هندسه تحلیلی و جبر خطی

تالیف:

مهندس خانعلی پور

لنگـــــــــــرود ، خیابان شریعتی

روبروی مسجد جامع، کوچه خواجه نصیر

مجتمع نیکدوست، آموزشـــگاه هاتف

شماره تمـــــاس: ۰۹۱۱۸۴۱۱۵۹۱

◄ معرفی ماتریس:

ماتریس، آرایشی از اعداد حقیقی است که در m سطر و n ستون قرار گرفته، عدد $m\times n$ را مرتبه یا اندازه و هر یک از اعداد ماتریس را یک درایه یا عضو ماتریس می‌نامیم. برای نمایش ماتریس‌ها معمولاً از حروف بزرگ A,B,C و ... استفاده می‌شود.

درایه‌ها را عموماً با حروف کوچک و اندیس‌دار نظیر $a_{ij}, b_{ij}, \ldots$ نمایش می‌دهند.

اندیس اول i، سطر و اندیس دوم j، ستون آن درایه را مشخص می‌کند و می‌توان نوشت:

$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ که در آن $i=1,2$ ، $j=1,2,3$ دارای دو سطر و سه ستون است و در این ماتریس $a_{12}=-1, a_{23}=1$ می‌باشد.

مثال: ماتریس $[3i+2j]_{2\times 3}$ را با درایه های آن مشخص کنید.

مثال: ماتریس $A=\left[\,2i^2+j\,\right]_{2\times 2}$ را مشخص کنید.

◄ انواع ماتریس‌ها:

☑ ماتریس سطری: ماتریسی است که فقط یک سطر داشته باشد. $(1\times n)$ مانند: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

☑ ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط یک ستون داشته باشد. $(n\times 1)$ مانند: $B=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

☑ ماتریس صفر: تمام درایه‌های آن صفر است و اندازه‌ی آن $m\times n$ می‌باشد و به صورت $\bar{O}_{m\times n}$ یا $\bar{O}$ نمایش داده می‌شود. $O_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یا $O_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

☑ ماتریس مربع: ماتریسی است که تعداد سطر و ستون آن برابر باشد $(n\times n)$ درایه‌های $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{n\times n}$ را درایه‌های روی قطر اصلی می‌نامند.

تذکر: ماتریس 1×1، ماتریسی است که فقط یک عضو داشته باشد.

📖 **نکته:** درایه‌های بالا قطر اصلی $i<j$ — درایه‌های روی قطر اصلی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

درایه‌های زیر قطر اصلی $i>j$

ماتریس $B=[b_{ij}]_{2\times 3}$ به صورت زیر معرفی شده است: مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟

$$b_{ij}=\begin{cases} 3i-2 & i<j \\ -i^2+2j & i\geq j \end{cases}$$

$b_{1,1}=-(1)^2+2(1)=1 \qquad b_{1,2}=3(1)-2=1 \qquad b_{1,3}=3(1)-2=1$

$b_{2,1}=-(2)^2+2(1)=-2 \qquad b_{2,2}=-(2)^2+2(2)=0 \qquad b_{2,3}=3(2)-2=4$

در نتیجه، ماتریس به صورت $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ بوده و مجموع درایه‌ها برابر است با: $1+1+1-2+0+4=5$

در ماتریس مربعی E از مرتبه‌ی ۳، درایه‌ی سطر a و ستون b از رابطه‌ی b^a بدست می‌آید. اختلاف مجموع درایه های دو قطر آن کدام است؟

طبق فرض، ماتریس $E=[e_{ij}]$ با ضابطه‌ی $e_{ij}=j^i$ از مرتبه‌ی ۳×۳ است. جمع درایه‌های قطر اصلی را تعیین می‌کنیم:

$$e_{۱۱}=۱^۱=۱,\quad e_{۲۲}=۲^۲=۴,\quad e_{۳۳}=۳^۳=۲۷ \quad\Rightarrow\quad ۱+۴+۲۷=۳۲$$

جمع درایه‌های قطر فرعی:

$$e_{۱۳}=۳^۱=۳,\quad e_{۲۲}=۲^۲=۴,\quad e_{۳۱}=۱^۳=۱ \quad\Rightarrow\quad ۳+۴+۱=۸$$

اختلاف آن‌ها برابر $۳۲-۸=۲۴$ است.

◄ انواع ماتریس‌های مربع:

☑ **ماتریس بالا مثلثی:** اگر در ماتریس مربع $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$، تمام عناصر زیر قطر اصلی صفر باشند، آنگاه A را بالا مثلثی گویند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \forall a_{ij}, i>j \to a_{ij}=۰$$

☑ **ماتریس پایین مثلثی:** مربع A ماتریس پایین مثلثی نامیده می‌شود، هرگاه تمام عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \forall a_{ij}, i<j \to a_{ij}=۰$$

☑ **ماتریس قطری:** ماتریس مربع $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ را قطری گویند هرگاه تمام عناصر بالا و پایین قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad \forall a_{ij}, i\neq j \to a_{ij}=۰$$

☑ **ماتریس اسکالر:** نوعی ماتریس قطری است که همه عناصر روی قطر اصلی آن مساوی باشند.

$$۲I=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

☑ **ماتریس همانی (واحد):** (I_n) نوعی ماتریس قطری است که تمام عناصر روی قطر اصلی آن عدد یک باشد.

مانند:

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

📖 **نکته: اثر ماتریس مربع:** اثر ماتریس A را که با $tr(A)$ نمایش داده می‌شود به فرم زیر می‌نویسیم:

$$tr(A)=a_{۱۱}+a_{۲۲}+...+a_{nn}$$

☺ **تست ۲ :** مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $[i+j]_{n\times n}$ برابر ۵۶ است n کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

◄ برابری دو ماتریس:

گوییم دو ماتریس A,B ماتریس‌های مساوی هستند، هرگاه اولا هم مرتبه باشند و ثانیا درایه های نظیر به نظیر آنها برابر باشند.

☺ **تست ۳ :** اگر $A=[i+ij]_{۳\times۳}$ و $B=\begin{pmatrix} m & ۳ & ۴ \\ ۴ & n-۱ & ۸ \\ ۶ & ۹ & k+۱ \end{pmatrix}$ بطوریکه $A=B$ آنگاه حاصل $m+n+k$ چقدر است؟

۱) ۱۶   ۲) ۱۷   ۳) ۱۹   ۴) ۲۰

پاسخ:

◄ **جمع و تفریق ماتریس‌ها:**

برای جمع یا تفریق دو ماتریس هم مرتبه کافی است درایه‌های نظیر را با یکدیگر جمع و یا تفریق کنیم.

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها:

۱) $A+B=B+A$ ۲) $(A+B)+C=A+(B+C)$

۳) $A+\bar{O}=A$ ۴) $A+(-A)=A-A=\bar{O}$

۵) $A=B \leftrightarrow A+C=B+C$

۶) $(-A)$ را وارون جمعی یا قرینه‌ی A گویند.

۷) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ ۸) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta B$

۹) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

☺تست ۴: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-1 & n\\ 0 & m\end{bmatrix}$ ، $2A+B=I$ باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۷- ۳) ۳- ۴) ۴

پاسخ:

☺تست ۵: اگر $A+2B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ، $A-B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{7}{3}$ ۳) $-\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

◄ **حاصل‌ضرب ماتریس ها:**

اگر ماتریس‌های $A_{m\times n}$ ، $B_{p\times q}$ مفروض باشند، در این صورت زمانی می‌توانیم ماتریس A را در ماتریس B ضرب کنیم که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس دوم یعنی B برابر باشند یعنی: $n=p$.

$$A_{m\times n}\times B_{n\times q}=C_{m\times q}$$

حال برای ضرب کردن کافی است هر یک از سطرهای ماتریس اول را در ستون های ماتریس دوم ضرب کنیم.

☺تست ۶: اگر $A=[aij]_{2\times 4}$ ، $B=[bij]_{4\times 4}$ ، $C=[cij]_{2\times 2}$ کدام ضرب قابل تعریف است:

۱) ABC ۲) CAB ۳) BAC ۴) BCA

پاسخ:

☺تست ۷: اگر $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ بطوریکه $AB=C$ ، آنگاه درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون سوم از ماتریس C کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ:

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها:

۱) ضرب دو ماتریس، خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۲) ضرب ماتریس‌ها نسبت به عمل جمع هم از راست و هم از چپ خاصیت توزیع‌پذیری دارند.

$A(B+C)=AB+AC$ توزیع‌پذیری از چپ

$(B+C)A=BA+CA$ توزیع‌پذیری از راست

۳) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

اگر ماتریس‌های C,B,A از مرتبه‌ای $p\times q, n\times p, m\times n$ باشند. آنگاه:

$A(BC)=(AB)C$

۴) قانون حذف برقرار نیست.

$AB=AC \nRightarrow B=C$

۵) عضو بی‌اثر ضرب، وجود دارد.

$AI=IA=A$

۶) اگر ضرب دو ماتریس صفر شود الزاما یکی از آنها صفر نیست.

یعنی از ضرب دو ماتریس غیر صفر ممکن است ماتریس صفر به دست آید.

۷) خواصی که در توان‌ها صادق است را می‌توانیم برای ماتریس‌ها نیز استفاده کنیم.

مثلاً اگر در ضرب توان‌ها، پایه‌ها مساوی و نماها متفاوت باشند یکی از پایه‌ها را نوشته و نماها را با هم جمع می‌کنیم و یا به توان رساندن یک عبارت تواندار و . . .

۸) تعویض‌پذیری (جابجایی‌پذیری) در ماتریس‌ها:

اگر ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی داشته باشد، گوییم دو ماتریس تعویض‌پذیر یا جابجایی‌پذیرند.

کاربرد: اگر ضرب دو ماتریس B,A دارای خاصیت جابجایی باشد تمام اتحاد برای آن‌ها صادق است: $(AB=BA)$

۱) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

۲) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

همچنین تمامی اتحادها برای دو ماتریس I,A داریم:

۱) $(A+I)^2=A^2+2AI+I^2=A^2+2A+I$

۲) $(A-I)^2=A^2-2AI+I^2=A^2-2A+I$

☺**تست۹:** اگر **A** و **B** دو ماتریس بطوریکه $AB=-BA$، آنگاه $(A-B)^2$ برابر است با:

۱) A^2+B^2 ۲) $A^2-2BA+B^2$ ۳) A^2-B^2 ۴) $A^2+2BA+B^2$

☺**تست۱۰:** اگر **A** و **B** دو ماتریس بطوریکه $A-B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ و $A^2=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ و $B^2=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ آنگاه ماتریس $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -8 & -4\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 4\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

تست ۱۱: اگر $A=\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۲\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ بطوریکه $AB=BA$ آنگاه حاصل $\underline{b+c}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۴-

روش اول:

$$AB=BA\Rightarrow\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۲\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}۲a-c & ۲b-d\\ a+۲c & b+۲d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲a+b & -a+۲b\\ ۲c+d & -c+۲d\end{pmatrix}\Rightarrow ۲a-c=۲a+b\Rightarrow -c=b\Rightarrow \underline{b+c=۰}$$

روش دوم:

نکته: ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}m & n\\ p & q\end{bmatrix}$ دارای خاصیت جابجایی است و اگر و فقط اگر دو بردار زیر موازی باشند:
$(a-d,b,c)\|(m-q,n,p)$

پس: $(a-d,b,c)\|(۲-۲,-۱,۱)\Rightarrow\dfrac{b}{-۱}=\dfrac{c}{۱}\Rightarrow b+c=۰$

تست ۱۲: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $[x\quad ۴\quad -۱]\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۴\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: ماتریس‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$[x\quad ۴\quad -۱]_{۱\times۳}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۴\end{bmatrix}_{۳\times۳}\begin{bmatrix}x\\ ۴\\ -۱\end{bmatrix}_{۳\times۱}=۰$$

$$[۲x+۴\quad x-۲\quad ۴]\begin{bmatrix}x\\ ۴\\ -۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow x(۲x+۴)+۴(x-۲)-۴=۰$$

$$\to ۲x^{۲}+۴x+۴x-۸-۴=۰\Rightarrow ۲x^{۲}+۸x-۱۲=۰\to \text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}=-۴$$

تست ۸: اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۳ & ۴ & ۱\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۰ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & -۱\end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix}۴ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۱ & -۱\end{pmatrix}$، آنگاه درایه‌ی واقع در سطر سوم و ستون اول از ماتریس (ABC) کدام است؟

۱) ۵۳ ۲) ۵۲ ۳) ۵۱ ۴) ۵۰

پاسخ:

نکته : برای بدست آوردن سطر iام ستون jام ماتریس ABC ، کافیست سطر iام A را در کل ماتریس B ضرب کنیم سپس حاصل را در ستون jام ماتریس C ضرب کنیم

اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\۰&۳&-۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱&۰&۴\\۲&۵&۹\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X را از معادله‌ی $۳A+\frac{X}{۲}=۲B$ بدست آورید.

$$۳A+\frac{X}{۲}=۲B \rightarrow \frac{X}{۲}=۲B-۳A \xrightarrow{\times ۲} X=۴B-۶A$$

$$\rightarrow X=۴\begin{bmatrix}-۱&۰&۴\\۲&۵&۹\end{bmatrix}-۶\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\۰&۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴-۶&۰-۱۲&۱۶+۶\\۸-۰&۲۰-۱۸&۳۶+۱۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-۱۰&-۱۲&۲۲\\۸&۲&۴۸\end{bmatrix}$$

اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۴&-۲\\۱&۲&۰\\۲&۱&-۷\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳&۶&-۳\\۱&-۱&۰\\۳&۰&-۳\end{bmatrix}$، آنگاه در ماتریس $I-۳A+۲B$ کدام توصیف درست است؟

❶ درایه‌های زیر قطر اصلی همگی صفرند. ❷ ماتریس قطری است.

❸ درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفرند. ❹ ماتریس صفر است.

ماتریس همانی هم مرتبه‌ی A و B را در عبارت بالا قرار می‌دهیم:

$$-۳A+۲B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix}۰&۴&-۲\\۱&۲&۰\\۲&۱&-۷\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۳&۶&-۳\\۱&-۱&۰\\۳&۰&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-۰+۶&۰-۱۲+۱۲&۰+۶-۶\\۰-۳+۲&۱-۶-۲&۰-۰+۰\\۰-۶+۶&۰-۳+۰&۱+۲۱-۶\end{bmatrix}$$

ماتریس جواب پس از ساده شدن به صورت $\begin{bmatrix}۷&۰&۰\\-۱&-۷&۰\\۰&-۳&۱۶\end{bmatrix}$ خواهد بود.

در ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲&a-b\\-۳&۲b\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰&۳\\۱&۲\end{bmatrix}$، می‌دانیم $AB=BA$ است. مقدار $۲b-a$ کدام است؟

❶ -۷ ❷ -۱۵ ❸ ۱۵ ❹ ۷

ماتریس‌های AB و BA را محاسبه کرده و برابر قرار می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲&a-b\\-۳&۲b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۳\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰+a-b&۶+۲a-۲b\\۰+۲b&-۹+۴b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b&۶+۲a-۲b\\۲b&-۹+۴b\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۰&۳\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&a-b\\-۳&۲b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰-۹&۰+۶b\\۲-۶&a-b+۴b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹&۶b\\-۴&a+۳b\end{bmatrix}$$

در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}۲b=-۴ \rightarrow b=-۲\\ a-b=-۹ \xrightarrow{b=-۲} a=-۱۱\end{cases} \Rightarrow ۲b-a=-۴-(-۱۱)=۷$$

تست: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&a\\۱&۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳&۶&۱\\۱&b&-۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر در ماتریس AB درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

❶ -۸ ❷ -۴ ❸ ۴ ❹ ۸

$$c_{۲,۱}=\begin{bmatrix}۲&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}=-۶+a=۰ \Rightarrow a=۶ \qquad c_{۳,۲}=\begin{bmatrix}۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶\\b\end{bmatrix}=۶+۳b=۰ \Rightarrow b=-۲$$

در نتیجه $a+b=۶-۲=۴$ است.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نیست. $A\times B\neq B\times A$

۲) ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع و تفریق ماتریس‌ها توزیع‌پذیر است. $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

۳) ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. $A(BC)=(AB)C$

۴) ماتریس I_n را عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی می‌نامیم. $AI=IA=A$

۵) اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که حداقل یکی از دو ماتریس، ماتریس صفر است.

مثال:
$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2 & 2-2\\ -6+6 & -6+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

۶) قاعده حذف در حالت کلی در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. $AB=AC\not\Rightarrow B=C$

به طور مثال داریم:
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \text{ولی}\quad \begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 0\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

۷) اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:
$$A^0=I, A^1=A, A^2=A\times A, A^3=A^2\times A=A\times A^2,\dots, A^n=A^{n-1}\times A=A\times A^{n-1}$$

همان‌طور که قبلاً گفته شده، ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد، مگر در موارد زیر:

۱) $AI=IA=A$ (ضرب ماتریس واحد (همانی) در هر ماتریس مربعی دیگر)

۲) $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ (ضرب هر ماتریس مربعی در وارون آن ماتریس)

۳) $A^mA^n=A^nA^m$ (ضرب ۲ توان متفاوت از یک ماتریس مربعی)

۴) ضرب دو ماتریس قطری هم مرتبه:
$$A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a' & 0 & 0\\ 0 & b' & 0\\ 0 & 0 & c'\end{bmatrix}\Rightarrow AB=BA=\begin{bmatrix}aa' & 0 & 0\\ 0 & bb' & 0\\ 0 & 0 & cc'\end{bmatrix}$$

۵) دو ماتریس مربعی 2×2 در حالت‌های زیر خاصیت جابجایی دارند:

الف) $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}c & d\\ d & c\end{bmatrix}\Rightarrow AB=BA$

ب) $A=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}c & d\\ -d & c\end{bmatrix}\Rightarrow AB=BA$

و در حالت کلی هرگاه نسبت تفاضل اعداد قطر اصلی با نسبت اعداد قطر فرعی برابر باشد:

پ) $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}$ و $\dfrac{a-d}{a'-d'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}\Rightarrow AB=BA$

اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه اتحادهای جبری در مورد آن‌ها صادق است. به جدول زیر توجه کنید:

	A و B تعویض‌پذیرند	A و B مربعی هم مرتبه‌اند
$(A+B)^2$	$A^2+2AB+B^2$	$A^2+AB+BA+B^2$
$(A+B)^3$	$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$	$A^3+B^3+A^2B+AB^2+ABA+B^2A+BAB+BA^2$
$(A+B)(A-B)$	A^2-B^2	$A^2-AB+BA-B^2$
$(AB)^2$	A^2B^2	$ABAB$

تست های آموزشی

سوال: اگر $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه های $A+A^2+A^3+A^4$ را به دست آورید.

پاسخ: چون A مثلثی اکید از مرتبه‌ی ۳ است پس $A^3=\bar{0}$ و در نتیجه $A^4=\bar{0}$ بنابراین کافیست A^2 را محاسبه نمائیم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A+A^2+A^3+A^4=A+A^2=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\rightarrow \text{مجموع درایه ها}=2+1+1=4$$

نکته: می دانیم اگر در ماتریس مثلثی درایه های قطر اصلی نیز صفر باشند، ماتریس مثلثی اکید است و اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس مثلثی اکید باشد آن گاه A پوچ توان از مرتبه‌ی n است (یعنی A^n و توان های بالاتر از n حتماً $\bar{0}$ هستند).

اگر $B=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۲\end{bmatrix}$ و A دو ماتریس با این خاصیت باشند که ضربشان جابجایی است، آنگاه مجموع درایه‌های قطر فرعی A کدام است؟

❶ جواب‌های گوناگون دارد. ❷ ۱ ❸ -۱ ❹ ۰

ماتریس A را به صورت مجهول $\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$ نوشته و شرط $AB=BA$ را بکار می‌بریم:

$$\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۲x+y&-x+۲y\\۲z+t&-z+۲t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x-z&۲y-t\\x+۲z&y+۲t\end{bmatrix}$$

اکنون کافی است برابری درایه‌های اول دو ماتریس را بنویسیم:

$$۲x+y=۲x-z\ \rightarrow\ y-z=۰\ \Rightarrow\ y+z=۰$$

اگر A و B ماتریس‌هایی از مرتبه‌ی دو بوده و $AB=\begin{bmatrix}۱&r-۱\\۰&s+۱\end{bmatrix}$ باشد و بعلاوه $A\begin{bmatrix}-۳&۲\\۰&۱\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}۲&-۲\\۰&-۲\end{bmatrix}B$ برابر $\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&۳\end{bmatrix}$ باشد. (r,s) کدام است؟

❶ $(۱,۴)$ ❷ $(-۱,۴)$ ❸ $(-۱,-۴)$ ❹ $(۱,-۴)$

طبق خاصیت توزیع پذیری داریم: $A(C+D)B=ACB+ADB$. بنابراین:

$$A\begin{bmatrix}-۳&۲\\۰&۱\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}۲&-۲\\۰&-۲\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}-۳&۲\\۰&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&-۲\\۰&-۲\end{bmatrix}\right)B=A\underbrace{\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}}_{=-I}B=-AIB=-AB$$

در نتیجه باید داشته باشیم:

$$-\begin{bmatrix}۱&r-۱\\۰&s+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(-)}\begin{bmatrix}۱&r-۱\\۰&s+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}r-۱=۰\ \rightarrow\ r=۱\\ s+۱=-۳\ \rightarrow\ s=-۴\end{cases}$$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & x \\ -۱ & a \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^۲=A$، آنگاه مقدار ax کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۲ ❸ -۲ ❹ -۴

ماتریس $A^۲$ را تعیین کرده و با A برابر قرار می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & x \\ -۱ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & x \\ -۱ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴-x & ۲x+ax \\ -۲-a & -x+a^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & x \\ -۱ & a \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} ۴-x=۲ \\ -۲-a=-۱ \end{cases}\Rightarrow x=۲\ ,\ a=-۱$$

بنابراین $ax=-۲$ است.

اگر A ماتریس مربعی مرتبه‌ی n و $B=I_n-A$ باشد، ماتریس $A^۲+AB+B$ همواره برابر کدام است؟

❶ B ❷ A ❸ AB ❹ I_n

نتیجه‌ی ساده‌ای از فرض، جواب را به آسانی مشخص می‌کند: $B=I_n-A \Rightarrow A+B=I_n$

اکنون حاصل ماتریس داده شده: $A^۲+AB+B=A(A+B)+B=AI_n+B=A+B=I_n$

هرگاه A ماتریسی مربعی باشد، درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ از ضرب سطرها در ستون هم‌شماره‌ی خود حاصل می‌شوند. دقیق‌تر:

اولین درایه‌ی قطری در $A^۲$ = ضرب سطر اول در ستون اول A

دومین درایه‌ی قطری در $A^۲$ = ضرب سطر دوم در ستون دوم A

با ادامه، تمام درایه‌های قطر اصلی معلوم خواهند شد.

حتی در ضرب AB، اگر ماتریس جواب مربعی باشد، درایه‌های قطری از ضرب سطرهای A در ستون‌های هم‌شماره در ماتریس B حاصل می‌شوند.

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^۲$ کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۷)

❶ ۱۶ ❷ ۱۸ ❸ ۲۰ ❹ ۲۴

ماتریس را تشکیل می‌دهیم:

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$$

طبق نکته‌ی قبل: $C^۲$ **اولین درایه قطری** $=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۶} \\ \frac{۱}{۲۴} \end{bmatrix}=۱+۱+۱+۱=۴$

به روش مشابه، هر سه درایه‌ی دیگر هم برابر ۴ خواهد شد و مجموع آن‌ها برابر $۴\times۴=۱۶$ است.

اگر A، B و C ماتریس‌هایی از مرتبه‌ی دو بوده، $AB=\begin{bmatrix}6&-1\\0&1\end{bmatrix}$، $BC=\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}$ و $CA=\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس ABC کدام می‌تواند باشد؟

❶ $\begin{bmatrix}6&2\\3&1\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}6&3\\-2&2\end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix}3&-4\\3&-2\end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix}3&0\\4&-3\end{bmatrix}$

با قدری دقت می‌فهمیم که ماتریس $(ABC)^2$ قابل محاسبه است:

$$(AB)(CA)(BC)=\underbrace{\begin{bmatrix}6&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}\rightarrow ABCABC=\begin{bmatrix}7&2\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}$$

فقط در گزینه‌ی سوم اگر ماتریس در خودش ضرب شود، اولین درایه -3 بدست می‌آید. $\Rightarrow\ (ABC)^2=\begin{bmatrix}-3&\cdots\\\cdots&\cdots\end{bmatrix}$

توجه: همیشه محاسبات را به اندازه‌ی ضرورت انجام دهید!

اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{100}-A^{99}$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ ❹ $\overline{O}$

چون ماتریس A قطری نیست، نمی‌توان نکته‌ی قبل را بکار برد. بنابراین A^2 را تعیین می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

در نتیجه: $A^{100}=(A^2)^{50}=I^{50}=I$ و $A^{99}=A^{98}\times A=(A^2)^{49}A=I^{49}A=IA=A$. پس:

$$A^{100}-A^{99}=I-A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

توان‌رسانی ماتریس دلخواه:

برای محاسبه‌ی توان‌های یک ماتریس مربعی A، ماتریس‌های A^2، A^3 و ... را تا آنجا تعیین می‌کنیم که:

- به ماتریس همانی I یا ماتریسی بر حسب آن برسیم؛ یا
- یک نظم در توان‌های ماتریس مشاهده شود.

سپس می‌توان هر توانی از A را محاسبه نمود.

توجه کنید:

- اگر r یک عدد و A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه: $(rA)^n=r^nA^n$.

  بویژه:

  n فرد باشد: $(-A)^n=-A^n$ و **n زوج باشد:** $(-A)^n=A^n$

- ولی اتحاد $(AB)^n=A^nB^n$ نادرست بوده و فقط با شرط $AB=BA$ برقرار است.

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌ها در ماتریس A^4 کدام است؟

❶ ۸۱ ❷ ۲۷ ❸ ۲۴۳ ❹ ۹

طبق نکته‌ی قبل، ماتریس A^2 را تعیین می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1+1 & -1-1-1 & 1+1+1\\ -1-1-1 & 1+1+1 & -1-1-1\\ 1+1+1 & -1-1-1 & 1+1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 3\\ -3 & 3 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}=3A$$

در نتیجه:

$A^4=(A^2)^2=(3A)^2=9A^2=9\times 3A=27A$ و مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با:

$27(1-1+1-1+1-1+1-1+1)=27$

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس A^{100} حاصل جمع درایه‌ها کدام است؟

❶ ۳۰۳ ❷ ۱۰۳ ❸ ۲۰۰ ❹ ۲۰۳

توان‌های بالاتر ماتریس را حساب می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت:

$$A^{100}=\begin{bmatrix}1 & 100 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow 1+100+1+1=103$$

استفاده از اتحادها در ماتریس:

در صورتی که ماتریس‌های مربعی A و B طوری داده شوند که $AB=BA$ باشد، آنگاه تمام اتحادها در مورد این دو ماتریس برقرار خواهند بود.

بویژه:

چون $AI=IA=A$ ، بنابراین تمام اتحادها در مورد دو ماتریس هم مرتبه‌ی A و I برقرار خواهند بود:

$$(A+I)^2=A^2+2AI+I^2=A^2+2A+I$$

ماتریس A چنان داده شده که $A^2=\overline{O}$ است. حاصل $A(I-A)^2$ کدام است؟

❶ I ❷ A^3 ❸ A^2 ❹ A

عبارت توان دوم را توسط اتحاد حساب کرده و تساوی $A^2=\overline{O}$ را جایگزین می‌کنیم:

$$A(I-A)^2=A(I-2A+\underbrace{A^2}_{=\overline{O}})=AI-2A^2=A$$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ -۳ & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^۲+AB+BA+B^۲$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

عبارت خواسته شده همان $(A+B)^۲$ است، چون:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$(A+B)^۲=\begin{bmatrix} ۲^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اگر $A^۲-A=I$ باشد حاصل $A^۵$ کدام است؟

۱) $۵A-۳I$ ۲) $۵I-۳A$ ۳) $۵A+۳I$ ۴) $۵I+۳A$

مرتباً طرفین را در A ضرب می‌کنیم تا به $A^۵$ برسیم.

$$A^۲-A=I \to A^۲=A+I \xrightarrow{\times A} A^۳=A^۲+A \to A^۳=A+I+A=۲A+I$$
$$\xrightarrow{\times A} A^۴=۲A^۲+A=۲(A+I)+A=۳A+۲I \to \xrightarrow{\times A} A^۵=۳A^۲+۲A=۳(A+I)+۲A$$
$$A^۵=۵A+۳I$$

دترمینان:

مقدمه : ماتریس کهاد – همسازه:

۱- هرگاه در ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، سطر iاُم و ستون jاُم را حذف کنیم، ماتریسی به دست می‌آید که آن را ماتریس کهاد نظیر درایه‌ی a_{ij} از ماتریس A می‌نامیم و با M_{ij} نمایش می‌دهیم.

۲- همسازه‌ی نظیر درایه‌ی a_{ij} از ماتریس A را با A_{ij} نمایش داده و آن را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

تست۳۸ : در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\\۷&۸&۹\end{bmatrix}$ مجموع همسازه‌های درایه‌های روی قطر اصلی کدام است؟

۱) ۱۲-   ۲) ۱۵-   ۳) ۱۸-   ۴) ۲۱-

پاسخ:

تعریف دترمینان: به هر ماتریس مربع A، عددی حقیقی نسبت داده می‌شود که آن را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با نماد |A| یا det(A) نمایش می‌دهیم، برای بدست آوردن دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ یک سطر یا یک ستون را به دلخواه انتخاب کرده ، سپس همسازه‌های نظیر درایه‌های این سطر یا ستون انتخابی را به دست می‌آوریم. سپس مجموع حاصلضرب هر درایه در همسازه‌اش برابر است با دترمینان ماتریس.

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{a_{۱۱}\quad a_{۱۲}\quad a_{۱۳}}\\a_{۲۱}\quad a_{۲۲}\quad a_{۲۳}\\a_{۳۱}\quad a_{۳۲}\quad a_{۳۳}\end{bmatrix}$$

بسط دترمینان بر حسب سطر اول: $|A|=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}$

تست۳۹ : دترمینان ماتریس $A=\begin{pmatrix}۱&-۱&۲\\۲&۱&۳\\۳&۰&-۱\end{pmatrix}$ چقدر است؟

۱) ۴-   ۲) ۶-   ۳) ۱۲-   ۴) ۱۸-

تست۴۱ : در ماتریس $A=\begin{pmatrix}۵&۲&۱\\۱&۰&۲\\۲&a&-۱\end{pmatrix}$ اگر به درایه‌ی سطر سوم و ستون دوم چهار واحد بیافزاییم به مقدار دترمینان A کدام عدد افزوده می‌شود؟

۱) ۴۴   ۲) ۴۴-   ۳) ۳۶-   ۴) ۳۶

نکته: اگر به یک درایه از دترمینان، k واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان، k برابر همسازه‌ی نظیر آن درایه اضافه می‌شود.

پاسخ:

تست۴۲ : اگر $\begin{vmatrix}a&۱&۳\\۳&-۱&x\\۱&-۱&۴\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&۱&۳\\۳&-۱&x+۲\\۱&-۱&۴\end{vmatrix}$ آنگاه مقدار a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۲-   ۴) ۲

نکته: اگر به یک درایه از دترمینان، k واحد افزوده شود و حاصل دترمینان تغییر نکند، همسازه‌ی نظیر آن درایه صفر می‌باشد.

در این تست مشاهده می‌شود که به درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم (x) ۲ واحد افزوده شده است ولی دترمینان تغییر نکرده، بنابراین همسازه‌ی نظیر درایه‌ی x برابر صفر می‌باشد.

$$x\to A_{۲۳}=۰\to -|M_{۲۳}|=-\begin{vmatrix}a&۱\\۱&-۱\end{vmatrix}=۰\Rightarrow -a-۱=۰\to \underline{a=-۱}$$

نکته: معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(a,b)$ ، $B(c,d)$ می‌گذرد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

تست ۴۳: کدام نقطه روی خط به معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ قرار دارد؟

۱) $(\frac{1}{2},0)$ ۲) $(1,\frac{1}{3})$ ۳) $(0,-\frac{1}{3})$ ۴) $(1,1)$

این خط از دو نقطه‌ی $A(2,-1)$ ، $B(-1,1)$ می‌گذرد بنابراین معادله‌ی خط را به روش ریاضی می‌نویسیم (زیرا زمان کمتری می‌برد):

$$m = \frac{-1-1}{2+1} = -\frac{2}{3} \rightarrow y+1 = -\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow 3y+3 = -2x+4 \Rightarrow \underline{2x+3y=1}$$

گزینه‌ی ۱ صحیح است. $(\frac{1}{2},0) \Rightarrow 2(\frac{1}{2})+3(0)=1$

نکته: مساحت مثلثی که رئوس آن $A(a,b)$ ، $B(a',b')$ ، $c(a'',b'')$ باشد برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

تست ۴۵: مساحت مثلثی که رئوس آن $A(1,2)$ ، $B(1,-1)$ ، $C(0,3)$ باشند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

پاسخ:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(1\times-4)+(1\times1)+0] = \frac{1}{2}|-4+1| = \frac{3}{2}$$

ویژگی‌های دترمینان:

۱) اگر درایه‌های یک سطر یا یک ستون دترمینان همگی صفر باشند، حاصل دترمینان صفر است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & d \\ b & 0 & e \\ c & 0 & f \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & p \end{vmatrix} = 0$$

۲) اگر دو سطر (ستون) یک دترمینان با هم برابر یا مضربی از هم باشند، حاصل دترمینان صفر است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kd & ke & kf \end{vmatrix} = 0$$

۳) اگر همه‌ی عناصر یک سطر (ستون) ماتریس، در عدد ثابت k ضرب شوند، آنگاه مقدار دترمینان در k ضرب می‌شود و بالعکس.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & l \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix}$$

(در چند فاکتورگیری پشت سر هم از سطرها یا ستون‌های دترمینان، اعداد فاکتورها بیرون دترمینان در هم ضرب می‌شوند).

تست ۴۶: اگر $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -2$ آنگاه مقدار $\begin{vmatrix} 2a & 6b & -2c \\ -a' & -3b' & c' \\ -a'' & -3b'' & c'' \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۶- ۴) ۶

۴) اگر جای دو سطر (ستون) یک دترمینان را با هم عوض کنیم،مقدار دترمینان در (۱-) ضرب می‌شود. (به تعداد جابجایی‌ها، عدد (۱-) ضرب خواهد شد)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & l \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

۵) اگر در ماتریس A، حاصل‌ضرب عناصر یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر بیافزاییم، مقدار دترمینان تغییری نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kg & b+kh & c+kl \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+ka & c \\ d & e+kd & f \\ g & h+kg & l \end{vmatrix}$$

۶) دترمینان ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی، پایین مثلثی برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e & f \\ 0 & b & g \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

۷) دترمینان ماتریس‌های شبه قطری،شبه مثلثی، برابر است با قرینه حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر فرعی.

تست۴۷ : حاصل $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۱۰- ۴) ۱۰

۸) اگر دو دترمینان تنها در یک سطر (ستون) متفاوت باشند، به صورت زیر می‌توان آن‌ها را جمع و یا تفریق نمود. (تبدیل یک دترمینان به دو دترمینان نیز با در نظر گرفتن دو سطر یا دو ستون ثابت امکان‌پذیر است)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d' & e' & f' \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d\pm d' & e\pm e' & f\pm f' \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

تست۴۸ : حاصل $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۹- ۴) ۱۶-

ویژگی های دیگر دترمینان:

۱) اگر A ماتریس n×n باشد آنگاه: $|kA| = k^n |A|$

۲) اگر B،A دو ماتریس مربع باشند آنگاه: $|AB| = |A||B|$

۳) دترمینان هر ماتریس با دترمینان ماتریس ترانهاده‌ی آن برابر است: $|A^T| = |A|$

۴) اگر دو ماتریس مربع مساوی باشند، دترمینان‌های آن‌ها نیز با هم برابرند، اما عکس آن برقرار نمی‌باشد.
$A = B \to |A| = |B|, |A| = |B| \nrightarrow A = B$

۵) $|A^n| = |A|^n$

۶) $|I| = ۱$

۷) دترمینان ماتریس‌های پاد متقارن از مرتبه‌ی فرد همواره صفر است.
$$\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

تست۴۹ : اگر $A_{۳\times۳}$ ، $|A| = -۲$ حاصل $|۲A^۳|$ چقدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۶۴- ۴) ۱۲۸-

تست۵۰ : اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۲ \\ x & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ بطوریکه $|A^۳| = ۲۱۶$ آنگاه x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۲

پاسخ:
$$|A^۳| = ۲۱۶ \Rightarrow |A|^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow |A| = ۶$$
$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۲ \\ x & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۶x = ۶ \Rightarrow \underline{x = -۱}$$

تست۶۰ : اگر $(x+y+z)^۳ = ۲۷$ آنگاه مقدار $\begin{vmatrix} x+y+۲z & x & y \\ z & ۲x+y+z & y \\ z & x & x+۲y+z \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۷- ۳) ۸۱- ۴) صفر

بدست آوردن حاصل این نوع دترمینان‌ها معمولاً شامل سه مرحله‌ی زیر می‌شود:

۱- ایجاد درایه‌ی مساوی در یک سطر یا یک ستون

۲- فاکتورگیری از این درایه‌ی مساوی

۳- تبدیل به دترمینان مثلثی با اعمال سطری.

$$\begin{array}{ccc} c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} x+y+۲z & x & y \\ z & ۲x+y+z & y \\ z & x & x+۲y+z \end{vmatrix} \xrightarrow{c_۱+c_۲+c_۳} \begin{vmatrix} ۲x+۲y+۲z & x & y \\ ۲x+۲y+۲z & ۲x+y+z & y \\ ۲x+۲y+۲z & x & x+۲y+z \end{vmatrix} =$$

$$۲(x+y+z)\begin{vmatrix} ۱ & x & y \\ ۱ & ۲x+y+z & y \\ ۱ & x & x+۲y+z \end{vmatrix} \begin{matrix} R_۱ \\ R_۲ \\ R_۳ \end{matrix} \frac{R_۲-R_۱}{R_۳-R_۱}$$

$$۲(x+y+z)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & x+y+z & ۰ \\ ۰ & ۰ & x+y+z \end{vmatrix}}_{(x+y+z)^۲} = ۲(x+y+z)^۳ = ۵۴$$

☹تست۶۱ : حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \\ z-x & x-y & y-z \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) x+y-z ۳) صفر ۴) x+y+z

پاسخ:

اگر ستون دوم و سوم را به ستون اول اضافه کنیم داریم:

$$\begin{vmatrix} x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \\ z-x & x-y & y-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y+y-z+z-x & y-z & z-x \\ y-z+z-x+x-y & z-x & x-y \\ z-x+x-y+y-z & x-y & y-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۰ & y-z & z-x \\ ۰ & z-x & x-y \\ ۰ & x-y & y-z \end{vmatrix} = ۰$$

☹تست۶۲ : حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & a & bc \\ \frac{۱}{b} & b & ac \\ \frac{۱}{c} & c & ab \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$ ۲) $-(a+b+c)$ ۳) صفر ۴) abc

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & a & bc \\ \frac{۱}{b} & b & ac \\ \frac{۱}{c} & c & ab \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & a & bc \\ \frac{۱}{b} & b & ac \\ \frac{۱}{c} & c & ab \end{vmatrix}$$

سطر اول را در a و سطر دوم را در b و سطر سوم را در c ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{abc}\begin{vmatrix} ۱ & a^۲ & abc \\ ۱ & b^۲ & abc \\ ۱ & c^۲ & abc \end{vmatrix}$$

از abc در ستون سوم فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۱}{abc}(abc)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & a^۲ & ۱ \\ ۱ & b^۲ & ۱ \\ ۱ & c^۲ & ۱ \end{vmatrix}}_{۰} = ۰$$

۱) برای بدست آوردن ماتریس الحاقی ماتریس های ۲×۲ کافیست جای درایه‌های قطراصلی رابا هم عوض و درایه‌های قطر فرعی را تغییرعلامت دهیم:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

۲) در ماتریس های اسکالر داریم:

$$A=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix} \Rightarrow A^*=N=\begin{bmatrix} k^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & k^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & k^۲ \end{bmatrix}$$

تعریف ماتریس وارون: هرگاه A یک ماتریس مربع بوده و ماتریس مربع B موجود باشد به طوری که داشته باشیم:

$$AB=BA=I$$

در این صورت A را وارون B،B را وارون A گویند.

تست۶۷ : اگر $A=\begin{pmatrix} ۲ & m \\ ۲ & ۵ \end{pmatrix}$ و $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{۵}{۲} & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}$ آنگاه $\underline{m}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: همانطور که می‌دانیم $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ بنابراین:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix} ۲ & m \\ ۲ & ۵ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{۵}{۲} & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} ۵-m & -۴+m \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\Rightarrow ۵-m=۱\Rightarrow \underline{m=۴}$$

یافتن ماتریس وارون: وارون ماتریس A را با A^{-1} نمایش داده و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{۱}{|A|}A^*\,(AA^{-1}=A^{-1}A=I)$$

تست۶۹ : وارون ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$

نکته: در ماتریس های قطری(و شبه قطری) برای محاسبه ماتریس وارون کافی است درایه های قطر اصلی(قطر فرعی) را معکوس کنیم و به صفرها دست نزنیم.

نکته: معکوس یک ماتریس بالا(پایین)مثلثی ماتریس بالا(پایین)مثلثی است که در آن درایه های قطر اصلی معکوس شده اند.به مثال های زیر دقت کنید.(سوال : بقیه درایه ها چی؟)

$$A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{c} \end{bmatrix}$$

نکته مهم: در ماتریس‌های ۳×۳، برای تشخیص درایه‌ای که در سطر i ام و ستون jام ماتریس A^{-1} قرار دارد کافی است A_{ji} را بر دترمینان A تقسیم نماییم.

$$(a_{ij})^{-1}=\frac{A_{ji}}{|A|}=\frac{(-1)^{j+i}|M_{ji}|}{|A|}$$

تست ۷۴: اگر $A=\begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{pmatrix}$ آنگاه درایه‌ی واقع در سطر دوم وستون سوم از ماتریس وارون $A\ (A^{-1})$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱۱}{۳۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۴}$ ۳) $\frac{۲}{۱۷}$ ۴) $\frac{-۲}{۱۷}$

نکته: با توجه به رابطه‌ی $A^{-1}=\frac{۱}{|A|}A^*$، شرط وارون‌پذیری ماتریس A آن است که: $|A|\neq ۰$

پس شرط لازم و کافی برای آن که A وارون‌پذیر است، آن است که دترمینان A مخالف صفر باشد و شرط وارون‌پذیر نبودن آن است که $|A|=۰$

تست ۷۵: کدام یک ازماتریسهای زیر وارون پذیر است؟

۱) $\begin{pmatrix} ۲ & ۸ \\ ۳ & ۱۲ \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$

تست ۷۶: به ازاء کدام مقدار m ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۳ & -۱ & m \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ وارونپذیرنمی‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ: اگر A وارو نپذیر نباشدآنگاه $|A|=۰$

$$\begin{vmatrix} ۳ & -۱ & m \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{vmatrix}=۳(۱)-۱(۱)+m(-۳)=۰\Rightarrow m=\frac{۲}{۳}$$

ویژگی های مهم ماتریس وارون:

۱) $(A^{-1})^{-1}=A$

۲) $|A^{-1}|=\frac{۱}{|A|}$

اثبات: $AA^{-1}=I$ از طرفین دترمینان می‌گیریم $\Rightarrow |AA^{-1}|=|I|\Rightarrow |A||A^{-1}|=۱\Rightarrow |A^{-1}|=\frac{۱}{|A|}$

۳) $AA^*=A^*A=|A|I$

$A^{-1}=\frac{۱}{|A|}A^*\rightarrow$ طرفین وسطین می‌کنیم $A^{-1}|A|=A^*$

اثبات: طرفین در A ضرب شود $\Rightarrow AA^{-1}|A|=AA^*\Rightarrow I|A|=AA^*$

سراسری تجربی ۹۶

اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ باشند ، ماتریس $A^{-۱}.(۲B)$ ، کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & -۷ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ -۷ & ۱۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ \\ -۹ & ۱۳ \end{bmatrix}$ **۴)** $\boldsymbol{\begin{bmatrix} ۱۰ & -۱۴ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}}$

$$A^{-۱}\times ۲\times B=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}\times ۲\times\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۱۴ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۹۶ – خارج از کشور

اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند ، ماتریس $B.(۲A^{-۱})$ ، کدام است ؟

۱) $\boldsymbol{\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۷ & -۱۲ \\ -۹ & -۱۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۸ & ۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$

$$B\times ۲\times A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\times ۲\times\frac{۱}{-۲}\times\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۹۵

اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ باشند ، وارون ماتریس $A\times B$ ، کدام است ؟

۱) $\boldsymbol{\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۷ & -۸ \end{bmatrix}}$ ۲) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۸ & ۷ \\ -۴ & -۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۷ & -۸ \end{bmatrix}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۹ & -۸ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$

$$(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\times\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۷ & -۸ \end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۹۵ – خارج از کشور

اگر $A=\begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند ، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A+۲B$ ، وارون پذیر <u>نیست</u> ؟

۱) −۷,۵ ۲) −۵,۷ ۳) −۷,۴ ۴) −۳,۵

$$|A+۲B|=۰ \qquad A+۲B=\begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-۲ & ۳ \\ ۹ & a+۴ \end{bmatrix}$$

$$|A+۲B|=۰\longrightarrow(a-۲)(a+۴)-۲۷=۰\longrightarrow a^{۲}+۲a-۳۵=۰\longrightarrow(a+۷)(a-۵)=۰$$

سراسری تجربی ۹۴

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱۲ & -۸ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۶ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}$ باشند ، ماتریس $(A-B)^{-۱}$ ، کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix} -۰/۲ & ۰/۱ \\ ۰/۳ & ۰/۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰/۳ & -۰/۲ \\ ۰/۲ & ۰/۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰/۲ & -۰/۲ \\ ۰/۳ & ۰/۴ \end{bmatrix}$ **۴)** $\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۲ \\ -۰/۳ & ۰/۲ \end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix} ۱۲ & -۸ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱۰ & -۶ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۲ \\ -۰/۳ & ۰/۲ \end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۹۴ – خارج از کشور

اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند ، ماتریس $(A\times B)^{-۱}$ ، کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

$$(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}\times\frac{۱}{۱}\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۹۳

ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$ مفروض است . اگر $A\times B$ ماتریس واحد باشد ، مجموع درایه های سطر اول ماتریس B ، کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ **۳)** ۲ ۴) ۲/۵

$$A\times B=I\longrightarrow B=A^{-۱}\times I=A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۷ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۷}{۲} & -\frac{۳}{۲} \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\longrightarrow\frac{۷}{۲}-\frac{۳}{۲}=۲$$

سراسری تجربی ۹۳ – خارج از کشور

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض اند . درایه واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B\times A$ ، کدام است ؟

۱) $-۰/۹$ **۲)** $-۰/۱$ ۳) $۰/۱$ ۴) $۰/۹$

$$(B\times A)^{-1}=A^{-1}\times B^{-1}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix}\times\frac{1}{-5}\times\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}=-\frac{1}{10}\times\begin{bmatrix}1&9\\0&-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0/1&-0/9\\0&1\end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۹۱

اگر $\begin{bmatrix}3&4\\5&-1\end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix}$ باشد ، وارون ماتریس X ، کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2&-1\\2&3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&-2\\2&-3\end{bmatrix}$

$$X=\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&4\\5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}\longrightarrow X^{-1}=\frac{1}{4-3}\times\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۹۱ – خارج از کشور

اگر $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&1\end{bmatrix}$ ، ماتریس B از معادلهٔ $AB=2I$ ، کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix}-1&4\\1&-2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&-4\\-1&2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-2&1\\4&-1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}2&-1\\-4&1\end{bmatrix}$

روش اول :

$$AB=2I=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$B=A^{-1}\times\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\times\begin{bmatrix}1&-4\\-1&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4\\-1&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\1&-2\end{bmatrix}$$

روش دوم :

$$AB=2I\longrightarrow\frac{1}{2}AB=I\longrightarrow B=(\frac{1}{2}A)^{-1}=2A^{-1}=2\times\frac{1}{-2}\times\begin{bmatrix}1&-4\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\1&-2\end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۸۷ – خارج از کشور

اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\4&-5\end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $(2A).(3A^{-1})$ ، کدام است ؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

$$(2A)\times(3A^{-1})=6I\longrightarrow|6I|=(6)^2|I|=36\times1=36$$

سراسری تجربی ۸۴

اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ ، ماتریس $۲(AB)^{-۱}$ ، کدام است ؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

$$۲(AB)^{-۱}=۲\times B^{-۱}\times A^{-۱}=۲\times\frac{۱}{-۱}\times\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}\times\frac{۱}{-۲}\times\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

سراسری تجربی ۸۰

اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A ، کدام است ؟

۱) $\frac{۱}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۱ ۴) ۳۳

$$(A^{-۱})^{-۱}=A\longrightarrow A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۳۳}\times\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۱۱} & -\frac{۱}{۱۱} \\ \frac{۷}{۳۳} & \frac{۲}{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$|A|=(\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۲}{۳۳})-(-\frac{۱}{۱۱}\times\frac{۷}{۳۳})=\frac{۴}{۱۱\times۳۳}+\frac{۷}{۱۱\times۳۳}=\frac{۱۱}{۱۱\times۳۳}=\frac{۱}{۳۳}$$

اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **با دترمینان ماتریس وارون A برابر باشد m کدام است؟**

۱) 1 و -1 ۲) 0 و 2 ۳) 0 و -2 ۴) 2 و -2

برای این که دترمینان ماتریس با دترمینان وارون آن برابر باشد، باید:

$$|A|=|A^{-1}|=|A|^{-1}$$

$$|A|=\frac{1}{|A|}\Rightarrow|A|^2=1\Rightarrow|A|=\pm1$$

باید دترمینان ماتریس A را بگیریم و یک بار برابر 1 و یک بار برابر -1 قرار دهیم تا m پیدا شود.
از ماتریس A نسبت به سطر سوم (یا سطر دوم یا ستون دوم یا ستون سوم که تعداد صفر بیش‌تری دارد) دترمینان می‌گیریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ \underset{+}{1} & \underset{-}{1} & \underset{+}{0} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-m-(-1)=-m+1$$

حالا باید $-m+1$ را برابر با 1 و -1 قرار دهیم تا m مشخص شود.

$$-m+1=1\Rightarrow m=0\quad,\quad -m+1=-1\Rightarrow m=2$$

حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} \sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 & \sin\alpha \\ 1398 & \sin 2\alpha & 1399 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\sin 4\alpha$ ✔
۲) $\sin 4\alpha$
۳) $-\frac{1}{2}\sin 4\alpha$
۴) $-\sin 4\alpha$

نسبت به ستون دوم که تعداد صفر بیشتری دارد دترمینان می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \overset{-}{0} & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \overset{+}{0} & \sin\alpha \\ 1398 & \overset{-}{\sin 2\alpha} & 1399 \end{vmatrix} = -\sin 2\alpha \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\sin 2\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = -\sin 2\alpha(-\cos 2\alpha) = \frac{1}{2}(2\sin 2\alpha\cos 2\alpha) = \frac{1}{2}\sin 4\alpha$$

از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱) $[21 \quad 17]$
۲) $[21 \quad 19]$
۳) $[31 \quad 17]$
۴) $[31 \quad 19]$ ✔

اول باید وارون دو ماتریس در طرفین A را به دست آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9-10}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1}DC^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\times}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 19 \\ -49 & -30 \end{bmatrix}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 0 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ 2 باشد، سطر اول ماتریس $(I-A)^{-1}(I+A)$ کدام است؟

۱) $[\cos 2\alpha \quad -\sin 2\alpha]$ ✔
۲) $[\cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha]$
۳) $[\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$
۴) $[-\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$

$I+A$ و $I-A$ را که به سادگی می‌توانیم به دست آوریم.

$$I+A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad I-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

باید وارون ماتریس $I-A$ را حساب کنیم تا بتوانیم جواب سوال را بدهیم.

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}(I+A) = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix} 1-\tan^2\alpha & -2\tan\alpha \\ 2\tan\alpha & 1-\tan^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \frac{-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

اگر A و B دوماتریس 3×3 باشند، آنگاه حاصل $||A|\,B|+||B|\,A|$ همواره برابر کدام است؟

۱) $|B^2|+|A^2|$ ۲) $|AB^3|+|A^3B|$ ✔ ۳) $2|A^3B^3|$ ۴) $|AB|+|BA|$

$$\begin{cases} ||B|\,A| = |B|^3\,|A| \\ ||A|\,B| = |A|^3\,|B| \end{cases} \Rightarrow ||B|\,A| + ||A|\,B| = |B|^3\,|A| + |A|^3\,|B|$$

$$= |B^3A| + |A^3B|$$

اگر $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان X^{-1} کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ✔ ۴) 2

اگر رابطهٔ داده شده را مرتب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X$$

حالا از طرفین دترمینان می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} |X| \Rightarrow 10 = 5\,|X| \Rightarrow |X| = 2$$

دترمینان وارون ماتریس X را حساب می‌کنیم:

$$|X^{-1}| = |X|^{-1} = \frac{1}{|X|} = \frac{1}{2}$$

اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شمارهٔ سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A=[ai+bj]_{3\times 3}$ کدام است؟

۱) صفر ✔ ۲) $a+b$ ۳) ab ۴) $ab(a+b)$

دترمینان ماتریس $A=[ai+bj]_{n\times n}$ به ازای $n\geq 3$ همواره صفر است.

اگر $A_{2\times 2}$ و $|A^3|=-8$ باشد، حاصل $\left|\frac{3A}{|2A|}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{32}$ ✔ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

$$\left|\frac{3A}{|2A|}\right| = \left(\frac{3}{|2A|}\right)^2 |A| = \frac{9}{|4A^2|}|A| = \frac{9}{4^2\,|A^2|}|A|$$

$$= \frac{9}{4^2\,|A|} = \frac{9}{4^2\times(-2)} = \frac{9}{-32}$$

تعریف دستگاه معادلات همگن: دستگاه معادلاتی را همگن گویند هرگاه مقادیر معلوم (اعداد ثابت) دستگاه همگی صفر باشند.

مثال: $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ دستگاه معادلات همگن است که هرگز فاقد جواب نیست، زیرا همیشه جواب بدیهی صفر را دارد. (وقتی که همه مجهولات صفر باشند)

بررسی تعداد جواب های دستگاه معادلات:

در تمامی دستگاه های n معادله و n مجهول (که همه معادلات مستقل از هم هستند)اگر A ماتریس ضرائب باشد آنگاه بر حسب دترمینان A می توان تعداد جواب ها را بررسی کرد:

در دستگاه‌های همگن: اگر $|A|=0$، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. و اگر $|A|\neq 0$ آنگاه دستگاه جواب منحصر به فرد صفر دارد.

در دستگاه‌های غیر همگن: هر گاه $|A|=0$، آنگاه دستگاه فاقد جواب است یا اینکه بی‌شمار جواب دارد، و اگر $|A|\neq 0$ دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است.

تعبیر هندسی تعداد جواب های دستگاه:

۲معادله - ۲مجهول:

اگر خط $D: ax+by=c$ **و خط** $D': a'x+b'y=c'$ **یک دستگاه دو معادله دو مجهولی باشند، آنگاه سه حالت عمده‌ی زیر رخ می‌دهد:**

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\Rightarrow$ **دستگاه جواب منحصر به فرد دارد یا اینکه دو خط متقاطعند.**

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Rightarrow$ **دستگاه بی‌شمار جواب دارد یا اینکه دو خط بر هم منطبقند.**

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\Rightarrow$ **دستگاه جواب ندارد (نشدنی است) و یا فاقد جواب است یا اینکه دو خط موازیند.**

☺**تست ۹۱** : دستگاه $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی‌شمار

پاسخ : در این سؤال $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{3}{5}$ پس دستگاه جواب ندارد.

حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

در حالت کلّی اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولاتِ دستگاهِ دو معادله و دو مجهولِ $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و درصورتی‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A|\neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B\Rightarrow(A^{-1}A)X=A^{-1}B\Rightarrow IX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

☺تست۱۰۲ : در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است. $x+y$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ:

ماتریس ثابت = ماتریس مجهولات × ماتریس ضرایب

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=۱ \\ y=۳ \end{matrix} \rightarrow x+y=۳+۱=۴$$

در دستگاه معادلات $\begin{cases} \mathbf{ax+by=۱} \\ \mathbf{cx+dy=-۱} \end{cases}$، رابطهٔ $\mathbf{ad-bc=۱}$ برقرار است. مقدار $\mathbf{x}$ کدام است؟

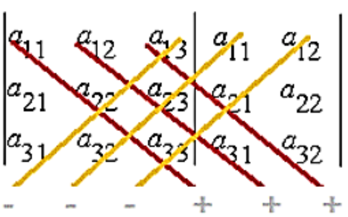
۱) $\mathbf{-c-a}$ ۲) $\mathbf{a+c}$ ۳) $\mathbf{b+d}$ ۴) $\mathbf{b-d}$

$$\begin{cases} \mathbf{ax+by=۱} \\ \mathbf{cx+dy=-۱} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \frac{۱}{\mathbf{ad-bc}} \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{-b} \\ \mathbf{-c} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d+b} \\ \mathbf{-c-a} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x=b+d}$$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

این عملیات را می‌توان با کمک گرفتن از یک تصویر ذهنی به ترتیب زیر انجام داد:



$$=\left(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)-\left(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}\right)$$

تذکر: روش ساروس صرفا برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس‌های سه در سه بوده و در سایر ابعاد قابل استفاده نیست.

تست های ارزشیابی

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ ماتریسی ۳×۳ باشد و درایه‌ها از دستور $a_{ij}=\begin{cases}۱ & \text{مضرب ۳ باشد } i+j \\ ۰ & \text{مضرب ۳ نباشد } i+j\end{cases}$ پیروی کنند، مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۳ & ۴ \\ ۴ & n-۱ & ۸ \\ ۶ & ۹ & k+۱ \end{bmatrix}$، $B=\left[i+ij\right]_{۳\times۳}$ و $A=B$ باشد، آنگاه حاصل $m+n+k$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲۰

۳) ۱۶ ۴) ۲۵

اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases} j-i & ; \quad i<j \\ i+j & ; \quad i\geq j\end{cases}$، دو ماتریس باشند، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۱

اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ b & ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس $B\times A$ ماتریسی قطری باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $B\times A$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) صفر　　۳) -۶　　۴) -۱۲

اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A^{-1}B=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) -۱　　۴) -۲

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳}+A^{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۲۷　　۲) ۲۸

۳) ۲۹　　۴) ۳۰

مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر ۳×۳، برابر ۱ است. حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$　　۲) ۸　　۳) $\frac{۱}{۲۷}$　　۴) ۲۷

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$، اگر $a_{ij}=\begin{cases}2\ ;\ i\neq j\\ 1\ ;\ i=j\end{cases}$ باشد، ماتریس A^2-4A برابر کدام است؟

۱) $3A$　　۲) $5A$　　۳) $3I$　　۴) $5I$

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7-A^4 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$　　۴) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^4 کدام است؟

۱) ۱۴　　۲) ۵۶　　۳) ۹۸　　۴) ۱۲۵

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس ABC کدام است؟

۱) ۲۱　　۲) ۷۵　　۳) ۸۰　　۴) ۱۲۰

نکته: برای به‌دست آوردن سطر i ام و ستون j ام ماتریس ABC ، کافی است به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\left[A_{\text{سطر } i \text{ ام}} \right] B \begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ ام} \\ C \end{bmatrix} = ABC \text{ سطر } i \text{ ام و ستون } j \text{ ام}$$

بنابراین داریم:

$$\left[A_{\text{سطر اول}} \right] B \begin{bmatrix} \text{ستون سوم} \\ C \end{bmatrix} = ABC \text{ سطر اول و ستون سوم}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۷ & ۱۰ & ۱۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۸۵ - ۱۰ = ۷۵$$

اگر $|A| = ۴$ و A یک ماتریس ۲×۲ باشد، آنگاه $\left| \frac{۲}{|A|} A \right| + \left| \frac{|A|}{۲} A \right|$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۵

اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲\alpha & ۱ \\ ۱ & \beta \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری باشد، $\alpha^۳ + \beta^۳$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) صفر

اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $A^{۱۳۹۷}$ کدام است؟

۱) $۳^{۱۳۹۷} A$ ۲) $۳^{۱۳۹۶} A$ ۳) $۳^{۱۳۹۷} I$ ۴) $۱۳۹۷A$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^{۲}+AB+۳B$ کدام است؟

۱) $۳I$ ۲) $۶I$ ۳) $۹I$ ۴) $۱۲I$

اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & |A|^{۲} \\ ۴|A| & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع مقادیر $|A|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۱-

اگر ماتریس A وارون‌پذیر و $A^{-۱}=A$ باشد، ماتریس $\left(A+A^{-۱}\right)^{۲}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $۲I$ ۳) $۳I$ ۴) $۴I$

اگر A و B دو ماتریس مربعی و $AB=A$ و $BA=B$ باشد، حاصل $A+A^{۲}+...+A^{۱۳۹۷}$ کدام است؟

۱) $۱۳۹۶A$ ۲) $۱۳۹۷A$ ۳) $۱۳۹۹A$ ۴) $۱۳۹۸A$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۲}$ ۲) $۲^{۱۱}$ ۳) ۳×۲^{۱۱} ۴) ۳×۲^{۱۲}

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 4A = 2^2 A$$

$$\vdots$$

$A^{12} = 2^{11}A \Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $= 6 \times 2^{11} = 3 \times 2^{12}$

اگر $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & b & -1 \\ 3 & 4 & c \end{vmatrix} = 3$ باشد، $|A| =$ آن‌گاه حاصل $\begin{vmatrix} -3a & 12 & -9 \\ 1 & -2b & -1 \\ 3 & -8 & c \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۸-　　۲) ۱۸　　۳) ۹-　　۴) ۶-

حاصل $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b & b^2 \\ c & 0 & c^2 \end{vmatrix}$، همواره با کدام‌یک از دترمینان‌های زیر برابر است؟

۱) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & b & b^2 \\ ac & 0 & c^2 \end{vmatrix}$　　۲) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & ab \\ 0 & b & b \\ c & 0 & c^2 \end{vmatrix}$　　۳) $\begin{vmatrix} c & a^2 & a \\ 0 & b^2 & b \\ c & 0 & c^2 \end{vmatrix}$　　۴) $\begin{vmatrix} c & a & a^2 \\ 0 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}$

معادلهٔ $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & x^3 & x \end{vmatrix} = 0$ چند ریشهٔ متمایز دارد؟

۱) ۳　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) بی‌شمار

$$\begin{vmatrix} ۱ & x & x^{۳} \\ ۱ & x^{۲} & x^{۲} \\ ۱ & x^{۳} & x \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow \left(x^{۳}-x^{۵}\right)-x\left(x-x^{۲}\right)+x^{۳}\left(x^{۳}-x^{۲}\right)=۰$$

$$\Rightarrow x^{۳}-x^{۵}-x^{۲}+x^{۳}+x^{۶}-x^{۵}=۰ \Rightarrow x^{۶}-۲x^{۵}+۲x^{۳}-x^{۲}=۰ \quad \Rightarrow ۲x^{۳}\left(۱-x^{۲}\right)+x^{۲}\left(x^{۴}-۱\right)=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^{۳}\left(x^{۲}-۱\right)+x^{۲}\left(x^{۲}-۱\right)\left(x^{۲}+۱\right)=۰ \quad \Rightarrow x^{۲}\left(x^{۲}-۱\right)\left(-۲x+x^{۲}+۱\right)=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}\left(x^{۲}-۱\right)\left(x-۱\right)^{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\pm ۱ \end{cases}$$

پس این معادله سه ریشهٔ متمایز دارد.

اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ باشند به‌طوری که $A^{-۱}+۲B^{-۱}=I$ ، آنگاه کدام رابطه همواره صحیح است؟

۱) $A+۲B=I$

۲) $A+۲B=AB$

۳) $۲A+B=I$

۴) $۲A+B=AB$

اگر $A^{۲}=A+۲I$ باشد، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $A-\frac{I}{۲}$

۲) $\frac{A-I}{۲}$

۳) $\frac{A}{۲}-I$

۴) $\frac{A}{۳}+I$

اگر $A^{۳}=\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $|A|A^{۲}$ چقدر است؟

۱) ۴

۲) ۲

۳) ۱۶

۴) ۸

اگر $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+e$ کدام است؟

۱) ۱۱

۲) ۱۵

۳) ۱۸

۴) ۲۱

واضح است که A، ماتریسی ۳×۱ می‌باشد، بنابراین اگر $A=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ در نظر گرفته شود، آنگاه داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ x & y & z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=۳ \\ y=۱ \\ z=-۱ \end{cases}$$

حال: $a+b+e=۲x+۲y+۳y=۲x+۵y=۲(۳)+۵(۱)=۱۱$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی مـاتریس $C^۲$ کـدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ با درایه‌های $A_{ij}=\begin{cases} i^۲-j \;;\; i>j \\ i+j \;;\; i=j \\ j^۲-i \;;\; i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ با درایه‌های $b_{ij}=ij$ مفروض‌انـد. حاصـل $\sum_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲}$ چقدر است؟

۱) ۴۶ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

اگر $A^۲=۴A-۳I$ و $A^{-۱}=mA+nI$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

معادلهٔ $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ a-x & 0 & x-c \\ b-x & c-x & 0 \end{vmatrix} = 0$ دارای چند جواب حقیقی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ و $|A+B| = 5$ و $|B| = 2$ باشد، دترمینان ماتریس $AB^{-1} + I$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۵

اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 18 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ و $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB + BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 21 & -6 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 21 & 3 \end{bmatrix}$

اگر $A = [a_{ij}]_{4\times3}$ ، $B = [b_{ij}]_{3\times5}$ و $C = AB$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از کدام رابطه به دست می‌آید؟

۱) $\sum_{i=1}^{4} a_{2i}b_{i3}$ ۲) $\sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i3}$ ۳) $\sum_{i=1}^{4} a_{i2}b_{3i}$ ۴) $\sum_{i=1}^{3} a_{i2}b_{3i}$

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $(P^{-1}AP)^2$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 36 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & 36 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$$P^{-۱}AP=\frac{۱}{۲}\left(\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(P^{-۱}AP\right)^{۲}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}^{۲}=\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

با افزودن یک واحد به کدام درایهٔ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۱۲\\ ۳ & ۷ & ۱\end{bmatrix}$، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند؟

۱) $a_{۲۳}$ ۲) $a_{۳۳}$ ۳) $a_{۲۲}$ ۴) $a_{۳۲}$

کدام ماتریس می‌تواند مربع یک ماتریس ۲×۲ باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}۵ & -۸\\ -۸ & ۳\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۵ & -۸\\ -۸ & -۳\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۵ & ۸\\ ۸ & -۳\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۵ & ۸\\ -۸ & -۳\end{bmatrix}$

اگر A و B دو ماتریس متمایز باشند به طوری‌که $AB=A$ و $BA=B$، آنگاه ماتریس $B^{۲}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) B ۴) $-I$

چند ماتریس مربعی وارون‌پذیر مرتبهٔ ۲ وجود دارد که درایه‌های آنها فقط صفر و ۱ باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

اگر A ماتریسی ۲×۲ و غیرصفر باشد به‌طوری که $A^{۲} = A$ و $I + \lambda A$ وارون ماتریس $I - ۳A$ باشد، آنگاه λ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

اگر A ماتریسی اسکالر از مرتبهٔ ۳ و $|A - I| = |A| - ۷$ باشد، آنگاه مجموعهٔ مقادیر $|A|$ کدام است؟

۱) $\{-۱,۸\}$ ۲) $\{۱,-۸\}$ ۳) $\{۱,۸\}$ ۴) $\{-۱,-۸\}$

اگر دو ماتریس A و $(I - A)$ وارون هم باشند، ماتریس $A^{۴}$ همواره برابر کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $-I$

اگر ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \sin\alpha & x^{۴} \\ ۸x & \cos\alpha \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد $(x \neq ۰)$، حاصل $x + \tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۲ و $A^{2} = -I$ باشد، آنگاه $|I - A|$ کدام می‌تواند باشد؟ $(|A| > 0)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

اگر $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر λ، ماتریس $I - \lambda A$ وارون‌پذیر است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

اگر A یک ماتریس مربعی و $A^{6} = \bar{O}$ باشد، وارون ماتریس $I - A$ کدام است؟

۱) $I + A + A^{2} - A^{3} - A^{4} - A^{5}$

۲) $I - A + A^{2} + A^{3} - A^{4} - A^{5}$

۳) $I + A + A^{2} + A^{3} + A^{4} + A^{5}$

۴) $I - A - A^{2} - A^{3} - A^{4} - A^{5}$

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 0 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبه ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I - A)^{-1}(I + A)$ کدام است؟

۱) $[\cos 2\alpha \quad -\sin 2\alpha]$

۲) $[\cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha]$

۳) $[\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$

۴) $[-\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$

$$A=\begin{bmatrix} \circ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & \circ \end{bmatrix} \Rightarrow I+A=\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۱ \end{bmatrix} \qquad I-A=\begin{bmatrix} ۱ & +\tan\alpha \\ -\tan\alpha & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-۱}=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (I-A)^{-۱}(I+A)$$

$$=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}\begin{bmatrix} ۱-\tan^{۲}\alpha & -۲\tan\alpha \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha} & \frac{-۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & -\sin ۲\alpha \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

اگر برای دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر A و B از مرتبهٔ ۲، $A^{-۱}+B^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix} -۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A+B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} -۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \circ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A با چه تعداد از ماتریس‌های زیر تعویض‌پذیر است؟
(I ماتریس همانی مرتبهٔ ۳ است.)

الف) $۲A+I$ ب) $A^{۲}-I$ پ) $A^{۳}$ ت) $A^{۲}+I$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - ۳y = ۱ \\ ۲۰x + by = ۵ \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، کدام دستگاه معادلات، جواب منحصربه‌فرد دارد؟

۱) $\begin{cases} ۱۵x - ۴y = ۱ \\ bx + ay = ۳ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} ax - ۱۵y = ۱ \\ ۴x + by = ۵ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} ax + ۱۵y = ۵ \\ bx + ay = ۳ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ax + by = ۲ \\ ۳ax + ۳by = ۵ \end{cases}$

به ازای کدام رابطه بین a، b و c، دستگاه $\begin{cases} ax + by = ۰ \\ (a + b)x + cy = ۰ \end{cases}$ جواب‌های غیرصفر نیز دارد؟

۱) $b^۲ = ab + ac$ ۲) $ac = b^۲ - c^۲$ ۳) $b^۲ = ac - ab$ ۴) $ac = b^۲ + c^۲$