

۱۲۶- اگر  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد، حاصل  $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$  کدام است؟

(۱)  $\sin x$       (۲)  $\cos x$       (۳)  $-\sin x$       (۴)  $-\cos x$

پاسخ:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} (2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x)$$

از طرفی  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  پس چون  $\cos$  در ربع سوم مقداری منفی دارد خواهیم داشت:

$$\sqrt{\cos^2 x} = -\cos x$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} (2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x) = \frac{1}{-\cos x} (1 - \sin^2 x) = -\frac{\cos^2 x}{\cos x} = -\cos x$$

پاسخ گزینه ۴ می باشد.

یادآوری

1.  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
2.  $\sqrt{u^2} = |u|$
3.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
4.  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲۷- سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟

(۱) ۱۲      (۲) ۱۵      (۳) ۲۰      (۴) ۲۵

پاسخ:

باید از مفهوم سرعت نسبی استفاده کنیم:

۱- در حالتی که قایق در خلاف جهت رودخانه حرکت کند و سرعت رودخانه را  $V$  فرض کنیم سرعت نسبی قایق برابر خواهد بود با:

$$V_R = 100 - V$$

توجه شود که تمامی سرعت‌های داده شده در گزینه‌ها کمتر از سرعت قایق در آب راکد می‌باشد.

۲- در حالتی که قایق در جهت رودخانه حرکت کند سرعت نسبی قایق برابر خواهد بود با:

$$V_R = 100 + V$$

با توجه به رابطه  $x = vt$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 1200 = (100 - V) \times t_1 \\ 1200 = (100 + V) \times t_2 \end{cases}$$

اختلاف دو زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه می‌باشد. پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{1200}{100 - V} \\ t_2 = \frac{1200}{100 + V} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t = 5 \Rightarrow 5 = \frac{1200}{100 - V} - \frac{1200}{100 + V} = 1200 \cdot \left( \frac{100 + V - (100 - V)}{(100 - V)(100 + V)} \right) = 1200 \cdot \left( \frac{2V}{10^4 - V^2} \right)$$

$$\frac{5}{1200} = \frac{2V}{10^4 - V^2} \Rightarrow V^2 + 480V - 10^4 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = 520 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-480 \pm 520}{2} = 20$$

پاسخ گزینه ۳ می‌باشد.

۱۲۸- مجموعه جواب نامعادله  $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ ، به کدام صورت است؟

(۱)  $\mathbb{R} - [-6, 4]$  (۲)  $\mathbb{R} - [-4, 6]$  (۳)  $x > 4$  (۴)  $x < -6$

پاسخ:

Konkur.in

روش اول:

با در نظر گرفتن طرفین نامعادله به صورت مجزا خواهیم داشت:

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0$$

با توجه به تعیین علامت عبارت بالا خواهیم

داشت:

$$\begin{cases} x > 4 \\ x < -1 \end{cases}$$

x	-1	4	
x-4	-	-	+
x+1	-	+	+
$\frac{x-4}{x+1}$	+	-	+

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x+6}{x+1} > 0$$

با توجه به تعیین علامت عبارت بالا خواهیم

داشت:

$$\begin{cases} x > -1 \\ x < -6 \end{cases}$$

x	-6	-1
x+6	-	+
x+1	-	+
$\frac{x+6}{x+1}$	+	-

با توجه به مجموعه جواب‌های به دست آمده خواهیم داشت:

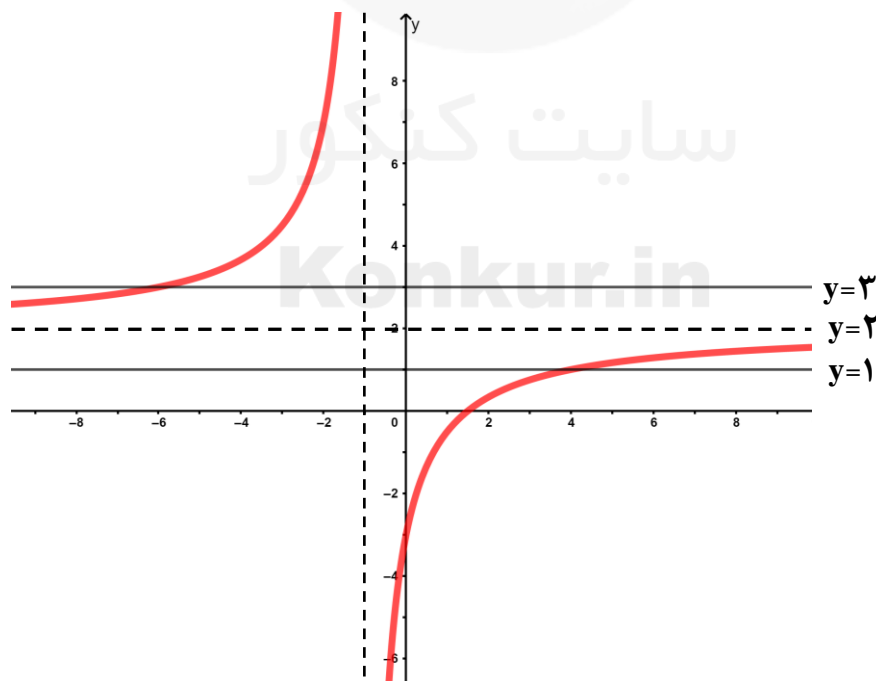
$$\begin{cases} x < -6 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \{\mathbb{R} - [-6, -1]\}$$

**روش دوم:** رسم تابع  $y = \frac{2x-3}{x+1}$

می‌توان برای راحت رسم کردن نمودار تابع فوق (با توجه به مخرج کسر) کسر را ساده‌تر مینویسیم.

$$y = \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x+2-2-3}{x+1} = \frac{2(x+1)-5}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

با توجه به مجانب قائم و افقی تابع هموگرافیک، شکل نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



از محل تلاقی  $y = 2 - \frac{5}{x+1}$  با  $y = 3$  و  $y = 1$  به ترتیب خواهیم داشت:  $x = 4, x = -6$

باتوجه به نمودار تابع و همچنین نقاط به دست آمده پرواضح است که جواب **گزینه ۱** می باشد.

**روش سوم: عدد گذاری**

با عدد گذاری هم می توان به جواب صحیح رسید. با جایگذاری عدد ۵- (عددی که در گزینه دوم هست ولی در گزینه اول نیست) تنها گزینه درست **گزینه ۱** می باشد.

**۱۲۹-** گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می تواند دسته گل های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف موجود باشد؟

۱۲۶ (۱)      ۱۴۰ (۲)      ۱۵۴ (۳)      ۱۶۸ (۴)

**پاسخ:**

۴ شاخه مختلف در هر دسته گل (چون ۸ نوع گل مختلف داریم) مساوی است با تعداد انتخاب ۴ گل از ۸ گل مختلف! برای ۵ شاخه و ۶ شاخه نیز به همین منوال است. پس:

$$\text{تعداد کل حالات} = \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$$

پس **گزینه ۳** جواب صحیح است.

**۱۳۰-** اگر  $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$  باشد، عدد  $\frac{a+1}{a}$ ، کدام است؟

۱/۵ (۱)      ۲/۵ (۲)      ۳/۵ (۳)      ۴/۵ (۴)

**پاسخ:**

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$2a^2 + 4a = (2 - 3a)^2 \Rightarrow 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2 \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{16^2 - 4 \times 7 \times 4} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{4}{5}$$

با توجه به شرط  $a \leq \frac{2}{3}$  مقدار  $\frac{2}{7}$  قابل قبول خواهد بود. پس:

**گزینه ۴** جواب صحیح می باشد.

۱۳۱- در یک دوزنقه، پاره خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت های

۱ و ۲ تقسیم می کند. نسبت قاعده های آن دوزنقه کدام است؟

$$\frac{2}{5} (4)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

$$\frac{1}{5} (2)$$

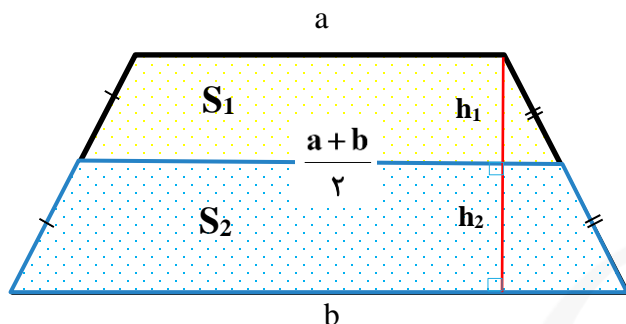
$$\frac{1}{6} (1)$$

پاسخ:

با توجه به شکل مقابل و با ذکر این نکته که طول این

پاره خط میانگین طول قاعده های دوزنقه می باشد

خواهیم داشت:



$$\frac{S_2}{S_1} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times h_2 \times \left( b + \frac{a+b}{2} \right)}{\frac{1}{2} \times h_1 \times \left( a + \frac{a+b}{2} \right)} = 2 \Rightarrow \frac{3b+a}{3a+b} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{5}$$

یادآوری

۱. طول پاره خطی که دو تا ساق رو نصف کند برابر میانگین مجموع طول دو تا قاعده دوزنقه

است

۲. با توجه به قضیه تالس می توان نشان داد که  $h_1 = h_2$

۱۳۲- در مثلث قائم الزاویه ABC، اضلاع قائم  $AB = 3\sqrt{5}$ ،  $AC = 6$  ارتفاع AH و میانه AM رسم شده

است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AHM است؟

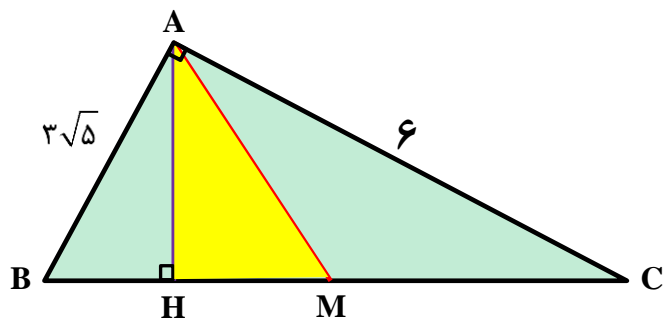
$$18 (4)$$

$$15 (3)$$

$$12 (2)$$

$$10 (1)$$

که پاسخ:



با توجه به شکل مقابل و داده های سوال خواهیم داشت:

$$AH \times BC = 3\sqrt{5} \times 6 = 18\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 6^2} = 9 \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

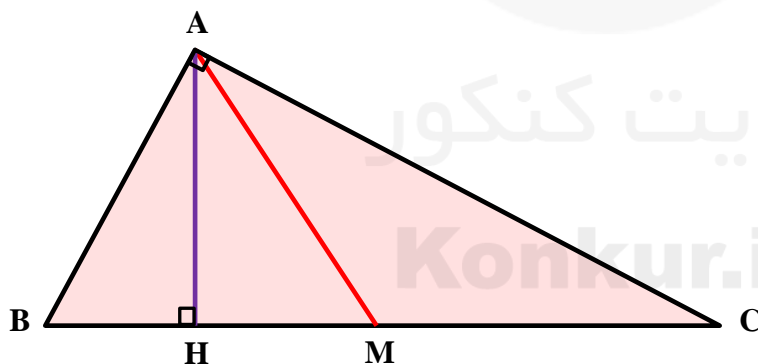
$$MC = MB = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow BH = 5 \Rightarrow MH = 5 - 4\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMH}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 9}{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2}} = 18$$

یادآوری

با توجه به شکل در مثلث ABC روابط زیر برقرار است:



$$1. \quad AH \times BC = AB \times AC$$

$$2. \quad AB^2 = BH \times BC$$

$$3. \quad AC^2 = CH \times BC$$

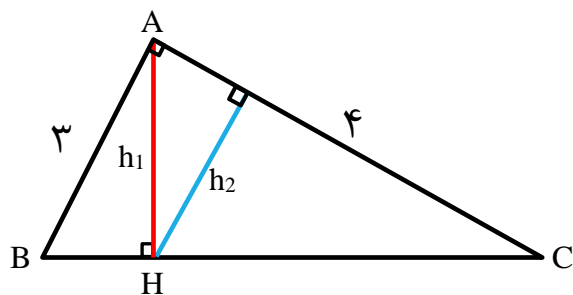
$$4. \quad AM = \frac{BC}{2}$$

$$5. \quad S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMB}$$

$$6. \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$$

۱۳۳- در شکل زیر،  $h_1$  و  $h_2$  ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت  $\frac{h_2}{h_1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{5}$  (۲)  $\frac{4}{5}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{4}$



پاسخ:

$$\left\{ \begin{array}{l} AH \times BC = 12 \\ BC^2 = 3^2 + 4^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AH = \frac{12}{5} = h_1$$

$$\triangle AHC \Rightarrow AH^2 + CH^2 = 4^2 \Rightarrow CH = \frac{16}{5}$$

$$h_2 \times AC = CH \times h_1 \Rightarrow h_2 = \frac{48}{25} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$$

۱۳۴- حاصل عبارت  $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

پاسخ:

صورت کسر را طوری مینویسیم که بتوان ضرایب زوج تولید کرد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{18-1}{3}\pi\right) = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12+5}{6}\pi\right) = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{16+3}{4}\pi\right) = \tan\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{12-1}{6}\pi\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

پاسخ گزینه ۳ می باشد.

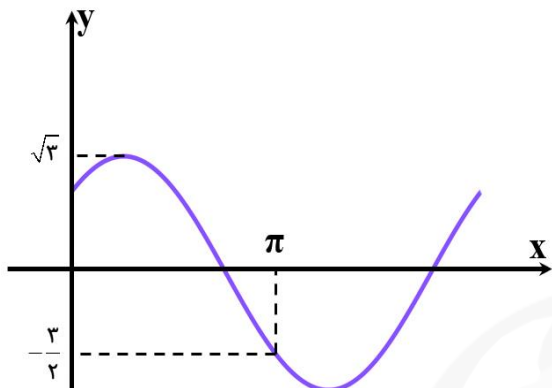


۱۳۵- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است.  $b$  کدام است؟

۲ (۴)

 $\sqrt{3}$  (۳) $\frac{3}{2}$  (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

پاسخ:



با توجه به شکل تابع دو نکته زیر را می توان برداشت کرد:

۱- نقطه  $(\pi, -\frac{3}{2})$  در ضابطه تابع صدق می کند.

۲- ماکسیمم مقدار تابع مقدار  $\sqrt{3}$  می باشد.

با توجه به دو نکته فوق داریم:

$$-\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = a - b \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال می توان هم از تابع مشتق گرفت و برابر صفر قرار داده تا طول نقطه اکسترمم به دست آید و یا اینکه با توجه به شکل تابع می توان گفت زمانی مقدار تابع ماکسیمم است که مقدار  $\sin(x + \frac{\pi}{3})$  برابر یک باشد. در هر صورت معادله زیر به دست می آید:

$$y' = b \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3}$$

از حل دو معادله زیر جواب به دست می آید.

$$\begin{cases} a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2} \\ a + b = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow b \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{2}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6 - 3}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

در دستگاه بالا، از جایگذاری جواب ها نیز می توان سریعتر به جواب رسید. پاسخ **گزینه ۳** می باشد.

۱۳۶- اگر  $(\frac{125}{8})^{x^2} = (\frac{5}{2})^{2x-1}$  باشد،  $\log_8(9x+1)$ ، کدام است؟

 $\frac{3}{2}$  (۴) $\frac{4}{3}$  (۳) $\frac{3}{4}$  (۲) $\frac{2}{3}$  (۱)

پاسخ:

$$(\frac{5}{2})^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2} \Rightarrow (\frac{5}{2})^{2x-1} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{x^2} \Rightarrow (\frac{5}{2})^{-(2x-1)} = (\frac{5}{2})^{3x^2} \Rightarrow 3x^2 = -2x+1 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$



$$a + c = b \Rightarrow 3 - 1 = 2 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

با توجه به اینکه به ازای  $x = -1$  عبارت  $9x + 1$  منفی خواهد شد پس فقط  $x = \frac{1}{3}$  قابل قبول خواهد بود.

$$\log_3(9x + 1) = \log_3\left(9 \times \frac{1}{3} + 1\right) = \log_3 4 = \log_3 2^2 = \frac{2}{3}$$

پس پاسخ گزینه ۱ می باشد.

## یادآوری

۱. در تابع  $y = \log_a x$  داریم:  $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

$$2. \log_a a^m = \frac{m}{n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$4. a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$5. a^{-m} = \frac{1}{a^m} \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$6. \begin{cases} a^m = a^n \Rightarrow m = n \\ \log m = \log n \Rightarrow m = n \end{cases}$$

سایت کنکور

۱۳۷- شکل زیر نمودار تابع  $y = \log_3 U(x)$  است.  $U(x)$  کدام است؟

۴)  $1 - x$

۳)  $x - 1$

۲)  $(x + 1)^{-1}$

۱)  $x + 1$

پاسخ:

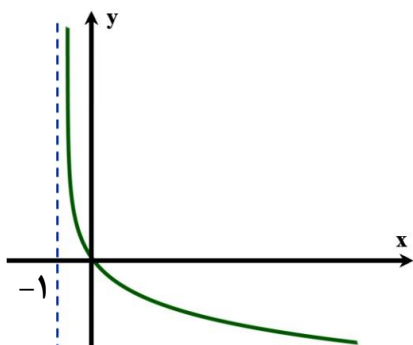
۱- با توجه به نمودار، تابع در نقطه  $x = -1$  مجانب قائم دارد

← رد گزینه ۳ و ۴

۲- با توجه به اینکه  $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$  پس گزینه ۱ هم اشتباه می

باشد.

پس گزینه ۲ جواب سوال می باشد.



- ۳- دقت کنید که در نقطه  $x=0$  مقدار  $y=0$  می باشد یعنی گزینه ۳ نادرست می باشد.
- ۴- از طرفی به ازای  $x$  های مثبت مقدار تابع منفی می باشد، با توجه به خاصیت لگاریتم برای مبنای ۲ باید مقدار پایه کمتر از ۱ و بزرگتر از صفر باشد. یعنی گزینه ای درست است که به ازای هر عدد مثبت مقدار پایه عددی بین ۰ و ۱ باشد و این یعنی فقط گزینه ۲.

۱۳۸- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda + x^2}{|x+2|}; & x \neq -2 \\ a & ; & x = -2 \end{cases}$  در نقطه  $x = -2$  فقط از چپ

پیوسته است؟

۱۲(۴)

۶(۳)

-۶(۲)

-۱۲(۱)

که پاسخ:

با تعیین علامت دامنه داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda + x^2}{x+2} & x > -2 \\ -\frac{\lambda + x^2}{x+2} & x < -2 \\ a & x = -2 \end{cases}$$

پیوستگی چپ نقطه  $x = -2$  یعنی مقادیر کوچکتر از  $-2$ . پس از ضابطه دوم مقدار حد تابع را در این نقطه به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left( -\frac{\lambda + x^2}{x+2} \right) = \frac{\cdot}{\cdot} \Rightarrow \text{HOP} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \left( -\frac{\lambda + x^2}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left( -\frac{3x^2}{1} \right) = -12$$

پس باید مقدار حد با مقدار تابع در نقطه  $x = -2$  برابر بوده و در نتیجه  $a = -12$  می باشد.

دقت کنید که می توان از حذف عامل صفر کننده نیز به جواب حد رسید. (عامل صفر کننده  $x+2$  می باشد)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left( -\frac{\lambda + x^2}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left( -\frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left( -(x^2 - 2x + 4) \right) = -12$$

پاسخ گزینه ۱ می باشد.

۱۳۹- احتمال موفقیت فردی در آزمون اول  $0/7$  و در آزمون دوم  $0/6$  است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم  $0/8$  است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

$0/84$  (۴)

$0/82$  (۳)

$0/76$  (۲)

$0/74$  (۱)

پاسخ:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) = 0/7 \\ P(B) = 0/8 \\ P(B|A) = 0/8 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/8 \times 0/7 = 0/56$$

اگر احتمال موفقیت در آزمون اول  $P(A)$  و احتمال موفقیت در آزمون دوم  $P(B)$  و احتمال موفقیت در آزمون دوم به شرط موفقیت در آزمون اول  $P(B|A)$  باشد:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 + 0/6 - 0/56 = 0/74$$

جواب گزینه ۱ می باشد.

۱۴۰- در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟  
(۱) گروه اول (۲) گروه دوم (۳) یکسان (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد

پاسخ:

با استفاده از مفهوم ضریب تغییرات عملکرد دو گروه را می‌توان مورد بررسی قرار داد (رد گزینه ۴!!!)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CV_1 = \frac{\sqrt{25}}{80} = \frac{5}{80} \\ CV_2 = \frac{\sqrt{16}}{72} = \frac{4}{72} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CV_2}{CV_1} = \frac{4}{72} = \frac{4 \times 80}{5 \times 72} < 1$$

پس چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است یعنی عملکرد اعضای گروه نزدیک به هم بوده و کار عملکرد این گروه بهتر بوده. پس جواب گزینه ۲ می‌باشد.

۱۴۱- تابع با ضابطه  $y = |x+2| + |x-1|$  در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

$$(1, +\infty) \quad (4)$$

$$(-2, 1) \quad (3)$$

$$(-\infty, -1) \quad (2)$$

$$(-\infty, -2) \quad (1)$$

که پاسخ:

با توجه به تعریف تابع قدر مطلق، تابع را تعیین علامت می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ 3 & -2 \leq x < 1 \\ -2x-1 & x < -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ 0 & -2 \leq x < 1 \\ -2 & x < -2 \end{cases}$$



با توجه به مقدار مشتق تابع، در بازه  $(-\infty, -2)$  تابع اکیداً نزولی است. پس گزینه ۱ جواب سوال می باشد.

۱۴۲- مجموع جواب های معادله مثلثاتی  $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$$5\pi \quad (4)$$

$$4\pi \quad (3)$$

$$3\pi \quad (2)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (1)$$

که پاسخ:

$$4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1 \Rightarrow 4 \sin x \times (-\cos x) = -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

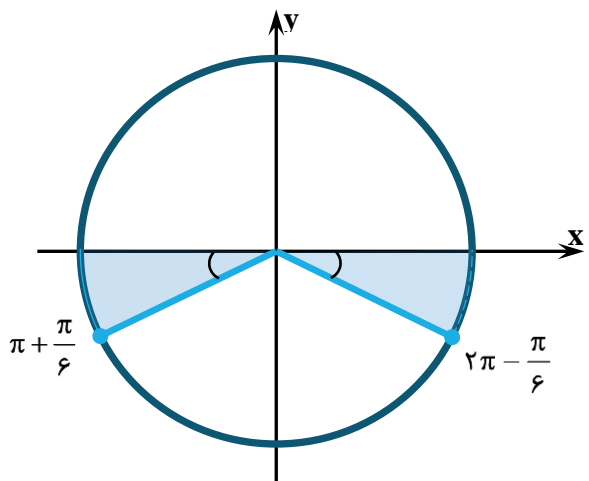
با توجه به اینکه  $0 \leq x \leq 2\pi$  پس  $0 \leq 2x \leq 4\pi$  پس تمام جواب هایی که در بازه  $2x$  هستند رو باید در نظر بگیریم.

**MATH**  
1 + 1 = 2  
MAKES YOUR  
LIFE ADD UP!

پاسخ کاملا حرفه ای سوالات ریاضی رشته تجربی نظام قدیم کنکور ۱۳۹۸

مهندس یاری مدرس برتر ریاضی و فیزیک در آموزشگاه های اهواز

۰۹۳۷ ۱۰۵ ۰۸۸۹



$$\left. \begin{aligned} 2x &= 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x &= 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ 2x &= 4\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x &= 3\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_4 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5\pi$$

پس گزینه ۴ جواب صحیح می باشد.

۱۴۳- حد عبارت  $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$  وقتی  $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

-۶(۴)

-۱۲(۳)

-۱۸(۲)

-۲۴(۱)

که پاسخ:

حد از نوع مبهم  $\frac{0}{0}$  است.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} = -12$$

گزینه ۳ جواب صحیح می باشد.

۱۴۴- در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ ، کدام بیان درست است؟

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  (۴)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  (۳)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  (۲)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  (۱)

که پاسخ:

با توجه به تعریف تابع قدر مطلق، خواهیم داشت:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{2x} & x > 0 \\ \text{تعریف نشده} & x \leq 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه فقط همسایگی راست نقطه صفر تعریف شده پس گزینه ۱ و ۲ نادرست می باشند.  
پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

پس گزینه ۴ پاسخ صحیح می باشد.

۱۴۵- اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  کدام است؟

(۱) -۱      (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $-\frac{1}{4}$       (۴) صفر

که پاسخ:

با توجه به هم ارزی رادیکالی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + \sqrt{4x^2 + x} \left| x + \frac{1}{4} \right| = 2x - 2x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

یادآوری

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c} \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{a \times n} \right| \quad .1$$

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad .2$$

۱۴۶- در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{9}$       (۲)  $\frac{5}{12}$       (۳)  $\frac{7}{12}$       (۴)  $\frac{5}{6}$

که پاسخ:

حد فوق برابر مشتق تابع در نقطه  $x = 4$  است. پس:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) + 2(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{7}{12}$$

پس گزینه ۳ جواب صحیح می باشد.

## یادآوری

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ۱.$$

$$f = \frac{g}{h} \Rightarrow f' = \frac{g' \times h - h' \times g}{h^2} \quad ۲.$$

۱۴۷- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & x < 2 \end{cases}$  روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b

کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & x \geq 2 \\ -2x + a & x < 2 \end{cases}$$

باید هم مشتق پذیری و هم پیوستگی تابع بررسی شود (با توجه به اینکه پارامتر b فقط در خود تابع هست نه مشتق آن).

تابع در هر شاخه پیوسته است و تنها کافی است تا در نقطه ۲ پیوسته و مشتق پذیر باشد.

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow -1 = -4 + a \Rightarrow a = 3$$

برای مشتق خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow 1 = -4 + 6 + b \Rightarrow b = -1$$

برای پیوستگی خواهیم داشت:

پس گزینه ۲ جواب صحیح می باشد.

## یادآوری

۱. تابع  $f(x)$  برای نقطه a پیوسته است هرگاه  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

۲. پیوستگی چپ برای نقطه a زمانی وجود دارد که  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

۳. پیوستگی راست برای نقطه a زمانی وجود دارد که  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

۴. تابع در نقطه a مشتق پذیر است زمانی که هم تابع در این نقطه پیوسته باشد و هم در این نقطه مشتق راست و چپ داشته و با هم برابر باشند.



۱۴۸- اگر  $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  و  $(f \circ g)'(2) = 6$  باشد،  $f'(5)$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳) ۲      (۴) ۳

پاسخ:

طبق فرضیات سوال خواهیم داشت:

$$(f(g(x)))' = g'(x) \times f'(g(x)) \Rightarrow (f(g(2)))' = g'(2) \times f'(g(2))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(2) = 5 \\ g'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(2) = \frac{-3}{(2-1)^2} = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 \times f'(5) = 6 \Rightarrow f'(5) = -2$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.

۱۴۹- در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه ای در  $x=2$ ، از آهنگ تغییر متوسط

در بازه  $[1, 4]$ ، کدام است؟

- (۱) ۰/۲۵      (۲) ۰/۵      (۳) ۰/۴۵      (۴) ۰/۷۵

پاسخ:

آهنگ تغییر لحظه ای همان مشتق و آهنگ تغییر متوسط تغییرات تابع به تغییرات متغیر مستقل می باشد. پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{9}{4} \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{11}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \frac{9}{4} - \frac{11}{4} \right| = 0.5$$

پس پاسخ صحیح گزینه ۲ می باشد.

۱۵۰- در تابع با ضابطه  $f(x) = x|x-4|$  فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$       (۲)  $2\sqrt{2}$       (۳)  $3\sqrt{2}$       (۴)  $2\sqrt{5}$

پاسخ:

روش اول:

طبق تعریف تابع قدرمطلق خواهیم داشت:

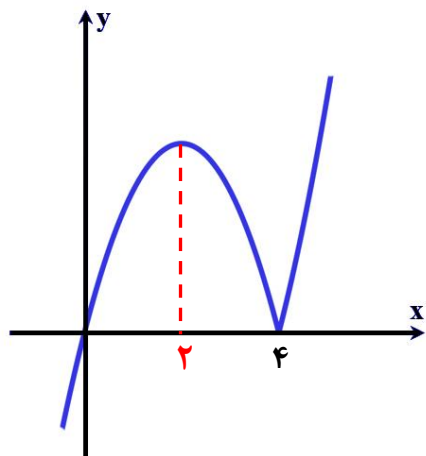
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases} \Rightarrow f' = \begin{cases} 2x - 4 & x \geq 4 \\ -2x + 4 & x < 4 \end{cases} \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow x = 2, f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = 4$$

نقاط بحرانی تابع نقاط به طول ۴ و ۲ می باشد. پس فاصله دو نقطه  $(4,0)$  ,  $(2,4)$  را به دست می آوریم.

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

**روش دوم:** رسم نمودار

نمودار تابع به شکل روبرو است.



۱- نقطه  $x=4$  و  $x=0$  ریشه های تابع هستند.

۲- طول نقطه ماکسیمم نسبی میانگین طول ریشه

های تابع می باشد (چرا؟)

۳- نقطه به طول ۴ می نیمم نسبی و نقطه به طول ۲

ماکسیمم نسبی است.

۴- پس فاصله دو نقطه  $(4,0)$  ,  $(2,4)$  برابر خواسته

سوال است.

پس جواب سوال **گزینه ۴** می باشد.

**۱۵۱-** بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و راس چهارم آن بر

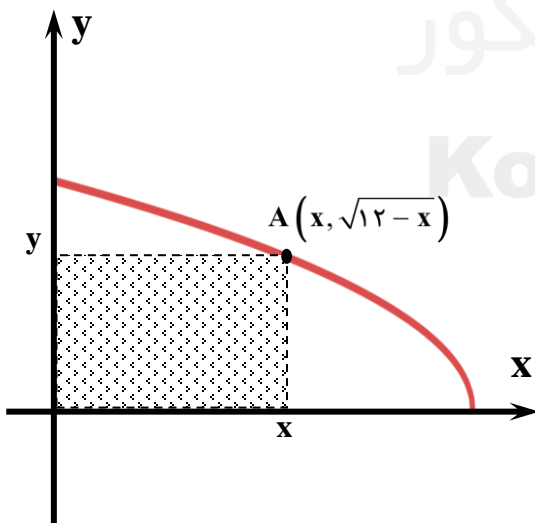
روی منحنی به معادله  $y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

$8\sqrt{3}$  (۲)

$8\sqrt{2}$  (۱)



**پاسخ:**

با توجه به شکل روبرو برای تابع  $S(x)$  خواهیم

داشت:

$$S(x) = x \times f(x) = x\sqrt{12-x}$$

برای اینکه ماکسیمم مساحت را داشته باشیم باید از

تابع مساحت مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم.

توجه داشته باشید که طول مستطیل روبرو برابر  $x$  و

عرض آن برابر  $y$  خواهد بود. مساحت مستطیل برابر

خواهد بود با طول در عرض آن.

$$S'(x) = 1 \times \sqrt{12-x} - x \times \frac{1}{2} (12-x)^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow (\sqrt{12-x})^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow 12-x = \frac{x}{2} \Rightarrow x=8 \Rightarrow f(8) = 2$$

مقدار  $x$  برابر ۸ و مقدار  $y$  متناظر آن برابر ۲ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$S(x) = 2 \times 8 = 16$$

پس جواب صحیح گزینه ۳ می باشد.

۱۵۲- در یک بیضی کانونهای  $(2, -1)$  و  $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز بیضی،

کدام است؟

۰/۸ (۴)

۰/۷۵ (۳)

۰/۶۴ (۲)

۰/۶ (۱)

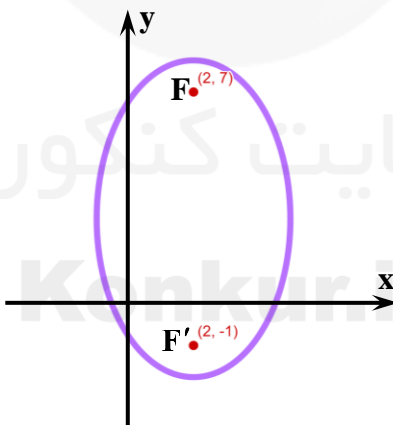
کپاسخ:

با توجه به داده های مسئله بیضی قائم است و با استفاده از داده های مسئله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F(h, k \pm c) \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow |7 - (-1)| = 8 = 2c \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \Rightarrow a = 5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0/8$$

شکل بیضی به صورت نمودار زیر است و ضابطه آن برابر خواهد بود با:



$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

پس جواب صحیح گزینه ۴ می باشد.

یادآوری

۱- معادله بیضی قائم به صورت  $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$  می باشد.

مختصات کانون ها  $(h, k \pm c)$ ، و مختصات رئوس آن  $(h, k \pm a)$

۲- معادله بیضی افقی به صورت  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  می باشد.

۳- مختصات کانون ها  $(h \pm c, k)$ ، و مختصات رئوس آن  $(h \pm a, k)$

۱۵۳- نقطه A به طول ۳- بر منحنی به معادله  $y = \frac{x^2}{x-1}$  واقع است. فاصله این نقطه از خط مجانب

مایل آن چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{1}{5}$  (۳)

$\frac{1}{6}$  (۲)

$\frac{1}{8}$  (۱)

پاسخ:

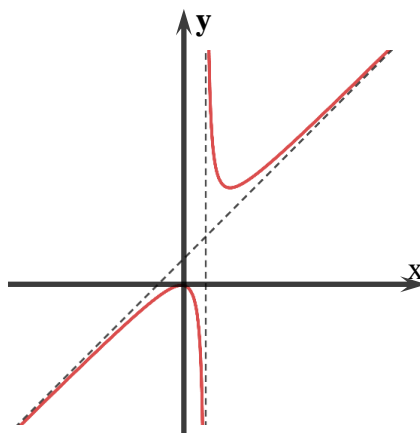
با ساده کردن کسر خواهیم داشت:

$$y = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = x+1$$

پس خط مجانب مایل تابع برابر خواهد بود با  $y = x+1$  از طرفی نقطه A به طول ۳- طبق فرض مسئله

در تابع  $y = \frac{x^2}{x-1}$  صدق می کند. پس  $f(-3) = \frac{(-3)^2}{-3-1} = -\frac{9}{4}$ . پس فاصله نقطه  $A(-3, -\frac{9}{4})$  از خط

$y = x+1$  برابر خواهد بود با:



$$\left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ A(-3, -\frac{9}{4}) \end{array} \right\} \Rightarrow AB = \frac{|-\frac{9}{4} - (-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{8} \times \sqrt{2}$$

پس گزینه صحیح **گزینه شماره ۱** می باشد.

## یادآوری

۱- فاصله نقطه  $A(x, y)$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$AB = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۲- خط مجانب مایل تابع  $f$  اگر به صورت  $y = mx + h$  باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{x} = m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f - mx) = h \end{array} \right.$$

۱۵۴- در سهمی به معادله  $\Delta y^2 - 10y + 4x - 3 = 0$ ، فاصله کانون تا نقطه تلاقی سهمی با محور  $x$  ها،

کدام است؟

۱/۴۵ (۴)

۱/۳ (۳)

۱/۲۵ (۲)

۱/۲ (۱)

پاسخ:

با ساده کردن عبارت  $\Delta y^2 - 10y + 4x - 3 = 0$ ، آن را به فرم استاندارد در می آوریم:

$$\Delta y^2 - 10y + 4x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta(y^2 - 2y + 1) - 5 = -4x + 3 \Rightarrow \Delta(y-1)^2 = -4x + 8 \Rightarrow (y-1)^2 = -\frac{4}{\Delta}(x-2)$$

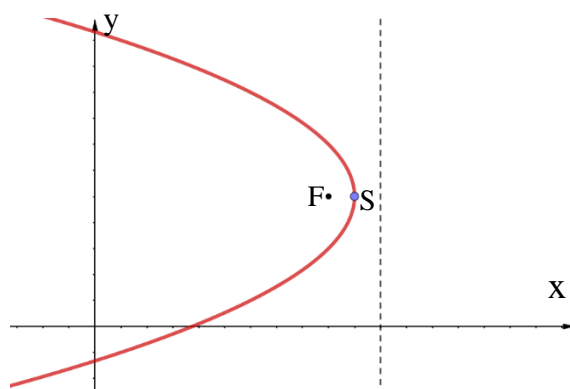
$$\left\{ \begin{array}{l} -4p = -\frac{4}{\Delta} \Rightarrow p = \frac{1}{\Delta} \\ S = (h, k) = (2, 1) \\ F = (h - p, k) = (2 - \frac{1}{\Delta}, 1) = (\frac{9}{\Delta}, 1) \\ x = h + p = 2 + \frac{1}{\Delta} = \frac{11}{\Delta} \end{array} \right.$$

نقطه تلاقی سهمی با محور  $x$  ها یعنی  $y = 0$ . پس داریم:

پاسخ کاملا حرفه ای سوالات ریاضی رشته تجربی نظام قدیم کنکور ۱۳۹۸

مهندس یاری مدرس برتر ریاضی و فیزیک در آموزشگاه های اهواز

۰۹۳۷ ۱۰۵ ۰۸۸۹



$$y = 0 \Rightarrow (0 - 0)^2 = -\frac{p}{4}(x - 2) \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

پس کافیت تا فاصله دو نقطه کانون و نقطه  $(\frac{3}{4}, 0)$  را به دست آوریم:

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (\frac{9}{4} - \frac{3}{4})^2} = \frac{29}{20} = \frac{30 - 1}{20} = 1/5 - 0/0.5 = 1/45$$

پس جواب صحیح گزینه شماره ۴ می باشد.

۱۵۵- در شکل زیر، مساحت ناحیه سایه زده، کدام است؟

۴ (۴)

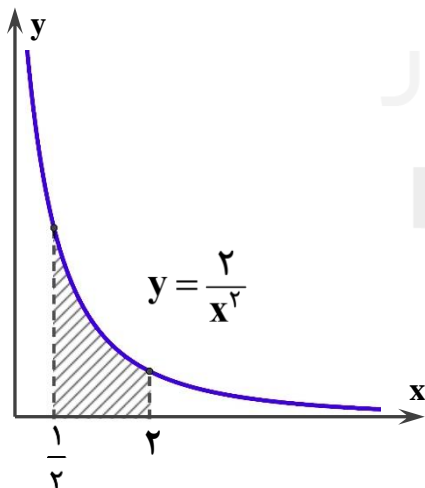
۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

پاسخ:

با توجه به معادله تابع خواهیم داشت:



$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 2x^{-2} dx = 2 \times \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -2x^{-1} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -2 \left( 2^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \right) = -2 \left( \frac{1}{2} - 2 \right) = 3$$

پس گزینه ۲ جواب صحیح می باشد.