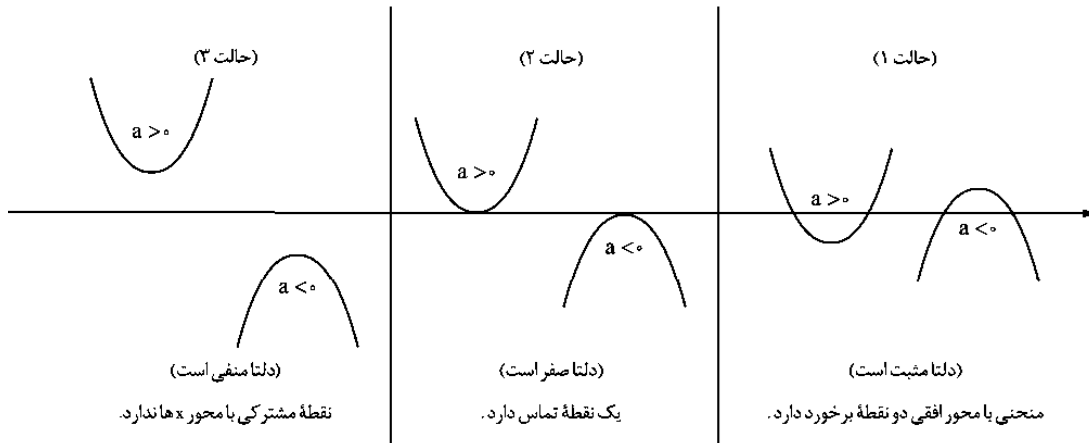
معادله سهمی را به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  می‌نویسیم و نقاط  $(0, -2)$ ،  $(-1, 0)$  و  $(4, 1)$  را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (0, -2) &\rightarrow -2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -2 \\ (-1, 0) &\rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=-2} a - b = 2 \\ (4, 1) &\rightarrow 1 = a(4)^2 + b(4) + c \xrightarrow{c=-2} 16a + 4b = 3 \end{aligned} \Rightarrow a = \frac{11}{20}, b = -\frac{29}{20} \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{29}{22}$$

صفر های تابع: صفر های تابع در واقع همان محل برخورد نمودار تابع با محور  $x$  ها یا همان ریشه یا جواب معادله هستند. برای پیدا کردن این نقاط به  $y$  در معادله تابع صفر می دهیم.

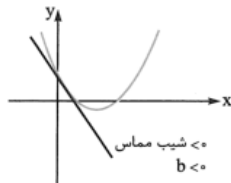
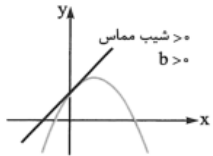


بکمک علامت ضریب  $x^2$  که همان  $(a)$  می باشد و مقدار دلتا تابع براحتی مطابق شکل های زیر وضعیت نمودار تابع بررسی می شود.



هرکدام از ضرایب  $a, b, c$  در معادله سهمی مشخص کننده ویژگی خاصی در سهمی است که با شناخت آنها رسم سهمی بسیار ساده تر خواهد شد:

۱- ضریب  $(a)$ : نشان دهنده ی حالت دهانه سهمی، اگر  $a > 0$  باشد دهانه سهمی رو به بالاست اگر  $a < 0$  باشد دهانه سهمی رو به پایین



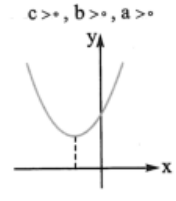
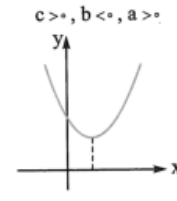
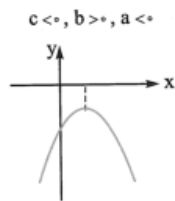
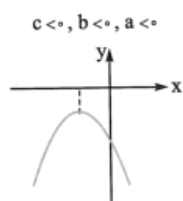
۲- ضریب  $(b)$ : نشان دهنده شیب نمودار زمانی که نمودار محور عرض ها را قطع

می کند است، به طوری که اگر  $b > 0$  باشد سهمی با شیب مثبت محور عرض ها را قطع می کند و اگر  $b < 0$  باشد با شیب منفی محور عرض ها را قطع خواهد کرد.

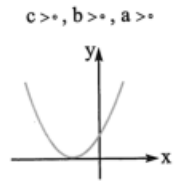
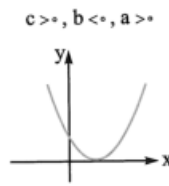
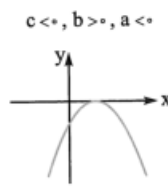
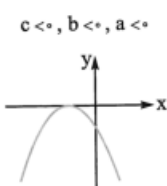
۳- ضریب  $(c)$ : نشان دهنده عرض نقطه برخورد نمودار سهمی با محور  $y$  هاست (عرض از مبدا).

خوب بچه ها الان میخواهیم کمی ریز بینانه تر به قضیه نگاه کنیم:

$\Delta < 0$ ، سهمی ریشه (صفر) ندارد (منحنی همیشه در یک طرف محور است).



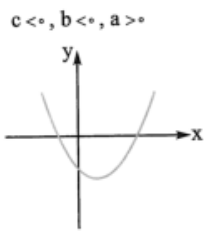
$\Delta = 0$ ، سهمی یک ریشه مضاعف دارد (بر محور  $x$  ها مماس است).



کادر نکته نویسه ...

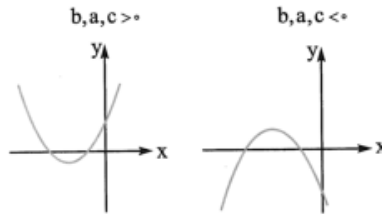
$\Delta > 0$ ، سهمی دو تا صفر (ریشه) دارد و محور افقی را در ۲ نقطه قطع می کند.

دو ریشه مختلف علامته  $(P < 0)$



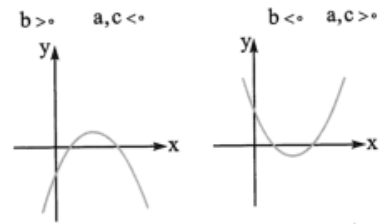
$a > 0$   
 $b < 0$  و حالت های دیگر  
 $c < 0$

دو ریشه منفی  $(P > 0$  و  $S < 0)$

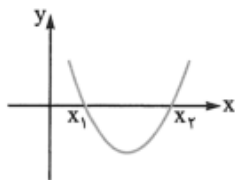


$b, a, c < 0$   
 $b, a, c > 0$

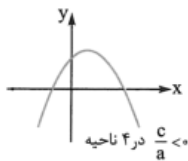
دو ریشه مثبت  $(S > 0$  و  $P > 0)$



$b < 0$  و  $a, c > 0$   
 $b > 0$  و  $a, c < 0$



حالا می توانیم برای نمودار سهمی در دستگاه مختصات شرط هایی بگذاریم. مثلاً اگر بخواهیم سهمی، محور xها را در دو نقطه با طول های مثبت قطع کند باید دو ریشه مثبت داشته باشد، یعنی باید  $\Delta > 0$  و  $P > 0$  و  $S > 0$  باشد:



۱- شرط اول : شرط این که سهمی از هر چهار ناحیه مختصات عبور کند .

$$\Delta > 0, \quad ac < 0$$

۲- شرط دوم : شرط اینکه سهمی از سه ناحیه عبور کند .

۳- شرط اساسی این حالت این است که دو ریشه هم علامت باشند ( $ac > 0$ ) سپس با توجه به اینکه سهمی از کدام ناحیه نمی گذرد یکی از

چهار حالت زیر برای مشخص کردن علامت a رخ می دهد :

۴- شرط سوم : شرط اینکه سهمی فقط از دو ناحیه عبور کند .

شرط اساسی در این حالت این است که سهمی به هیچ هنوان نباید دو ریشه داشته باشد ( $\Delta \leq 0$ ) اما با توجه به اینکه سهمی از کدام دو

ناحیه عبور کند علامت a را در دو حالت زیر برای شما مشخص کرده ام :



## تست های آموزشی

نمودار سهمی  $y = -2x^2 + x - 1$  را رسم کنید.

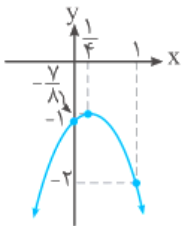
**نکته** برای رسم نمودار معادله  $y = ax^2 + bx + c$  و  $(a \neq 0)$ ، ابتدا مختصات رأس سهمی یعنی نقطه  $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  را می‌یابیم. سپس دو نقطه با طول‌های دلخواه (ترجیحاً دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس) را مشخص کرده و در نهایت با توجه به علامت  $a$ ، سهمی را رسم می‌کنیم.

**تذکره** به جای یافتن عرض نقطه رأس سهمی به کمک رابطه  $-\frac{\Delta}{4a}$ ، می‌توان طول رأس یعنی  $x = -\frac{b}{2a}$  را در معادله سهمی قرار داد تا عرض آن به دست آید.

چون  $a = -2 < 0$ ، پس دهانه این سهمی رو به پایین باز می‌شود. داریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times (-2)} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_S = -2 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{7}{8} \Rightarrow \text{رأس سهمی: } S(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8})$$

در این‌جا چون طول رأس سهمی عددی کسری است، برای راحتی کار به جای مشخص کردن دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس که حداقل یکی از آن‌ها کسری خواهد بود، دو نقطه با طول‌های صحیح در دو طرف رأس در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در این حالت عرض این نقاط ممکن است با هم برابر نباشند.



x	0	$\frac{1}{4}$	1
y	-1	$-\frac{7}{8}$	-1

سهمی  $y = ax^2 + bx + c$ ، محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه  $(2, -1)$  نیز بگذرد، معادله سهمی را بنویسید.

سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  از نقاط  $(0, 3)$ ،  $(3, 0)$  و  $(2, -1)$  می‌گذرد، بنابراین مختصات این سه نقطه در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (0, 3) \Rightarrow 3 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 3 \Rightarrow y = ax^2 + bx + 3$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (3, 0) \Rightarrow 0 = a(3)^2 + b(3) + 3 \Rightarrow 9a + 3b + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} 3a + b = -1 \quad (1)$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (2, -1) \Rightarrow -1 = a(2)^2 + b(2) + 3 \Rightarrow 4a + 2b = -4 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = 2 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{2a+b=-2} 2+b=-2 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = x^2 - 4x + 3$$

به ازای چه مقادیری از  $m$ ، معادله  $(m-1)x^2 + 4x + (m+2) = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟



اگر  $P$  (حاصل ضرب دو ریشه) منفی باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشه حقیقی مختلف‌العلامت است:

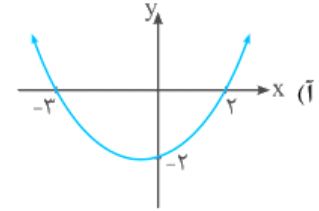
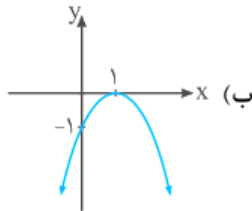
$m$	$-2$	$1$		
$m+2$	$-$	$0$	$+$	$+$
$m-1$	$-$	$-$	$0$	$+$
$P$	$+$	$0$	$-$	$+$

تعریف نشده

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+2}{m-1} < 0, \quad m+2=0, \quad m-1=0 \Rightarrow m=-2, \quad m=1$$

با توجه به جدول، اگر  $-2 < m < 1$ ، آن‌گاه  $P$  عددی منفی است.

معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



(آ) سهمی محور  $x$  ها را در نقاطی با طول‌های  $-3$  و  $2$  قطع کرده است، پس  $-3$  و  $2$  صفرهای تابع هستند، بنابراین معادله سهمی به صورت  $f(x) = a(x+3)(x-2)$  می‌باشد. طبق نمودار،  $f(0) = -2$  است، بنابراین:

$$f(0) = a(0+3)(0-2) = -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-2)$$

(ب) نمودار  $f$ ، محور طول‌ها را فقط در یک نقطه به طول  $1$  قطع کرده است، پس  $x=1$  تنها صفر تابع  $f$  است و در نتیجه ضابطه  $f$  به صورت  $f(x) = a(x-1)(x-1) = a(x-1)^2$  می‌باشد. داریم:

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $f(x) = x^2 - (m+1)x + m + \frac{25}{4}$  از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

$$-\frac{25}{4} < m < 6 \quad (4)$$

$$m > 6 \quad (3)$$

$$-4 < m < 6 \quad (2)$$

$$m < -\frac{25}{4} \quad (1)$$

$$P < 0, \quad P = \frac{c}{a} = m + \frac{25}{4} < 0 \Rightarrow m < -\frac{25}{4}$$

شرط آن‌که سهمی از هر چهار ناحیه محورهای مختصات بگذرد آن است که:

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

بدون حل معادله، علامت ریشه‌های معادله  $5x^2 + 9x + 1 = 0$  را مشخص کنید.

ابتدا  $\Delta$  را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 20 = 61 > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.}$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{5} \quad \text{هم‌چنین } P = \frac{c}{a} = \frac{1}{5} \text{ عددی مثبت است و در نتیجه هر دو ریشه متحدالعلامت هستند. } S \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

چون جمع دو عدد (هر دو عدد مثبت یا هر دو عدد منفی) منفی می‌باشد، پس دو عدد باید منفی باشند. لذا معادله دارای دو ریشه حقیقی منفی می‌باشد.

حدود  $m$  برای آن‌که معادله  $mx^2 + mx - 2 = 0$  دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد را مشخص کنید.

$$\Delta > 0, \quad P = \frac{c}{a} > 0, \quad S = -\frac{b}{a} < 0 \quad \text{شرط داشتن دو ریشه حقیقی منفی برای معادله درجه دوم آن است که:}$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{m} = -1 < 0 \quad \checkmark, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (*)$$

$$\Delta = m^2 + 4m = m(m+4) > 0 \xrightarrow{(*)} m+4 < 0 \Rightarrow m < -4 \xrightarrow{(*)} m < -4$$

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $f(x) = x^2 - x + m$  فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

$$m < 0 \text{ یا } m > \frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$m < \frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$0 \leq m < \frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$m \geq 0 \quad (۱)$$



با توجه به این که ضریب  $x^2$  عددی مثبت است (سهمی رو به بالا)، نمودار تابع  $f$  باید به صورت  $f$  باشد، در واقع

معادله  $f(x) = 0$  باید دو ریشه حقیقی مثبت داشته باشد، پس باید داشته باشیم:

$$P = \frac{c}{a} > 0, \quad S = -\frac{b}{a} > 0, \quad \Delta > 0$$

$$P = m > 0, \quad S = -\frac{b}{a} = 1 > 0, \quad \Delta = 1 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{4}$$

از طرفی اگر  $m = 0$  باشد، آن‌گاه ضابطه تابع به صورت  $f(x) = x^2 - x$  درمی‌آید که نمودار آن نیز از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد. پس حدود  $m$  باید به صورت  $0 \leq m < \frac{1}{4}$  باشد تا نمودار تابع فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نگذرد. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

به ازای کدام مقادیر  $m$  نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = mx^2 + (m+1)x$  فقط از ناحیه چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

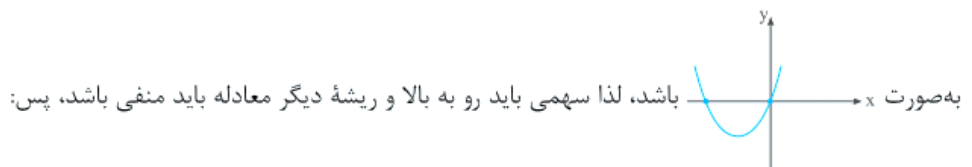
$$m < 0 \quad (۴)$$

$$m > 0 \quad (۳)$$

$$-2 < m < 0 \quad (۲)$$

$$-1 < m < 2 \quad (۱)$$

$c = 0$  می‌باشد، لذا نمودار  $f$  از مبدأ مختصات می‌گذرد. برای آن که نمودار فقط از ناحیه چهارم محورهای مختصات نگذرد، نمودار آن باید



به صورت  $f$  باشد، لذا سهمی باید رو به بالا و ریشه دیگر معادله باید منفی باشد، پس:

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{m+1}{m} < 0, \quad a = m > 0 \Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \xrightarrow{m > 0} m > 0 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

حدود  $m$  برای آن که نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = mx^2 + 2mx + m + 1$  همواره بالای محور  $x$  ها قرار گیرد را مشخص کنید.

در سهمی اگر  $m > 0$  = ضریب  $x^2$  و  $\Delta < 0$ ، آن‌گاه نمودار سهمی همواره بالای محور  $x$  ها قرار می‌گیرد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4m(m+1) = 4m(m - (m+1)) = 4m(-1) < 0 \Rightarrow m > 0$$

از طرفی اگر  $m = 0$  = ضریب  $x^2$ ، آن‌گاه ضابطه تابع به صورت  $f(x) = 1$  درمی‌آید که خط  $y = 1$  بالای محور  $x$  ها قرار دارد، پس به ازای  $m \geq 0$  نمودار تابع  $f$  همواره بالای محور  $x$  ها قرار می‌گیرد.

به ازای کدام مقدار  $m$ ، نمودار تابع  $f(x) = x^2 + mx + 4$ ، محور  $x$  ها را فقط در یک نقطه و در سمت چپ محور  $x$  ها قطع می‌کند؟

$$-4 \quad (۴)$$

$$-2 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

برای آن که نمودار تابع، محور  $x$  ها را فقط در یک نقطه قطع کند، باید معادله  $f(x) = 0$  ریشه مضاعف داشته باشد، لذا:

$$x^2 + mx + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4 \quad (*)$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} < 0 \Rightarrow m > 0 \xrightarrow{(*)} m = 4$$

اما در سمت چپ محور  $x$  ها،  $x$  عددی منفی است، لذا:

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

### تست های ارزشیابی

اگر مینیمم سهمی با ضابطه  $y = (m-1)x^2 + x - 2$  برابر ۲- باشد،  $m$  کدام است؟

$$\frac{9}{8} \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{9}{4} \quad (1)$$

(سراسری ریاضی)

اگر بیشترین مقدار تابع  $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$  برابر صفر باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

نمودار تابع با ضابطه  $y = -x^2 + (m+1)x + 2m - 1$  روی محور  $Oy$  دارای ماکزیمم است. عرض نقطه ماکزیمم کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

(سراسری ریاضی)

به ازای کدام مقدار  $a$ ، نقطه مینیمم نمودار تابع با ضابطه  $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$  بر روی خط  $y = 1$  واقع است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

محور تقارن سهمی  $y = -2x^2 + 5x - 1$ ، خط به معادله  $3x - 2y = 1$  را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$\frac{2}{8} \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\frac{11}{8} \quad (2)$$

$$\frac{7}{8} \quad (1)$$

اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم  $y = (a-1)x^2 + x + 3$  نسبت به خط  $x = 2$  متقارن باشد، این منحنی محور  $x$  ها را با کدام طول

(سراسری تجربی)

مثبت قطع می‌کند؟

$$6 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

نمودار تابع با ضابطه  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $x$  ها را در نقاط  $x = -1$  و  $x = 3$  و محور  $y$  ها را در نقطه  $y = -1$  قطع می‌کند. عرض نقطه

مینیمم تابع کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (1)$$



پنجره‌ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس  $30^\circ$  قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، طول ضلع مربع چند متر باشد تا پنجره کم‌ترین نوردهی را داشته باشد؟

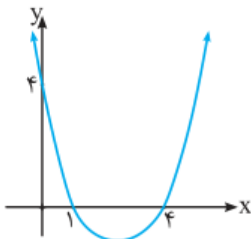
(مشابه مثال صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۰/۸۴ (۴)

۰/۷۲ (۳)

۰/۶۵ (۲)

۰/۶ (۱)



(مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

معادله سهمی مقابل کدام است؟

$y = -x^2 - 5x + 4$  (۱)

$y = -x^2 + 5x + 4$  (۲)

$y = x^2 - 5x + 4$  (۳)

$y = x^2 - 3x + 4$  (۴)

به ازای کدام مقدار  $k$  دو سهمی به معادلات  $y = -x^2 + x + k$  و  $y = x^2 - 3x + 1$  همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$  محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۲)

$a < -3$  (۲)

$a < -9$  (۱)

$-3 < a < 0$  (۴)

$a > -1$  (۳)



به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

(سراسری ریاضی- ۹۵)

(۴) هیچ مقدار  $m$ (۳) هر مقدار  $m$ (۲)  $-1 < m < 2$ (۱)  $m > 2$ 

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m + 2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور  $x$  ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

(۲)  $-2 < m < 1$ (۱)  $m > 1$  یا  $m < -2$ (۴) فقط  $m > 1$ (۳) فقط  $m < -2$ 

منحنی به معادله  $y = (x - 1)(x^2 - ax + a)$  محور  $x$  ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه مقادیر  $a$  به کدام صورت است؟

(سراسری ریاضی)

(۴)  $a > 4$ (۳)  $0 < a < 4$ (۲)  $0 < a < 2$ (۱)  $-4 < a < 0$ 

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع  $f(x) = (m - 1)x^2 + mx + m - 3$  از هر چهار ناحیه محوره‌های مختصات می‌گذرد؟

(۴)  $0 < m < 1$ (۳)  $m < 1$ (۲)  $1 < m < 3$ (۱)  $m > 2$ 

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1$  از ناحیه اول محوره‌های مختصات نمی‌گذرد؟

(سراسری ریاضی- ۸۳)

(۴)  $0 < a < 3$ (۳)  $2 < a < 3$ (۲)  $0 < a \leq 2$ (۱)  $a \geq 2$ 

با کدام مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m + 2)x^2 - 2x + 1$  از هر چهار ناحیه محوره‌های مختصات می‌گذرد؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

(۴)  $-4 < m < -2$ (۳)  $-2 < m < -1$ (۲)  $m < -1$ (۱)  $m < -2$ 

به ازای کدام مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = mx^2 + (m - 3)x + m$  فقط از ناحیه چهارم محوره‌های مختصات نمی‌گذرد؟

(۴)  $1 < m < 2$ (۳)  $0 < m < 1$ (۲)  $m \in \emptyset$ (۱)  $m \in \mathbb{R}$ 

حدود  $m$  برای آن که نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = mx^2 + mx - 1$  همواره در زیر محور  $x$  ها باشد، کدام است؟

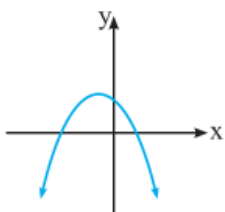
(۱)  $-4 < m \leq 0$       (۲)  $m < 0$       (۳)  $m \leq 0$       (۴)  $m > -4$

(سراسری ریاضی - ۸۸) منحنی به معادله  $y = (2x+1)(x+8)$  با خطوط  $y = mx$  نقطه مشترکی ندارد. مجموعه مقادیر  $m$  چگونه است؟

(۱)  $5 < m \leq 13$       (۲)  $15 < m < 23$       (۳)  $7 < m < 15$       (۴)  $9 < m < 25$

(سراسری ریاضی - ۸۵) به ازای کدام مقادیر  $m$ ، نمودار تابع با ضابطه  $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$  همواره در زیر محور  $x$  هاست؟

(۱)  $m < -\frac{1}{3}$       (۲)  $-\frac{1}{3} < m < 1$       (۳)  $1 < m < \frac{3}{2}$       (۴)  $m > \frac{3}{2}$



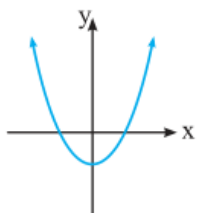
علامت  $a$  و  $c$  کدام است؟

(۱)  $a, c > 0$

(۲)  $a, c < 0$

(۳)  $c < 0, a > 0$

(۴)  $c > 0, a < 0$



کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $ac > 0, b = 0$

(۲)  $ac < 0, b = 0$

(۳)  $ac > 0, b > 0$

(۴)  $ac < 0, b < 0$



معادلات گویا : از کسرهای تشکیل شده اند که صورت و مخرج آن کسرها را چند جمله ای ها تشکیل می دهند . برای حل این معادلات طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب می کنیم و با ساده کردن عبارت جبری حاصل معادله را حل کرده و به جواب می رسیم .

$$\frac{3x+1}{x-2} = \frac{3x-1}{x+1} \rightarrow \times (x-2)(x+1) \rightarrow (3x+1)(x+1) = (3x-1)(x-2)$$

حال معادله گویا به شکل یک معادله درجه ۲ تبدیل خواهد شد... جواب های معادله بالا را بدست آورید

هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2} \quad (\text{ب}) \quad \frac{2-x}{2x+1} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{5}{2} \quad (\text{آ})$$

آ) مخرج هیچ یک از دو کسر نیاز به تجزیه ندارد، بنابراین:

$$2(2x+1)(x-2) \times \frac{2-x}{2x+1} - 2(2x+1)(x-2) \times \frac{x+1}{x-2} = 5(2x+1)(x-2)$$

$$\Rightarrow 2(x-2)(2-x) - 2(2x+1)(x+1) = 5(2x+1)(x-2) \Rightarrow 2(2x-x^2-4+2x) - 2(2x^2+2x+x+1) = 5(2x^2-4x+x-2)$$

$$\Rightarrow -6x^2+2x-10 = 10x^2-15x-10 \Rightarrow -6x^2-10x^2+2x+15x=0 \Rightarrow -16x^2+17x=0$$

$$\Rightarrow x(-16x+17)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -16x+17=0 \Rightarrow x=\frac{17}{16} \end{cases}$$

هیچ یک از جواب های به دست آمده، مخرج کسرها را صفر نمی کنند، پس هر دو جواب قابل قبول است.

$$2x-2=2(x-1), \quad x^2-1=(x-1)(x+1), \quad 2x+2=2(x+1)$$

$$\Rightarrow \text{ک.م.م مخرج ها} = 2(x-1)(x+1)$$

دو طرف معادله را در  $2(x-1)(x+1)$  ضرب می کنیم:

$$2(x-1)(x+1) \times \frac{2x+3}{2(x-1)} - 2(x-1)(x+1) \times \frac{5}{(x-1)(x+1)} = 2(x-1)(x+1) \times \frac{2x-3}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x+3) - 2(5) = (x-1)(2x-3)$$

$$\Rightarrow 2x^2+3x+2x+3-10 = 2x^2-3x-2x+3 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$$

اما  $x=1$  مخرج کسره های اول و دوم را صفر می کند، پس معادله جواب ندارد.

به ازای چه مقدار  $a$ ، معادله  $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$  دارای جواب  $x=2$  است؟

چون  $x=2$  جواب معادله است، در معادله صدق می کند. با قرار دادن  $x=2$  در معادله  $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$  و با حل معادله

$$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} = \frac{a}{2} - \frac{a-2}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} = 1 \Rightarrow 2 = a-2 \Rightarrow a = 4$$

بر حسب  $a$ ، مقدار  $a$  را بدست می آوریم:

$$\text{اگر } x=2 \text{ ریشه معادله } \frac{1}{x^2-4x} + \frac{a}{x-4} = 2 \text{ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟}$$

$$-\frac{1}{4} \quad (4) \quad -\frac{1}{2} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x^2-4x} + \frac{a}{x-4} = 2 \xrightarrow{x=2} -\frac{1}{4} - \frac{a}{2} = 2 \xrightarrow{\times 4} -1 - 2a = 8 \Rightarrow -2a = 9 \Rightarrow a = -\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{x(x-4)} + \frac{-\frac{9}{2}}{x-4} = 2$$

$$\xrightarrow{\times x(x-4)} 1 - \frac{9}{2}(x) = 2(x)(x-4) \xrightarrow{\times 2} 2 - 9x = 4x^2 - 16x$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 7x - 2 = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac = 49 + 32 = 81 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 9}{8} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

بنابراین ریشه دیگر معادله  $x = -\frac{1}{4}$  است و در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

معادله  $(x + \frac{1}{x})^2 + 3(x + \frac{1}{x}) - 4 = 0$  را حل کنید.

با توجه به معادله، قرار می‌دهیم:  $x + \frac{1}{x} = A \Rightarrow A^2 + 3A - 4 = 0 \Rightarrow (A+4)(A-1) = 0 \Rightarrow A = 1$  یا  $A = -4$

معادله ریشه حقیقی ندارد.  $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0 \Rightarrow$

$A = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = -4x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$ ,  $\Delta = b^2 - 4ac = 12$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{-2(2 \pm \sqrt{3})}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$x = -2 - \sqrt{3}$  و  $x = -2 + \sqrt{3}$  قابل قبول هستند، بنابراین معادله دارای دو ریشه حقیقی است.

**مستطیل طلایی:** مستطیلی را که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر با نسبت طول به عرض مستطیل باشد، مستطیل طلایی می‌گوییم.

$$\frac{\text{مجموع طول و عرض}}{\text{طول}} = \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \quad (*)$$

فرض کنیم  $A = \frac{x}{y}$  باشد، در این صورت  $\frac{y}{x}$ ، عکس  $\frac{x}{y}$  است، پس:  $\frac{y}{x} = \frac{1}{A} \xrightarrow{(*)} 1 + \frac{1}{A} = A \xrightarrow{\times A} A+1 = A^2 \Rightarrow A^2 - A - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1) = 5 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases} \quad \text{عدد } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ را عدد طلایی می‌گوییم.}$$

نکته: بچه‌ها شما در حل تمرینات این مبحث به یکسری مسائل کاربردی مواجه خواهید شد که در حل آن‌ها به نکات زیر توجه کنید:

۱- اگر کاری به طور یکنواخت در  $x$  ساعت انجام شود آنگاه در هر ساعت  $\frac{1}{x}$  از آن کار انجام شده است هر زمان با این چنین سوالاتی برخورد

کردید ابتدا میزان کار انجام شده در هر ساعت را محاسبه کنید. سپس به کمک آن مقدار خواسته شده در صورت مسئله را بدست آورید

۲- اگر عمل  $A$ ،  $t$  واحد بیشتر از عمل  $B$  باشد آنگاه:  $A = t + B$

مثلا اگر دوندۀ ای در منطقه ای که سرعت باد ۱۰ کیلومتر بر ساعت باشد و جهت آن موافق حرکت دوندۀ باشد با سرعت  $X$  بدود سرعت او

$X+4$  می‌شود و در خلاف جهت باد سرعتش  $X-4$  خواهد بود.

فاصله بین دو شهر  $A$  و  $B$ ، ۱۲۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر  $A$  با سرعت ثابت  $v$  کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در حرکت است. هم‌چنین اتومبیل دومی از شهر  $B$  که سرعت آن ۱۸ کیلومتر در ساعت کم‌تر از سرعت اتومبیل اول است، به سمت شهر  $A$  در حرکت است. اگر اتومبیل اول، ۲۰ دقیقه زودتر از اتومبیل دوم این مسیر را طی کند، سرعت هر یک از اتومبیل‌ها را به دست آورید.

(مشابه فعالیت ۲ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

اگر متحرکی با سرعت ثابت  $v$  کیلومتر بر ساعت، مسافت  $x$  کیلومتر را در  $t$  ساعت طی کند، آن‌گاه:  $x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$

چون  $x = 120$  کیلومتر است، پس زمان اتومبیل اول برای طی کردن این مسافت برابر  $t_1 = \frac{120}{v}$  است. هم‌چنین سرعت اتومبیل دوم ۱۸ کیلومتر در ساعت کم‌تر از سرعت اتومبیل اول است، پس سرعت آن برابر  $v - 18$  می‌باشد و زمان طی شده توسط این اتومبیل  $t_2 = \frac{120}{v-18}$  می‌باشد. اما اتومبیل

اول ۲۰ دقیقه ( $\frac{1}{3}$  ساعت) زودتر می‌رسد، پس بین  $t_1$  و  $t_2$  تساوی  $t_2 = t_1 + \frac{1}{3}$  برقرار است و در نتیجه داریم:

$$\frac{120}{v-18} = \frac{120}{v} + \frac{1}{3} \quad \text{ک.م.م. مخرج‌ها}$$

برای حل این معادله گویا داریم:

دو طرف معادله را در  $3v(v-18)$  ضرب می‌کنیم:

$$3v(v-18) \times \frac{120}{v-18} = 3v(v-18) \times \frac{120}{v} + 3v(v-18) \times \frac{1}{3} \Rightarrow 360v = 360v - 360 \times 18 + v^2 - 18v$$

$$\Rightarrow v^2 - 18v - 360 \times 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 18^2 + 4 \times 360 \times 18 = 18^2(1+80) = 18^2 \times 9^2 \Rightarrow v = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow v = \frac{18 + 18 \times 9}{2} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

علی و برادرش با هم در ۶ ساعت متنی را تایپ می‌کنند. اگر علی بخواهد به تنهایی این متن را تایپ کند، ۵ ساعت زودتر از برادرش انجام می‌دهد. مشخص کنید علی به تنهایی در چند ساعت این متن را تایپ می‌کند.

فرض کنیم علی در  $X$  ساعت متن را تایپ می‌کند، پس در هر ساعت،  $\frac{1}{X}$  متن تایپ می‌شود. هم‌چنین برادرش ۵ ساعت دیرتر از علی این کار را انجام می‌دهد، پس وی در  $X+5$  ساعت این متن را تایپ می‌کند و در نتیجه در یک ساعت،  $\frac{1}{X+5}$  متن توسط وی تایپ می‌شود. از آنجایی که دو نفری در ۶ ساعت این متن را تایپ می‌کنند، پس در یک ساعت  $\frac{1}{6}$  متن تایپ می‌شود.

پس متنی که توسط این دو نفر در یک ساعت تایپ می‌شود برابر  $\frac{1}{X} + \frac{1}{X+5}$  است و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{X+5} = \frac{1}{6}$$

عبارت  $6X(X+5)$ ، ک.م.م. مخرج کسرها می‌باشد، دو طرف معادله بالا را در  $6X(X+5)$  ضرب می‌کنیم:

$$6X(X+5) \times \frac{1}{X} + 6X(X+5) \times \frac{1}{X+5} = 6X(X+5) \times \frac{1}{6} \Rightarrow 6(X+5) + 6X = X(X+5) \Rightarrow 6X + 30 + 6X = X^2 + 5X$$

$$\Rightarrow X^2 - 7X - 30 = 0, \Delta = 49 - 4(1)(-30) = 169 \xrightarrow{x > 0} X = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{169}}{2} = \frac{7 + 13}{2} = 10$$

**معادلات رادیکالی:** معادلاتی که در آن عبارات رادیکالی شامل مجهول هستند را معادلات رادیکالی گویند

برای حل یک معادله رادیکالی ابتدا باید آن را از حالت رادیکالی خارج کرد که این کار بوسیله ی توان رسانی انجام می‌شود، وقتی متغیر مسئله از زیر رادیکال خارج شد معادله بدست آمده را حل می‌کنیم توجه داشته باشید فقط جواب هایی از این معادله مورد قبول است که به ازای آن ها زیر رادیکال تعریف شده باشد (منفی نشود).

نکته: اگر مجموع چند عبارت رادیکالی صفر بشود تک تک آن ها برابر صفر هستند. در مثال زیر هرکدام از رادیکال ها برابر صفر هستند:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{5x-15} + \sqrt{x^2+8} = 0$$

معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x-1} - 5 = 0 \quad (\text{آ}) \quad x - \sqrt{x+4} = 2 \quad (\text{ب}) \quad \sqrt{x+3} = \sqrt{x+1} + 1 \quad (\text{پ})$$

$$\sqrt{x-1} - 5 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 5 \xrightarrow{\text{دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.}} x-1 = 25 \Rightarrow x = 25+1 = 26 \quad (\text{آ})$$

با قرار دادن  $x = 26$  در معادله اولیه ( $\sqrt{x-1} - 5 = 0$ )، مشاهده می‌کنیم که تساوی عددی به وجود می‌آید:

$$\sqrt{26-1} - 5 = \sqrt{25} - 5 = 5 - 5 = 0$$

$$x - \sqrt{x+4} = 2 \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x+4} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (x-2)^2 = x+4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x+4 \quad (\text{ب})$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

$$x - \sqrt{x+4} = 2 \xrightarrow{x=0} 0 - \sqrt{4} = 2 \Rightarrow -2 = 2$$

$x = 0$  در معادله اولیه صدق نمی‌کند:

پس  $x = 0$  جواب معادله نمی‌باشد.

$$x - \sqrt{x+4} = 2 \xrightarrow{x=5} 5 - \sqrt{5+4} = 2 \Rightarrow 5 - 3 = 2$$

$x = 5$  در معادله اولیه صدق می‌کند، پس  $x = 5$  جواب معادله است:

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{x+1} + 1 \xrightarrow{\text{دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.}} x+3 = (\sqrt{x+1} + 1)^2 \Rightarrow x+3 = (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1} + 1^2 \quad (\text{پ})$$

$$\Rightarrow x+3 = x+1+2\sqrt{x+1}+1 \Rightarrow 1 = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} x+1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{-\frac{3}{4}+3} = \sqrt{-\frac{3}{4}+1+1} \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} + 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

با قرار دادن  $x = -\frac{3}{4}$  در معادله اولیه، داریم:

پس  $x = -\frac{3}{4}$  جواب معادله است.



به ازای کدام مقدار  $a$ ،  $x = 2$  ریشه معادله  $2\sqrt{a+1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 6} = 6$  می باشد؟

۸ (۴)

۱۵ (۳)

۲۴ (۲)

۳۵ (۱)

با قرار دادن عدد ۲ به جای  $x$  در معادله و حل معادله رادیکالی بر حسب  $a$ ، مقدار  $a$  به دست می آید:

$$x = 2, 2\sqrt{a+1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 6} = 6 \Rightarrow 2\sqrt{a+1} - \sqrt{8 - 10 + 6} = 6 \Rightarrow 2\sqrt{a+1} - 2 = 6$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a+1} = 8 \Rightarrow \sqrt{a+1} = 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} a+1 = 16 \Rightarrow a = 15 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

بدون حل معادله:

(مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۳۳ کتاب درس)

(آ) توضیح دهید چرا معادله  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + 2 = 0$  جواب ندارد.

(ب) جواب معادله  $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$  را به دست آورید.

(آ)  $\sqrt{x}$  و  $\sqrt{x+1}$  عبارت‌هایی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) هستند، پس جمع آن‌ها نیز نامنفی است ( $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 0$ ). از

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + 2 \geq 2$$

طرفی وقتی عدد نامنفی با عدد مثبت ۲ جمع شود، حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۲ می‌شود، پس:

بنابراین عبارت  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + 2$  هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود و در نتیجه معادله جواب ندارد.

(ب) مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس این تساوی وقتی برقرار است که دو عبارت هم‌زمان صفر شوند. بنابراین جواب‌های مشترک دو

معادله  $x^2 - 1 = 0$  و  $x^2 - 3x + 2 = 0$  ریشه‌های معادله خواهند بود:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب مشترک}} x = 1$$

پس  $x = 1$  جواب معادله است.

در معادله  $x^2 + 2x + 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 7}$ ، مجموع ریشه‌های معادله کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۳ (۲)

-۲ (۱)

### تست های ارزشیابی

- جواب معادله  $\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$  با شرط  $a \neq 0$  کدام است؟

 $\frac{3a}{2}$  (۴) $\frac{2a}{3}$  (۳) $\frac{a}{2}$  (۲) $\frac{a}{3}$  (۱)

- به ازای چند مقدار صحیح  $x$ ، مجموع دو کسر  $\frac{x-1}{x-2}$  و  $\frac{1+x}{x}$  برابر کسر  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x}$  می‌شود؟

۴ بی‌شمار

۳ صفر

۲ (۲)

۱ (۱)

- اختلاف دو ریشه معادله  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{5}{2x - 1} + 5$  کدام است؟

۱/۸۷۵ (۴)

۲/۱۲۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۲/۲۵ (۱)

- اگر ریشه‌های معادله  $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 4}$  مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  باشند، مقدار  $\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}$  کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۸ (۱)

- اگر معادله  $\frac{2-x}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{mx+n}{x^2-4}$  دارای بی‌شمار جواب باشد، آن‌گاه  $\frac{m}{n}$  کدام است؟

-۲ (۴)

-۷ (۳)

-۳/۵ (۲)

-۲/۷ (۱)

- به ازای کدام مقدار  $k$  مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2$  برابر ۵ است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

- اگر اختلاف جواب‌های معادله  $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = ax(1 - \frac{x-1}{x+1})$  برابر ۳ باشد، آن‌گاه  $a$  کدام می‌تواند باشد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)



تعداد جواب‌های حقیقی معادله  $\frac{x+4}{x^2+2x-8} + \frac{1-x}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

نازنین، پازلی را به تنهایی ۶ ساعت زودتر از پدرام، کامل می‌کرد. پس از پنج ماه تمرین، سرعت نازنین و پدرام در تکمیل پازل به ترتیب ۳ و ۲ برابر شده است به طوری که هر دو با هم، همان پازل را در ۴ ساعت کامل می‌کنند. در حال حاضر اختلاف مدت زمانی که طول می‌کشد تا هر یک به تنهایی پازل را کامل کنند، چند ساعت است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

معادله  $\frac{tx+2}{-2} = \frac{x+t-1}{x}$  فقط یک ریشه به ازای  $x$  دارد. مجموعه مقادیر  $t$  کدام است؟ ( $t \neq 0$ )

(۱)  $\{2, -1\}$

(۲)  $\{-2, 1\}$

(۳)  $\{-1, 1\}$

(۴)  $\{-1, 1, 2\}$

اگر مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $\frac{x+k}{x^2-2x} + \frac{x}{x^2-x} = \frac{1}{x^2-3x+2}$  برابر با  $\frac{13}{4}$  باشد،  $k$  کدام است؟

(۱) فقط  $k=1$

(۲) فقط  $k=3$

(۳)  $k=1$  یا  $k=3$

(۴)  $k=-1$

اگر محیط یک مستطیل برابر  $16+8\sqrt{5}$  باشد و نسبت طولی در این مستطیل برقرار باشد، اختلاف طول و عرض این مستطیل کدام است؟

(در مستطیلی به طول  $(L)$  و عرض  $(W)$ ، اگر  $\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}$  برقرار باشد، نسبت طولی برقرار است.)

(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) ۸

(۴)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$



اگر یکی از ریشه‌های معادله  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{k}{x+3} = \frac{2}{3}$  از قرینه ریشه دیگر ۲۶ واحد کم‌تر باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) -۶      (۳) -۲      (۴) -۳

- سازمانی دو دستگاه تصحیح تست دارد. اولی به تنهایی آزمون پایه یازدهم را در ۵ ساعت تصحیح می‌کند و اگر هر دو دستگاه با هم کار کنند، آزمون ۳ ساعته تصحیح می‌شود. دستگاه دوم به تنهایی در چند ساعت این آزمون را تصحیح می‌کند؟

- (۱) ۵/۵      (۲) ۶/۵      (۳) ۷/۵      (۴) ۸/۵

- دو کارگر A و B کاری را با هم در ۶ روز به اتمام می‌رسانند. اگر به صورت انفرادی آن کار را انجام دهند، کارگر B از کارگر A، ۵ روز بیش‌تر کار می‌کند. برای انجام کار به تنهایی، کارگر B چند روز باید کار کند؟

- (۱) ۱۰      (۲) ۱۲      (۳) ۱۴      (۴) ۱۵

### معادلات گنگ

- از معادله  $\sqrt{11x-2} = 2x+1$  اختلاف دو ریشه کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{2}{11}$       (۳)  $\frac{1}{3}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

- از معادله  $\sqrt{4-x^2} = |x-1|$  مجموع مجذورات دو ریشه چه قدر است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴



- جواب معادله  $x + \sqrt{x^2 - 4x + 6} = 2$  کدام است؟

∅ (۴)

$\mathbb{R}$  (۳)

$[2, +\infty)$  (۲)

$(-\infty, 2]$  (۱)

- معادله  $1 + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x}$  چند جواب حقیقی دارد؟

هیچ (۴)

بی شمار (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

- اگر  $x = 4$  یکی از جواب‌های معادله  $x + a = \sqrt{5x - x^2}$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

(۴) جواب دیگر ندارد.

۳ (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

- مجموع ریشه‌های معادله  $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$  کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

- مجموعه جواب معادله  $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 1$  کدام است؟

(۴) فقط صفر

(۳) تهی

(۲) یک عدد طبیعی

(۱) دو عدد صحیح



- جمع مربعات ریشه‌های معادله  $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2 + 1} = x + 1$  کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۱ (صفر)

معادله  $\frac{3}{2\sqrt{x-5}} = 10 - \frac{77}{2\sqrt{x+5}}$  چند ریشه دارد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (صفر)

۳ (۳)

- معادله  $\sqrt{x-7} + \sqrt{9} + \sqrt{7-x} = 3$  چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)

- جواب منفی معادله  $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{1-x}$  در کدام فاصله است؟

(-1/4, -1/3) (۴)

(-1/5, -1/4) (۳)

(-1/7, -1/6) (۲)

(-1/6, -1/5) (۱)



قدر مطلق: عملگری است که به ازای ورودی های مثبت خنثی بوده اما در صورت مواجهه با ورودی های منفی آنها را در یک منفی ضرب می کند تا مثبت شوند.



به عبارت دیگر:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

**مثال:** عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

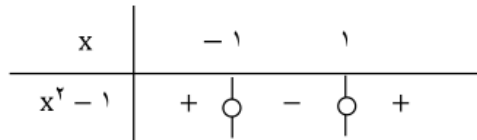
الف)  $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = \sqrt{(a^2 + 1)^2} = |a^2 + 1| = a^2 + 1$

ب)  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = (\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$

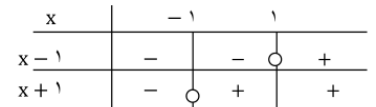
**مثال:** با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف)  $f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$

ب)  $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$



پ)  $h(x) = |x - 1| + |x + 1| = \begin{cases} -x + (-x - 1) = -2x & x \leq -1 \\ -x + 1 + x + 1 = 2 & -1 < x < 1 \\ x - 1 + x + 1 = 2x & x \geq 1 \end{cases}$



**مثال:** اگر  $1 < x < 3$  حاصل عبارت  $|x - 1| + |x - 3|$  را به دست آورید.

$1 < x < 3 \Rightarrow \underbrace{|x - 1|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|x - 3|}_{\text{منفی}} = (x - 1) + (-(x - 3)) = x - 1 - x + 3 = 2$

**مثال:** حاصل  $|2x - 1| + |2 - x|$  وقتی  $-1 < x < 0$  باشد کدام است؟

$-1 < x < 0 \Rightarrow \underbrace{|2x - 1|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|2 - x|}_{\text{مثبت}} = -(2x - 1) + (2 - x) = -2x + 1 + 2 - x = -3x + 3$

$|u| = -u \Rightarrow u \leq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0$

**مثال:** اگر  $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$  باشد آن گاه محدوده  $x$  کدام است؟



$x \in [0, 2]$

روش کلی **رسم نمودار** توابع شامل قدر مطلق استفاده از تعریف قدر مطلق و تبدیل به یک تابع چند ضابطه‌ای به کمک تعیین علامت است

برای رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ریشه‌های داخل قدر مطلق را به دست می‌آوریم. عبارات داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم

۲- با توجه به ریشه‌های بدست آمده و جدول تعیین علامت، قدر مطلق را برمی‌داریم و تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

۳- نمودار هر ضابطه را با توجه به محدوده‌ی مورد نظر رسم می‌کنیم.

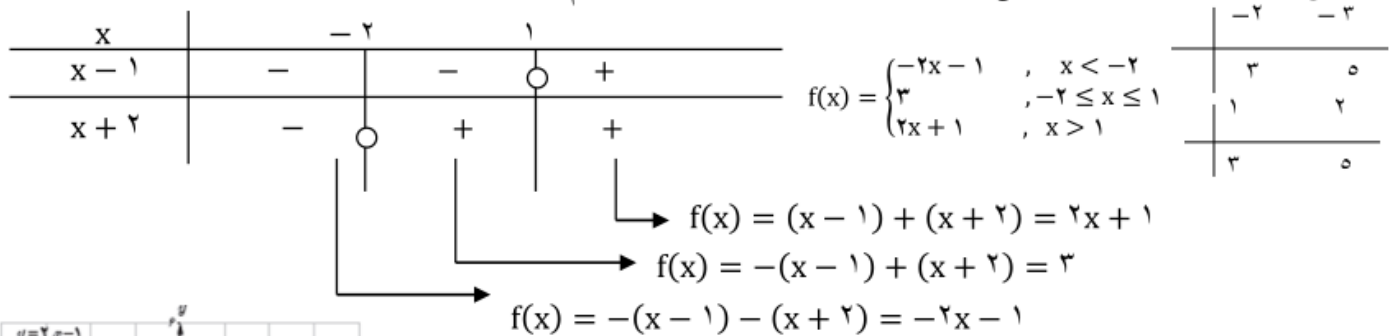
مثال: نمودار تابع  $y = |x - 1| + 2$  را رسم کنید.

گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

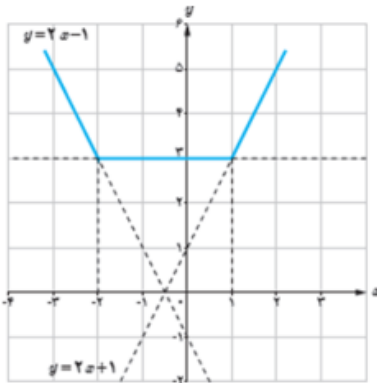
$$y = |x - 1| + 2 = \begin{cases} x - 1 + 2 & , x \geq 1 \\ -x + 1 + 2 & , x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ -x + 3 & x < 1 \end{cases}$$



مثال: نمودار تابع  $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$  را رسم کنید.  
برای این کار ابتدا عبارت های داخل قدر مطلق ها را تعیین علامت می کنیم.



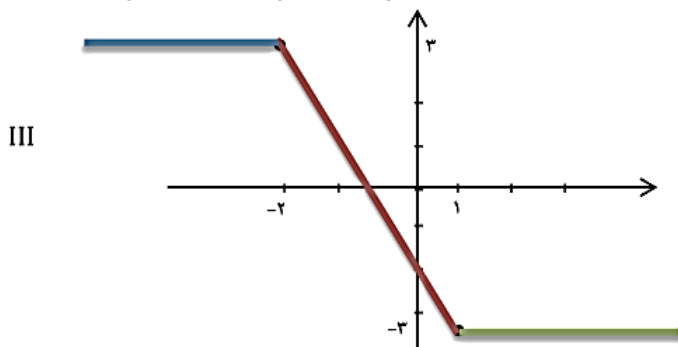
نمودار تابع از سه قسمت که هر یک بخشی از یک خط هستند تشکیل می شود



$$y = |x - 1| - |x + 2|$$

$$I \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$II \quad y = \begin{cases} (x - 1) - (x + 2) = -3 & ; x > 1 \\ -(x - 1) - (x + 2) = -2x - 1 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ -(x - 1) - (-(x + 2)) = 3 & ; x < -2 \end{cases}$$



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

روش سریع رسم نمودارهای توابع قدر مطلق (حالت های خاص)

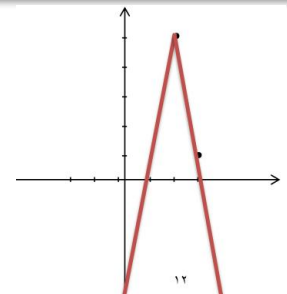
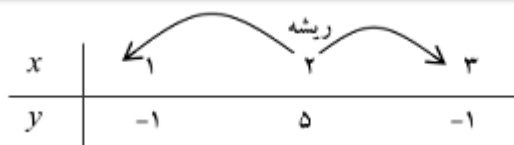
$$a < 0 \quad a > 0$$

۱- توابع به فرم  $y = a|x \pm d|$  عبارت درجه یک  $y = a$  (نمودار به فرم  $\wedge$  یا  $\vee$  می شود)

ابتدا ریشه داخل قدر مطلق که همان رأس نمودار است را به دست می آوریم سپس یک عدد سمت راست ریشه و یک عدد سمت چپ ریشه (ترجیحاً با فواصل یکسان) می نویسیم و با توجه به نقاط به دست آمده نمودار را رسم می کنیم.

$$y = -2|3x - 6| + 5$$

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

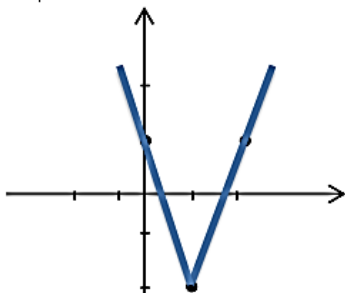


الف)  $y = 3|x - 1| - 2$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

رأس

x	0	1	2
y	1	-2	1

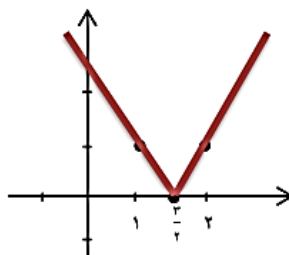


ب)  $y = |3 - 2x|$  مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$3 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

رأس

x	1	$\frac{3}{2}$	2
y	1	0	1



$$f(x) = |3x + 6| + 2$$

$$3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	-3	-2	0
f(x)	5	2	8

ارتفاع  $\times$  (مجموع قاعده‌ها)  $\div 2 =$  مساحت دوزنقه

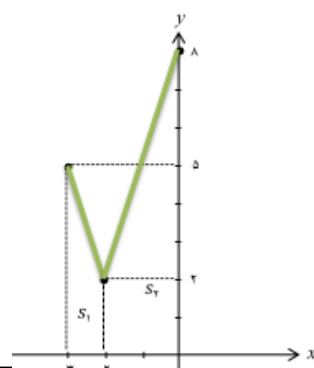
$$s_1 = \frac{1}{2} \times (2 + 5) \times 1 = \frac{7}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \times (2 + 8) \times 2 = 10$$

$$\text{کل } s = s_1 + s_2 = \frac{7}{2} + 10 = \frac{27}{2}$$

مثال: مساحت محدود به نمودار  $f(x) = |3x + 6| + 2$  و محور  $x$ ها در بازه  $[-3, 0]$  کدام است؟

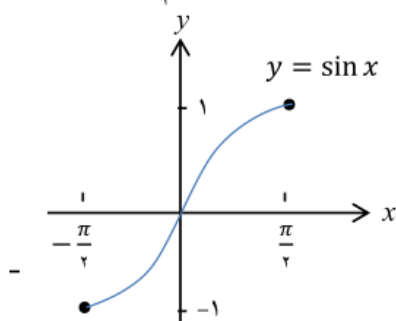
$$\frac{17}{2} (4) \quad \frac{13}{2} (3) \quad 14 (2) \quad \frac{17}{2} (1)$$

۲- توابع به فرم  $y = |f(x)|$  (لا مثبت می شود)ابتدا نمودار  $y = f(x)$  را رسم می کنیم (قدر مطلق را در نظر نمی گیریم) سپس قسمت بالای محور  $x$ ها را نگاه می داریم و در جاهایی که نمودار  $f(x)$  زیر محور  $x$  هاست، تصویر آینه وار نمودار  $f(x)$  را نسبت به محور  $x$ ها رسم کنیم و قسمت پایین محور  $x$ ها را حذف می کنیم.

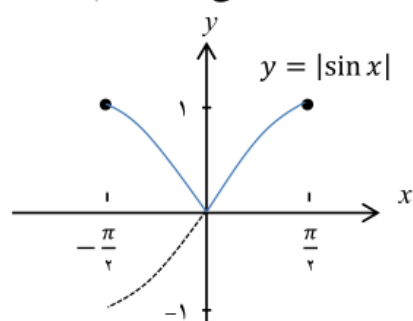
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y = sin x	-1	0	1

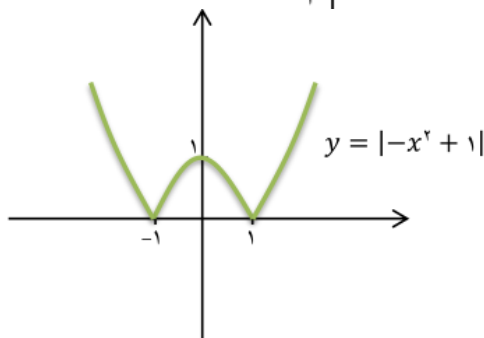
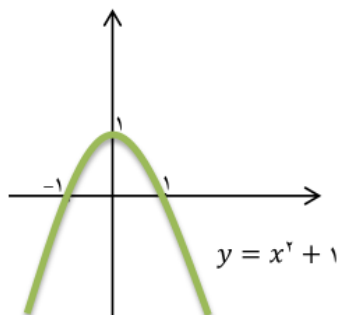


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.



ث)  $y = |1 - x^2|$

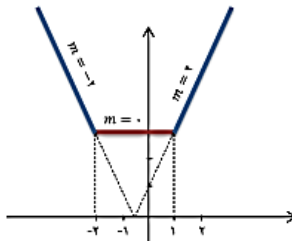
$$y = 1 - x^2 = -x^2 + 1$$



۳- توابع به فرم  $y = |x + a| + |x + b|$  (جمع دو قدر مطلق درجه یک) (نمودارهای گلدانی) ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلقها را بدست می‌آوریم سپس مربعی به ضلع  $|a - b|$  (فاصله بین ریشه‌ها) به سمت بالا رسم می‌کنیم ضلع بالایی مربع را پررنگ می‌کنیم تا کف گلدان مشخص سپس وسط ضلع مربع را بدست می‌آوریم از وسط ضلع مربع دو نیم خط رسم می‌کنیم.

$$y = |x - 1| + |x + 2|$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$



\* معادله‌ی محور تقارن این نمودار  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  می‌باشد.

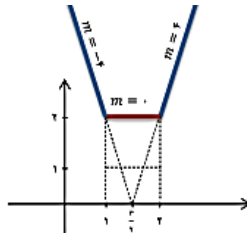
\* طبق نمودار می‌توانیم برد نمودار، صعودی یا نزولی بودن، مساحت و ... را بدست آوریم.

\* اگر ضرایب یکسان داشته باشند همیشه گلدان درست می‌شود

ب)  $y = |2x - 2| + |2x - 4|$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

برد:  $[2, +\infty)$



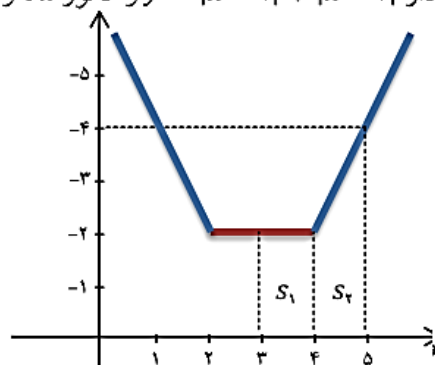
مثال: مساحت محصور بین نمودار  $y = |x - 2| + |x - 4|$  و محور  $x$ ها و خطوط  $x = 3$  و  $x = 5$  چقدر است؟

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$S_1 = 1 \times 2 = 2 \text{ مساحت مستطیل}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times 1 = 3 \text{ مساحت ذوزنقه}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2 + 3 = 5 \text{ کل}$$



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۴- توابع به فرم  $y = |x + a| - |x + b|$  (تفریق دو قدر مطلق) (سوسوهای یا آبشاری) ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق را بدست می‌آوریم سپس نمودار به یکی از صورت‌های زیر است.

یا

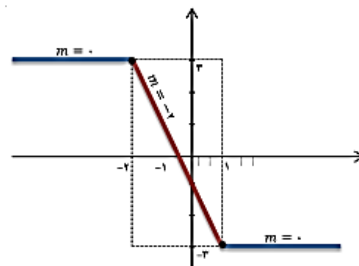
ریشه‌های قدر مطلق اولی زیر محور  $x$ هاست

ریشه‌های قدر مطلق دوم بالای محور  $x$ هاست

$$y = |x - 1| - |x + 2|$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

برد:  $[-3, 2]$



**مثال:** طول پاره خط شکسته تابع  $f(x) = |x+1| - |x-1|$  در فاصله  $[-2, 1]$  کدام است؟

$$2\sqrt{3} + 1 \text{ (۴)} \quad \sqrt{3} + 1 \text{ (۳)} \quad 2\sqrt{5} + 1 \text{ (۲)} \quad \sqrt{5} + 1 \text{ (۱)}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \text{زیر محور } x \text{ ها} \\ x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{بالای محور } x \text{ ها} \end{cases}$$

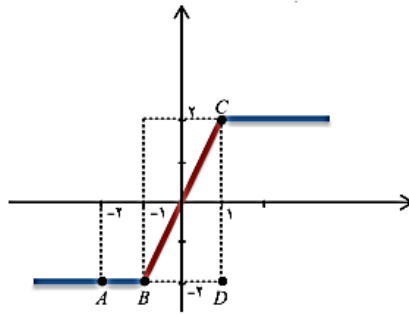
$$|AB| = 1$$

$$|BC| = ?$$

رابطه فیثاغورث:  $BC^2 = BD^2 + CD^2$

$$BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \rightarrow BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{طول پاره خط شکسته} = |AB| + |BC| = 1 + 2\sqrt{5}$$



الف)  $|x| \geq 0$

ب)  $\sqrt{x^2} = |x|$

پ)  $|x| = a \Leftrightarrow x = a$  یا  $x = -a$  ( $a \geq 0$ )

ت)  $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$  یا  $x = -a$

ث)  $|-x| = |x|$

ج)  $|x|^2 = x^2$

**ویژگی های قدر مطلق**

استفاده از تعریف قدر مطلق و تبدیل به تابع چندضابطه ای

روش جبری

استفاده از ویژگی ها

ابتکاری (معمولاً همان به توان ۲ رساندن است)

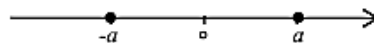
روش هندسی

روش رد گزینه ها (برای تست هایی که مجموعه جواب داده می شود)

**حل معادلات قدر مطلق**

**(I) ویژگی های قدر مطلق (حل معادلات)**

$$1) |u| = a \begin{cases} \xrightarrow{a>0} \begin{cases} u = +a \\ u = -a \end{cases} \\ \xrightarrow{a<0} \text{جواب ندارد} \end{cases}$$



**مثال:** عبارت زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را نمایش دهید.

$$|x-3| = 7 \rightarrow \begin{cases} x-3=7 \rightarrow x=10 \\ x-3=-7 \rightarrow x=-4 \end{cases}$$

الف) فاصله بین  $x$  و ۳ برابر ۷ است.

$$2|x-6| = 4 \rightarrow |x-6| = 2 \rightarrow \begin{cases} x-6=2 \quad x=8 \\ x-6=-2 \quad x=-4 \end{cases}$$

ب) دو برابر فاصله بین  $x$  و ۶ برابر ۴ است.

$$2) \text{ویژگی } |f(x)| = |g(x)| \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|3x-2| = |x-4| \Rightarrow \begin{cases} 3x-2 = x-4 \rightarrow x = -1 \\ 3x-2 = -(x-4) \rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

مثال: معادله  $|3x-2| = |x-4|$  را حل کنید.

$$|x-1| = 4-3x \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 4-3x \Rightarrow x = \frac{5}{4} \xrightarrow{x \geq 1} x = \frac{5}{4} \\ \text{غ ق } x < 1 \Rightarrow -(x-1) = 4-3x \Rightarrow x = \frac{3}{4} \xrightarrow{x < 1} x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

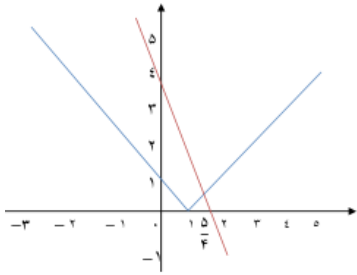
**مثال:** معادله قدر مطلق  $|x-1| = 4-3x$  را به سه روش زیر حل کنید.

روش اول: استفاده از تعریف قدر مطلق (شرط چندضابطه ای کردن کلی)

مجموعه جواب  $= \left\{ \frac{5}{4} \right\}$



روش دوم: (روش هندسی) ابتدا نمودار توابع  $y = |x - 1|$  و  $y = 4 - 3x$  را رسم می کنیم. طول محل تلاقی دو نمودار یعنی  $x = \frac{5}{4}$  جواب معادله است.



روش سوم: (به توان رساندن طرفین)

$$|x - 1| = 4 - 3x \rightarrow |x - 1|^2 = (4 - 3x)^2$$

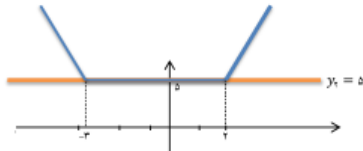
$$x^2 - 2x + 1 = 16 - 24x + 9x^2 \rightarrow 8x^2 - 22x + 15 = 0$$

$$\frac{1}{8}(8x - 12)(8x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8x = 12 & x = \frac{3}{2} \text{ غ ق} \\ 8x = 10 & x = \frac{5}{4} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$y_1 = |x - 2| + |x + 3| = 5$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases} \quad y_1 = 5$$

مثال: معادله  $y_1 = |x - 2| + |x + 3| = 5$  دارای چند ریشه است؟ از روش هندسی استفاده می کنیم



۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴) بیشمار

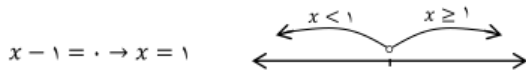
مثال: مجموع ریشه های معادله  $||x - 1| - 2| - 3 = 0$  کدام است؟

$$||x - 1| - 2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| - 2 = +3 \rightarrow |x - 1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 5 \rightarrow x = 6 \\ x - 1 = -5 \rightarrow x = -4 \end{cases} \\ |x - 1| - 2 = -3 \rightarrow |x - 1| = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

۰ (۱)    ۱ (۲)    ۲ (۳)    ۴ (۴)

$$\text{مجموع ریشه ها} = 6 + (-4) = 2$$

مثال: تعداد ریشه های معادله  $2x + |x - 1| = 1$  کدام است؟



$$\begin{cases} \text{if } x \geq 1 \Rightarrow 2x + (x - 1) = 1 \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow \text{غیر قابل قبول چون باید } x \geq 1 \text{ باشد} \\ \text{if } x < 1 \Rightarrow 2x + (-(x - 1)) = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{قابل قبول چون } x < 1 \text{ است} \end{cases}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$\text{الف) } \frac{2-x}{|x-3|} = 1 \xrightarrow{x \neq 3} |x-3| = 2-x \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \rightarrow x-3 = 2-x \rightarrow 2x = 5 \quad x = \frac{5}{2} \text{ غ ق} \\ x < 3 \rightarrow x-3 = x-2 \rightarrow -3 = -2 \text{ غیر ممکن} \end{cases}$$

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

$$\text{ب) } \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2x + 1 \rightarrow |x - 1| = 2x + 1 \begin{cases} x \geq 1 \rightarrow x - 1 = 2x + 1 \rightarrow x = -2 \text{ غ ق} \\ x < 1 \rightarrow x - 1 = -2x - 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

حل نا معادلات قدر مطلق

- روش جبری
- روش هندسی
- روش رد گزینه ها

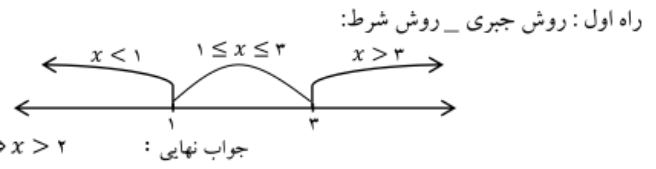
مثال: مجموعه جواب نامعادله  $|x - 1| > |x - 3|$  کدام است؟

(۱, ۳) (۴)     $(-\infty, 3)$  (۳)     $(1, +\infty)$  (۲)     $(2, +\infty)$  (۱)

$$\frac{|x - 1|}{\text{ریشه } x=1} > \frac{|x - 3|}{\text{ریشه } x=3}$$

$$\begin{cases} x > 3 \Rightarrow x - 1 > x - 3 \Rightarrow -1 > -3 \Rightarrow 1 < 3 \xrightarrow{\cap} x > 3 \\ 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x - 1 > 3 - x \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \xrightarrow{1 \leq x \leq 3} \cap \rightarrow 2 < x \leq 3 \\ x < 1 \Rightarrow 1 - x > -x + 3 \Rightarrow 1 > 3 \xrightarrow{\cap} \emptyset \end{cases}$$

$$x > 3 \cup 2 < x \leq 3 \Rightarrow x > 2$$



اگر طرفین نامعادله قدرمطلق داشته باشد

$$|u| < |v| \rightarrow u^2 < v^2$$

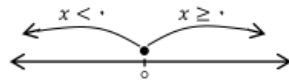
طرفین نامعادله را به توان ۲ می رسانیم تا قدرمطلق از بین برود.

$$|x - 1| > |x - 3| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x - 1)^2 > (x - 3)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 4x > 8 \rightarrow x > 2$$

راه دوم: روش جبری استفاده از ویژگی ها و ابتکاری

$$x|x| - 5x - 6 > 0$$

$$x = 0$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } x \geq 0 \Rightarrow x(x) - 5x - 6 > 0 \rightarrow x^2 - 5x - 6 > 0 \rightarrow \\ \{x \geq 0\} \cap \{x < -1 \cup x > 6\} \rightarrow \boxed{x > 6} \\ \text{if } x < 0 \Rightarrow x(-x) - 5x - 6 > 0 \rightarrow -x^2 - 5x - 6 > 0 \rightarrow \\ \{x < 0\} \cap \{-3x < -2 \cup x > 6\} \rightarrow \boxed{-3 < x < -2} \end{array} \right.$$

$x$	$-1$	$6$
$x^2 - 5x - 6$	$\frac{+}{\text{جواب}}$	$\frac{+}{\text{جواب}}$
$x$	$-3$	$-2$
$-x^2 - 5x - 6$	$\frac{+}{\text{جواب}}$	$\frac{-}{\text{جواب}}$

$$|2x - 3| + 2|x - 1| \geq 1 \quad \begin{cases} 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } x > \frac{3}{2} \Rightarrow 2x - 3 + 2(x - 1) \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{6}{4} \Rightarrow x > \frac{3}{2} \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -(2x - 3) + 2(x - 1) \geq 1 \Rightarrow 2 \geq 1 \rightarrow R \rightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x < 1 \Rightarrow -(2x - 3) + 2(-x - 1) \geq 1 \Rightarrow -4x \geq -4 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow x \leq 1 \\ \text{جواب نهایی} = x > \frac{3}{2} \cup 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \cup x \leq 1 \Rightarrow R \end{array} \right.$$

ویژگی های قدر مطلق (نامعادلات)

$$1) |u| \leq a \xrightarrow{\text{عدد } a > 0} -a \leq u \leq a \quad \text{یعنی} \quad \begin{cases} u \leq a \\ \cap \\ u \geq -a \end{cases}$$

**مثال:** مجموعه جواب نامعادله  $||x| - 1| \leq 2$  کدام است؟

$$\begin{aligned} & ||x| - 1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq |x| - 1 \leq 2 \rightarrow -1 \leq |x| \leq 3 \\ \Rightarrow & \begin{cases} -1 \leq |x| \rightarrow \text{قدر مطلق همواره از منفی بزرگتر است} = R & \text{جواب نهایی: } R \cap -3 \leq x \leq 3 \rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(۱)  $[-1, 1]$   
(۲)  $[-2, 2]$   
(۳)  $[-3, 3]$   
(۴)  $[-4, 4]$

**مثال:** مجموعه جواب نامعادله  $||x + 2| - 1| \leq 3$  شامل چند عدد صحیح است؟ (جواب: ۹)

$$\begin{aligned} & -3 \leq |x + 2| - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq |x + 2| \leq 4 \\ \Rightarrow & \begin{cases} -2 \leq |x + 2| \rightarrow \text{قدر مطلق همیشه از منفی بزرگتر است پس همیشه برقرار است} = R \\ |x + 2| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x + 2 \leq 4 \Rightarrow -6 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

جواب نهایی:  $R \cap -6 \leq x \leq 2 = -6 \leq x \leq 2$

**مثال:** اگر نامساوی  $10 < x < 20$  معادل  $|x - \alpha| < \beta$  باشد  $\alpha \times \beta$  کدام است؟

$$-\beta < x - \alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} -\beta + \alpha < x < \beta + \alpha \\ 10 < x < 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\beta + \alpha = 10 \rightarrow \alpha = 15 \\ \beta + \alpha = 20 \rightarrow \beta = 5 \end{cases}$$

۵۵(۱)  
۶۵(۲)  
۷۵(۳)  
۸۵(۴)

$$2) |u| \geq a \Rightarrow \begin{cases} u \geq a \\ \cup \\ u \leq -a \end{cases}$$



**مثال:** مجموعه جواب نامعادله  $|3x - 2| < 2x + 1$  کدام است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 2 < 2x + 1 \rightarrow x < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 3 \\ \text{if } x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -(3x - 2) < 2x + 1 \Rightarrow -5x < -1 \rightarrow x > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} < x < \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

جواب نهایی:  $\frac{1}{3} \leq x < 3 \cup \frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} < x < 3$

**مثال:** مجموعه جواب نامعادله  $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$  به صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$D = R - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\frac{x|2x+1|}{\times|2x+1|} \rightarrow \frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \rightarrow |x-2| > |2x+1|$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(\quad)^2} x^2 - 4x + 4 &> 4x^2 + 4x + 1 \\ \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 &< 0 \end{aligned}$$

$x$		$-3$		$-\frac{1}{2}$	
	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

جواب:  $\left(-3, \frac{1}{2}\right) - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

روش اول:

$$\left(-3, \frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad (2)$$

$$\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

if  $|u| > a \Rightarrow \begin{cases} u > a \\ u < -a \end{cases}$  اجتماع

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2x+1} > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{2x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-x-3}{2x+1} > 0 \\ \frac{x-2}{2x+1} < -1 \Rightarrow \frac{x-2}{2x+1} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{2x+1} < 0 \end{cases}$$

$x$		$-3$		$-\frac{1}{2}$	
$-x-3$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$
$2x+1$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$
		$0$	$+$	$0$	$-$

روش دوم:

$x$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$	
$3x-1$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$
$2x+1$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

جواب نهایی:  $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**مثال:** اگر مجموعه جواب نامعادله  $|x+1| < ||x|-4|$  بصورت  $(a, b)$  باشد  $a \times b$  کدام است؟

$$|x+1| < ||x|-4| \xrightarrow{(\quad)^2} (x+1)^2 < (|x|-4)^2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 < |x|^2 - 8|x| + 16 \Rightarrow 2x + 1 < -8|x| + 16 \Rightarrow 2x + 8|x| < 15 \quad (1)$$

$$\text{if } x \geq 0 \Rightarrow 2x + 8x < 15 \Rightarrow x < \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\text{if } x \leq 0 \Rightarrow 2x - 8x < 15 \Rightarrow x > -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$U \rightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = (a, b)$$

$$-\frac{15}{4} \quad (4)$$

$$x^2 < x \rightarrow x^2 - x < 0$$

$$0 < x < 1$$

$x$		$-2$		$+3$	
$x^2 - x$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

**مثال:** با شرط  $x^2 < x$  حاصل عبارت  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}$  کدام است؟

$$2 \quad (1)$$

$$\frac{2}{x} \quad (2)$$

$$2x \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \left|x + \frac{1}{x}\right| \xrightarrow{0 < x < 1} x + \frac{1}{x}$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{x}\right| \xrightarrow{0 < x < 1} -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -x + \frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(-x + \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

$$\boxed{|u| + |v| \geq |u + v| \Rightarrow \begin{cases} |u| + |v| = |u + v| & \text{if } u, v \geq 0 \text{ or } u, v < 0 \\ |u| + |v| > |u + v| & \text{if } u, v \text{ have opposite signs} \end{cases}}$$

نامساوی مثلث

**مثال:** مجموعه جواب معادله  $|x - 2| + |x - 3| = |2x - 5|$  کدام است؟

$$\underbrace{|x-2|}_u + \underbrace{|x-3|}_v = \underbrace{|2x-5|}_{u+v} \xrightarrow{u \text{ و } v \text{ هم علامتند}} (x-2)(x-3) \geq 0 \Rightarrow$$

$x$	$2$	$3$
	+	+
	-	-

**نکته:** در معادلات و نامعادلات اگر هم زمان سه تا قدرمطلق داشتیم به احتمال زیاد باید از نامساوی مثلث استفاده کنیم.

**مثال:** مجموعه جواب نامعادله  $|x| > \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| + \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$  کدام است؟

$$\left| \frac{1}{2}x - 1 \right| + \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| > \left| \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) + \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) \right|$$

$$u \cdot v < 0 \Rightarrow \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) < 0$$

$x$	$-2$	$2$
$\frac{1}{2}x - 1$	-	+
$\frac{1}{2}x + 1$	-	+
	+	+

جواب

(1)  $(-2, 2)$   
 (2)  $R - [-2, 2]$   
 (3)  $R - (-2, 2)$   
 (4)  $\{\pm 2\}$

جواب:  $(-2, 2)$

**مثال:** مجموعه جواب معادله  $|2x - 2| + |x - 3| = |x + 1|$  کدام است؟

**نکته:**  $|-u| = |u|$

$$|x - 3| = |-(x - 3)| = |3 - x|$$

$$\left| \frac{2x - 2}{u} \right| + \left| \frac{x - 3}{v} \right| = \left| \frac{x + 1}{u+v} \right| \quad (2x - 2)(3 - x) \geq 0$$

$x$	$1$	$3$
$2x - 2$	-	+
$3 - x$	+	-
	-	-

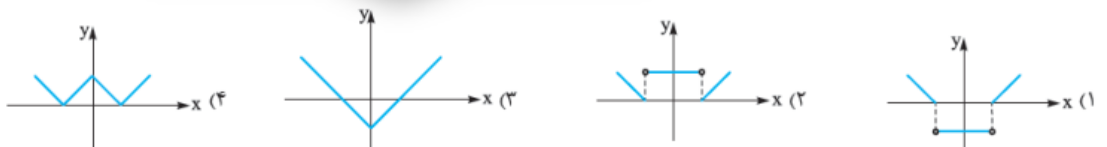
جواب

(1)  $[-1, 3]$  (2)  $[1, 3]$  (3)  $[-3, 1]$  (4)  $[-3, -1]$

**نکته:** توان داخل قدرمطلق را می توان به بیرون از آن انتقال داد  $|u^n| = |u|^n$

### تست های ارزشیابی

- منحنی نمایش  $f(x) = ||x| - 2|$  کدام است؟



نمودار تابع با ضابطه  $y = \left| \frac{1}{2}x - 2 \right|$  واحد به طرف Xهای منفی و یک واحد به طرف Yهای مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

(1)  $-3/5$  (2)  $-3$  (3)  $-2/5$  (4)  $-2$  (تقریبی ۹۳)

مجموع جواب های معادله  $|2x - 8| - |3x - 2| = 0$  کدام است؟

- (1)  $-4$  (2)  $3$  (3)  $-8$  (4)  $8$

اگر  $a > 0 > b$  و  $|b| > |a|$ ، آن گاه حاصل  $|2a - b| + |b + a| - |b|$  کدام است؟

(۱)  $a - b$

(۲)  $a$

(۳)  $b$

(۴)  $b - a$

خط  $y = ax + b$ ، نمودار  $|x - 3| - |x - 6|$  را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.  $a + b$  کدام است؟ ( $a \neq 0$ )

(۱)  $7$

(۲)  $-7$

(۳)  $11$

(۴)  $-11$

اگر  $a > 0 > b$  و  $|b| > |a|$  باشد، حاصل  $|a - b| - |a + b| - ||b| - |a||$  کدام است؟

(۱)  $a - b$

(۲)  $-a - b$

(۳)  $3a + b$

(۴)  $a + b$

معادله  $\sqrt{x} - |x| - 1 = 0$ ، در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

(۱) صفر

(۲)  $1$

(۳)  $2$

(۴)  $3$

نمودار تابع  $f(x) = 4 - |x - 2| - |x|$  چه مساحتی با محور طول‌ها می‌سازد؟

(۱)  $4$

(۲)  $5$

(۳)  $6$

(۴)  $7$

مساحت محصور بین نمودار تابع  $f(x) = |x + 1| + |x + 4|$  و خط  $y = -x$  کدام است؟

(۱)  $2$

(۲)  $2/5$

(۳)  $1$

(۴)  $1/5$

اگر  $|x^2 + 4x - 60| = 60 - 4x - x^2$  باشد، چند عدد صحیح در نامساوی  $|x + 10| + |x - 6| \geq |x + 2| + 2$  صدق می‌کند؟

۱۶ (۲)

۲ (۱)

۴ بی‌شمار (۴)

۱۷ (۳)

مجموع جواب‌های معادله  $\sqrt{4 - 4x + x^2} = 3|x + 6| - 3$  کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۰ (۳)

-۱۴ (۲)

-۱۰ (۱)

معادله  $x|x| = x^3 - 4x^2 + 3x$  چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مجموع جواب‌های حقیقی معادله  $|x^2 - 2x| + x = 2$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

در معادله  $7x^2 - x - 5 = 0$  حاصل  $A = ||\alpha| - |\beta||$  کدام است؟ ( $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌ها هستند).

۵ (۴)

 $\frac{1}{5}$  (۳)

۷ (۲)

 $\frac{1}{7}$  (۱)

با توجه به تساوی  $4 + |2a - b| = 4a - a^2$ ، حاصل  $a + b$  کدام است؟ ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

معادله  $\sqrt{x} - ||x| - 1| = 0$ ، در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

اگر بیشترین مقدار عبارت  $\frac{24}{|x-4|+|x+a|}$  برابر ۴ باشد، کمترین مقدار  $a$  کدام است؟

-۲ (۲)

۲ (۱)

-۱۰ (۴)

۱۰ (۳)

تابع  $y = |2x - |x||$  با کدام یک از توابع زیر مساوی است؟

 $y = x - 2|x|$  (۲) $y = 2|x| - x$  (۱) $y = 2x - |x|$  (۴) $y = |x| - 2x$  (۳)

برای کدام محدوده  $k$ ، دو تابع  $y = |x - 2| + |x + 1|$  و  $y = kx + 1$  یکدیگر را قطع نمی‌کنند؟

 $\mathbb{R} - (-2, 2)$  (۲) $(-2, 1)$  (۱) $\mathbb{R} - (-2, 1)$  (۴) $(-3, 2)$  (۳)

به ازای چه حدودی از  $x$ ، عبارت  $|2 - x| + |3x + 5| + |2x - |3x + 5||$  مستقل از  $x$  به دست می‌آید؟

 $x \geq -2$  (۴) $x \leq -\frac{5}{3}$  (۳) $-\frac{5}{3} \leq x \leq 2$  (۲) $x \geq 2$  (۱)

اگر تعداد جواب‌های معادله  $a = |x^2 - 1| - 2$ ،  $a$  عدد باشد، محدوده  $a$  کدام است؟

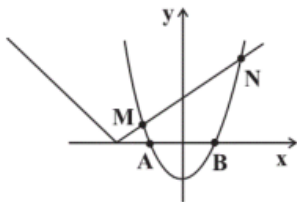
- (۱)  $1 < a < 3$       (۲)  $1 < a < 2$       (۳)  $2 < a < 3$       (۴)  $3 < a < 4$

تعداد جواب‌های معادله  $|-x^2 - 2| = |2x^2 + 4x| + \frac{3}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) صفر

شکل زیر روند حل معادله  $2x^2 - 1 = |x + 2|$  را به روش هندسی نشان می‌دهد. نسبت مساحت مثلث ANB به مساحت مثلث AMB کدام

است؟



(۱) ۲

(۲) ۲/۵

(۳) ۳

(۴) ۳/۵

اگر مجموعه جواب‌های معادله  $a - x^2 = (a+1)x - |x^2 - (1+a)x + a|$  را با یک بازه نشان دهیم، طول این بازه برابر با ۳ است. مجموع

مقادیر ممکن برای  $a$  کدام است؟

- (۱) صفر      (۲) ۲      (۳) -۲      (۴) ۴







- اگر مساحت ناحیه محصور بین نمودار  $y = x + |x|$  و خط  $y = x + a$  برابر ۴ باشد، مجموع مقادیر  $a$  کدام است؟

±۳ (۴)

±۲ (۳)

۳ (۲)

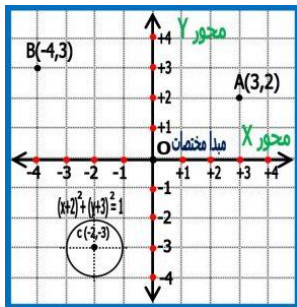
۲ (۱)



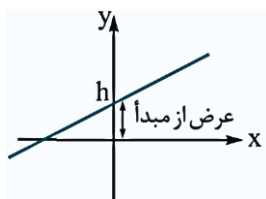
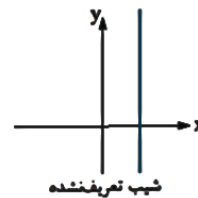
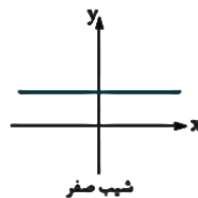
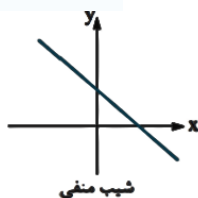
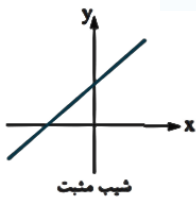
درس پنجم: هندسه تحلیلی

قبل از اینکه شروع به اشتراک گذاشتن مباحث کنیم، بیایم یک دور ابزارهای لازم رو با هم مرور کنیم

ابزار شماره ۱: دستگاه مختصات

این دستگاه از ۴ ناحیه تشکیل شده و هر نقطه روی آن بصورت  $A(x,y)$  نمایش داده می شود که در آن  $x$  مقدار طول و  $y$  مقدار عرض آن نقطه در دستگاه مختصات می باشد.

ابزار شماره ۲: خط راست، شیب خط و عرض از مبدا

خط راست امتدادی است که از دو نقطه می گذرد و با داشتن آن دو نقطه می توان شیب آن را محاسبه و آن را رسم کرد. شکل کلی این معادلات بصورت  $y = mx + h$  می باشد که در آن  $m$  شیب خط و  $h$  عرض از مبدا خط می باشد.عرض از مبدا: عرض نقطه ای که در آن خط محور  $y$  را قطع می کندبا نسبت دادن مقدار صفر به متغیر  $x$  در معادله خط این مولفه بدست می آید

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

برای محاسبه مقدار شیب با داشتن مختصات دو نقطه  $(x_A, y_A)$ ،  $(x_B, y_B)$  داریم:

$$\text{ابزار شماره ۳: معادله باز خط} \quad m = \frac{-a}{b} \quad ax + by + c = 0$$

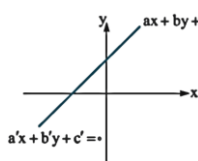
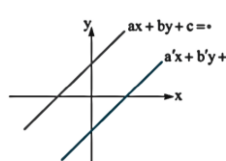
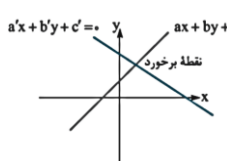
بچه ها گاهی اوقات معادله خط به این شکل نمایش داده میشه که کاربردهای گسترده ای هم داره...

بسیار عالی، حالا شما ابزارهای مناسب برای کار کردن با هندسه در درس اول رو شناختید...

در ادامه با کاربردهاشون هم آشنا می شیم...

وضعیت نسبی دو خط نسبت به هم: در حالت کلی با مقایسه شیب های خطوط پی به وضعیت آن ها نسبت به هم خواهیم برد. بطوریکه اگر شیب ها با هم برابر

باشند دو خط یا موازی اند یا منطبق، اگر شیب ها برابر نباشند دو خط متقاطع هستند.

نکته: شرط عمود بودن دو خط این است که حاصلضرب شیب های آنها برابر  $-1$  باشد:  $m_1 m_2 = -1$ با توجه به معادلات باز خطوط داریم:  $ax + by + c = 0$ ،  $a'x + b'y + c' = 0$ اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  آنگاه دو خط منطبق هستند.اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  آنگاه دو خط موازی هستند.اگر  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  آنگاه دو خط متقاطع هستند.

در حالت سوم برای محاسبه مختصات محل برخورد بصورت دستگاه دو معادله دو مجهول به جواب می رسیم



رسم نمودار معادله خط: برای این کار کفایت دو نقطه ی دلخواه از آن خط انتخاب کنیم و آن ها را در دستگاه مختصات به هم وصل کنیم و امتداد دهیم. روش انتخاب نقطه: کفایت به متغیر  $x$  یک مقدار دلخواه بدهیم و با قرار دادن آن مقدار در معادله خط مقدار  $y$  را محاسبه کنیم ☺

روش های نوشتن معادله خط:

(۱) با داشتن  $(m)$  شیب و یک نقطه از خط  $(x_A, y_A)$ :  $y - y_A = m(x - x_A)$

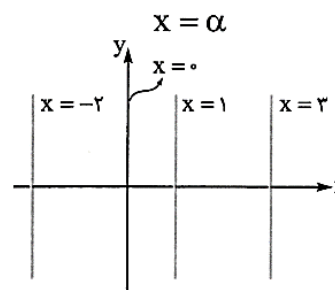
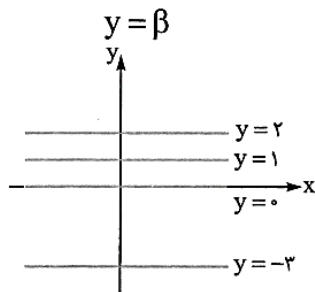
(۲) با داشتن دو نقطه  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  از خط: با محاسبه مقدار  $m$  بکمک مختصات دو نقطه و یکی از نقاط داده شده از روش شماره یک استفاده می کنیم.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

(۳) با داشتن طول از مبدا  $(p)$  و عرض از مبدا  $(q)$ :

معادله خطوط خاص:

معادله خط افقی (موازی محور  $x$  ها) همیشه به صورت  $y = \beta$  است و تمام نقاط روی این خط دارای عرض ثابت  $\beta$  هستند. معادله خط عمودی (موازی محور  $y$  ها) به صورت  $x = \alpha$  است. معادله خود محور  $x$  ها به صورت  $y = 0$  و معادله خود محور  $y$  ها  $x = 0$  است.



نکته: با توجه به معادله  $y = mx + h$  و داشتن شیب و عرض از مبدا می توان متوجه شد که نمودار در کدام نواحی مختصاتی قرار دارد (معمولا سوال پرسیده می شود نمودار از کدام ناحیه عبور نمی کند) ← رجوع شود به کتاب درسی صفحه های ۲ و ۳ کار در کلاس مرتبط با تمرین ۶ و ۲

با داشتن شیب خط  $(m)$  و عرض از مبدا  $(q)$  داریم:  $(y = mx + q)$

(۱) اگر  $m > 0$  و  $q > 0$  نمودار از ناحیه چهارم نمی گذرد.

(۲) اگر  $m < 0$  و  $q > 0$  نمودار از ناحیه سوم نمی گذرد.

(۳) اگر  $m > 0$  و  $q < 0$  نمودار از ناحیه دوم نمی گذرد.

(۴) اگر  $m < 0$  و  $q < 0$  نمودار از ناحیه اول نمی گذرد.

مثال: اگر  $m, b$  اعداد حقیقی و  $mb > 0$  کدام یک از نقاط زیر نمیتواند در معادله خط  $y = mx + b$  صدق کند؟

(۴)  $(1389, 0)$

(۳)  $(13, 89)$

(۲)  $(0, -1389)$

(۱)  $(0, 1389)$

مثال: اگر نقاط  $A(-1, 2)$   $B(3, 0)$   $C(1, -2)$  مختصات سه راس از مثلث  $ABC$  باشند معادله ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  کدام است؟

نکته: نقطه وسط پاره خط  $AB$ ، نقطه‌ای با مختصات  $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

مثال: به ازای کدام مقدار  $k$  خط  $(3k+1)x - (k-2)y = 5$  بر خط  $2x - 3y + 1 = 0$  عمود می‌باشد، به ازای  $k=3$  خط مذکور از کدام نواحی محور مختصات نمی‌گذرد؟

نکته (شرط عمود بودن): برای این که دو خط بر هم عمود باشند باید حاصلضرب شیب های آن دو خط برابر  $-1$  شود، به عبارت دیگر یک قرینه ی معکوس دیگری باشد.

مثال: به ازای کدام مقادیر  $a$  نقاط  $(a, 3)$  و  $(6, 4a+1)$  و مبدا مختصات بر یک استقامت می‌باشند؟

**توجه** سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  زمانی روی یک خط راست (بر یک استقامت) هستند که شیب پاره‌خط‌های  $AB$ ،  $AC$  و  $BC$  برابر باشند.

$$\text{پس مثلاً باید } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \text{ باشد.}$$

مثال: طول از مبدا و عرض از مبدا خطی بترتیب  $-3$  و  $5$  می‌باشد کدام نقطه روی این خط دارای عرض  $2$  می‌باشد؟ همچنین مساحت محصور بین این خط و محورهای مختصات را محاسبه کنید.

راهنمایی: برای محاسبه طول از مبدا در معادله خط به  $y$  مقدار صفر را نسبت به  $x$  محاسبه می‌کنیم...

دو خط  $y = 1 - 2x$  و  $9x - 3y = 16$  چه زاویه‌ای با هم می‌سازند؟

$$90^\circ (4) \quad 53^\circ (3) \quad 45^\circ (2) \quad 37^\circ (1)$$

شیب خط  $y = 1 - 2x$  برابر  $m_1 = -2$  و شیب خط  $9x - 3y = 16$  برابر  $m_2 = -\frac{9}{-3} = 3$  است و داریم:

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{|-2 - 3|}{|1 + (-2) \times 3|} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

از نقطه  $(1, 4)$  خطی موازی  $3y - 2x = 1$  و خطی عمود بر  $2y + x = 1$  رسم می‌کنیم. عرض از مبدا دو خط جدید چه قدر

$$\frac{16}{3} (4) \quad \frac{10}{3} (3) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{4}{3} (1) \quad \text{اختلاف دارند؟}$$

$$\text{الف) } 3y - 2x = 1 \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

شیب خطی موازی این خط هم  $\frac{2}{3}$  است و داریم:  $\frac{(1, 4)}{m = \frac{2}{3}} \rightarrow y - 4 = \frac{2}{3}(x - 1) \xrightarrow{x=0} y = 4 + \frac{2}{3}(-1) = \frac{10}{3} = q_1$

$$\text{ب) } 2y + x = 1 \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m' = 2 - \frac{m' = 2}{(1, 4)} \rightarrow y - 4 = 2(x - 1) \xrightarrow{x=0} y = 4 + 2(-1) = 2 = q_2$$

و اختلاف عرض از مبدا دو خط می‌شود  $\frac{4}{3}$ .

خطی از دسته خطوط  $(k+1)x - 2ky = k+3$  بر خط  $2y - 3x = 6$  عمود است. عرض از مبدأ آن کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} & & & \frac{3}{y} \text{ (1)} \\ & & -\frac{3}{y} \text{ (2)} & \\ & -3 \text{ (3)} & & \\ & & & 3 \text{ (4)} \end{array}$$

شیب خطوط در این دسته خط  $m = \frac{-a}{b} = -\frac{k+1}{-2k} = \frac{k+1}{2k}$  است. شیب خط  $2y - 3x = 6$  هم  $\frac{3}{2}$  است حالا قرار است بر هم عمود شوند، پس:

$$m_1 \times m_2 = \frac{k+1}{2k} \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \frac{3k+3}{4k} = -1 \Rightarrow 3k+3 = -4k$$

$$\Rightarrow 7k = -3 \Rightarrow k = -\frac{3}{7} \xrightarrow{\text{در معادله دسته خط}} \frac{4}{7}x + \frac{6}{7}y = \frac{18}{7} \xrightarrow{x=0} \frac{6}{7}y = \frac{18}{7} \Rightarrow y = q = 3$$

نکته: برای پیدا کردن نقطه تقاطع دو خط متقاطع کفایت معادلات آنها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل کنیم و مقادیر  $x, y$  را بیابیم.

اگر خط  $x - 2y = m$  از نقطه برخورد دو خط  $d_1: 2x + y = 3$  و  $d_2: y = 3x - 1$  بگذرد،  $m$  کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} & & & -2 \text{ (1)} \\ & & 2 \text{ (2)} & \\ & -1 \text{ (3)} & & \\ & & & 1 \text{ (4)} \end{array}$$

اول نقطه برخورد دو خط را پیدا کنیم:  $A(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$

جای‌گذاری  $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \rightarrow 2x + (3x - 1) = 3 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{5}$

$$x_A - 2y_A = \frac{4}{5} - 2(\frac{7}{5}) = \frac{4-14}{5} = -2 = m \quad \text{حالا این نقطه } A \text{ باید روی خط } x - 2y = m \text{ باشد:}$$

فاصله دو نقطه نسبت به هم:

فاصله دو نقطه از هم یا طول پاره خط  $AB$  به صورت  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  برابر است با:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

پس فاصله یک نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با:

مثال: طول میانه  $CM$  در مثلث به اضلاع داده شده را بیابید:  $C(2, 4)$  و  $B(3, 1)$ ،  $A(1, -1)$

وسط ضلع  $AB$  نقطه  $M(\frac{3+1}{2}, \frac{1+(-1)}{2}) = (2, 0)$  است؛ بنابراین طول میانه  $CM$  برابر است با:

$$x_C = x_M \Rightarrow CM = |y_M - y_C| = 4 - 0 = 4$$

سه رأس مثلثی نقاط  $A(3, -2)$  و  $B(3, 1)$  و  $C(-1, 1)$  هستند. محیط آن کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} & & & 12 \text{ (1)} \\ & & 11 \text{ (2)} & \\ & 10 \text{ (3)} & & \\ & & & 9 \text{ (4)} \end{array}$$

$$AB = |y_B - y_A| = |1 - (-2)| = 3 \Rightarrow \text{طول } A \text{ و } B \text{ مساوی است}$$

$$CB = |x_C - x_B| = |-1 - 3| = 4 \Rightarrow \text{عرض } C \text{ و } B \text{ مساوی است}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

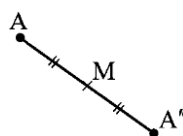
پس محیط مثلث  $ABC$  می‌شود  $3+4+5=12$ . دقت کنید که این مثلث با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ قائم‌الزاویه است. ( $\hat{B} = 90^\circ$  و وتر است  $AC$ )

و مساحتش هم برابر  $\frac{3 \times 4}{2} = 6$  است.

نکته ۱: گاهی اوقات در صورت سوال از ما قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر می‌خواهند که با استفاده از مفهوم نقطه وسط یک پاره خط برای

پیدا کردن قرینه نقطه  $A$  نسبت به نقطه  $M$  داریم:

$$A(x_1, y_1) \quad \longrightarrow \quad A''(2\alpha - x_1, 2\beta - y_1)$$



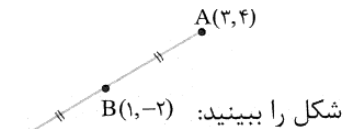
قرینه نقطه  $(3, 4)$  نسبت به نقطه  $(1, -2)$  روی خط  $x - y = k$  است.  $k$  کدام است؟

-۷ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

-۶ (۴)

شکل را ببینید:  $B(1, -2)$ 

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$1 = \frac{3 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = -1 \quad -2 = \frac{4 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -8 \quad \text{پس } C(-1, -8) \text{ و داریم:}$$

$$x_C - y_C = k = -1 - (-8) = 7 \quad k = 7$$

چون B وسط A و C قرار دارد، می توان گفت:

در مثلث با رئوس  $A(1, 2)$  و  $B(-1, 0)$  و  $C(1, 4)$  چندتا از جملات زیر درست هستند؟

(الف) طول میانه CN برابر  $\sqrt{10}$  است. (ب) شیب ارتفاع BH عددی مثبت است.

(پ) معادله عمودمنصف ضلع BC به صورت  $x + 2y = 4$  است.

(۱) هیچ

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

$$N = \frac{A+B}{2} = \left( \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (0, 1)$$

برای طول میانه CN اول نقطه N در وسط AB را پیدا کنیم:

$$\frac{N(0, 1)}{C(1, 4)} \rightarrow CN = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad \text{درست می گوید. (الف)}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-2}{1-1} = \text{تن}$$

برای ارتفاع BH باید از B بر AC عمود کنیم؛ شیب AC برابر است با:

پس AC موازی محور yها است و ارتفاع BH (عمود بر آن) موازی محور xها به معادله  $y = y_B = 0$  است و بنابراین شیب آن صفر

است و (ب) اشتباه می گوید.

برای نوشتن عمودمنصف ضلع BC ابتدا وسط BC را پیدا می کنیم.

$$M = \frac{B+C}{2} = \left( \frac{1+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = (0, 2)$$

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4-0}{1-(-1)} = 2$$

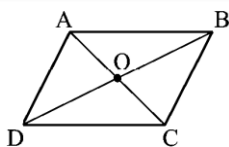
شیب BC هم برابر است با:

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$$

پس شیب عمود منصف BC می شود:

$$\frac{M(0, 2)}{m' = \frac{-1}{2}} \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

و معادله آن:

یا  $2y + x = 4$  است و (پ) درست می گوید، یعنی دوتا از گزارهها درست اند.

نکته: در متوازی الاضلاع ABCD با توجه به منصف بودن اضلاع داریم:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} = x_O$$

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} = y_O$$

رئوس متوازی الاضلاع ACDB نقاط  $A(1, 2)$ ،  $B(-1, 1)$  و  $C(0, 4)$  و D هستند. جمع طول و عرض D کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

$$A + D = B + C \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 3 \end{cases} \quad \text{با توجه به ترتیب ACDB، قطرهای AD و BC هستند و داریم:}$$

نکته ۱: مرکز ثقل مثلث نقطه ایست که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و همچنین اگر از مرکز ثقل به سه راس مثلث خطوطی رسم کنیم مثلث اولیه به سه مثلث کوچکتر تبدیل می شود که مساحت هر یک از این سه مثلث هم مساحت برابر یک سوم مساحت مثلث اولیه می باشد.

فاصله یک نقطه از یک خط: اگر از ما خواستند فاصله نقطه A را از خط داده شده محاسبه کنید به روش زیر عمل می کنیم:

فاصله دو خط موازی نیز بکمک فرمول زیر محاسبه می شود:

حواسمان باشد برای استفاده از این فرمول ابتدا باید ضرایب

a, b در دو خط به کمک ضرب یا تقسیم عددی با هم برابر شوند

فاصله نقطه A(1,2) از خط  $y = 7x - 1$  چند برابر فاصله مبدأ از خط  $5x - 5y = 3$  است؟

$$\frac{2}{5} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{4} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4)$$

یادتان هست که باید همه جملات معادله خط را به طرف چپ بیاورید:

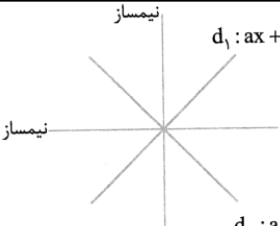
$$y = 7x - 1 \Rightarrow 7x - y - 1 = 0 \xrightarrow{A(1,2)} d_1 = \frac{|7 \times 1 - 2 - 1|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{50}} = \frac{2}{5\sqrt{2}}$$

و نسبت دو فاصله می شود  $\frac{4}{3}$ .

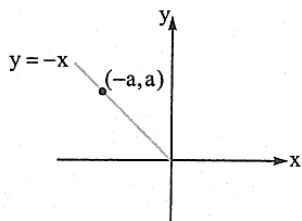
$$5x - 5y = 3 \Rightarrow 5x - 5y - 3 = 0 \xrightarrow{O(0,0)} d_2 = \frac{|-3|}{\sqrt{5^2 + (-5)^2}} = \frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

نیمساز دو خط، مجموعه نقاطی است که از آن دو خط به یک فاصله باشند، پس اگر  $d_1$  و  $d_2$  دو خط باشند  $d_1: ax + by + c = 0$  معادله نیمسازهای این دو خط از این شرط به دست می آید:

فاصله از  $d_1$  = فاصله از  $d_2$

$$\text{معادله نیمساز: } \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$


کدام نقطه روی نیمساز ناحیه دوم، از دو خط  $x - 3y = 1$  و  $3x + y + 2 = 0$  به یک فاصله است؟



$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) (1) \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) (2) \quad \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) (3) \quad \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) (4)$$

مختصات نقطه روی نیمساز ناحیه دوم  $(-a, a)$  است  $(a > 0)$ .

پس ما به دنبال نقطه  $A(-a, a)$  هستیم که از آن دو خط به یک فاصله باشد:

فاصله  $(-a, a)$  از  $3x + y + 2 = 0$  = فاصله  $(-a, a)$  از  $x - 3y - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{|-a - 3a - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|3(-a) + a + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Rightarrow |-4a - 1| = |-2a + 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 1 = +(-2a + 2) \Rightarrow -3 = 2a \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ -4a - 1 = -(-2a + 2) \Rightarrow 1 = 6a \Rightarrow a = \frac{1}{6} \end{cases}$$

یادتان هست که  $a > 0$  بود، پس  $a = \frac{1}{6}$  و نقطه مورد نظر  $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$  است.



دو ضلع مربعی بر خطوط  $y = \frac{1}{2}x - 1$  و  $4y - 2x = 5$  واقع می‌شوند. مساحت مربع چه قدر است؟

۴/۰۳ (۴)

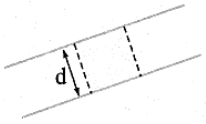
۴/۰۵ (۳)

۴/۰۲ (۲)

۴/۱ (۱)

اول باید معادله دو خط را مثل هم کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{اولی: } y = \frac{1}{2}x - 1 \xrightarrow{\times 4} 4y = 2x - 4 \Rightarrow 4y - 2x = -4 \\ \text{دومی: } 4y - 2x = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-4 - 5|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{20}}$$



$$S = d^2 = \frac{81}{20} = 4/05$$

و مساحت مربع برابر است با:

دو خط  $3y = 4x + 11$  و  $3y - 4x + 4 = 0$  بر دایره‌ای مماس هستند. اگر طول مرکز این دایره  $-1$  باشد فاصله دورترین

نقطه آن تا محور  $y$ ها کدام است؟

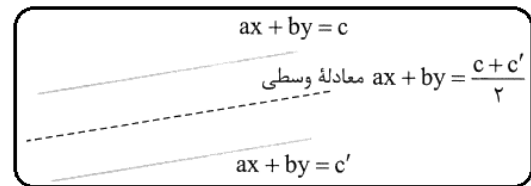
۵/۲ (۴)

۱/۲ (۳)

۴/۳ (۲)

۳/۲ (۱)

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y - 4x = +11 \\ 3y - 4x = -4 \end{array} \right. \quad \text{معادله دو خط را مثل هم می‌نویسیم:}$$



$$2R = d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-4 - 11|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

فاصله آن‌ها از هم برابر قطر دایره است:

پس شعاع دایره  $1/5$  است.

از طرفی مرکز روی خط وسط دو مماس قرار دارد:  $3y = 4x + \frac{11 + (-4)}{2} = 4x + \frac{7}{2}$  معدل

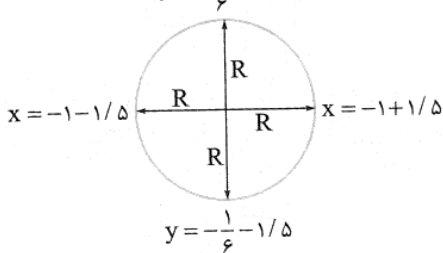
$$y = -\frac{1}{6} + 1/5$$

سؤال گفته طول مرکز  $-1$  است، پس عرض آن می‌شود:

$$3y = 4(-1) + \frac{7}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = \frac{-1}{6}$$

یعنی  $O(-1, -\frac{1}{6})$  مرکز دایره است.

حالا به شکل دقت کنید.



بیشترین فاصله تا محور  $y$ ها یعنی بیشترین مقدار  $|x|$  برابر است با:  $|-2/5| = 2/5$

مثال: شعاع دایره ای که از دو نقطه  $(0, 0)$  و  $(3, 1)$  گذشته و مرکز آن روی خط به معادله  $y = 2x$  باشد را محاسبه کنید. راهنمایی: ابتدا شکل را رسم می

کنیم با توجه به محل قرارگیری مرکز دایره آیا نمی‌توان مختصات مرکز را با متغیر مجهول نوشته و فاصله آن از دو نقطه  $A$  و  $B$  را با هم مقایسه کرد؟ ... این فواصل چه نسبتی با هم دارند؟ ...

مثال: مساحت مثلثی که دو ضلع آن روی خطوطی به معادله  $y + x = 2$  و  $2y - x = 4$  و ضلع دیگر آن بر محور  $OX$  قرار دارد کدام است؟ راهنمایی: ابتدا شکل

دستگاه مختصات را رسم می‌کنیم، محل برخورد دو خط با یکدیگر چه کمکی به ما می‌کند؟ و همچنین محل برخورد دو خط با محور طول‌ها؟ شکل را کامل کنید ... چه

می‌بینید؟ ...

مثال: دو نقطه به معادله  $A(2, -1)$  و  $B(3, 0.5)$  مفروضند اگر نقطه ی  $A$  وسط پاره خط  $BC$  باشد فاصله نقطه  $C$  از مبدا مختصات چقدر است.  
 راهنمایی: هیچ وقت از کشیدن شکل نا امید نشوید ....

مثال: نقطه  $A(6, 7)$  راس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $2y-3x=11$  و  $3y+4x=8$  می باشند، مختصات وسط قطر آن را بیابید.

راهنمایی: ابتدا شکل را رسم می کنیم آیا دو خط داده شده موازنند؟ نقطه ی  $A$  آیا در معادله دو خط صدق می کند؟ این یعنی چه؟ بکمک این یافته می توانیم بفهمیم که نقطه  $A$  روی کدام راس متوازی الاضلاع قرار دارد....

مثال: نقطه های  $Q(1, 2)$  و  $P(4, 0)$  و مبدا مختصات، راس های یک مثلث اند اگر عمود منصف ضلع بزرگتر امتداد ضلع کوچکتر را در نقطه  $R$  قطع کند آنگاه فاصله نزدیکترین راس مثلث از نقطه  $R$  کدام است؟  
 راهنمایی: اگر بتوانیم معادله عمود منصف را بنویسیم سپس معادله کوچکترین ضلع مثلث ... شاید بتوانیم کاری بکنیم ....

مثال: دو نقطه روی خط به معادله  $y=x-1$  قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله  $2x-3y=5$  برابر  $\sqrt{13}$  است. فاصله بین این دو نقطه را بیابید.  
 راهنمایی: آیا می شود مختصات دو نقطه را پارامتری نوشت؟ و در فرمول فاصله نقطه از خط قرار داده؟ ....

### تست های ارزشیابی

خط به معادله  $y = mx + (m - 2)$  به ازای هر عدد منفی  $m$  از کدام ناحیه نمی گذرد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

به ازای کدام مقدار  $k$  خط به معادله  $y + 2kx = k - 1$  بر خط  $2y - 3x = 1$  عمود است؟

(۴)  $-\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $-\frac{2}{3}$

(۱)  $\frac{2}{3}$

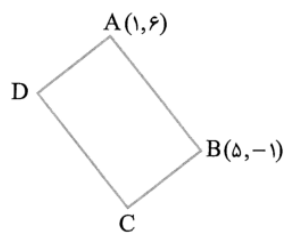
خط به معادله  $d: (2k-1)x + 3ky = 6$  و خط گذرنده از نقاط  $(3, 2)$  و  $(1, -2)$  موازی اند. خط  $d$  از کدام نقطه می‌گذرد؟

(4)  $(5, 1)$

(3)  $(-5, 6)$

(2)  $(-2, 6)$

(1)  $(-6, 2)$



در مستطیل شکل روبه‌رو معادله ضلع  $AD$  کدام است؟

(2)  $7y - 4x = 38$

(1)  $7y + 4x = 46$

(4)  $7x + 4y = 31$

(3)  $7x - 4y = -17$

خطی با شیب  $m$  از نقطه  $\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$  گذشته و با محورهای مختصات مساحتی برابر ۴ واحد مربع می‌سازد. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای  $m$  کدام است؟

(4)  $-16$

(3)  $16$

(2)  $-8$

(1)  $4$

خط به معادله  $y + 3x = 11$  با منحنی به معادله  $y = x^2 + 1$  در دو نقطه  $A$  و  $B$  مشترک هستند. فاصله این دو نقطه، کدام است؟

(4)  $7\sqrt{10}$

(3)  $8\sqrt{5}$

(2)  $5\sqrt{10}$

(1)  $6\sqrt{5}$



به ازای کدام مقدار  $a$  خط به معادله  $ax + 2y = 7$  از نقطه مشترک دسته خطوط  $(m+1)x + (2m-1)y = 2 - m$  می‌گذرد؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

خطی از نقطه  $(-2, -4)$  می‌گذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن ۴ است. مجموع مقادیر ممکن برای شیب آن کدام است؟

۴/۵ (۴)

۵ (۳)

۵/۵ (۲)

۴ (۱)

نقطه  $M$  به طول ۱ بر خط  $d$  به معادله  $3y + 4x = 10$  قرار دارد. خطی در نقطه  $M$  بر  $d$  عمود می‌شود. این خط، محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

$-\frac{5}{3}$  (۴)

$\frac{5}{4}$  (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

$-\frac{11}{3}$  (۱)

نقاط  $A(2, 5)$ ،  $B(3, -1)$  و  $C(0, 2)$  سه رأس مثلثی هستند. مختصات پای ارتفاع  $AH$  کدام است؟

$(-\frac{1}{2}, \frac{7}{3})$  (۴)

$(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$  (۳)

$(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$  (۲)

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{3})$  (۱)

سه ضلع مثلثی به معادلات  $AB: 2y - x = 3$ ،  $AC: y - 2x = 5$  و  $BC: 2y + 3x = 6$  هستند. معادله ارتفاع  $AH$  از مثلث مفروض،

$3y + 2x = 9$  (۴)

$3y - 2x = 7$  (۳)

$9y - 6x = 17$  (۲)

$6y - 4x = 15$  (۱)

کدام است؟

معادله سه ضلع یک مثلث  $x + y = 1$ ،  $y = 2x$  و  $x = 1$  است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

$y + x = \frac{1}{3}$  (۴)

$y + x = \frac{2}{3}$  (۳)

$y = \frac{2}{3}$  (۲)

$y = \frac{2}{4}$  (۱)

اگر نقاط  $A(2, 5)$ ،  $B(-1, 2)$  و  $C(5, 1)$  رئوس متوازی الاضلاع  $ABCD$  باشند، معادله ضلع  $DC$  کدام است؟

$y = x - 4$  (۱)       $y = -x + 6$  (۲)       $x + 6y = 11$  (۳)       $y = 2x - 9$  (۴)

اگر دو نقطه  $A(2, 3)$  و  $B(a, -1)$  به فاصله ۴ از یکدیگر باشند، مختصات وسط آن‌ها کدام است؟

$(2, 1)$  (۱)       $(1, 1)$  (۲)       $(3, 1)$  (۳)       $(0, 1)$  (۴)

نقطه  $M(1, -4)$  وسط پاره خطی با دو انتهای  $A(-2, 1)$  و  $B$  است. جمع مختصات قرینه نقطه  $B$  نسبت به نقطه  $(6, -7)$  کدام است؟

$1$  (۱)       $3$  (۲)       $-3$  (۳)       $-1$  (۴)

نقطه  $A(7, 6)$  رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $2y - 3x = 11$  و  $3y + 4x = 8$  می‌باشند.

مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (۱)  $(4, 3)$  (۲)  $(3, 4)$  (۳)  $(3, 5)$  (۴)  $(1, 5)$

مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات  $A(2, 5)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(0, 2)$  کدام است؟

$6/5$  (۱)       $7/5$  (۲)       $7$  (۳)       $7/5$  (۴)

نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم که از نقاط  $A(-4, 3)$  و  $B(2, -1)$  به یک فاصله باشد، از مبدأ چه قدر فاصله دارد؟

$\sqrt{2}$  (۱)       $\sqrt{5}$  (۲)       $2$  (۳)       $5$  (۴)

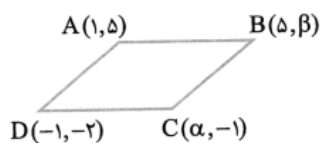
مرکز دایره‌ای روی خط  $2y = x + 9$  است و از دو نقطه  $(1, -4)$  و  $(5, 2)$  می‌گذرد. مساحت این دایره چه قدر است؟

$82\pi$  (۴)

$65\pi$  (۳)

$37\pi$  (۲)

$50\pi$  (۱)



با توجه به مختصات رئوس در متوازی‌الاضلاع مقابل، مقدار  $\alpha\beta$  کدام است؟

$12$  (۲)

$9$  (۱)

$24$  (۴)

$18$  (۳)

نقطه  $A(3, -1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $2y - x = 5$  است. مساحت این مربع، کدام است؟

$80$  (۴)

$75$  (۳)

$45$  (۲)

$40$  (۱)

یک رأس از مثلث متساوی‌الاضلاع  $A(0, 1)$  است و یک ضلع آن روی خط  $\sqrt{2}x - y + 4 = 0$  قرار دارد. مساحت این مثلث کدام است؟

$3$  (۴)

$4\sqrt{3}$  (۳)

$2\sqrt{3}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۱)

نقاط  $A(6, 5)$ ،  $B(-1, 4)$  و  $C(5, 2)$  سه رأس مثلثی هستند. فاصله نقطه  $M$  وسط  $BC$  از ارتفاع  $AH$  کدام است؟

$2\sqrt{5}$  (۴)

$2\sqrt{10}$  (۳)

$\sqrt{5}$  (۲)

$\sqrt{10}$  (۱)

دایره‌ای به مرکز  $C(1, -2)$  بر خط به معادله  $3x - 4y = 1$  مماس است. طول قطر این دایره کدام است؟

$4$  (۴)

$2$  (۳)

$\frac{12}{5}$  (۲)

$\frac{24}{5}$  (۱)

دو خط  $x - y = 1$  و  $y = 2x + 3$  قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره بر نیمساز ناحیه دوم و چهارم مماس شود، شعاع آن کدام است؟

$9\sqrt{2}$  (۴)

$3\sqrt{2}$  (۳)

$\frac{9\sqrt{2}}{2}$  (۲)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۱)

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن نقطه  $A(8, 5)$  است. مساحت این مستطیل کدام است؟

$12/8$  (۴)

$11/4$  (۳)

$9/6$  (۲)

$7/2$  (۱)

اضلاع مربعی روی خطوط  $x - y = 2$  و  $y = x + 1$  قرار دارند. سطح آن کدام است؟

$18$  (۴)

$\frac{9}{4}$  (۳)

$9$  (۲)

$\frac{9}{2}$  (۱)

چند نقطه روی نیمساز ناحیه اول هست که از دو خط  $3x - y + 1 = 0$  و  $3x + y - 2 = 0$  به یک فاصله باشد؟

بی‌شمار (۴)

 $2$  (۳) $1$  (۲)

(۱) هیچ

عرض نقطه‌ای روی خطی که از  $A(3, 2)$  و  $B(7, -1)$  می‌گذرد و کم‌ترین فاصله را تا نقطه  $(9, 7)$  دارد کدام است؟

$0/96$  (۴)

$0/92$  (۳)

$0/88$  (۲)

$0/84$  (۱)

نقطه  $P(4m, 11)$  روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه  $A(0, m)$  و  $B(6, 15)$  قرار دارد.  $m$  کدام می‌تواند باشد؟

$-3$  (۴)

$3$  (۳)

$2$  (۲)

$-2$  (۱)



دو رأس یک مثلث بر روی خطی به معادله  $y = x + 1$  است که طول این رئوس در دستگاه مختصات ۱ و ۲ است. مختصات رأس سوم بر روی

کدام یک از خطوط زیر باشد تا به ازای هر نقطه از آن مساحت مثلث یک باشد؟

$$x - y = 3 \quad (2)$$

$$x + y = 1 \quad (1)$$

$$y - x = 2 \quad (4)$$

$$y - x = 3 \quad (3)$$

یک ضلع مربعی بر خط  $x + y = 4$  قرار دارد و مبدأ مختصات محل برخورد قطرهای آن است. مساحت این مربع کدام است؟

$$128 \quad (4)$$

$$64 \quad (3)$$

$$32 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

دو نقطه  $A(m-1, 2)$  و  $B(3, m+4)$  نسبت به خط  $d: x + y = 5$  قرینه‌اند.  $m$  کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

- دو ضلع مجاور یک مستطیل بر خطوط  $y = x + 5$  و  $x + y = 7$  واقع‌اند. اگر مبدأ مختصات یکی از رئوس این مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

$$24/5 \quad (4)$$

$$21 \quad (3)$$

$$17/5 \quad (2)$$

$$14 \quad (1)$$

کوتاه‌ترین فاصله نقطه  $A(4, 0)$  از نمودار تابع  $f(x) = ||x-1| - 1|$  کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

فاصله نقطه  $A$  روی محور طول‌ها از خط به معادله  $y = 1 - x$  کم‌تر از  $2\sqrt{2}$  است. مجموعه مقادیری که طول نقطه  $A$  می‌تواند اختیار کند کدام است؟

$$(-5, 3) \quad (4)$$

$$(-4, 4) \quad (3)$$

$$(-3, 5) \quad (2)$$

$$(-2, 6) \quad (1)$$





نقطه A به طول صحیح روی خط  $y = x - 1$  قرار دارد و از خط به معادله  $3x + 4y + 5 = 0$  به فاصله ۳ است. مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

خط  $d_1: 3x - y = 1$  معادله قطری از دایره و  $d_2: 2y = 6x + 3$  بر دایره مماس است. مساحت این دایره کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{8}$  (۳)  $\frac{5\pi}{4}$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن نقطه  $A(8, 5)$  است. مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱)  $7/2$  (۲)  $9/6$  (۳)  $11/4$  (۴)  $12/8$

شعاع دایره‌ای که از دو نقطه  $(1, 2)$  و  $(3, 0)$  گذشته و مرکز آن روی خط  $y = 2x - 1$  قرار دارد، کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{8}$  (۲) ۳ (۳)  $\sqrt{10}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

طول وتری که خط  $y = 2x - 6$  در دایره‌ای به مرکز  $(2, 3)$  و شعاع ۳ ایجاد می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳)  $2\sqrt{5}$  (۴) ۴

دو خط  $y = 2x - 5$  و  $4x - 2y = k$  بر دایره‌ای به مساحت  $5\pi$  مماس‌اند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۴۰



اگر خطوط  $y = (k+2)x + 3$  و  $ky - x - b = 0$  معادلات قطرهای یک مربع و  $A \left( \frac{1}{3} \right)$  یکی از رئوس آن باشد، مساحت این مربع کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

- فاصله نقطه  $A(1, 0)$  از خط  $d: 6y - 8x = c$  برابر  $\frac{3}{4}$  است. اگر فاصله نقطه  $A$  از خط  $d'$  که موازی خط  $d$  است برابر  $\frac{5}{4}$  باشد و

نقطه  $A$  و خط  $d'$  در طرفین خط  $d$  باشند، معادله خط  $d'$  کدام است؟ ( $c > 0$ )

$$6y - 8x - 17 = 0 \quad (2)$$

$$6y - 8x + 33 = 0 \quad (1)$$

$$6y - 8x - 33 = 0 \quad (4)$$

$$6y - 8x + 17 = 0 \quad (3)$$

