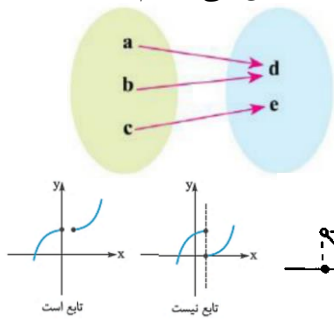


**یادآوری:** اگر یادمان باشد تابع را به دستگاهی تشبیه می کردیم که به ازای یک ورودی مشخص فقط یک خروجی معین تولید می کند. یعنی در آن، خروجی به ورودی بستگی دارد. در ریاضی به مقادیر ورودی دامنه و به مقادیر خروجی برد می گوئیم. بنابراین طبق تعریف بالا هیچ دو  $Y$  متمایزی نمی توانند  $X$  های یکسانی داشته باشند و همواره می گوئیم  $Y$  تابعی از  $X$  است و شکل جبری یا ضابطه ای آن را بصورت  $y = f(x)$  نشان می دهیم.

به طور کلی تابه را به سه روش زیر می توان نمایش داد:



۱- نمایش پیکانی (نمودار ون): در این حالت تنها در صورتی تابع خواهیم داشت که از هر عضو مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شود.

۲- نمایش بکمک نمودار (آزمون خط قائم):

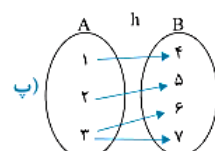
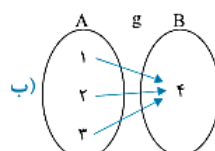
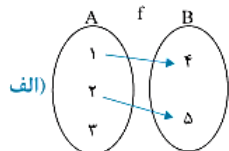
$$f = \left\{ (2, -1), (\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), (\pi, \frac{1}{\pi}), (\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\delta}) \right\}$$

۳- نمایش بصورت زوج مرتب: توجه داشته باشید که اگر مولفه های اول برابر باشند مولفه های دو نیز باید برابر باشند:  $\{(x, y) \in f, (x, z) \in f\} \Rightarrow y = z$

۴- نمایش بکمک ضابطه تابع: بعنوان مثال شکل ضابطه ای یک تابع خطی به این صورت است:  $f(x) = ax + b$

«بچه ها برای مشخص کردن یک تابع به ضابطه ی آن و دامنه آن نیازمندیم»

کدام یک از نمودارهای ون زیر نمایش یک تابع از  $A$  به  $B$  است، در صورت تابع بودن آن را به صورت مجموعه زوج مرتب بنویسید.



الف)  $f$  یک تابع نیست، چون از عضو ۳ در  $A$  پیکانی خارج نشده است.  $g$  یک تابع است و نمایش زوج مرتب آن به صورت  $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$  است.  $h$  یک تابع نیست چون از عضو ۳ در  $A$  دو پیکان خارج شده است.

هرگاه  $f$  از  $A$  به  $B$  یک تابع باشد لزومی ندارد به هر عضو  $B$  دقیقاً یک پیکان وصل شود.

هرگاه  $f$  تابعی از  $A$  به  $B$  باشد، آن گاه مجموعه  $A$  دامنه تابع و مجموعه تمام اعضای  $B$  که بوسیله نوک فلش مشخص شده است، برد تابع می گویند.

**دامنه تابع:** به طور کلی دامنه تابع مجموعه مجاز برای ورودی ها ( $X$ ) است که آن را با  $D_f$  نمایش می دهند به طور کلی دامنه تابع از روی ضابطه تابع قابل تشخیص است.

① اگر تابع بازوهای مرتب تعریف شده باشد دامنه تابع برابر مجموعه شامل مؤلفه های اول زوج های مرتب است.

② اگر تابع را با نمودار پیکانی نشان دهیم دامنه تابع برابر مجموعه شامل عضوهایی از مجموعه اول است که از آن ها پیکانی خارج شده است.

③ اگر تابع را با نمودار مختصاتی نشان دهیم دامنه تابع برابر تصویر نمودار تابع روی محور  $X$  ها است.

④ اگر تابع را با ضابطه جبری تعریف کنیم دامنه تابع برابر بزرگترین مجموعه ای است که ضابطه به ازای اعضای آن تعریف می شود.

هم دامنه: هم دامنه یک تابع را می توان هر مجموعه دلخواه شامل برد تابع در نظر گرفت.

| نوع نمایش           | دامنه  | برد   |
|---------------------|--|---|
| مجموعه زوج‌های مرتب | مجموعه شامل مؤلفه‌های اول                            | مجموعه شامل مؤلفه‌های دوم                                     |
| نمودار پیکانی       | اعضایی از مجموعه اول که از آن‌ها پیکان خارج شده است. | اعضایی از مجموعه دوم که به آن‌ها پیکانی رسیده است.            |
| نمودار مختصاتی      | تصویر نمودار روی محور Xها                            | تصویر نمودار روی محور Yها                                     |
| ضابطه جبری          | مقادیری از X که ضابطه به ازای آن‌ها تعریف می‌شود.    | مقادیری که به ازای Xهای متعلق به دامنه، برای Y به دست می‌آید. |

در تابع  $y = x^2 - 2x$  دامنه، برد و هم‌دامنه را مشخص کنید.

**پاسخ:** دامنه تابع  $\mathbb{R}$  است، حال برد تابع را بدست می‌آوریم:

چون تابع درجه دوم است و ضریب  $x^2$  مثبت، پس دارای کمترین مقدار است و این مقدار به ازای  $x = \frac{-b}{2a}$  بدست می‌آید:

پس  $R_f = [-1, +\infty)$ ، بنابراین هم‌دامنه هر مجموعه‌ای شامل  $[-1, +\infty)$  می‌باشد مانند.....  $x = \dots \rightarrow y = (\dots)^2 - 2(\dots) = -1$

**شرط برابری دو تابع:** اگر نمودارهای دو تابع بر هم منطبق شوند آنگاه آن دو تابع با هم برابرند. توجه داشته باشید:



**۱:** در نمایش زوج مرتب هنگامی دو تابع برابرند که تمام زوج مرتب‌های آن‌ها یکسان باشد.

**۲:** هرگاه ضابطه‌های دو تابع  $f$  و  $g$  مشخص شده باشند در صورتی دو تابع  $f$  و  $g$  برابر یکدیگرند که:

**اولاً:** دامنه آن‌ها یکسان باشند:  $D_f = D_g$

**ثانیاً:** برای هر عضو از این دامنه یکسان مانند  $x$  مقادیر تابع  $f$  و  $g$  یعنی  $f(x)$  و  $g(x)$  یکسان باشد  $(f(x) = g(x))$

کدام دو تابع با هم برابرند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2}{|x|} \\ g(x) = |x| \end{array} \right. \quad (۴) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = (\sqrt{x})^2 \\ g(x) = x \end{array} \right. \quad (۳) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \end{array} \right. \quad (۲) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{array} \right. \quad (۱)$$

**بررسی گزینه «۱»:** چون  $x^2 \geq 0$  پس زیر رادیکال همواره نامنفی است، بنابراین  $D_f = \mathbb{R}$ ، از طرفی  $D_g = \dots$  است، پس  $D_f \neq D_g$  است.

پس تابع  $f$  با  $g$  برابر .....  
 $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \rightarrow f(x) \neq g(x)$

**بررسی گزینه «۲»:**

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$  ،  $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

پس  $D_f = D_g$  است. از طرفی داریم:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \dots & x > 0 \\ \dots & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dots & x > 0 \\ \dots & x < 0 \end{cases}$$

پس تابع  $f$  با  $g$  برابر است.

بررسی گزینه «۳»:

$$D_f : x \geq 0 \rightarrow D_f = \dots$$

و  $D_g = \dots$  می‌باشد پس  $D_f \dots D_g$  بنابراین تابع  $f$  با  $g$  برابر .....  
بررسی گزینه «۴»:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\dots\}, \quad D_g = \dots$$

بنابراین  $D_f \dots D_g$  پس تابع  $f$  با  $g$  برابر .....  
پس گزینه ..... صحیح است.

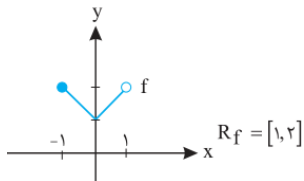
هرگاه توابع  $f$  و  $g$  با ضابطه‌های  $f(x) = \begin{cases} b & x=2 \\ \frac{x^2 - 5x + a}{x-2} & x \neq 2 \end{cases}$  و  $g(x) = x + c$  برابر باشند، مقدار  $b$  چقدر است؟

به ازای چه مقادیری از  $a$  دو تابع  $f$  و  $g$  با ضابطه‌های  $g(x) = 1$  و  $f(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{x^2 + ax + 2}$  برابرند؟

کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- (۲) هم دامنه زیر مجموعه‌ای از برد آن است.  
(۴) بی‌شمار تابع وجود دارد که برد آن  $\{1\}$  است.

- (۱) برد و هم‌دامنه می‌توانند یکی باشند.  
(۳) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن  $\{1\}$  باشد.



آن‌گاه  $B$  کدام مجموعه زیر می‌تواند باشد؟  
 $f: [-1, 1] \rightarrow B$   
 $f(x) = |x| + 1$  اگر

- (۱)  $[1, 2]$       (۲)  $[-2, 1]$       (۳)  $[1, 2]$       (۴)  $[0, 2]$

ضابطه‌ی تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  است. کدام یک از توابع زیر با تابع  $g(x) = |-x|$  برابر است؟

- (۱)  $-xf(x)$       (۲)  $xf(x)$       (۳)  $x + f(x)$       (۴)  $-x + f(x)$

$$g(x) = |-x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow xf(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = xf(x)$$

تابع با ضابطه  $f(x) = |x - 2|$  برابر کدام یک از توابع است؟

- (۱)  $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \right|$       (۲)  $\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right|$       (۳)  $\frac{(x-2)^2}{|x-2|}$       (۴)  $\frac{|6x - 12|}{6}$

$$g(x) = \frac{\cancel{x} |x-2|}{\cancel{x}} = |x-2| \Rightarrow f(x) = g(x) \text{ و } D_f = D_g = \mathbb{R} \text{ زیرا داده شده برابر است زیرا } g(x) = \frac{|6x-12|}{6} \text{ تابع}$$

تابع  $f(x) = |x+1|$  با تابع  $|g(x)|$  برابر است،  $g(x)$  برابر است با:

$$\frac{(x+1)^2}{x+1} \quad (۴) \quad \frac{x^2-x}{|x|} \quad (۳) \quad \frac{|x^2-1|}{x-1} \quad (۲) \quad \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} \quad (۱)$$

دامنه‌ی تابع  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است پس باید دامنه‌ی تابع  $|g|$  نیز برابر با  $\mathbb{R}$  باشد که فقط گزینه‌ی (۱) این شرط را دارد

$$g(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)+(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = x+1 \quad (\text{مخرج کسر آن هیچ گاه صفر نمی‌شود})$$

$$\rightarrow |g(x)| = |x+1|, \quad D_g = D|g| = \mathbb{R}$$

تابع  $y = |2x - |x||$  با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

$$y = 2x - |x| \quad (۴) \quad y = |x| - 2x \quad (۳) \quad y = x - 2|x| \quad (۲) \quad y = 2|x| - x \quad (۱)$$

دامنه‌ی تمام توابع داده شده برابر با  $\mathbb{R}$  است پس داریم:

$$y = |2x - |x|| = \begin{cases} |2x - x| & x \geq 0 \\ |2x + x| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} |x| & x \geq 0 \\ |3x| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده فقط گزینه ۱ با تابع فوق مساوی است زیرا:

$$۱ \text{ گزینه‌ی } y = 2|x| - x = \begin{cases} 2x - x & x \geq 0 \\ -2x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 4, f(x) = \begin{cases} n & x = m \\ \frac{x^3 + 8}{x - m} & x \neq m \end{cases} \text{ اگر دو تابع } f \text{ و } g \text{ برابر باشند، مقدار } m+n \text{ کدام است؟}$$

$$۱۴ \quad (۴) \quad ۱۰ \quad (۳) \quad ۶ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} n & x = m \\ \frac{x^3 + 8}{x - m} & x \neq m \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} n & x = m \\ \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x - m} & x \neq m \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی  $f$  و  $g$  می‌توان نتیجه گرفت که  $m = -2$  است، همچنین چون  $f = g$  است می‌توان نوشت

$$f(-2) = g(-2)$$

$$\begin{cases} g(-2) = (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12 \\ f(-2) = n \end{cases} \rightarrow n = 12 \quad m+n = (-2) + (12) = 10 \text{ پس}$$

$$\text{دو تابع } f(x) = \frac{3}{x-2} \text{ و } g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+4} \text{ برابرند. مقدار } a+b+c \text{ کدام است؟}$$

$$۳ \quad (۴) \quad -۷ \quad (۳) \quad -۴ \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ ، پس  $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$  است بنابراین مخرج کسر تابع  $g$  باید فقط یک ریشه‌ی ۲ باشد.

$$x^2 + cx + 4 = 0 \xrightarrow{x=2} (2)^2 + 2c + 4 = 0 \rightarrow 2c = -8 \rightarrow c = -4$$

$$g(x) = \frac{ax+b}{x^2 - 4x + 4} = \frac{ax+b}{(x-2)^2} \quad \text{بنابراین:}$$

با توجه به ضابطه‌ی  $f$ ، هنگامی  $g$  با  $f$  مساوی است که  $x=2$  ریشه‌ی صورت کسر  $g$  نیز باشد پس داریم:

$$ax+b=0 \xrightarrow{x=2} 2a+b=0 \rightarrow b=-2a \quad g(x) = \frac{ax+b}{(x-2)^2} = \frac{ax-2a}{(x-2)^2} = \frac{a(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2}$$

$$b=-2a=-6 \rightarrow a+b+c=3-6-4=-7 \quad \text{پس } f(x) = \frac{3}{x-2} \text{ مساوی } f \text{ ضابطه}$$

به ازای چند مقدار صحیح  $a$ ، دو تابع  $f(x) = x^2 + 2ax + 13$  و  $g(x) = |x^2 + 2ax + 13|$  برابرند؟

$$\begin{matrix} 8 & (4) & 7 & (3) & 5 & (2) & 6 & (1) \end{matrix}$$

دو تابع  $f$  و  $g$  هنگامی با هم برابرند که همواره  $f \geq 0$  باشد یعنی عبارت درجه دوم  $x^2 + 2ax + 13 \geq 0$  پس باید  $\Delta \leq 0$  باشد.

$$\Delta = (2a)^2 - 4(1)(13) = 4a^2 - 52 \xrightarrow{\Delta \leq 0} 4a^2 - 52 \leq 0 \rightarrow a^2 \leq 13 \rightarrow -\sqrt{13} \leq a \leq \sqrt{13}$$

بنابراین اعداد صحیحی که در این فاصله قرار دارند عبارتند از:  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

به ازای چند مقدار  $a$  دو تابع  $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2a}{x^2 + x - a}$  و  $g(x) = a^3 - a + 2$  با هم برابرند.

$$\begin{matrix} 2 & (4) & 3 & (3) & 1 & (2) & 0 & (1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2(x^2 + x - a)}{x^2 + x - a} = 2 \\ g(x) = a^3 - a + 2 \end{cases} \xrightarrow{f=g} \begin{cases} a^3 - a + 2 = 2 \rightarrow a^3 - a = 0 \\ a(a^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

از طرفی باید  $D_f = D_g = \mathbb{R}$  باشد پس مخرج کسر تابع  $f$  باید مخالف صفر باشد بنابراین  $\Delta$  مخرج منفی است.

$$x^2 + x - a = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 4a < 0 \rightarrow a < -\frac{1}{4}$$

با توجه به رابطه‌ی فوق فقط  $a = -1$  قابل قبول است.

اگر دو تابع  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$  و  $g(x) = \frac{x - 2c}{x^3 - 5x^2 + ax - b}$  برابر باشند. حاصل  $a - b + 2c$  کدام است؟

$$\begin{matrix} 6 & (4) & 14 & (3) & 10 & (2) & 2 & (1) \end{matrix} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 + ax - b = 0 \\ \xrightarrow{x=1} 1 - 5 + a - b = 0 \rightarrow a - b = 4 \\ x^3 - 5x^2 + ax - b = 0 \\ \xrightarrow{x=2} 8 - 20 + 2a - b = 0 \rightarrow 2a - b = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x - 2c}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x - 2c}{(x-2)^2(x-1)} \quad f(x) = g(x) \rightarrow x - 2c = x - 2 \rightarrow c = 1$$

پس  $a - b + 2c = 8 - 4 + 2 = 6$  است.

اگر تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \neq -1 \\ \frac{c}{x-1} & x = -1 \end{cases}$  با یک تابع همانی برابر باشد حاصل  $a - b + c$  کدام است؟

تابع  $f(x)$  با تابع  $g(x) = x$  برابر است پس داریم:

$$f(-1) = g(-1) \rightarrow \frac{c}{-1-1} = -1 \rightarrow c = 2$$

تابع  $f(x)$  با تابع  $g(x) = x$  برابر است پس داریم:

$$x \neq -1 \rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow \frac{x^2 + ax + b}{x+1} = x \rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + x \rightarrow a = 1, b = 0$$

پس حاصل  $a - b + c = 1 - 0 + 2 = 3$  می‌باشد.

اگر دو تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^3 + b}{2x^3 - c}$  و  $g$  با ضابطه  $g(x) = 2$  و دامنه  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$  باهم برابر باشند، حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

دو تابع  $f$  و  $g$  باهم مساویند پس  $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$  است پس  $x = -1$  ریشهٔ مخرج تابع  $f$  است.

$$2x^3 - c = 0 \xrightarrow{x=-1} 2(-1)^3 - c = 0 \rightarrow -2 - c = 0 \rightarrow c = -2$$

همچنین  $f(x) = g(x)$  پس داریم:

$$\frac{ax^3 + b}{2x^3 + 2} = 2 \rightarrow ax^3 + b = 4x^3 + 4 \rightarrow a = 4, b = 4$$

پس  $a + b + c = 4 + 4 - 2 = 6$  است

تساوی تابع‌های زیر را بررسی کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \end{cases}$$

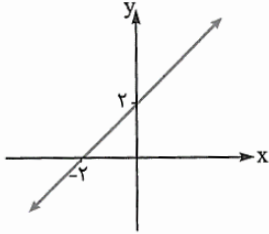
باز هم اول می‌رویم سراغ دامنهٔ تابع‌ها:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 1 \Rightarrow D_f = (1, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline x & - & 0 & + & + \\ \hline x-1 & - & - & 0 & + \\ \hline \frac{x}{x-1} & + & 0 & - & + \end{array} \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

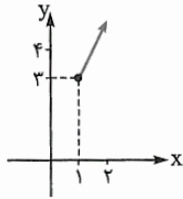
چون دامنهٔ دو تابع، با هم برابر نیستند پس لازم نیست برویم سراغ ضابطه‌ها و همین‌جا می‌توانیم بگوییم دو تابع با هم مساوی نیستند.

**انواع تابع:** در این درس با توابع ۱- گویا ۲- رادیکالی (ریشه دوم) ۳- پله ای (جزء صحیح) آشنا می شویم. البته قبل از اینکه به بحث در مورد توابع گویا بپردازیم به موارد زیر توجه کنید

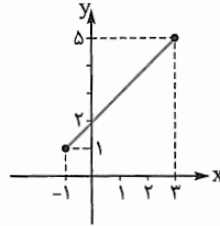
هر تابعی که نمودارش بخشی از یک خط راست باشد، تابع خطی است. ضابطه تابع خطی به شکل  $f(x) = ax + b$  است. دامنه تابع خطی ممکن است  $\mathbb{R}$  یا زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. مثلاً نمودار تابع  $f(x) = x + 2$  با دامنه‌های  $\mathbb{R}$ ،  $(-\infty, 2)$ ،  $[-1, 3]$ ،  $[1, +\infty)$  و  $\{-1, 0, 1, 2\}$  به صورت زیر است:



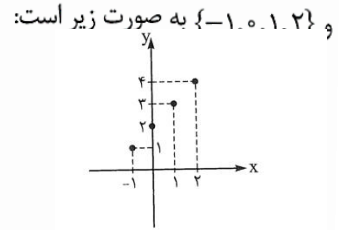
$$f(x) = x + 2, D = \mathbb{R}$$



$$f(x) = x + 2, D = [1, +\infty)$$



$$f(x) = x + 2, D = [-1, 3]$$



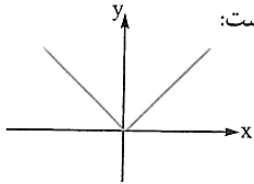
$$f(x) = x + 2, D = \{-1, 0, 1, 2\}$$

برد تابع خطی را با توجه دامنه ی آن از روی نمودار تابع پیدا می کنیم.

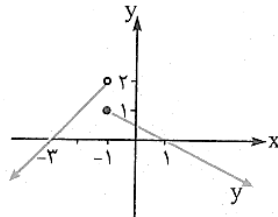
**تابع ثابت:** تابعی که ضابطه‌اش به شکل  $f(x) = c$  باشد، یک تابع ثابت است. برد تابع ثابت یک مجموعه تک‌عضوی است و نمودارش قسمتی یا تمام نقاط یک خط راست موازی محور  $x$  ها (یا همان خط افقی) است. برای این که ببینیم یک تابع، ثابت هست یا نه، باید بررسی کنیم آیا مقدار تابع، به ازای تمام مجموعه مقادیر  $x$  متعلق به دامنه، یکسان است یا نه.

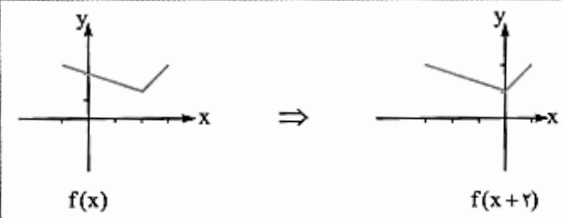
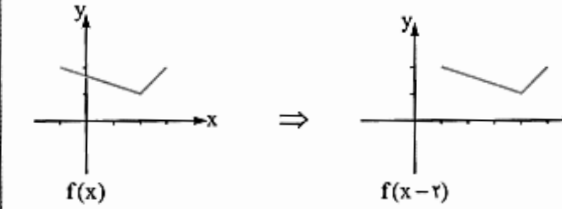
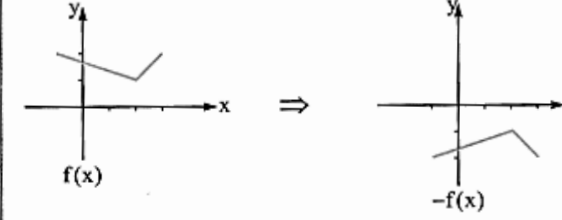
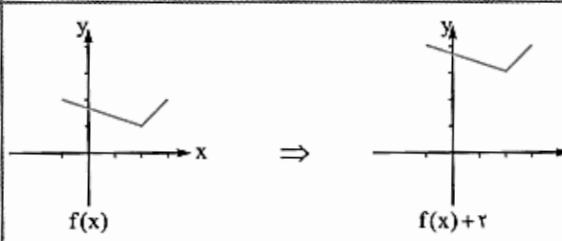
**تابع همانی:** تابع  $f(x) = x$  (با هر دامنه دلخواه) یک تابع همانی است، یعنی به هر مقدار  $x$ ، همان مقدار را برای  $y$  نسبت می‌دهد. نمودار تابع همانی، قسمتی یا تمام خط  $y = x$  (یا نیمساز ناحیه اول و سوم) است.

**تابع قدرمطلق:** تابع قدرمطلق به صورت  $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$  تعریف می‌شود. قدرمطلق هر عدد غیرصفر برابر مقدار مثبت آن عدد و قدرمطلق صفر برابر صفر است، یعنی اگر عدد یا عبارت داخل قدرمطلق بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد به همان صورت از قدرمطلق خارج می‌شود و اگر منفی باشد قرینه می‌شود (یا به طور فودمانی، می‌گوییم در منفی ضرب می‌شود) نمودار تابع قدرمطلق به شکل روبه‌رو است:



حاصل  $f(-2) + f(2)$  کدام است؟



| تابع     | روش رسم   | مثال  |
|----------|---|---|
| $f(x+a)$ | نمودار $f(x)$ را به اندازه $(-a)$ واحد در راستای محور $x$ ها انتقال می‌دهیم (یعنی $a$ واحد به سمت چپ).  |   |
| $f(x-a)$ | نمودار تابع $f(x)$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $x$ ها انتقال می‌دهیم (یعنی $a$ واحد به سمت راست).  |   |
| $-f(x)$  | نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور $x$ ها قرینه می‌کنیم (عرض تمام نقاط قرینه می‌شود).   |   |
| $f(x)+b$ | نمودار تابع $f(x)$ را به اندازه $b$ واحد در راستای محور $y$ ها انتقال می‌دهیم<br>$(b)$ واحد به سمت بالا با شرط $b > 0$ و $ b $ واحد به سمت پایین به شرط $b < 0$ . |  |

۱- تابع گویا :

هر تابع مانند  $f(x)$  که بتوان ضابطه آن را به صورت  $y = \frac{p(x)}{q(x)}$  نوشت که در آن  $p(x)$  و  $q(x)$  دو چند جمله‌ای هستند و  $q(x) \neq 0$

را یک تابع گویا می‌نامند.

**مثال ۱:** هر یک از توابع زیر ضابطه یک تابع گویا هستند.

الف)  $y = \frac{1}{x}$

ب)  $y = \frac{5x-1}{2x+1}$

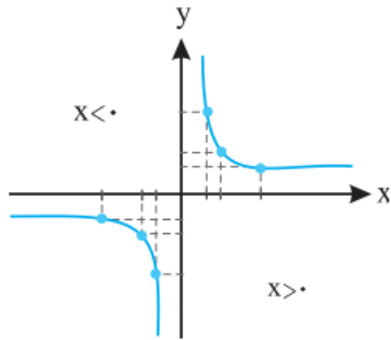
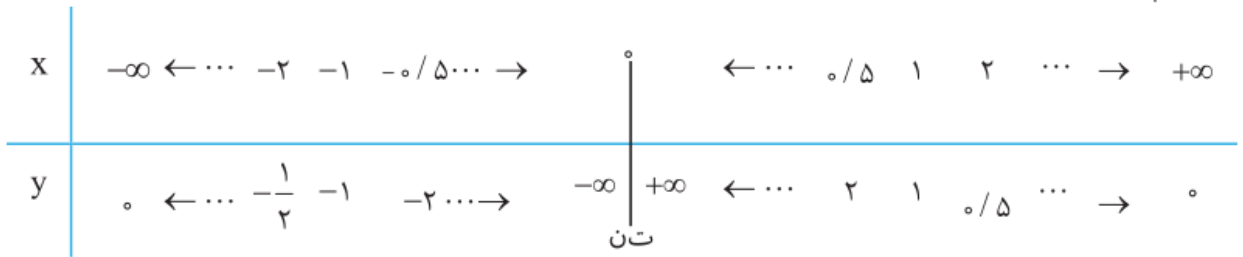
پ)  $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{x^2-7x}$

**تذکر**

- ۱) هر تابع چندجمله‌ای یک تابع گویا است ولی عکس این جمله درست نیست.
- ۲) هر تابع ثابت، یک تابع گویا است.
- ۳) مجموع، تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو تابع گویا، یک تابع گویا است.
- ۴) دامنه یک تابع گویا ممکن است هر مجموعه دلخواهی باشد.

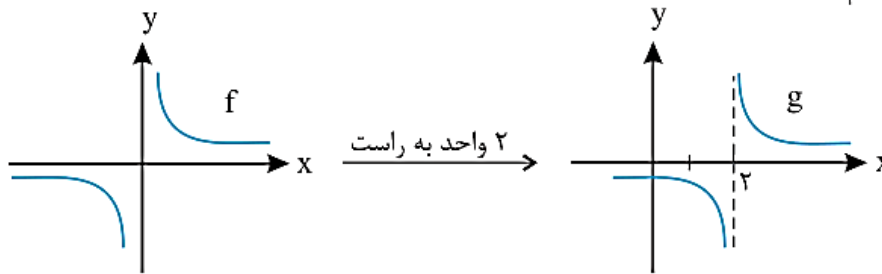


ساده‌ترین نوع این توابع، تابع با ضابطه  $y = \frac{1}{x}$  است. که به ازای  $x = 0$  تعریف نشده و نمودار آن به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود.



نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \frac{1}{x-2}$  را به کمک انتقال تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  رسم کنید. مثال

با توجه به ضابطه  $f$  و  $g$  می‌توان نتیجه گرفت که  $g(x) = f(x-2)$  است، پس برای رسم تابع  $g$  کافی است نمودار  $f$  را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، پس داریم: پاسخ

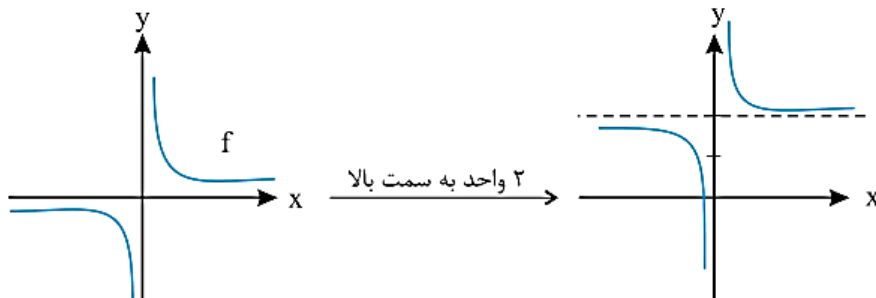


نمودار تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \frac{2x+1}{x}$  را به کمک انتقال تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  رسم کنید. مثال

ابتدا ضابطه  $g$  را ساده‌تر می‌نماییم: پاسخ

$$g(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$$

پس  $g(x) = f(x) + 2$ ، حال به کمک انتقال نمودار تابع  $g$  را رسم می‌کنیم:



رسم نمودار تابع  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  به روش سریع:

$R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$  و  $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$  است.

①  $ad - bc > 0$   $\Leftarrow$  شاخه‌های منحنی صعودی‌اند و نمودار مثل  $-\frac{1}{x}$  یعنی  $x$  است.

$\Leftarrow$  نمودار تابع به اندازه  $\frac{-d}{c}$  (یعنی ریشهٔ مخرج) در راستای محور  $x$ ‌ها و به اندازه  $\frac{a}{c}$  در راستای محور  $y$ ‌ها منتقل می‌شود.

②  $ad - bc < 0$   $\Leftarrow$  شاخه‌های منحنی نزولی‌اند و نمودار مثل  $\frac{1}{x}$  یعنی  $x$  است.

$\Leftarrow$  نمودار تابع به اندازه  $\frac{-d}{c}$  (یعنی ریشهٔ مخرج) در راستای محور  $x$ ‌ها و به اندازه  $\frac{a}{c}$  در راستای محور  $y$ ‌ها منتقل می‌کنیم.

برد تابع  $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ ،  $D_f = (-\infty, 2) - \{2\}$  کدام است؟

(۱)  $[0, +\infty)$

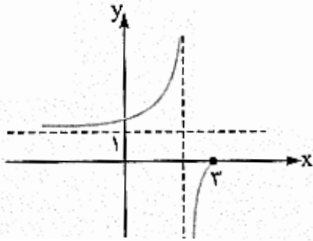
(۲)  $[0, 1]$

(۳)  $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

(۴)  $(-\infty, 0], [1, +\infty)$

با توجه به مطالب گفته‌شده برد تابع  $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$  برابر است با  $\mathbb{R} - \{1\}$  ولی

با توجه به دامنهٔ تابع،  $R_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ .



دامنه تابع گویا:

توابع گویا به ازای  $x$  هایی که مخرج کسر را صفر می کنند تعریف نشده است، بنابراین دامنه این توابع {ریشه های مخرج} -  $\mathbb{R}$  است.

نکته

برای پیدا کردن دامنه توابع گویا در صورت ساده شدن کسر مجاز به این کار نیستیم زیرا ممکن است دامنه تغییر کند.

۱ قبل از پیدا کردن دامنه حق نداریم تابع را ساده کنیم، چون ممکن است ریشه ای از مخرج حذف شود، مثلاً:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{درست}} x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad \checkmark \\ \xrightarrow{\text{نادرست}} f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}, x=0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad \times \end{cases}$$

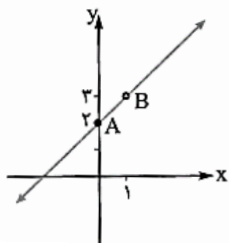
۲ اگر در صورت و مخرج ضابطه تابع، کسر دیگری داشته باشیم، باید ریشه مخرج های این کسرها را هم پیدا کنیم، مثلاً:

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x+1}}{1 - \frac{3}{x^2-1}} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{درست}} \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-1=0 \Rightarrow x=1, x=-1 \\ 1 - \frac{3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=2, x=-2 \end{cases} \\ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2, -1, 1\} \quad \checkmark \\ \xrightarrow{\text{نادرست}} f(x) = \frac{\frac{x+1+1}{x+1}}{\frac{x^2-1-3}{x^2-1}} = \frac{\frac{x+2}{x+1}}{\frac{x^2-4}{(x-1)(x+1)}} = \frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-2)(x+1)} \\ = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad \times \end{cases}$$

۳ اگر صورت و مخرج یک تابع گویا ریشه مشترک داشته باشند، می توانیم  $x$  را مخالف ریشه مورد نظر، فرض کنیم و ضابطه تابع را ساده کنیم. با این روش می توانیم، نمودار این تابع ها را به راحتی رسم کنیم. نمودار این تابع ها در ریشه مشترک صورت و مخرج (که متعلق به دامنه تابع نیست) نقطه توخالی دارد.

مثلاً بیایید نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$  را رسم کنیم:  $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \xrightarrow{x \neq 1} f(x) = x + 2$

پس ضابطه تابع به صورت  $f(x) = x + 2 (x \neq 1)$  است، یعنی نمودار تابع یک خط راست است که در نقطه  $x = 1$  (یعنی نقطه  $(1, 3)$ ) توخالی است:



$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2 \Rightarrow A(0, 2)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 2 = 3 \Rightarrow B(1, 3)$$

دقت کنید با این که  $1 \notin D_f$  اما مفصلات نقطه  $B(1, 3)$  را پیدا می کنیم تا این نقطه را توخالی رسم کنیم.

مثال دامنه توابع گویا با ضابطه‌های زیر را پیدا کنید.

الف)  $y = \frac{7x-4}{2x-5}$     ب)  $y = \frac{x^2-4x}{x^2+x+1}$     پ)  $y = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$     ت)  $y = \frac{x}{x-2} + \frac{5}{x^2-3x}$

پاسخ

الف) ابتدا ریشه مخرج را بدست می‌آوریم:

پس دامنه تابع برابر است با  $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ .

ب)

پس معادله فوق ریشه ندارد و  $D = \mathbb{R}$  است.

پ)

پس  $D = \mathbb{R} - \{ \dots, \dots \}$  است.

ت)

این تابع از مجموع دو تابع کسری تشکیل شده پس داریم:

پس  $D = \mathbb{R} - \{ \dots, \dots, \dots \}$  است.

ریشه مخرج:  $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = \dots \\ x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases} \end{cases}$

تست دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x^2 - \frac{16}{x}}$  برابر کدام است؟  
 ۱)  $\mathbb{R}$     ۲)  $\mathbb{R} - \{-2\}$     ۳)  $\mathbb{R} - \{2, -2\}$     ۴)  $\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$

همان‌طور که گفتیم تمام مخرج‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - \frac{16}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3 - 16}{x} = 0 \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = 2, x = -2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$

مثال نشان دهید دو تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$  باهم مساوی نیستند.

پاسخ

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow D_f = \dots$

$g(x) = \frac{x-1}{x^2-x} \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases} \rightarrow D_g = \dots$

پس  $D_f \neq D_g$ ، از طرفی داریم:

$g(x) = \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{x-1}{x(x-1)} \xrightarrow{1 \notin D_g} g(x) = \frac{\cancel{x-1}}{x(\cancel{x-1})} = \frac{1}{x}$

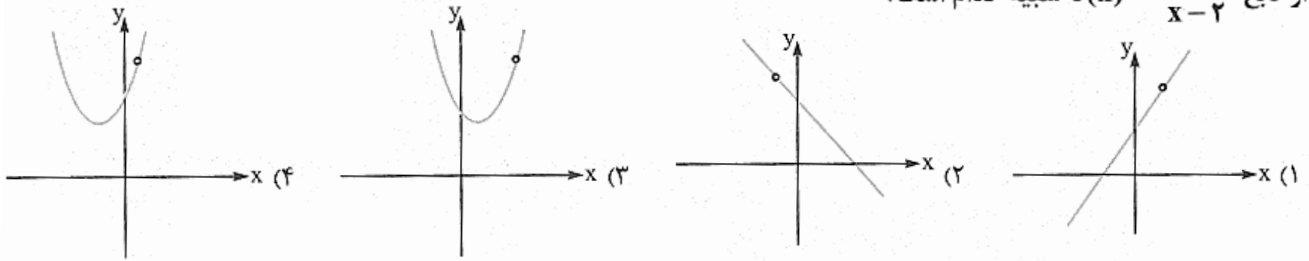
چون شرط اول تساوی دو تابع برقرار نبود پس دو تابع  $f$  و  $g$  باهم مساوی نیستند.

مثال ۶: دامنه هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

الف)  $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

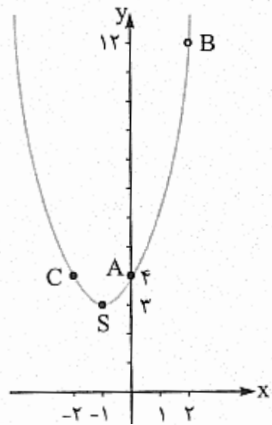
ب)  $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}}$

نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 2}$  شبیه کدام است؟



اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 2} \Rightarrow f(x) = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \xrightarrow{x \neq 2} f(x) = x^2 + 2x + 4$$



پس ضابطه  $f$  به صورت  $f(x) = x^2 + 2x + 4$  ( $x \neq 2$ ) است، یعنی نمودار تابع یک سهمی است (که رسمش را پارسال یاد گرفتیم) که در نقطه  $x = 2$  (یعنی نقطه  $(2, 12)$ ) یک نقطه توخالی دارد:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4, x \neq 2$$

$$S \Big|^{-1} \Rightarrow y = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow S \Big|_3^{-1}, A(0, 4), B(2, 12), C(-2, 4)$$

کدام گزینه ضابطه تابع با نمودار مقابل است؟

$$f(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 1}{x - 1} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 1}{1 - x} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} \quad (3)$$

نمودار داده شده یک تابع خطی است که در نقطه  $x = 1$  توخالی است (یعنی  $x = 1$  جزء دامنه تابع نیست) پس

$$(0, 1), (1, -1) \Rightarrow m = \frac{-1 - 1}{1 - 0} = -2 \Rightarrow y = -2x + 1 \quad \text{معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(0, 1)$  و  $(1, -1)$  را می‌نویسیم:}$$

پس ضابطه تابع به صورت  $f(x) = -2x + 1$  و  $x \neq 1$  است. ( $x \neq 1$  را به این علت می‌نویسیم که  $x = 1$  جزء دامنه نبود) حالا برای

این که ضابطه را به شکل کسری تبدیل کنیم، ضابطه تابع یعنی  $-2x + 1$  را در عامل  $x - 1$  ضرب و تقسیم می‌کنیم:

چون نوشتن  $x - 1$  در مخرج باعث می‌شود که  $x = 1$  جزء دامنه نباشد و از طرفی صورت و مخرج ضرب عبارت در  $x - 1$  باعث می‌شود

$$f(x) = \frac{(-2x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \frac{-2x^2 + 2x + x - 1}{x - 1} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$$

که عبارت (در نقاط دیگر) تغییر نکند، پس:

حالا ممکن است فکر کنیم که این ضابطه در گزینه‌ها نیست، اگر دقت کنیم و صورت و مخرج کسر به دست آمده را در منفی (یعنی در  $-1$ )

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x - 1} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x}$$

ضرب کنیم، داریم:

ریشه‌های مخرج  $\mathbb{R} - \{ \dots \}$

پاسخ  
الف  
ب

ریشه مخرج:  $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \dots$  یا  $x = \dots \rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{ \dots, \dots \}$

مخرج کسر کوچک:  $x + 1 = 0 \rightarrow x = \dots$

مخرج کسر بزرگ:  $1 + \frac{1}{x+1} = 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گیری}} \frac{x+1+1}{x+1} = 0 \rightarrow \frac{x+2}{x+1} = 0 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x = \dots$

پس  $D = \mathbb{R} - \{ \dots, \dots \}$  است.

**مثال** اگر دامنه تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{2x+7}{x^2+ax+1}$  برابر  $\mathbb{R}$  شود حدود  $a$  را بیابید.

**پاسخ** هنگامی دامنه تابع  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است که مخرج کسر ریشه نداشته باشد. چون معادله مخرج کسر درجه دوم است.

پس باید  $\Delta$  آن منفی باشد، بنابراین داریم:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \rightarrow \Delta = a^2 - 4 < 0 \rightarrow a^2 < 4 \rightarrow -2 < a < 2$$

**مثال** اگر دامنه تابع  $y = \frac{x+3}{x^2+ax+b}$  برابر  $\mathbb{R} - \{-2\}$  باشد،  $a+b$  کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

**پاسخ** با توجه به این که در دامنه تابع فقط عدد  $-2$  از مجموعه اعداد حقیقی خارج شده پس مخرج کسر دارای یک ریشه  $-2$

$$x^2 + ax + b = 0 \rightarrow \Delta = a^2 - 4b = 0$$

است و این یعنی  $\Delta$  معادله برابر با صفر است، پس داریم:

$$x = \frac{-a}{2} = -2 \rightarrow a = 4$$

همچنین می‌دانیم هرگاه  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای ریشه مضاعف  $x = \frac{-b}{2a}$  است، پس داریم:

پس  $b = \dots$  و  $a+b = \dots$  است، بنابراین گزینه ..... صحیح است.

**مثال** تابع  $f$  با ضابطه  $y = \frac{x^2+1}{x}$  مفروض است.

الف) آیا از دستگاه  $f, y=1$  خارج می‌شود؟

ب) اگر  $y = m$  از دستگاه خارج شود  $m$  باید چه شرطی داشته باشد؟

پ) برد تابع را بیابید.

پاسخ

$$\frac{x^2+1}{x} = 1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

الف) در ضابطه تابع به جای  $y$  عدد  $1$  را قرار می‌دهیم تا ورودی دستگاه را بیابیم:

چون  $\Delta$  منفی است، معادله جواب ندارد بنابراین  $y=1$  نمی‌تواند از دستگاه خارج شود.

$$\frac{x^2+1}{x} = m \rightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \xrightarrow{(1)} \Delta = (-m)^2 - 4(1)(1) \rightarrow \Delta = m^2 - 4$$

ب)

$$m^2 - 4 \geq 0 \rightarrow m \leq -2 \text{ یا } m \geq 2$$

هنگامی معادله درجه دوم (۱) دارای جواب است که  $\Delta \geq 0$  باشد، پس

$$Ry = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

پ) با توجه به قسمت ب می‌توان نتیجه گرفت برد تابع برابر است با:

**مثال** دامنه هر یک از توابع کسری که شامل قدرمطلق هستند را بیابید.

الف)  $y = \frac{x-3}{|x|-2}$

ب)  $y = \frac{x^2-x}{|x-1|+5}$

**پاسخ**

الف) ابتدا ریشهٔ مخرج کسر را بدست می‌آوریم:

پس:  $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

ب) می‌دانیم  $|x-1|$  همواره یک عبارت نامنفی است پس جمع آن با ۵ نمی‌تواند برابر با صفر باشد، بنابراین مخرج کسر همواره مخالف با صفر است، پس  $D = \mathbb{R}$  است.

**نکته**

در تعیین دامنه توابع گویا در کاربردهای واقعی، ممکن است با محدودیت‌های بیشتری مواجه باشیم.

$y = \frac{255x}{100-x}$

**مثال**

۸:

اگر هزینه پاک‌سازی  $x$  درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای بوسیله تابع  $f$  با ضابطه

محاسبه شود که در آن  $x$

درصد آلودگی و  $y$  هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

دامنه این تابع را در این حالت (واقعی) بیابید.

**پاسخ**

در این تابع، علاوه بر این که مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد محدودیت‌های زیر نیز وجود دارد.

اولاً:  $x$  نمی‌تواند منفی یا صفر باشد یعنی  $x > 0$

ثانیاً:  $y$  (هزینه پاک‌سازی) نیز مثبت است چون  $x > 0$  است صورت کسر  $y$  نیز مثبت و در نتیجه باید مخرج کسر آن نیز مثبت باشد، یعنی:

$100 - x > 0 \rightarrow x < 100$

$D = (\dots, \dots)$

حال اگر از دو وضعیت بالا اشتراک بگیریم دامنهٔ این تابع بدست می‌آید:

نوشتن ضابطه:

در بعضی از مسائلی که شامل یک موضوع کاربردی هستند، باید ضابطهٔ یک تابع گویا را بنویسیم و بعد مسئله را حل کنیم. معمولاً در این سؤال‌ها تابعی گویا برحسب متغیری که با توجه به صورت سؤال تعریف می‌کنیم، می‌نویسیم. مثال زیر را با هم ببینیم:

دانش‌آموزی در ۴ امتحان از ۱۰ امتحانی که از اول سال داده است، نمرهٔ ۲۰ گرفته است. خانوادهٔ دانش‌آموز قول داده‌اند اگر در بیشتر از ۸۰ درصد امتحان‌ها نمرهٔ ۲۰ بگیرد، برایش یک PS4 جایزه بگیرند! اگر او بتواند در تمام امتحان‌هایی که از این به بعد می‌دهد ۲۰ شود، حداقل چند امتحان دیگر باید بدهد تا صاحب یک PS4 شود؟

۴۱ (۴)

۴۰ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

**پاسخ**

اگر دانش‌آموز بعد از این  $x$  امتحان بدهد کلاً  $x + 10$  امتحان داده که در  $x + 4$  تای آن‌ها نمرهٔ ۲۰ گرفته است،

پس ضابطهٔ تابعی که نشان‌دهندهٔ درصد نمره‌های ۲۰ اوست، برابر است با  $f(x) = \frac{x+4}{x+10} \times 100$  به خاطر این است که مقدار تابع

به درصد بیان می‌شود. حالا باید حداقل  $x$  را طوری حساب کنیم که مقدار تابع  $f(x)$  بزرگ‌تر از ۸۰ شود:

$f(x) > 80 \Rightarrow \frac{x+4}{x+10} \times 100 > 80 \Rightarrow 100x + 400 > 80x + 800 \Rightarrow 20x > 400 \Rightarrow x > 20$

پس دانش‌آموز باید بیشتر از ۲۰ امتحان دیگر بدهد که حداقلش می‌شود  $20 + 1 = 21$ .

## تست آموزشی

اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+ax-12}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{b-1, -b\}$  باشد، تعداد اعداد صحیح بازه  $[-4a, 6a]$  که عضو دامنه

تابع  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-4}}$  هستند، کدام است؟

- ۱) صفر      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۴

می‌دانیم دامنه تابع گویای  $f$  به صورت:

{ریشه‌های مخرج}  $D_f = \mathbb{R} - \{b-1, -b\}$  می‌باشد. بنابراین،  $b-1$  و  $-b$  ریشه‌های عبارت  $x^2 + ax - 12$  هستند، حال از آنجایی که مجموع این ریشه‌ها برابر است با  $(-a)$ ، پس داریم:

$$(-b) + (b-1) = (-a) \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow a = 1$$

از طرفی برای به دست آوردن دامنه تابع  $g(x)$ ، داریم:

$$|x| - 4 > 0 \Rightarrow |x| > 4 \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$$

بنابراین اعداد صحیح بازه  $[-4, 6]$  که عضو  $D_g$  می‌باشند عبارتند از  $\{5, 6\}$ .

تابع  $f(x) = 3x + 2$  با دامنه  $[-1, 2]$  مفروض است. اگر برد تابع  $f$  دامنه تابع  $g(x) = \frac{x-1}{2}$  باشد، بزرگ‌ترین عضو صحیح برد تابع  $g$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

از روی دامنه  $f$  تابع  $f$  را می‌سازیم تا برد  $f$  حاصل شود.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -1 \leq 3x + 2 \leq 8$$

لذا دامنه تابع  $g$  بازه  $[-1, 8]$  است.

$$-1 \leq x \leq 8 \Rightarrow -1 - 1 \leq x - 1 \leq 8 - 1 \Rightarrow -\frac{2}{2} \leq \frac{x-1}{2} \leq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 3/5$$

اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 8x - b + 1}{x^2 + ax - 10}$  به صورت  $D_f = \mathbb{R} - \{5, b\}$  و  $f(c) = 1$  باشد، آن‌گاه  $c$  کدام است؟

- ۱) ۲/۶      ۲) -۲/۶      ۳) ۲/۴      ۴) -۲/۴

چون دامنه تابع  $f$  به صورت  $\mathbb{R} - \{5, b\}$  است، پس  $x = 5$  ریشه مخرج  $f$  است:

$$5^2 + 5a - 10 = 0 \Rightarrow a = -3$$

با جای گذاری  $a = -3$ ، مخرج تابع  $f$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا  $b$  نیز به دست آید:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

با جای گذاری  $a = -3$  و  $b = -2$ ، معادله  $f(c) = 1$  را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 3}{x^2 - 3x - 10} \xrightarrow{f(c)=1} c^2 - 8c + 3 = c^2 - 3c - 10 \Rightarrow 5c = 13 \Rightarrow c = \frac{13}{5} = 2/6$$



رابطه  $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$  یک تابع است؟

(۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $2$  (۴) هیچ مقدار  $m$

$$A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$$

دو زوج مرتب  $(3, m^2)$  و  $(3, m+2)$  مؤلفه‌های اول یکسان دارند، پس مؤلفه‌های دومشان هم باید مساوی باشند:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

(چون در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  داریم  $a + c = b$ ، پس یکی از ریشه‌ها برابر  $-1$  و دیگری برابر  $-\frac{c}{a}$  است)

حالا رابطه را به ازای  $m = -1$  و  $m = 2$  می‌نویسیم که ببینیم کدامشان تابع است:

$$m = -1 \Rightarrow A = \{(3, +1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$
 تابع است.

$$m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$$
 تابع نیست.

در یک تابع خطی  $f(0) = 2$  و  $f(-2) = 5$ ، مقدار  $f(4)$  برابر کدام است؟

(۱)  $-4$  (۲)  $4$  (۳)  $-2$  (۴)  $2$

چون  $f(0) = 2$  و  $f(-2) = 5$  معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(0, 2)$  و  $(-2, 5)$  را می‌نویسیم:

$$m = \frac{2-5}{0-(-2)} = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$$

$$f(4) = -\frac{3}{2}(4) + 2 = -6 + 2 = -4$$
 حالا  $f(4)$  را پیدا می‌کنیم:

کدام یک از تابع‌های زیر، یک تابع ثابت است؟

(۱)  $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2}}{3x}$  (۲)  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2}}{|x|}$  (۳)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$  (۴)  $f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

می‌دانیم تابع ثابت تابعی است که مقدارش همواره برابر یک عدد ثابت باشد، پس ضابطه هر کدام از گزینه‌ها را ساده می‌کنیم:

(۱)  $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2}}{3x} = \frac{|3x|}{3x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  \* (فقط یادتان هست که  $\sqrt{a^2} = |a|$ )

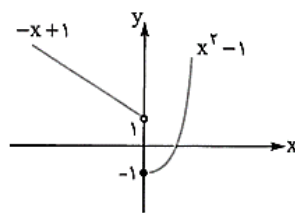
(۲)  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2}}{|x|} = \frac{|2x|}{|x|} = \frac{2|x|}{|x|} = 2, x \neq 0$  ✓ پس (۲) تابع ثابت است، یعنی در (۲) داریم  $f(x) = 2$  و  $x \neq 0$ .

(۳)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$  \*

(۴)  $y = \frac{x - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$  \*

برد تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ -x + 1 & x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

(۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $[-1, 1]$  (۳)  $[1, +\infty)$  (۴)  $[-1, +\infty)$



نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ -x + 1 & x < 0 \end{cases}$  را رسم می‌کنیم:

همان‌طور که روی شکل می‌بینیم، برد تابع

(یعنی تصویر نمودار تابع روی محورهایها یا مجموعه عرض نقاط نمودار) برابر است با:  $[-1, +\infty)$

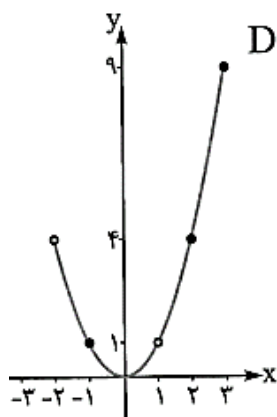
برد تابع با ضابطه  $f(x) = x^2$  و دامنه  $\{-1\} - (-2, 3)$  برابر کدام است؟

(۴)  $\{1, 4\} - [0, 9]$

(۳)  $(4, 9]$

(۲)  $\{-1\} - [0, 9]$

(۱)  $[0, 9]$



بهترین راه برای پیدا کردن برد رسم نمودار تابع است:  $f(x) = x^2$   $D_f = \{-1\} - (-2, 3)$

با توجه به نمودار، برد تابع برابر است با  $[0, 9]$ . دقت کنید که شرط  $x \neq 1$  در دامنه در این بازه تأثیری در برد ندارد؛ چون مقدار  $y = 1$  به ازای  $x = -1$  به دست می‌آید و از طرف دیگر با این که دامنه در  $x = -2$  باز است اما مقدار  $y = 4$  به ازای  $x = 2$  به دست می‌آید.

بازیکنی ۱۰ پنالتی زده و ۶ تایی آن‌ها را گل کرده است. اگر بعد از این، تمام پنالتی‌های خود را گل کند، ضابطه تابعی که نشان‌دهنده درصد پنالتی‌های گل‌شده او نسبت به تعداد پنالتی‌هایی که زده است، کدام است؟

(۴)  $f(n) = \frac{n+6}{n+10}$

(۳)  $f(n) = \frac{100n+600}{n+10}$

(۲)  $f(n) = \frac{n-4}{n}$

(۱)  $f(n) = \frac{100n-400}{n}$

اگر تعداد کل پنالتی‌ها را  $n$  فرض کنیم، بازیکن ۱۰ پنالتی از این  $n$  پنالتی را زده و ۶ تایش را گل کرده، پس بعد از این  $n - 10$  پنالتی می‌زند که قرار است تمام  $n - 10$  پنالتی گل شود، یعنی تعداد پنالتی‌های گل‌شده برابر است با  $n - 4$ ،  $n - 10 + 6 = n - 4$ ، از طرفی تعداد کل پنالتی‌ها برابر  $n$  است، پس نسبت پنالتی‌های گل‌شده به کل پنالتی‌ها برابر  $\frac{n-4}{n}$  و درصد گل‌شده این پنالتی‌ها برابر است با:

$$f(n) = \left(\frac{n-4}{n}\right)(100) = \frac{100n-400}{n}$$

بازیکنی ۲۰ پنالتی زده که ۱۲ تایش را گل کرده است. اگر او تمام پنالتی‌هایی که بعد از این می‌زند را گل کند، حداقل چند پنالتی دیگر باید بزند که درصد گل‌شدن پنالتی‌هایش از ۹۰ درصد بیشتر شود؟

(۴) ۶۱

(۳) ۶۰

(۲) ۵۹

(۱) ۵۸

اگر تعداد پنالتی‌هایی را که بعد از این می‌زند  $x$  فرض کنیم، تعداد پنالتی‌های گل‌شده‌اش برابر  $x + 12$  و تعداد کل پنالتی‌هایی که زده برابر  $x + 20$  است، پس درصد پنالتی‌های گل‌شده از تابع  $f(x) = \frac{x+12}{x+20}$  به دست می‌آید.

$$\frac{x+12}{x+20} \cdot 100 > 90 \Rightarrow 100x + 1200 > 90x + 1800 \Rightarrow 10x > 600 \Rightarrow x > 60$$

حالا باید داشته باشیم:

پس باید تعداد پنالتی‌هایی که بعد از این می‌زند، بیشتر از ۶۰ تا باشد که حداقلش می‌شود ۶۱.

دو کارگر به نقاشی کردن یک ساختمان مشغول اند. اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، اولی کار نقاشی را در ۱۲۰ روز و دومی در ۶۰ روز تمام می کند. هر دو با هم کار کنند، ضابطه تابعی که نشان دهنده نسبت قسمت نقاشی شده به قسمت نقاشی نشده پس از  $x$  روز است، کدام است؟

$$f(x) = \frac{40x}{40+x} \quad (۴) \quad f(x) = \frac{x}{40-x} \quad (۳) \quad f(x) = \frac{40x}{40-x} \quad (۲) \quad f(x) = \frac{x}{40+x} \quad (۱)$$

کارگر اول کار را در ۱۲۰ روز تمام می کند پس هر روز  $\frac{1}{120}$  کار را انجام می دهد و به همین ترتیب کارگر دوم در

هر روز  $\frac{1}{60}$  کار را انجام می دهد، پس وقتی با هم کار کنند هر روز  $\frac{1}{120} + \frac{1}{60} = \frac{1+2}{120} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$  کار را انجام

می دهند، بنابراین بعد از  $x$  روز  $\frac{x}{40}$  کار انجام می شود؛ بنابراین نسبت کار انجام شده به انجام نشده برابر است با:

$$f(x) = \frac{\frac{x}{40}}{1 - \frac{x}{40}} = \frac{\frac{x}{40}}{\frac{40-x}{40}} = \frac{x}{40-x}$$

کدام یک از ضابطه های زیر، متعلق به یک تابع گویا نیست؟

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \quad (۴) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x^2 + 1} \quad (۳) \quad f(x) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) \quad (۲) \quad f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{2x}-1}{\sqrt{3}-2x} \quad (۱)$$

می دانیم تابع گویا تابعی است که بتوان ضابطه اش را (قبل یا بعد ساده کردن) به شکل  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

نوشت که در آن  $p(x)$  و  $q(x)$  چندجمله ای هایی بر حسب  $x$  هستند. (یعنی توان  $x$  در صورت و مخرج تابع باید اعداد صحیح بزرگ تر یا مساوی صفر باشد) در بین گزینه ها، سه گزینه اول هر سه گویا هستند، چون:

$$\textcircled{۱} f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{2x}-1}{\sqrt{3}-2x} \Rightarrow \text{توان } x \text{ در صورت و مخرج صحیح و بزرگ تر یا مساوی صفر است}$$

$$\textcircled{۲} f(x) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x-1 \Rightarrow \text{تابع، یک تابع خطی (با دامنه } [0, +\infty) \text{) است}$$

$$\textcircled{۳} f(x) = \sqrt{x^2 + 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)^2} = x^2 + 1 \Rightarrow \text{تابع، یک تابع چندجمله ای و گویا است}$$

اما  $\textcircled{۴}$  گویا نیست چون توان  $x$  در مخرج برابر  $\frac{1}{4}$  است.

$$\text{دامنه تابع } f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1} \text{ برابر کدام است؟}$$

$$\emptyset \quad (۴)$$

$$\mathbb{R} \quad (۳)$$

$$\mathbb{R} - \{1, -1\} \quad (۲)$$

$$\mathbb{R} - \{1\} \quad (۱)$$

$$|x|-1=0 \Rightarrow x=1, -1$$

$$\text{در تابع } f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1} \text{ ریشه های مخرج تابع برابرند با:}$$

$$\text{پس دامنه تابع برابر است با: } \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

دامنه تابع  $f(x) = \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1, 2\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0, -1\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{1\}$

دقت کنید که برای پیدا کردن دامنه تابع  $f(x) = \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}}$  باید ریشه تمام مخرج‌ها را (چه مخرج‌هایی که به‌طور مستقیم می‌بینیم و چه مخرج خود تابع) پیدا کنیم:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ریشه مخرج‌های صورت کسر: } x=0, x=-1 \\ \text{ریشه مخرج‌های مخرج کسر: } x=0, x=2 \end{array}$$

ریشه مخرج کسر اصلی:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{x-2} \Rightarrow x-2 = -x \Rightarrow x=1$

پس ریشه‌های همه مخرج‌ها برابرند با  $0, -1, 2$  و  $1$  و دامنه تابع برابر است با  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1, 2\}$ .

تابع  $f(x) = \frac{|x|+1}{2x-|x|+3}$  در چند نقطه از  $\mathbb{R}$  تعریف نشده است؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

تابع کسری در ریشه‌های مخرجش تعریف نشده است، پس در تابع  $f(x) = \frac{|x|+1}{2x-|x|+3}$  باید ریشه‌های مخرج را

پیدا کنیم، یعنی معادله  $2x - |x| + 3 = 0$  را حل کنیم. برای این کار باید یک بار  $x \geq 0$  را و بار دیگر  $x < 0$

فرض کنیم:  $x \geq 0$   $2x - |x| + 3 = 0 \Rightarrow 2x - x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$  ✗

پس تابع در یک نقطه، یعنی  $x = -1$  تعریف نشده است.  $x < 0$   $2x - |x| + 3 = 0 \Rightarrow 2x + x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$  ✓

اگر  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0, 3\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{0, -2, 3\}$

تابع  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  برابر  $g(x) = \frac{1}{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}}$  است، پس برای پیدا کردن دامنه تابع  $g$  باید ریشه‌های

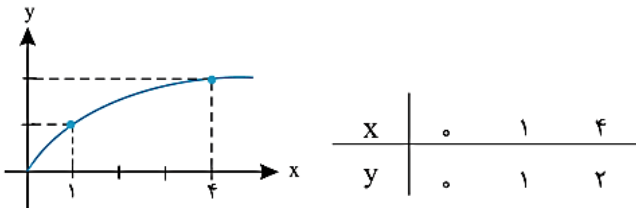
$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$  را پیدا کنیم: (دقت کنید که قبل از پیدا کردن دامنه نباید تابع  $g$  را به شکل  $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$  بنویسیم.)

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x=3, x=-2$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x=0, x=3$  بنابراین دامنه تابع  $g$  برابر است با  $\mathbb{R} - \{0, -2, 3\}$ .

می‌دانیم تنها اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و ضابطه آن را به صورت  $f(x) = \sqrt{x}$  نمایش می‌دهند.

نمودار این تابع به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود:

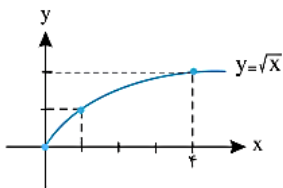


دامنه و برد تابع  $y = \sqrt{x}$  برابر  $[0, +\infty)$  است.

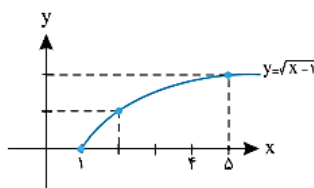
می‌دانیم  $\sqrt{p(x)}$  به شرطی تعریف می‌شود که  $p(x) \geq 0$  باشد. یعنی برای پیدا کردن دامنه یک تابع رادیکالی (رادیکال با فرجه ۲) باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم و نامعادله به دست آمده را حل کنیم. دامنه تابع برابر مجموعه جواب این نامعادله است. حتماً از پارسال یادتان هست که برای حل نامعادله‌ها، از روش مستقیم (فواصل نامساوی‌ها)، تعیین علامت، رسم هندسی، خواص قدرمطلق و ... استفاده می‌کنیم.

با استفاده از انتقال نمودار  $y = \sqrt{x}$  توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد آن را بیابید.

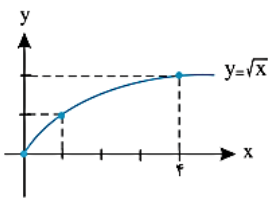
- الف)  $y = \sqrt{x-1}$       ب)  $y = -\sqrt{x} + 2$       پ)  $y = \sqrt{x+3}$       ت)  $y = \sqrt{x-1} + 3$



۱ واحد به سمت راست



پس  $D_y = [1, +\infty)$  و  $R_y = [0, +\infty)$  می‌باشد.  
(ب)



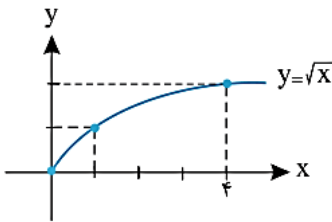
قرینه نسبت به محور...



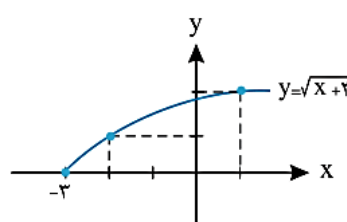
... واحد به سمت ...



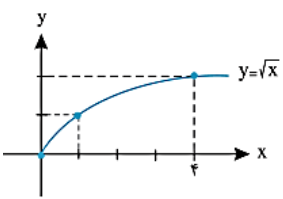
(پ) بنابراین  $D_y = \dots\dots\dots$  و  $R_y = \dots\dots\dots$  خواهد بود.



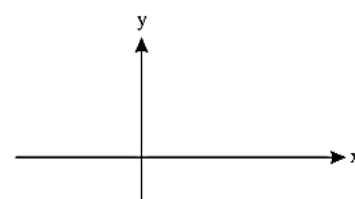
۳ واحد به سمت چپ



پس  $D_y = \dots\dots\dots$  و  $R_y = \dots\dots\dots$  خواهد بود.  
(ت)



۱ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا



پس  $D_y = \dots\dots\dots$  و  $R_y = \dots\dots\dots$  می‌باشد.

دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$  کدام است؟

- (۱)  $[1, 2]$  (۲)  $[1, 2)$  (۳)  $[1, +\infty)$  (۴)  $(2, +\infty)$

در ضابطه تابع دو رادیکال داریم، پس عبارت زیر رادیکال اولی را (یعنی  $x-1$ ) بزرگتر یا مساوی صفر و عبارت زیر رادیکال دومی را (یعنی  $2-x$ ) را بزرگتر از صفر قرار می‌دهیم (در دومی گفتیم بزرگتر یا مساوی صفر، چون عبارت در مخرج کسر است و نباید مساوی صفر شود):

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [1, 2)$$

دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - x^2} |x|$  برابر کدام است؟

- (۱)  $[0, +\infty)$  (۲)  $[1, +\infty)$  (۳)  $[0, 1]$  (۴)  $[-1, 1]$

باید نامعادله  $x^2 - x^2 |x| \geq 0$  را حل کنیم:

$$x^2(1-|x|) \geq 0 \xrightarrow{x^2 \geq 0} 1-|x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

(از پارسل داشتیم): پس دامنه تابع برابر است با:  $[-1, 1]$ .

دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{2x+|x-3|}$  کدام است؟

- (۱)  $[-3, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 3]$  (۳)  $[-6, +\infty)$  (۴)  $[3, +\infty)$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، پس باید نامعادله  $2x+|x-3| \geq 0$  را حل کنیم. چون ریشه عبارت داخل قدرمطلق (یعنی  $x-3$ ) برابر ۳ است، پس مجموعه اعداد حقیقی را به دو بازه  $x < 3$  و  $x \geq 3$  تقسیم و نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq 3 \Rightarrow 2x+|x-3| \geq 0 \Rightarrow 2x+x-3 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1 \\ \text{یا} \\ x < 3 \Rightarrow 2x+|x-3| \geq 0 \Rightarrow 2x-x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \end{cases} \xrightarrow{U} x \geq -3$$

پس دامنه تابع بازه  $[-3, +\infty)$  است.

**مثال** اگر دامنه تابع  $y = \sqrt{x^2 - x + (a-2)}$  برابر  $\mathbb{R}$  شود، حدود  $a$  را بیابید.

**پاسخ** هنگامی دامنه تابع  $y = \sqrt{x^2 - x + (a-2)}$  برابر  $\mathbb{R}$  است که عبارت  $x^2 - x + (a-2) \geq 0$  همواره نامنفی باشد. یعنی  $x^2 - x + (a-2) \geq 0$

پس باید  $\Delta$  این عبارت همواره کوچکتر یا مساوی صفر و ضریب  $x^2$  مثبت باشد. پس داریم:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a-2) \leq 0 \rightarrow \dots\dots\dots$$

**مثال** دامنه تابع  $y = \sqrt{3 - \sqrt{1-2x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

**پاسخ** ضابطه تابع دارای دو رادیکال است که عبارت‌های زیر رادیکال هر یک، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \rightarrow -2x \geq -1 \rightarrow x \leq \dots \\ 3 - \sqrt{1-2x} \geq 0 \rightarrow 3 \geq \sqrt{1-2x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 \geq 1-2x \rightarrow x \geq \dots \end{cases}$$

حال اگر از دو عبارت بالا اشتراک بگیریم دامنه تابع به صورت  $D = \dots\dots\dots$  بدست می‌آید که در این دامنه..... عدد صحیح وجود دارد پس گزینه..... صحیح است.

**مثال** دامنه تابع  $y = \sqrt{2+|x|} - x^2$  شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)

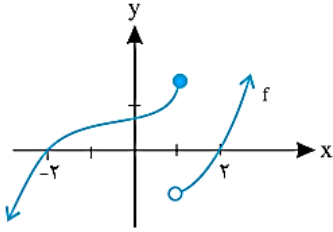
**پاسخ** برای تعیین دامنه زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2 + |x| - x^2 \geq 0 \xrightarrow{|x|=a} 2 + a - a^2 \geq 0 \rightarrow a^2 - a - 2 \leq 0 \rightarrow (a-2)(a+1) \leq 0$$

$$\rightarrow (|x|-2)(|x|+1) \leq 0 \rightarrow |x|-2 \leq 0 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

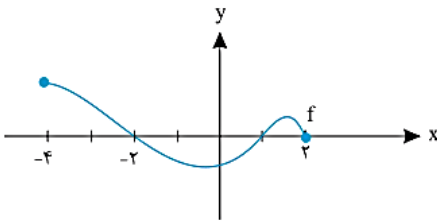
پس  $D = [-2, 2]$  بنابراین در دامنه تابع ۳ عدد صحیح نامنفی وجود دارد پس گزینه (۴) صحیح است.

**مثال** اگر نمودار  $f$  به صورت زیر رسم شود، دامنه تابع  $y = 2\sqrt{-f(x)} + 1$  را بیابید.

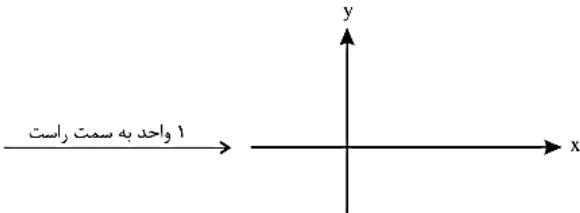


**پاسخ** با توجه به ضابطه  $y = 2\sqrt{-f(x)} + 1$  باید  $f(x) \leq 0$  باشد، بنابراین دامنه تابع آن قسمتی از نمودار  $f$  است که زیر محور  $x$  ها و روی آن باشد، بنابراین:

$$D_y = (-\infty, -2] \cup (1, 2]$$



**مثال** اگر نمودار  $f$  به صورت زیر رسم شود، دامنه تابع  $g$  با ضابطه  $y = \sqrt{xf(x-1)}$  را بیابید.



**پاسخ** با توجه به نمودار  $f$  ابتدا نمودار  $f(x-1)$  را رسم می‌کنیم:

برای پیدا کردن دامنه تابع دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

**حالت اول:**  $x \geq 0$

اگر  $x \geq 0$  باشد باید  $f(x-1) \geq 0$  باشد، پس قسمتی از نمودار  $f(x-1)$  که در آن  $x \geq 0$  و نمودار بالای محور  $x$  ها و روی آن است را مشخص

می‌کنیم، پس  $D_1 = \dots\dots\dots$

**حالت دوم:**  $x \leq 0$

اگر  $x \leq 0$  باشد باید  $f(x-1) \leq 0$  باشد پس قسمتی از نمودار  $f(x-1)$  که در آن  $x \leq 0$  و نمودار ..... روی ..... است را مشخص

می‌کنیم، پس  $D_2 = \dots\dots\dots$

اجتماع  $D_1$  و  $D_2$  دامنه تابع  $g$  می‌باشد، بنابراین:

$$D_g = D_1 \cup D_2 = \dots\dots\dots$$

رسم تابع با ضابطه  $\sqrt{ax+b}$ :

با توجه به این که اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، ابتدا دامنه تابع  $y = \sqrt{ax+b}$  را بدست می آوریم بدین ترتیب که زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم سپس به کمک نقطه یابی در دامنه بدست آمده تابع را رسم می کنیم.

**مثال ۱۶:** هر یک از توابع زیر را رسم کنید، سپس برد آن ها را بدست آورید.

الف)  $y = \sqrt{5-x}$

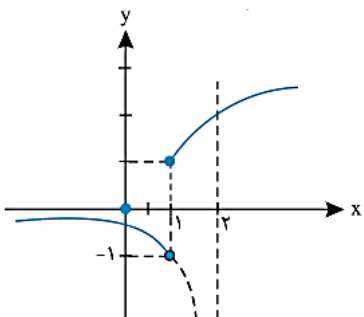
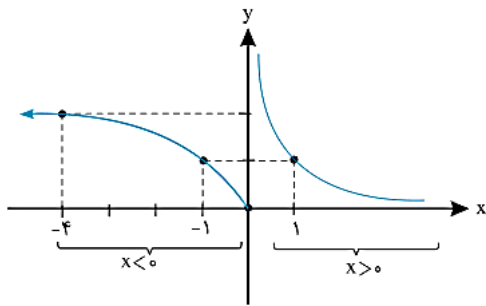
$5-x \geq 0 \rightarrow x \leq 5 \rightarrow D = (-\infty, 5]$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| x | ۱ | ۴ | ۵ |
| y | ۲ | ۱ | ۰ |

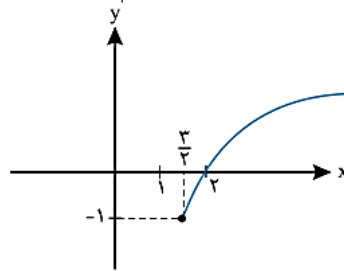
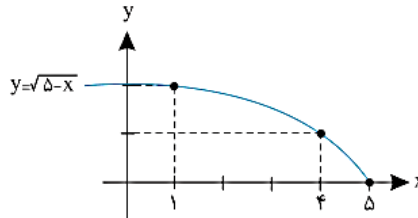
$2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \rightarrow D = [\frac{3}{2}, +\infty)$

|   |               |   |
|---|---------------|---|
| x | $\frac{3}{2}$ | ۲ |
| y | -۱            | ۰ |

الف)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$



ب)  $y = \sqrt{2x-3} - 1$



**پاسخ**  
 الف) ابتدا دامنه تابع را بدست می آوریم:

پس  $R = [0, +\infty)$  می باشد.

ب)

پس  $R = [-1, +\infty)$  می باشد.

**مثال ۱۷:** هر یک از توابع چند ضابطه ای زیر را رسم کرده سپس برد آن را بیابید.

ب)  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{4x-3} & x \geq 1 \\ \frac{1}{x-2} & x < 1 \end{cases}$

**پاسخ**

الف) با توجه به نمودار رسم شده  $R_y = \dots\dots\dots$

ب) با توجه به نمودار رسم شده  $R_y = \dots\dots\dots$

نکته: برای رسم نمودار توابع رادیکالی به شکل  $y = \sqrt{x-k} + h$  کافیست نمودار  $y = \sqrt{x}$  را  $\mathbf{h}$  واحد به سمت چپ و  $\mathbf{k}$  واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



تست آموزشی

دامنه و برد تابع  $y = \sqrt{-2x+7}$  از روی نمودار آن برابر است با:

$$\begin{cases} D_f = \left[ \frac{7}{2}, +\infty \right) \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases} \quad (۴)$$

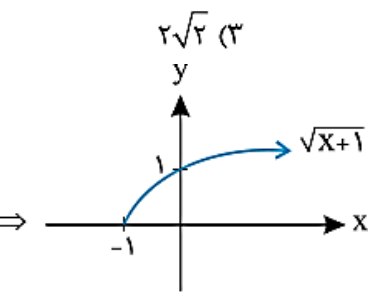
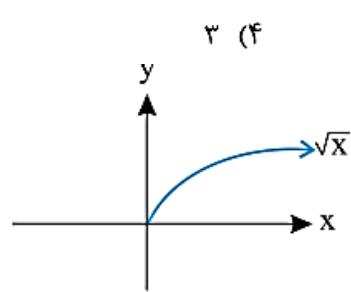
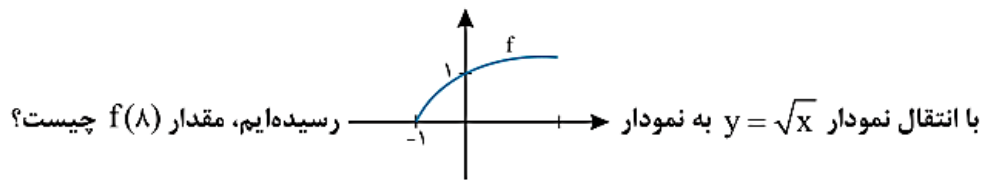
$$\begin{cases} D_f = \left( -\infty, \frac{7}{2} \right] \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} D_f = \left[ \frac{7}{2}, +\infty \right) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad (۲)$$

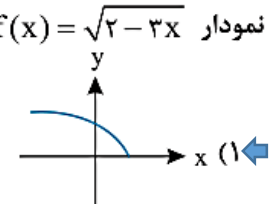
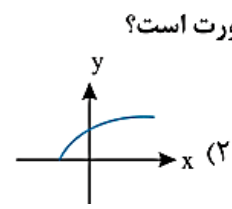
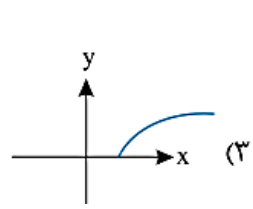
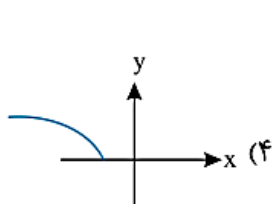
$$\begin{cases} D_f = \left( -\infty, \frac{7}{2} \right] \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad (۱)$$

$$D_f : -2x+7 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{7}{2} \rightarrow D = \left( -\infty, \frac{7}{2} \right]$$

$$R_f : \sqrt{-2x+7} \geq 0 \rightarrow R = [0, +\infty)$$



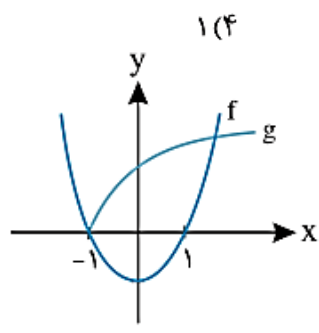
(۲)  $f(x) = \sqrt{x+1} \rightarrow f(\lambda) = \sqrt{\lambda+1} = 3$



نمودار  $f(x) = \sqrt{2-3x}$  به کدام صورت است؟

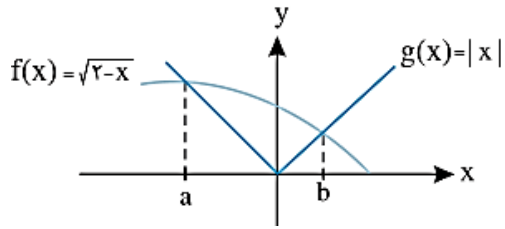
معادله  $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$  چند جواب دارد؟

(۱) ۰  
(۲) ۴  
(۳) ۲  
(۴) ۱



این دو نمودار همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند پس معادله دارای دو جواب می باشد.

با توجه به شکل زیر فاصله بین  $b, a$  چقدر است؟



- ۲ (۱)  $\frac{5}{2}$
- ۳ (۳)  $\frac{7}{2}$

$b, a$  ریشه‌های معادله  $\sqrt{2-x} = |x|$  است.

$$\sqrt{2-x} = |x| \rightarrow 2-x = x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow b = 1, a = -2 \rightarrow b, a \text{ فاصله} = 3$$

دامنه‌ی تعریف تابع  $y = \sqrt{x^2 - |x|} - 2$  کدام گزینه است؟

- R (۴)  $-2 < x < 2$  (۳)  $-1 < x < 1$  (۲)  $x \geq 2$  یا  $x \leq -2$  (۱)

$$x^2 - |x| - 2 \geq 0 \rightarrow (|x| - 2)(|x| + 1) \geq 0 \rightarrow |x| - 2 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

همواره مثبت

دامنه تابع  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{3x-2}$  کدام است؟

- $[-1, 1)$  (۴)  $[0, 1)$  (۳)  $[-1, \frac{2}{3}]$  (۲)  $[0, \frac{2}{3})$  (۱)

$\sqrt{x} : x \geq 0$  [۱]

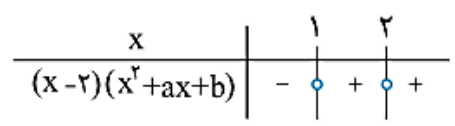
$\sqrt{1-x} : 1-x > 0 \rightarrow x < 1$  [۲]

$\sqrt{\frac{-1-x}{3x-2}} : \frac{-1-x}{3x-2} \geq 0 \rightarrow -1 \leq x < \frac{2}{3}$  [۳]

حال اگر از [۱] و [۲] و [۳] اشتراک بگیریم:  $D = [0, \frac{2}{3})$

اگر دامنه تعریف تابع  $y = \sqrt{(x-2)(x^2 + ax + b)}$  بازه  $[1, +\infty)$  باشد مقدار  $b - a$  کدام است؟

- $-5$  (۴)  $5$  (۳)  $-1$  (۲)  $1$  (۱)



برای آن که دامنه‌ی تابع به صورت  $[1, +\infty)$  باشد باید جدول تعیین علامت به صورت

باشد بنابراین  $x^2 + ax + b = 0$  ریشه‌های ۱ و ۲ هستند:

$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + a + b = 0 \rightarrow a + b = -1$

$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 4 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -4 \rightarrow a = -3, b = 2$  پس  $b - a = 5$  است.

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2 + a}$  به صورت  $(-\infty, 0)$  می باشد؟

- (۱)  $(0, +\infty)$  (۲)  $[0, +\infty)$  (۳)  $\{0\}$  (۴)  $\emptyset$

دامنه تابع  $f$  به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \\ x^2 + a \neq 0 \rightarrow x^2 \neq -a \rightarrow x \neq \pm\sqrt{-a} \end{cases}$$

با توجه به این که دامنه تابع  $f$  بازه  $(-\infty, 0)$  است پس  $a = 0$  می باشد.

برد تابع  $y = \sqrt{ax - 3|x|}$  به صورت  $R_f = \{b\}$  است.  $a^2 - b$  کدام است؟ (دامنه  $f$  بیش از یک عضو دارد)

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۹ (۴) -۹

چون برد تابع  $y = \sqrt{ax - 3|x|}$  مجموعه  $\{b\}$  می باشد لذا این تابع یک تابع ثابت است. از طرفی صفر جزء دامنه تابع است

پس  $f(0) = b$  می باشد لذا  $b = 0$  از طرفی برای هر  $x$  مثبت و هر  $x$  منفی تابع باید ثابت صفر باشد. بنابراین:

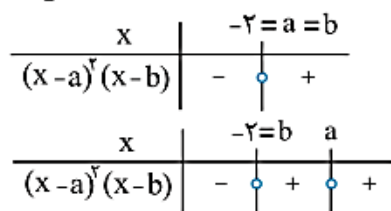
$$x > 0: \sqrt{ax - 3x} = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 - b = 9 - 0 = 9$$

$$x < 0: \sqrt{ax + 3x} = 0 \rightarrow a = -3$$

اگر توابع  $f(x) = \sqrt{(x-a)^2(x-b)}$  و  $g(x) = |x-a|\sqrt{x+2}$  باهم برابر باشند مقدار  $a+b$  کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۳ (۲) -۵ (۳) -۷ (۴) -۹

برای آن که دو تابع  $f, g$  باهم برابر باشند باید  $D_f = D_g$  باشد.



$$\rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a \geq -2 \end{cases} \rightarrow a + b \geq -4$$

پس دو حالت زیر را داریم:

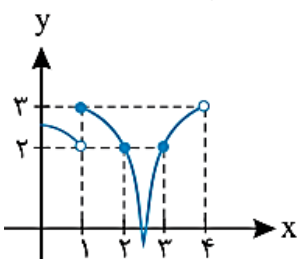
اگر دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + 6}$  بازه  $[-2, 3]$  باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) -۲

عبارت  $ax^2 + bx + 6$  باید در بازه  $[-2, 3]$  نامنفی باشد. پس با توجه به جدول تعیین علامت باید  $-2$  و  $3$  ریشه های

عبارت باشند:  $ax^2 + bx + 6 = (x+2)(3-x) = -x^2 + x + 6 \rightarrow a = -1, b = 1 \rightarrow a + b = 0$

مطابق شکل، نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $y = f(x)$  در دامنه ی تعریفش رسم شده است. دامنه ی تابع  $y = \frac{1}{\sqrt{2-f(x)}}$  کدام است؟



- (۱)  $(-\infty, 4)$

- (۲)  $(1, 2)$

- (۳)  $(2, 3)$

- (۴)  $R - [2, 3]$

$$2 - f(x) > 0 \rightarrow f(x) < 2$$

با توجه به ضابطه‌ی  $f$  داریم: با توجه به نمودار رسم شده در فاصله‌ی  $2 < x < 3$ ، نمودار تابع  $f$  پایین‌تر از خط  $y = 2$  قرار می‌گیرد.

دامنه‌ی تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a - |x + b|}}$  بازه‌ی  $(-1, 3)$  است. مقدار  $b$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

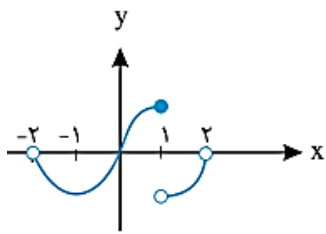
$$a - |x + b| > 0 \rightarrow |x + b| < a \rightarrow -a < x + b < a \rightarrow -a - b < x < a - b$$

$$\begin{cases} -a - b = -1 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = 2, b = -1$$

از طرفی طبق فرض، دامنه‌ی تابع بازه‌ی  $(-1, 3)$  است پس داریم:

نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. دامنه‌ی تابع  $y = \sqrt{(x^2 - 1)f(x)}$  کدام است؟



(۱)  $[-1, 0] \cup \{1\}$

(۲)  $[-1, 0]$

(۳)  $[-1, 1]$

(۴)  $(-2, 0] \cup [1, 2)$

|                 |    |    |   |   |   |
|-----------------|----|----|---|---|---|
|                 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $x^2 - 1$       | +  | 0  | - | 0 | + |
| $f(x)$          | -  | -  | 0 | + | - |
| $(x^2 - 1)f(x)$ | -  | +  | 0 | - | + |

جواب

پس  $D = [-1, 0] \cup \{1\}$

اگر دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{ax^2 + 3x + a}$  تنها شامل یک مقدار حقیقی باشد، آن مقدار چه قدر است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

$-\frac{3}{2}$  (۲)

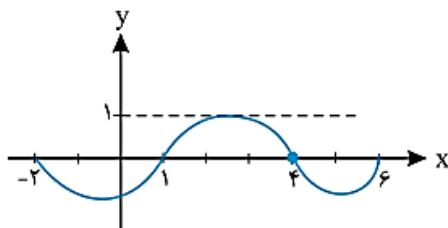
$\frac{3}{2}$  (۱)

$$\Delta = (3)^2 - 4(a)(a) = 0 \rightarrow 9 - 4a^2 = 0 \rightarrow a = \pm \frac{3}{2} \quad a < 0 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

باید  $\Delta = 0$  و  $a < 0$  باشد پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{-\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}} \rightarrow f(x) = \sqrt{-\frac{3}{2}(x-1)^2} \rightarrow D_f = \{1\}$$

نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر است دامنه تابع  $y = \sqrt{f(3 - |x|)}$  کدام است؟



(۱)  $[1, 4]$

(۲)  $[-2, 2]$

(۳)  $[-3, 3]$

(۴)  $[-1, 3]$

$$f(3 - |x|) \geq 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار } f} 1 \leq 3 - |x| \leq 4 \rightarrow \begin{cases} 3 - |x| \geq 1 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 3 - |x| \leq 4 \rightarrow |x| \geq -1 \text{ بدیهی است} \end{cases}$$

توابع پله ای - جزء صحیح:

**تعریف تابع پله ای:** به تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به طوری که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد یک تابع پله ای می‌گویند.

یکی از توابع پله ای معروف تابع جزء صحیح است. ابتدا جزء صحیح اعداد را تعریف می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌نمائیم سپس به معرفی این تابع می‌پردازیم.

**تعریف جزء صحیح:** برای هر عدد حقیقی  $x$ ، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از  $x$  بیشتر نباشد. جزء صحیح  $x$  را با نماد  $[x]$  نمایش داده و آن را جزء صحیح  $x$  یا براکت  $x$  می‌خوانند.

مثال: جزء صحیح اعداد زیر را حساب کنید.

الف)  $2/3$       ب)  $-4\sqrt{2}$       پ)  $-5$       ت)  $0$       ث)  $2\sqrt{3}$       ج)  $7$

مثال

پاسخ

الف) بزرگترین عدد صحیحی که از  $2/3$  بزرگتر نباشد عدد  $-3$  است.  $(-3 < -2/3 < -2)$  پس:  $[-2/3] = -3$

ب) می‌دانیم  $\sqrt{2} \approx 1/4$  است پس  $-4\sqrt{2} \approx -5/6$  بنابراین بزرگترین عدد صحیحی که از  $-4\sqrt{2}$  بزرگتر نباشد عدد  $-6$  است یعنی  $[-4\sqrt{2}] = -6$

پ) بزرگترین عدد صحیحی که از  $-5$  بزرگتر نباشد (یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از  $-5$  کوچکتر یا مساوی باشد) عدد  $-5$  است، پس  $[-5] = -5$

ت) با توجه به قسمت «پ»  $[0] = 0$  است.

ث) می‌دانیم  $\sqrt{3} \approx 1/7$  پس داریم  $2\sqrt{3} \approx 3/4$  بنابراین:  $[2\sqrt{3}] = 3$

ج) با توجه به قسمت «پ» و «ت»  $[7] = 7$  است.

توجه

۱: اگر  $x \in \mathbb{Z}$  باشد  $[x] = x$  است.

۲: مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره کوچکتر مساوی آن است:  $\forall x \in \mathbb{R}: [x] \leq x$

۱ اگر عددی صحیح باشد، جزء صحیحش برابر خودش است، مثلاً:  $[-\sqrt{900}] = -\sqrt{900} = -30$  و  $[1000] = 1000$  و  $[-2] = -2$  و  $[2] = 2$

۲ اگر عدد صحیح نباشد و آن را روی محور اعداد در نظر بگیریم، جزء صحیح عدد برابر عدد صحیح سمت چپ است، مثلاً:



$$[-\sqrt{5}] = -3, \quad [-\frac{\pi}{2}] = -2, \quad [-\frac{1}{2}] = -1, \quad [0/4] = 0, \quad [\sqrt{2}] = 1, \quad [3/6] = 3$$

مثال: معادله  $x = [3x] - [4x] + 4$  چند جواب دارد؟

۴ بی‌شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: سمت راست معادله داده شده، مجموع و تفاضل چند عدد صحیح است که حاصل آن همیشه برابر با یک عدد صحیح می‌باشد بنابراین سمت چپ تساوی یعنی  $x$  نیز باید یک عدد صحیح باشد. پس داریم:

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow 3x \in \mathbb{Z} \rightarrow [3x] = 3x$$

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow 4x \in \mathbb{Z} \rightarrow [4x] = 4x$$

$$x = 3x - 4x + 4 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

بنابراین داریم:

پس گزینه ۲ صحیح است.

**مثال** اگر  $x = -\frac{11}{3}$  باشد، حاصل  $[x] - [2x]$  کدام است؟

- ۳ (۱)      -۲ (۲)      -۳ (۳)      ۴ (۴)

**پاسخ** بزرگترین عدد صحیحی که از  $-\frac{11}{3}$  بیشتر نباشد عدد -۴ است. یعنی:

از طرفی  $2x = -\frac{22}{3}$  و بزرگترین عدد صحیحی که از  $-\frac{22}{3}$  بیشتر نباشد عدد -۸ است، پس:

پس داریم:

پس گزینه ..... صحیح است.

حاصل  $|x^2| + [2x] + |[-x]$  به ازای  $x = 1/4$  کدام است؟

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

حاصل هر کدام را جداگانه حساب و بعد با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} [x^2] &= [(1/4)^2] = [1/16] = 0 \\ [2x] &= [2(1/4)] = [1/2] = 0 \\ |[-x]| &= |[-1/4]| = |-0.25| = 0.25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 + 0 + 0.25 = 0.25$$

**۳:** هرگاه  $n \in \mathbb{Z}$  و  $n \leq x < n+1$  آن‌گاه  $[x] = n$  و بالعکس.

جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \rightarrow [x] = \dots$

ب)  $-1 < x < 2/5 \rightarrow [x] = \dots$

پ)  $2/3 < x < 3/4 \rightarrow [x] = \dots$

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \xrightarrow[\sqrt{3} \approx 1.7]{\sqrt{2} \approx 1.4} 1 < x < 2 \rightarrow [x] = \dots$

$-1 < x < 2/5 \rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \rightarrow [x] = \dots \\ 0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = \dots \\ 1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = \dots \\ 2 \leq x < 2/5 \rightarrow [x] = \dots \end{cases}$

$2/3 \leq x < 3/4 \rightarrow \begin{cases} 2/3 \leq x < 3 \rightarrow [x] = \dots \\ 3 \leq x < 3/4 \rightarrow [x] = \dots \end{cases}$

مجموعه جواب معادله  $x + \frac{1}{2} = 2$  را بیابید.

$[x + \frac{1}{2}] = 2 \rightarrow 2 \leq x + \frac{1}{2} < 3 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} 2 - \frac{1}{2} \leq x < 3 - \frac{1}{2} \rightarrow \dots$

**مثال** جواب معادله  $\left[\frac{1-x}{x}\right] = 2$  کدام است؟

- (۱)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$  (۲)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$  (۳)  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$  (۴)  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

**پاسخ** ..... معکوس گردد  $\dots \leq \frac{1}{x} < \dots \xrightarrow{+1} \dots \leq \frac{1}{x} - 1 < 3 \rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} - \frac{x}{x} < 3 \rightarrow 2 \leq \frac{1-x}{x} < 3 \rightarrow 2 \leq \frac{1-x}{x} < 3 \rightarrow 2 \leq \frac{1-x}{x} < 3$

پس گزینه ..... صحیح است.

**مثال** اگر  $[x^2 + x] = -1$  باشد، آن گاه  $[x^{20}]$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

**پاسخ**  $[x^2 + x] = -1 \rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$

(عبارت  $x^2 + x + 1$  همواره نامنفی است چون  $\Delta < 0$  و ضریب  $x^2$  مثبت است)

$\begin{cases} x^2 + x \geq -1 \rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x < 0 \end{cases}$  جدول تعیین علامت  $\rightarrow -1 < x < 0$

بنابراین  $-1 < x < 0$  می باشد.

$-1 < x < 0 \rightarrow 0 < x^{20} < 1$  (به توان ۲۰ (توان زوج)

پس ...  $[x^{20}] = 0$  یعنی گزینه ..... صحیح است.

**۴: برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:  $[x] \leq x < [x] + 1$  و یا به عبارتی  $0 \leq x - [x] < 1$ .**

**مثال** معادله  $x + |x - 2| = [x]$  چند ریشه دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

**پاسخ**  $x + |x - 2| = [x] \rightarrow x - [x] = -|x - 2|$

طبق نتیجه ۴: می دانیم  $0 \leq x - [x] < 1$  از طرفی  $0 \leq -|x - 2|$  می باشد بنابراین تساوی در صورتی صحیح است که  $-|x - 2| = 0$  پس  $x = 2$ ، بنابراین گزینه ..... صحیح است.

**نکته** اگر  $m \in \mathbb{Z}$  باشد، آن گاه:  $[x + m] = [x] + m$

**اثبات** اگر  $[x] = n$  در نظر بگیریم، داریم:  $n \leq x < n + 1 \rightarrow n + m \leq x + m < n + m + 1 \rightarrow [x + m] = n + m = [x] + m$

**مثال** معادله  $[x] + [x + 3] - [4 + x] = 2$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) بی شمار

**پاسخ** بی شمار جواب دارد  $[x] + [x + 3] - [4 + x] = 2 \rightarrow [x] + [x] + 3 - 4 - [x] = 2 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$

پس گزینه (۴) صحیح است.

**برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:**  $[x + [x]] = 2[x]$

**مثال** مجموعه جواب معادله  $2[x] + x = -9$  کدام است؟

- (۱)  $[-3, -2)$  (۲)  $[-3, -\frac{2}{3})$  (۳)  $[-3, \frac{-5}{3})$  (۴)  $[-3, -\frac{2}{2})$

**پاسخ**  $2[x] + x = -9 \rightarrow \dots + [x] = -9 \rightarrow \dots [x] = -9 \rightarrow [x] = \dots \rightarrow \dots$

نکته

الف اگر  $x \in \mathbb{Z}$  آن گاه  $[x] + [-x] = 0$  و بالعکس

ب اگر  $x \notin \mathbb{Z}$  آن گاه  $[x] + [-x] = -1$  و بالعکس

$$[x] = n \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} n < x < n+1 \xrightarrow{x(-)} -n-1 < -x < -n \rightarrow [-x] = -n-1$$

$$[x] + [-x] = n + (-n-1) = -1$$

ب اثبات

بی شمار

۲ (۳)

مثال معادله  $5[x] + 2[-x] = 3$  چند جواب دارد؟

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ برای حل معادله دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول  $x \in \mathbb{Z}$ :

$$5[x] + 2[-x] = 3 \rightarrow 5x - 2x = 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

حالت دوم  $x \notin \mathbb{Z}$ :

$$5[x] + 2[-x] = 3 \rightarrow 3[x] + 2([x] + [-x]) = 3 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 3[x] + (-2) = 3 \rightarrow [x] = \frac{5}{3}$$

اما  $[x]$  نمی‌تواند برابر با یک عدد غیر صحیح باشد پس معادله فقط یک جواب صحیح دارد.  
پس گزینه (۲) صحیح است.

نکته

اگر  $n \in \mathbb{Z}$  باشد، آن گاه:

- ①  $[x] > n \rightarrow x \geq n+1$
- ②  $[x] \geq n \rightarrow x \geq n$
- ③  $[x] < n \rightarrow x < n$
- ④  $[x] \leq n \rightarrow x < n+1$

مثال مجموعه جواب نامعادله  $[x] > 3$  کدام است؟

①  $[4, +\infty)$

②  $[3, +\infty)$

③  $[2, +\infty)$

④  $(-\infty, 3)$

$$[x] > 3 \rightarrow x \geq 4$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

مثال مجموعه جواب نامعادله  $[x^2] < 2$  کدام است؟

①  $[-1, 1]$

②  $[-\sqrt{2}, 2]$

③  $(-\infty, \sqrt{2})$

④  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$[x^2] < 2 \rightarrow x^2 < 2 \rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$$

$$[x+y] = \begin{cases} [x] + [y] \\ \text{یا} \\ [x] + [y] + 1 \end{cases}$$

$$[x+y] \geq [x] + [y]$$



اگر  $[x]^2 - [x] = 0$  باشد، حاصل  $[x]^2$  چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(۴) چهار

(۳) سه

(۲) دو

(۱) یک

اول مقدار  $[x]$  را از روی  $[x]^2 - [x] = 0$  حساب می‌کنیم:

$$[x]^2 - [x] = 0 \Rightarrow [x]([x] - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ \text{یا} \\ [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\cup} 0 \leq x < 2$$

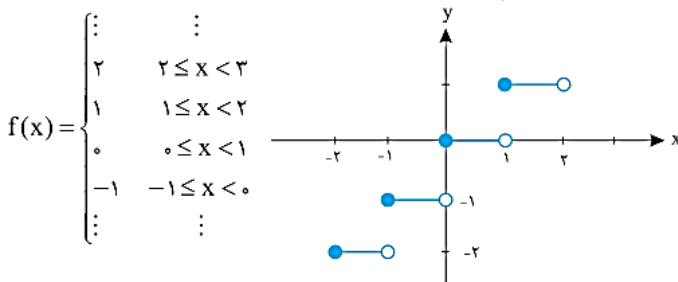
پس محدوده  $x$  برابر است با  $0 \leq x < 2$ ، در نتیجه محدوده  $x^2$  عبارت است از  $0 \leq x^2 < 4$  و اگر عددی در بازه  $[0, 4)$  باشد، جزء صحیحش

ممکن است برابر ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد، یعنی  $[x^2]$  ممکن است چهار مقدار مختلف داشته باشد.

**تعریف تابع جز صحیح:** تابعی که به ازای هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و ضابطه آن را به

صورت  $f(x) = [x]$  نمایش می‌دهند.

این تابع را با توجه به تعریف جزء صحیح می‌توان به صورت تابع پله‌ای زیر نوشت و آن را رسم کرد:



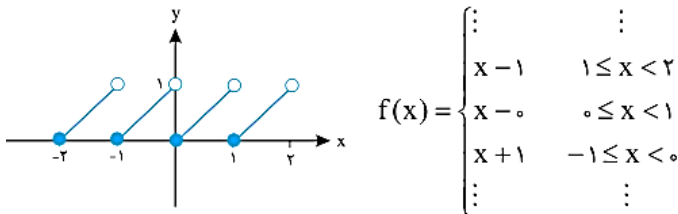
نتیجه

دامنه تابع  $f(x) = [x]$  برابر با  $\mathbb{R}$  و برد آن  $\mathbb{Z}$  است.

**دو تابع معروف:**

① تابع  $y = x - [x]$ :

نمودار این تابع به صورت زیر رسم می‌شود:



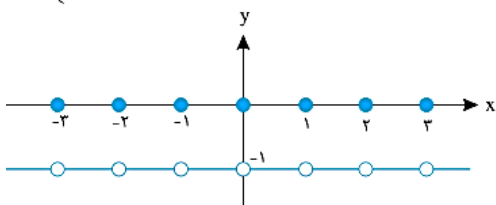
نتیجه

دامنه تابع  $f(x) = x - [x]$  برابر با  $\mathbb{R}$  و برد آن  $[0, 1)$  می‌باشد.

② تابع  $y = [x] + [-x]$ :

با توجه به خاصیت گفته شده داریم:

$$y = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



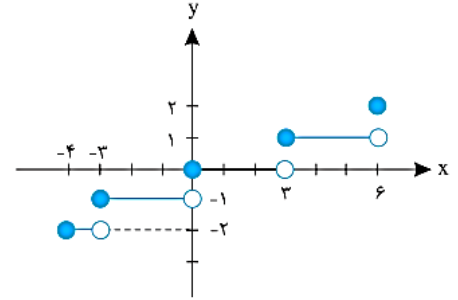
بنابراین نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:

**مثال** نمودار تابع  $y = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$  را در فاصله  $[-4, 6]$  رسم کنید.

**پاسخ** ابتدا این تابع را با توجه به فاصله  $[-4, 6]$  به صورت زیر به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

**دوره تناوب تابع  $[AX+B]$  برابر است با:**  
 $T = \frac{1}{|a|}$   
**در این مثال دوره تناوب (طول پاره خط‌ها) برابر است با:**  
 $T = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

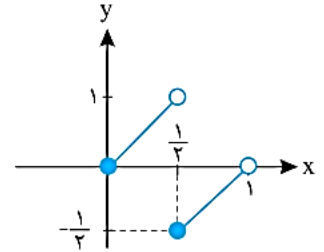
$$\begin{cases} -4 \leq x < -3 & \longrightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -2 \\ -3 \leq x < 0 & \longrightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -1 \\ 0 \leq x < 3 & \longrightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0 \\ 3 \leq x < 6 & \longrightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1 \\ x = 6 & \longrightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 2 \end{cases}$$



**مثال** نمودار تابع  $y = x - [2x]$  را در فاصله  $[0, 1]$  رسم کنید.

$$0 \leq x < 1 \rightarrow 0 \leq 2x < 2$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow [2x] = 0 \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 \rightarrow [2x] = 1 \end{cases} \longrightarrow y = x - [2x] = \begin{cases} x & \rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - 1 & \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



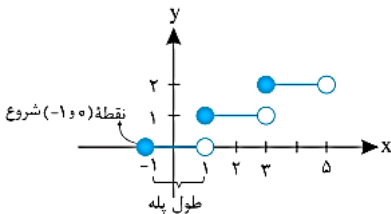
**نکته** تابع  $y = [ax + b]$  یک تابع پله‌ای است که طول هر پله آن  $\left| \frac{1}{a} \right|$  بوده و از نقطه  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  شروع و ارتفاع هر پله آن یک است.

**تذکره** در تابع  $y = [ax + b]$  اگر  $a > 0$  باشد پله‌ها افزایشی و اگر  $a < 0$  باشد پله‌ها کاهشی است.

**مثال** هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف)  $y = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$

ب)  $y = \left\lfloor \frac{-x+1}{3} \right\rfloor$



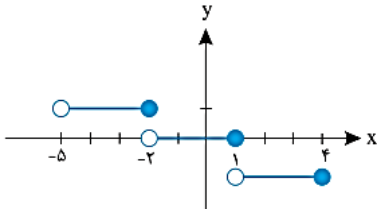
**پاسخ** الف) در تابع  $y = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right\rfloor$  چون  $a = \frac{1}{2} > 0$  پس یک تابع پله‌ای افزایشی است که از

نقطه  $(-1, 0)$  شروع می‌شود، طول هر پله  $\left| \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{\frac{1}{2}} \right| = 2$  بوده و ارتفاع هر پله یک است:

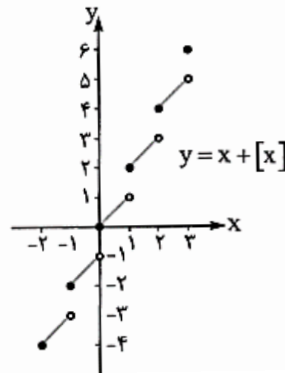
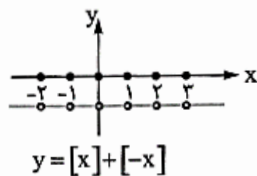
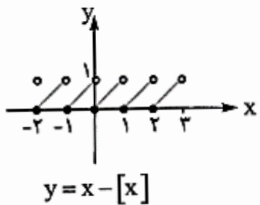
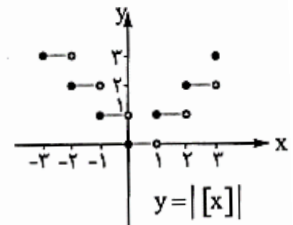
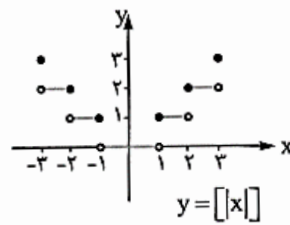
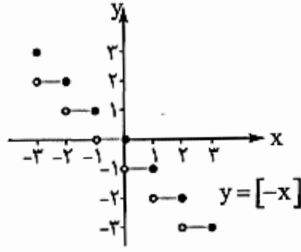
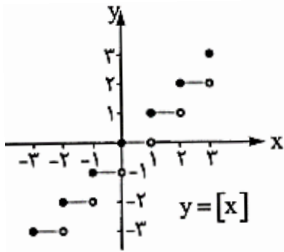
ب) در تابع  $y = \left\lfloor \frac{-x+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right\rfloor$  چون  $a = -\frac{1}{3} < 0$  پس یک تابع پله‌ای کاهشی است که از نقطه  $(1, 0) = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  شروع می‌شود.

ب) در تابع  $y = \left[ \frac{-x+1}{3} \right] = \left[ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right]$  چون  $a = -\frac{1}{3} < 0$  پس یک تابع پله‌ای کاهشی است که از نقطه  $(1, 0) = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  شروع می‌شود.

طول هر پله ۳ بوده و ارتفاع هر پله یک است:  $\left| \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{-\frac{1}{3}} \right| = 3$



بهتر است این نمودارهای پرکاربرد و مهم در این مبحث را به یاد داشته باشید:



## تست آموزشی

می‌دانیم  $(1 + \sqrt{2})(a + \sqrt{5}) = 2$ ، جزء صحیح عدد  $a$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

$$(1 + \sqrt{2})(a + \sqrt{5}) = 2 \Rightarrow a + \sqrt{5} = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویاکردن}} a + \sqrt{5} = 2(\sqrt{2} - 1) \rightarrow a = 2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{5} \approx 0.8 - 2.2 \approx -1.4 \rightarrow [a] = -2$$

اگر  $[x + 2[x]] = 4$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

معادله جواب ندارد.

$1 \leq x \leq 2$  (۳)

$0 \leq x \leq 1$  (۲)

$\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$  (۱)

$$[x + 2[x]] = 4 \rightarrow 2[x] = 4 \rightarrow [x] = \frac{4}{2} \rightarrow \text{غیرممکن}$$

اگر  $a + [b] = 4/2$  و  $b - [a] = 2/4$  باشند، حاصل  $a + b$  کدام است؟ [ ]، علامت جزء صحیح است

۳/۶ (۴)

۴/۶ (۳)

۵/۶ (۲)

۵ (۱)

$$\begin{aligned} a + [b] = 4/2 &\longrightarrow [a + [b]] = [4/2] \longrightarrow [a] + [b] = 4 \\ b - [a] = 2/4 &\longrightarrow [b - [a]] = [2/4] \longrightarrow [b] - [a] = 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} [a] = 1 \\ [b] = 3 \end{cases} \longrightarrow a = 1/2, b = 3/4 \longrightarrow a + b = 4/6$$

اگر  $|2x - 3| < 11$  باشد،  $\left[\frac{x}{3}\right]$  چند مقدار صحیح خواهد داشت؟ [ ] تابع جزء صحیح است

۵ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

$$\begin{aligned} |2x - 3| < 11 &\longrightarrow -11 < 2x - 3 < 11 \longrightarrow -8 < 2x < 14 \longrightarrow -4 < x < 7 \\ &\longrightarrow -\frac{4}{3} < \frac{x}{3} < \frac{7}{3} \longrightarrow -1/3 < \frac{x}{3} < 2/3 \\ &\longrightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -2, -1, 0, 1, 2 \end{aligned}$$

مجموعه  $A = \left\{ \left[ 3x + \frac{1}{2} \right] \mid |x + 1| < 2 \right\}$  چند عضو دارد؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

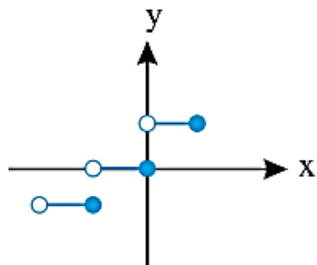
۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

$$\begin{aligned} [x^2 + 4x] = -4 &\longrightarrow -4 \leq x^2 + 4x < -3 \\ \begin{cases} x^2 + 4x \geq -4 \longrightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 0 \longrightarrow (x+2)^2 \geq 0 \\ \longrightarrow \text{به ازای هر } x \text{ همواره برقرار است (۱)} \\ x^2 + 4x < -3 \longrightarrow x^2 + 4x + 3 < 0 \\ \text{جدول تعیین علامت} \longrightarrow -3 < x < -1 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم مجموعه جواب به صورت  $(-3, -1)$  می باشد پس  $a = -3$  و  $b = -1$  است و  $b - a = 2$  می باشد.

نمودار کدام تابع زیر به صورت مقابل است؟



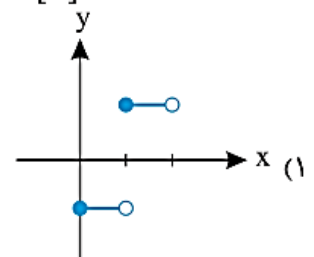
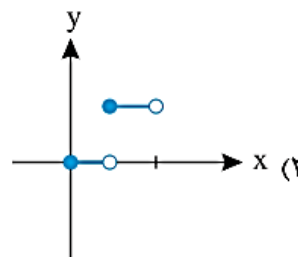
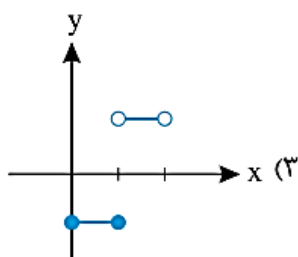
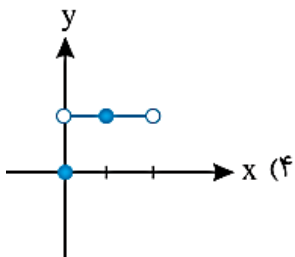
$-[x]$  (۱)

$[-x]$  (۲)

$-[-x]$  (۳)

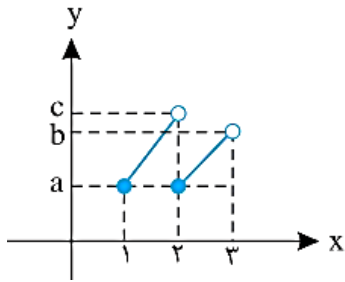
$1 + [x]$  (۴)

نمایش هندسی تابع  $y = 2[x] - 1$  در فاصله  $0 \leq x < 2$  کدام است؟



$$y = 2[x] - 1 = \begin{cases} 2(0) - 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2(1) - 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

نمودار تابع  $y = \frac{x}{[x]}$  به صورت مقابل است. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

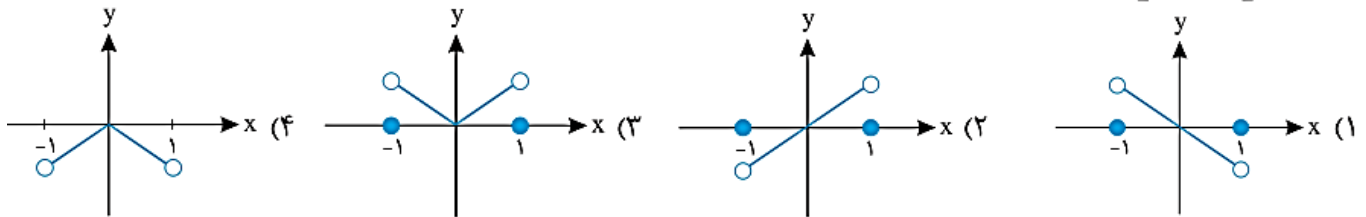


- (۱) ۴/۵
- (۲) ۳/۵
- (۳) ۴
- (۴) ۳

$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = x \xrightarrow{1 \leq x < 2} 1 \leq y < 2 \rightarrow a = 1, c = 2$$

$$2 \leq x < 3 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = \frac{x}{2} \xrightarrow{2 \leq x < 3} 1 \leq y < \frac{3}{2} \rightarrow a = 1, b = \frac{3}{2} \quad \text{پس } a + b + c = 4/5$$

نمودار تابع  $y = x[[x] - x]$  در بازه  $[-1, 1]$  کدام است؟



$$y = \begin{cases} \cdot & x = -1 \\ x[-1-x] & -1 < x < 0 \\ x[-x] & 0 \leq x < 1 \\ \cdot & x = 1 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} \cdot & x = -1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ \cdot & x = 1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی بالا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x + [x] + [-x]}$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$
- (۲)  $\mathbb{R} - \{0\}$
- (۳)  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
- (۴)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

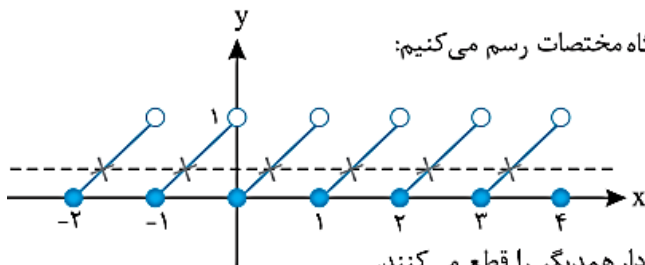
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{x-1} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

می‌دانیم که  $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  پس داریم:

معادله‌ی  $x = [x] + \frac{1}{4}$  در بازه‌ی  $[-2, 4]$ ، چند ریشه دارد؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است)

- (۱) ۶
- (۲) ۴
- (۳) ۲
- (۴) صفر

نمودارهای دو تابع  $f(x) = x - [x]$  و  $g(x) = \frac{1}{4}$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

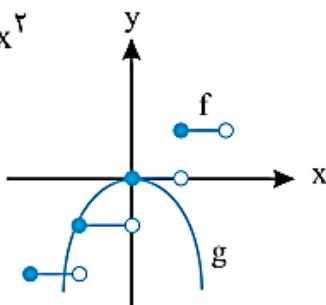


با توجه به نمودارهای رسم شده در بازه‌ی  $[-2, 4]$  در ۶ نقطه این دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند.

معادله  $x^2 + [x] = 0$  چند جواب دارد؟

- ۴ (۴)    ۳ (۳)    ۲ (۲)    ۱ (۱)

$x^2 + [x] = 0 \rightarrow [x] = -x^2$



نمودار دو تابع  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = -x^2$  را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودارهای رسم شده معادله سه جواب دارد.

ریشه معادله  $2x + [x] = 1$  کدام است؟

- $-\frac{3}{2}$  (۴)     $\frac{3}{2}$  (۳)     $\frac{1}{2}$  (۲)     $-\frac{1}{2}$  (۱)

$2x + [x] = 1 \rightarrow [x] = 1 - 2x$

حال نمودار دو تابع  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = 1 - 2x$  را رسم می‌کنیم.

این دو نمودار همدیگر را در فاصله‌ی  $(0, 1)$  قطع کرده‌اند پس:

$0 < x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow 1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

نمودار تابع  $y = [2x]$  در بازه‌ی  $[-1, 1]$  از چند قسمت تشکیل شده است؟

- ۸ (۴)    ۷ (۳)    ۶ (۲)    ۵ (۱)

$$\begin{cases} y = [2x] = -3 \\ -1 \leq x < -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = [2x] = -2 \\ -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = [2x] = -1 \\ -\frac{1}{3} \leq x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = [2x] = 0 \\ 0 \leq x < \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = [2x] = 1 \\ \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} y = [2x] = 2 \\ \frac{2}{3} \leq x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = [2x] = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

برد تابع  $y = [x] + [-x]$  کدام است؟

- $\{1, 0\}$  (۴)     $\{-1, 0\}$  (۳)    ۰ (۲)     $\{-1\}$  (۱)

معادله  $2x - [2x] = [x] + [-x]$  در بازه‌ی  $(1, \frac{7}{2})$  چند جواب دارد؟

- ۲ (۴)    ۳ (۳)    ۱ (۲)    ۴ (۱)

$$\begin{cases} 2x - [2x] = [x] + [-x] \\ 0 \leq 2x - [2x] < 1 \\ [x] + [-x] = 0 \text{ یا } -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 3$$

دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{([x] - \sqrt{2})(3 - [x])}$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است)

(۴)  $[1, 3]$

(۳)  $[2, 4]$

(۲)  $[1, 3]$

(۱)  $[\sqrt{2}, 3]$

$$([x] - \sqrt{2})(3 - [x]) \geq 0 \rightarrow \sqrt{2} \leq [x] \leq 3 \xrightarrow{[x] \text{ عدد صحیح است}} [x] = 2 \text{ یا } 3 \rightarrow 2 \leq x < 4 \rightarrow D_f = [2, 4)$$



## تست ارزشیابی

اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{ax^2 + cx + b}{x^2 + bx + c}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$  باشد،  $b + c$  برابر کدام است؟

۷ (۴)

-۷ (۳)

۵ (۲)

-۵ (۱)

اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+ax+9}$  برای  $\mathbb{R}$  باشد، تمام حدود  $a$  کدام است؟

-۶ ≤ a ≤ ۶ (۴)

a ≤ ۶ (۳)

-۶ &lt; a &lt; ۶ (۲)

a &lt; ۶ (۱)

برای این که تابع  $y = \frac{x}{x^2+x+m}$  همواره معین باشد، حدود  $m$  کدام است؟

 $m > \frac{1}{4}$  (۴) $m < \frac{1}{4}$  (۳) $m \leq -\frac{1}{4}$  (۲) $m \geq -\frac{1}{4}$  (۱)

به ازای چند مقدار  $a$ ، دامنه تابع  $f(x) = \frac{x-5}{x^2+ax+4}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{x_1\}$  است؟

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

هیچ (۱)

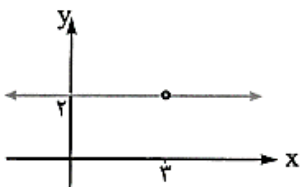
اگر نمودار روبه‌رو متعلق به تابع  $f(x) = \frac{ax-6}{x+b}$  باشد، مقدار  $a+b$  کدام است؟

۱ (۲)

-۱ (۱)

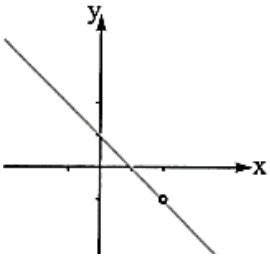
۵ (۴)

-۵ (۳)





نمودار روبه‌رو متعلق به کدام تابع است؟



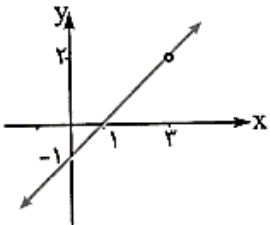
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} \quad (۲)$$

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 2}{x - 2} \quad (۴)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{2 - x} \quad (۳)$$

اگر شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$  باشد، مقدار  $a + b + c$  برابر کدام است؟



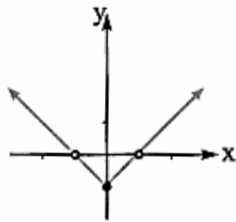
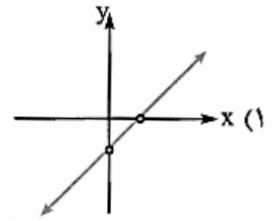
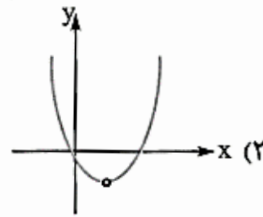
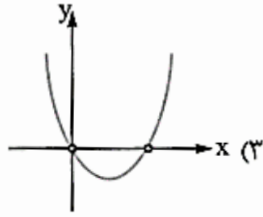
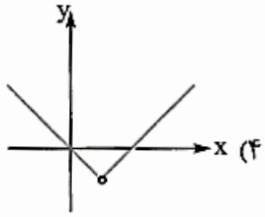
۲ (۱)

-۲ (۲)

۴ (۳)

-۴ (۴)

کدام یک نمودار تابع  $f(x) = \frac{(x^2 - 2x)^2}{x^2 - 2x}$  را مشخص می‌کند؟



کدام ضابطه متعلق به تابع شکل روبه‌رو است؟

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| - 1} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{|x| - 1} \quad (3)$$

دو تابع  $f$  و  $g$  مفروض‌اند. در کدام گزینه دو تابع مساوی‌اند؟

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x \quad (3) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, g(x) = 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2}{x}, g(x) = x \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}} \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (۳)$$

کدام یک از توابع  $f$  و  $g$  در  $\mathbb{R}$  با ضوابط زیر مساوی اند؟

$$\begin{cases} f(x) = \left[ \frac{x^2}{x^2+1} \right] \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{x^2-x} \end{cases} \quad (۱)$$



تابع  $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$  با کدام یک از تابع‌های زیر مساوی است؟

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2} \quad (۴)$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x^2}{x^2} \quad (۳)$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \quad (۲)$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x} \quad (۱)$$

تابع  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x^3 - x^2}$  با کدام یک از تابع‌های زیر مساوی است؟

$$g = \{(0,0), (-1,1)\} \quad (۴)$$

$$g = \{(0,0), (-1,0)\} \quad (۳)$$

$$g = \{(0,0), (1,0)\} \quad (۲)$$

$$g = \{(0,0), (1,1)\} \quad (۱)$$

## توابع رادیکالی

دامنه تعریف تابع  $y = \sqrt{x + |x|}$  کدام است؟

$$x \geq 0 \quad (۴)$$

$$D_f = \{0\} \quad (۳)$$

$$\mathbb{R} \quad (۲)$$

$$x < 0 \quad (۱)$$

دامنه تابع با ضابطه  $y = \sqrt{x - |x| + 1}$  کدام است؟

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$x > 1 \quad (۳)$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \quad (۱)$$

دامنه تابع  $f = \{(x, y) : y = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}\}$  کدام مجموعه است؟

$-1 \leq x \leq 1$  (۴)

$x \geq 1$  (۳)

$x \leq 1$  (۲)

$\mathbb{R}$  (۱)

دامنه تابع  $y = \sqrt{4 - \sqrt{1 - 2x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

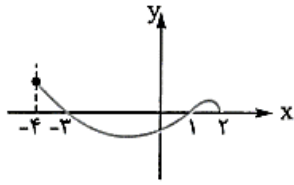
دامنه تابع  $y = \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{\sqrt{|x| + x}}$  کدام است؟

$[1, +\infty)$  (۴)

$(-\infty, 1]$  (۳)

$(-\infty, 1)$  (۲)

$(1, +\infty)$  (۱)



شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه تابع  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟

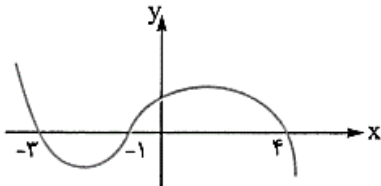
(۲)  $[-3, 2]$

(۱)  $[0, 2]$

(۴)  $[-3, 0] \cup [1, 2]$

(۳)  $[-4, -3] \cup [1, 2]$

شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = f(x-2)$  است. دامنه تابع با ضابطه  $y = \sqrt{xf(x)}$  کدام است؟



(۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۲)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$

تمام دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{|x| - x^2}$  کدام است؟

(۴)  $\{0\}$

(۳)  $x \geq 1$

(۲)  $0 \leq x \leq 1$

(۱)  $-1 \leq x \leq 1$

## وارون تابع:

حتما می‌دانید که یک تابع مثل یک ماشین عمل می‌کند. ماشینی که هر عضو از دامنه را تنها به یک عضو از هم‌دامنه مرتبط می‌کند. در بسیاری از موارد، دو ماشین عملی عکس یکدیگر انجام می‌دهند. یعنی ماشین اول ورودی را به خروجی تبدیل کرده و ماشین دوم، خروجی ماشین اول را می‌گیرد و دوباره ورودی را تولید می‌کند. برای برخی توابع هم چنین چیزی وجود دارد. یعنی می‌توان تابعی دیگر ایجاد کرد که عکس تابع اصلی عمل کرده و خروجی را به ورودی تبدیل کند.

به چنین تابعی، تابع معکوس یا تابع وارون می‌گویند. به زبان ریاضی داریم:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

با توجه به تعریف  $f$  و  $f^{-1}$ ، اعضای دامنه  $f$ ، به جای اعضای برد  $f^{-1}$  و اعضای برد  $f$ ، به جای اعضای دامنه  $f^{-1}$  قرار می‌گیرند:

$$f = \{(2, 4), (-1, 4), (5, 3), (-3, 1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(4, 2), (4, -1), (3, 5), (1, -3)\}$$

$$\begin{cases} D_f = \{-3, -1, 2, 5\} \\ R_f = \{1, 3, 4\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = \{1, 3, 4\} = R_f \\ R_{f^{-1}} = \{-3, -1, 2, 5\} = D_f \end{cases}$$

در حالت کلی، نکته زیر را می‌توان در نظر گرفت:

**نکته** اگر  $f^{-1}$  وارون تابع  $f$  باشد، آن‌گاه:

$$(1) \text{ برد تابع } f^{-1} = \text{دامنه تابع } f \quad (D_{f^{-1}} = R_f)$$

$$(2) \text{ دامنه تابع } f^{-1} = \text{برد تابع } f \quad (R_{f^{-1}} = D_f)$$

آیا معکوس هر تابعی، خود یک تابع است؟

اگر کمی دقت کنید، متوجه می‌شوید که معکوس هر تابعی، یک تابع نیست. مثال زیر را ببینید.

$$f = \{(1, 8), (7, 13), (4, 6), (10, 10), (5, 6)\}$$

برای به دست آوردن معکوس تابع  $f$ ، باید در هر زوج مرتب، جای مؤلفه اول و دوم را عوض کنیم. در اینصورت، معکوس تابع  $f$  به صورت

$$f^{-1} = \{(8, 1), (13, 7), (6, 4), (10, 10), (6, 5)\}$$

زیر است:

تابع نیست. دلیل آن هم وجود دو زوج  $(6, 4)$  و  $(6, 5)$  است.

پس در تابع اصلی نباید مؤلفه دوم هیچ دو زوج مرتبی یکسان باشد. این همان تعریف تابع یک به یک است.

پس زمانی وارون یک تابع، خود تابع است که، تابع اصلی **یک به یک** باشد. به تابعی که معکوسش هم تابع است، معکوس پذیر می‌گویند. در بحث تابع، توابع معکوس پذیر (یک به یک) اهمیت زیادی دارند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تابع وارون پذیر نیست.} \Rightarrow \text{وارون تابع، تابع نیست.} \Rightarrow \text{وارون دارد.} \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست.} \\ \text{تابع وارون پذیر است.} \Rightarrow \text{وارون تابع، تابع است.} \Rightarrow \text{وارون دارد.} \Rightarrow \text{تابع یک به یک است.} \end{array} \right.$$

برای این که ببینیم تابعی یک به یک هست یا نه:

① اگر بتوانیم مثال نقض بزنیم یعنی نشان دهیم که برای دو مقدار متفاوت  $x$ ، یک مقدار یکسان برای  $y$  به دست می‌آید. آن‌گاه تابع یک به یک نیست.

② اگر نمودار تابع را رسم کنیم و هر خط موازی محور  $x$ ها (همان *فطحای افقی*) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک است.

**نکته** اگر یک تابع به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شده باشد (مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب متمایز، باید متمایز باشند)، هنگامی تابع یک به یک است که مؤلفه‌های دوم آن دوه‌دو متمایز باشند و اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز برابر باشند.

اگر تابع  $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$  یک به یک باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

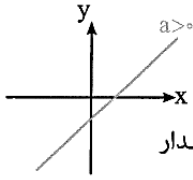
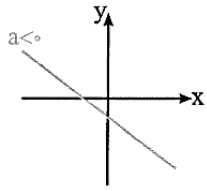
(1)  $-2$  (2)  $-1$  (3)  $2$  (4)  $1$

در تابع یک به یک اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های دوم برابر داشته باشیم، آن‌گاه مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز با هم برابرند. بنابراین:

$$(-1, 3) \in f, (m, 3) \in f \xrightarrow{\text{یک به یک است}} m = -1 \Rightarrow f = \{(-2, 2), (-1, 3), (-2, a)\}$$

از طرفی  $f$  تابع است، بنابراین اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول مساوی داشته باشیم، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم باید با هم برابر باشند.

$$(-2, a) \in f, (-2, 2) \in f \xrightarrow{\text{تابع است}} a = 2 \Rightarrow \text{گزینه (3) صحیح است.}$$



**نکته** در تابع خطی  $f(x) = ax + b$ :

(۱) اگر  $a \neq 0$  باشد، آن گاه با توجه به نمودار،  $f$  تابعی یک به یک است:

(هر خط به موازات محور  $x$  ها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می کند.)

(۲) اگر  $a = 0$ ، آن گاه ضابطه تابع  $f$  به صورت  $f(x) = b$  درمی آید که به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  مقدار

تابع برابر عدد ثابت  $b$  است. پس در این حالت  $f$  تابعی یک به یک نمی باشد.

**نکته مهم** هر تابعی که اکیداً یکنوا باشد، حتماً تابعی یک به یک است.

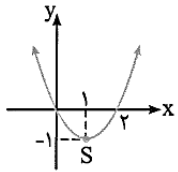
**نکته** اگر ضابطه تابع داده شده باشد، برای بررسی یک به یک بودن تابع باید درستی رابطه زیر را بررسی کنیم:

$$x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک بودن تابع  $f(x) = |x|$  را بررسی کنید.

$$D_f = \mathbb{R}, f(x_1) = |x_1|, f(x_2) = |x_2|, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

بنابراین تابع  $f$  یک به یک نمی باشد. به عنوان مثال، دو زوج مرتب  $(1, 1)$  و  $(-1, 1)$  در تابع  $f$  قرار دارند.



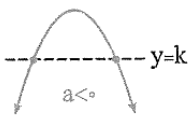
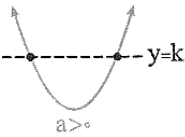
**محدود کردن دامنه و ساختن یک تابع یک به یک**

نمودار سهمی به معادله  $f(x) = x^2 - 2x$  به صورت مقابل است:

خطی مانند  $y = 1$  (هر خط به صورت  $y = k$  و  $k > -1$ )، نمودار تابع را در دو نقطه قطع می کند. پس  $f$  تابعی یک به یک نمی باشد. اما می توان با محدود کردن

دامنه تابع، تابعی یک به یک از آن ساخت که وارون آن، یک تابع باشد. مثلاً می توان دامنه آن را  $[1, +\infty)$  در نظر گرفت تا تابع  $f$  روی این بازه، تابعی یک به یک شود.

**نکته** با توجه به سهمی، هیچ تابع چند جمله ای از درجه ۲، روی  $\mathbb{R}$  یک به یک نیست.



خط  $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است. اگر نمودار  $f$  را در یکی از بازه های  $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$  یا  $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$  و یا هر زیرمجموعه ای از این دو بازه در

نظر بگیریم، آن گاه  $f$  تابعی یک به یک خواهد شد.

تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  یک به یک نیست. بزرگ ترین بازه هایی که این تابع در آن یک به یک است، برابرند با:  $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$  و  $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ .

تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 4x - 1$  روی کدام یک از بازه های زیر، تابعی یک به یک است؟

- (۱)  $(0, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 0)$  (۳)  $[1, 5]$  (۴)  $(-3, 3)$

خط  $x = 2 = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن نمودار  $f$  است.  $f$  روی بازه های  $[2, +\infty)$  و  $(-\infty, 2]$  و هر زیرمجموعه ای از آن ها یک به یک است:

(۱) روی  $[2, +\infty)$  تابعی یک به یک نیست.  $\Rightarrow [2, +\infty) \not\subseteq [2, +\infty)$

(۲) روی  $(-\infty, 0)$  تابعی یک به یک است.  $\Rightarrow (-\infty, 0) \subseteq (-\infty, 2]$

(۳) روی  $[1, 5]$  تابعی یک به یک نیست.  $\Rightarrow [1, 5] \not\subseteq [2, +\infty)$  و  $[1, 5] \not\subseteq (-\infty, 2]$

(۴) روی  $(-3, 3)$  یک به یک نیست.  $\Rightarrow (-3, 3) \not\subseteq (-\infty, 2]$  و  $(-3, 3) \not\subseteq [2, +\infty)$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تابع  $f(x) = x^2 + 2x$  در بازه  $(-\infty, a]$  یک به یک است. بزرگ ترین مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

طول رأس سهمی  $f(x) = x^2 + 2x$  برابر  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1$  است، پس تابع در بازه های  $(-\infty, -1]$  و  $[-1, +\infty)$  یک به یک

است، یعنی تابع در هر بازه به صورت  $(-\infty, a]$  که در آن  $a \leq -1$  است وارون پذیر است؛ پس بزرگ ترین مقدار  $a$  برابر -۱ است.



اگر  $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$  باشد، دامنه وارون تابع  $f$  کدام است؟

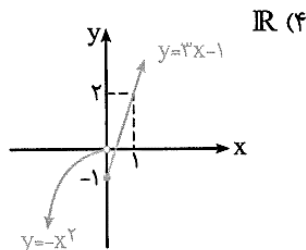
(۳)  $[-\infty, 0]$

(۲)  $[-1, +\infty]$

(۱)  $[0, -1]$

روش اول: برد تابع  $f$ ، دامنه  $f^{-1}$  است. برد تابع دوضابطه‌ای  $f$  را هم می‌توان با رسم نمودار و هم می‌توان از روی ضابطه آن تعیین کرد.

نمودار  $f$  از تابع خطی  $y = 3x - 1$  برای  $x \geq 0$  و تابع درجه دوم  $y = -x^2$  برای  $x < 0$  تشکیل شده است.



اگر نمودار را روی محور  $y$  ها تصویر کنیم، برد تابع به دست می‌آید. تصویر نمودار روی محور  $y$  ها، شامل تمام نقاط روی محور  $y$  ها است، بنابراین:

گزینه (۴) صحیح است.  $R_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

روش دوم: برای تعیین برد از روی ضابطه، برد هر یک از ضابطه‌ها را با توجه به دامنه به دست می‌آوریم. اجتماع آن‌ها برد تابع  $f$  است:

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0, y = 3x - 1: x \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 0 \Rightarrow 3x - 1 \geq -1 \Rightarrow y_1 \geq -1 \Rightarrow R_1 = [-1, +\infty) \\ x < 0, y = -x^2: x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow y_2 < 0 \Rightarrow R_2 = (-\infty, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = R_1 \cup R_2 = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

**نکته:** اگر  $f(a) = b$ ، آن‌گاه  $f^{-1}(b) = a$  و بر عکس. به عبارت دیگر اگر نمودار  $f$  از نقطه  $(a, b)$  بگذرد، آن‌گاه نمودار  $f^{-1}$  از نقطه  $(b, a)$  می‌گذرد.

اگر  $f$  تابعی با ضابطه  $f(x) = x^2 + 5x$  باشد، کدام یک از عبارات‌های زیر درست است؟

(۴)  $f^{-1}(-1) = -1$

(۳)  $f^{-1}(1) = 6$

(۲)  $f^{-1}(-4) = -1$

(۱)  $f^{-1}(10) = 2$

بررسی گزینه‌ها: (۱) اگر تساوی  $f^{-1}(10) = 2$  درست باشد، آن‌گاه باید تساوی  $f(2) = 10$  نیز برقرار باشد. داریم:

$f(x) = x^2 + 5x \Rightarrow f(2) = 2^2 + 5(2) = 14 \neq 10$

پس تساوی  $f^{-1}(10) = 2$  برقرار نمی‌باشد.

$f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) = -4 \Rightarrow f^{-1}(-4) = -1$  ✓

(۲) اگر  $f^{-1}(-4) = -1$ ، آن‌گاه  $f(-1) = -4$  داریم:

$f(6) = 6^2 + 5(6) = 66 \neq 1$

(۳) اگر  $f^{-1}(1) = 6$  باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم  $f(6) = 1$ ، اما داریم:

$f(-1) = -4 \neq -1$

(۴) اگر  $f^{-1}(-1) = -1$ ، آن‌گاه  $f(-1) = -1$  اما داریم:

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

اگر  $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$  باشد، مقدار  $f^{-1}(0)$  کدام است؟

(۴) تعریف نشده است.

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱)  $3 - \sqrt{5}$

اگر  $f^{-1}(0) = b$  باشد، آن‌گاه  $f(b) = 0$  است، بنابراین داریم:

$f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5} \Rightarrow f(b) = 3 - \sqrt{2b + 5} = 0$

$\Rightarrow 3 = \sqrt{2b + 5}$  به توان ۲ می‌رسانیم.  $\Rightarrow 9 = 2b + 5 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$  گزینه (۲) صحیح است.

تابع با ضابطه  $f(x) = (a-1)x^2 + ax - 2$  روی  $\mathbb{R}$ ، تابعی یک‌به‌یک می‌باشد.  $f^{-1}(4)$  کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۲

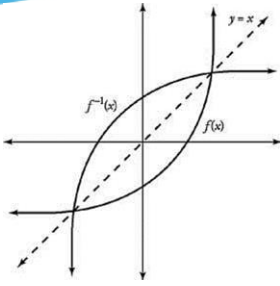
هیچ تابع چندجمله‌ای از درجه ۲، روی  $\mathbb{R}$  یک‌به‌یک نمی‌باشد. برای آن‌که  $f$  روی  $\mathbb{R}$ ، تابعی یک‌به‌یک باشد، باید  $a - 1 = 0$  شود تا

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = x - 2$

عامل  $x^2$  حذف و  $f$  تبدیل به یک تابع خطی غیرثابت شود:

فرض کنیم  $f^{-1}(4) = b$  باشد، در این صورت داریم:

گزینه (۳) صحیح است.  $f(b) = b - 2 = 4 \Rightarrow b = 6$



نمودار تابع وارون:

نمودار تابع وارون رابطه بسیار جالبی با نمودار تابع اصلی دارد. نمودار تابع وارون و تابع اصلی نسبت به خط قرینه‌اند.

زیرا وقتی جای مؤلفه  $x$  و  $y$  را در یک زوج مرتب عوض می‌کنید، در واقع آن را نسبت به خط  $y=x$  قرینه کرده‌اید. به عبارت دیگر، دو نقطه  $(x,y)$  و  $(y,x)$  نسبت به خط  $y=x$  قرینه هستند.

**نکته** برای مشخص کردن طول نقطه تلاقی نمودار توابع  $f$  و  $f^{-1}$  باید معادله  $f(x) = f^{-1}(x)$  را حل کنیم اما اگر  $f$  تابعی اکیداً صعودی و نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه نقطه تلاقی روی خط  $y=x$  است. به عبارت دیگر با حل معادله  $f(x) = f^{-1}(x) = x$  می‌توان طول نقطه تلاقی نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  را تعیین کرد. یعنی می‌توان به جای حل معادله  $f(x) = f^{-1}(x)$ ، معادله  $f(x) = x$  را حل کرد.

نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار  $f^{-1}$  را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

- ۱) ۱، صفر (۱) ۲) ۲، صفر (۲) ۳) ۲، ۳ (۳) ۴) ۱، ۴ (۴)

$f$  تابعی اکیداً صعودی است، بنابراین با حل معادله  $f^{-1}(x) = f(x) = x$ ، طول نقطه تلاقی نمودار توابع  $f$  و  $f^{-1}$  به دست می‌آید:

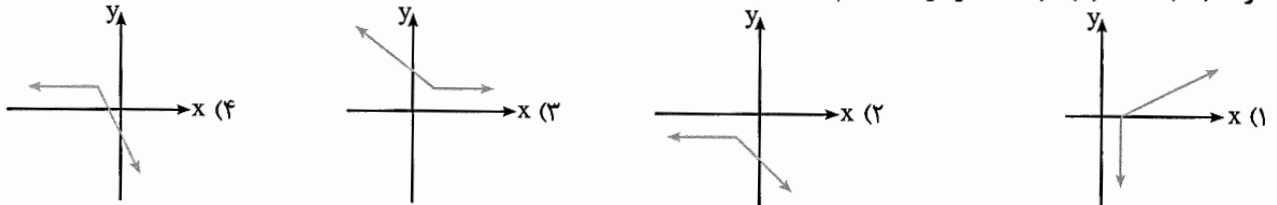
$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x} = x \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

خط به معادله  $3x + 4y = 12$  را نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم. کدام نقطه زیر روی نمودار تابع جدید قرار دارد؟

- ۱)  $(3, -1)$  ۲)  $(-\frac{3}{2}, 6)$  ۳)  $(-2, 4)$  ۴)  $(6, -2)$

در معادله  $3x + 4y = 12$ ، اگر به جای  $x$ ،  $y$  و به جای  $y$ ،  $x$  قرار دهیم، ضابطه نمودار تابع جدید به دست می‌آید. بنابراین ضابطه نمودار تابع جدید به صورت  $4x + 3y = 12$  است. از بین نقاط داده‌شده، فقط مختصات نقطه  $(-\frac{3}{2}, 6)$  در معادله  $4x + 3y = 12$  صدق می‌کند و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

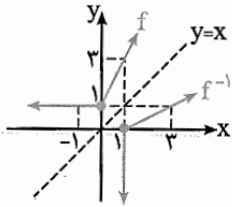
اگر  $f(x) = x + |x| + 1$  باشد، نمودار  $f^{-1}$  کدام است؟



نمودار تابع  $f(x) = x + |x| + 1$  را به کمک نقطه‌یابی رسم کرده و سپس قرینه نمودار تابع را نسبت به خط  $y = x$  رسم می‌کنیم تا نمودار  $f^{-1}$  به دست آید:

ریشه درون قدرمطلق

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
| x | -1 | 0 | 1 |
| y | 1  | 1 | 3 |



گزینه (۱) صحیح است.  $\Rightarrow$

**نکته مهم** برای به دست آوردن دامنه تابع وارون تابع پیوسته  $f$ ، باید برد تابع  $f$  را به دست آوریم.

اگر  $f$  تابعی اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد، می‌توان در دو حالت زیر برد تابع  $f$  را به دست آورد:

حالت اول: اگر  $f$  تابعی اکیداً صعودی روی بازه  $(a, b)$  باشد، آن‌گاه برد تابع  $f$ ، بازه  $(f(a), f(b))$  خواهد بود.

حالت دوم: اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی روی بازه  $(a, b)$  باشد، آن‌گاه برد تابع  $f$ ، بازه  $(f(b), f(a))$  است.

به عنوان مثال، تابع  $f(x) = |x| - |x - 2|$  روی بازه  $(0, 2)$  اکیداً صعودی است، برد این تابع برابر است با:

$$f(0) = -2, f(2) = 2 \Rightarrow R_f = (-2, 2)$$

**نکته** اگر ابتدا یا انتهای بازه یا هر دو بی‌نهایت باشند، از  $+\infty$  و  $-\infty$  در ابتدا، انتها یا در هر دو استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثال، اگر بخواهیم برد تابع وارون‌پذیر  $f(x) = 2 + \sqrt{x}$  را به دست آوریم، داریم:  $f$  تابع پیوسته و اکیداً صعودی است.

$$D_f = [0, +\infty) \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 2 \Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

### محاسبه معکوس تابع از روی ضابطه

اگر تابع به صورت ضابطه نمایش داده شده باشد، چگونه می‌توان معکوس آن را به دست آورد؟  
مراحل انجام این کار به شرح زیر است:

مرحله اول: در تابع اصلی به جای  $X$ ،  $Y$  و به جای  $Y$ ،  $X$  قرار می‌دهیم.

مرحله دوم: تابع را طوری مرتب می‌کنیم که در یک طرف یک  $Y$  تنها و در طرف دیگر عبارتی مبتنی بر  $X$  باشد.

$$y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \rightarrow x = \sqrt{y+1} \rightarrow x^2 = y+1 \rightarrow y = x^2 - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 1$$

$$f(x) = \frac{x-3}{x-6}$$

$$x = \frac{y-3}{y-6} \rightarrow y-3 = x(y-6) \rightarrow y-3 = xy-6x \rightarrow 6x-3 = xy-y \rightarrow 6x-3 = y(x-1) \rightarrow y = \frac{6x-3}{x-1}$$

### معکوس توابع معروف

در زیر لیستی از معکوس توابع معروف آورده شده است:

| تابع اصلی                  | تابع معکوس                   |
|----------------------------|------------------------------|
| $f(x) = ax + b$            | $f^{-1} = \frac{x-b}{a}$     |
| $f(x) = \sqrt[n]{x}$       | $f^{-1} = x^n$               |
| $f(x) = \log_a x$          | $f^{-1} = a^x$               |
| $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ | $f^{-1} = \frac{dx-b}{a-cx}$ |

ضابطه تابع وارون تابع  $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$  را پیدا کنید.

همان‌طور که گفتیم اول به جای  $f(x)$  می‌گذاریم  $y$ :

حالا  $X$  را برحسب  $Y$  پیدا می‌کنیم:

حالا جای  $X$  و  $Y$  را عوض می‌کنیم:

ضابطه  $f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}$  یا  $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}$ ، ضابطه تابع وارون  $f$  است.

ضابطه تابع وارون تابع  $f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$  کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{5x-1}{2x-3} \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{x-2} \quad (3)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{5x-1} \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2x+3} \quad (1)$$

کارهایی را که گفتیم به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-5} \Rightarrow y = \frac{2x+3}{x-5} \Rightarrow yx - 5y = 2x+3 \Rightarrow yx - 2x = 5y+3 \Rightarrow x(y-2) = 5y+3$$

$$\Rightarrow x = \frac{5y+3}{y-2} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \frac{5x+3}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{x-2}$$

دقت کنید که وقتی  $X$  را برحسب  $Y$  پیدا می‌کنیم تا وقتی که جای  $X$  و  $Y$  را عوض نکرده‌ایم، هنوز با خود تابع سروکار داریم و ضابطه تابع وارون از جایی شروع می‌شود که جای  $X$  و  $Y$  را عوض کنیم.

ضابطه تابع وارون  $f(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$  را پیدا کنید

برای هر کدام از ضابطه‌ها، ضابطه تابع وارون را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$x \geq 0 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} \xrightarrow{\text{تابع وارون}} y = \frac{x}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$$

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y \xrightarrow{\text{تابع وارون}} y = 2x \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع وارون به صورت مقابل است:

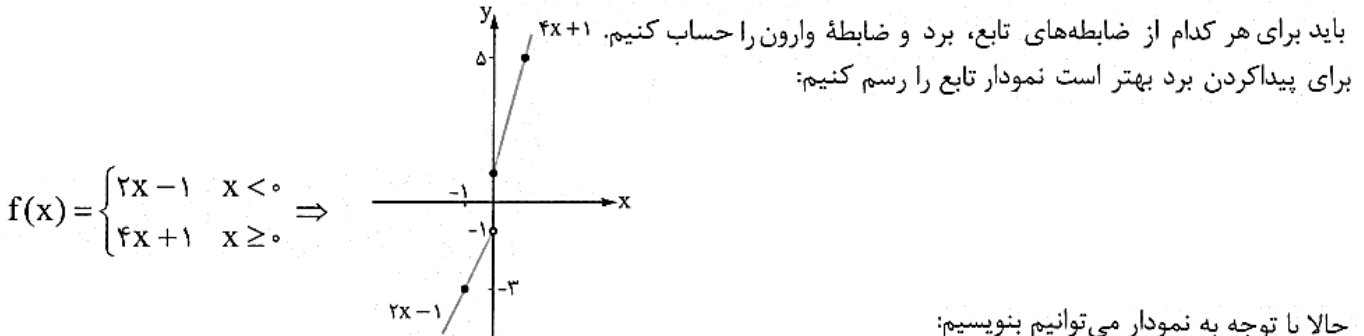
ضابطه تابع وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ 4x+1 & x \geq 0 \end{cases}$  کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & x < 0 \\ \frac{1}{4}(x+1) & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & x < -1 \\ \frac{1}{4}(x-1) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & x < 0 \\ \frac{1}{4}(x-1) & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & x < -1 \\ \frac{1}{4}(x+1) & x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ 4x+1 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow y = 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} \text{برد: } y < -1 \\ y = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \frac{1}{2}(x+1) \end{cases} \\ x \geq 0 \Rightarrow y = 4x+1 \Rightarrow \begin{cases} \text{برد: } y \geq 1 \\ y = 4x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{4} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \frac{1}{4}(x-1) \end{cases} \end{cases}$$

حالا با توجه به نمودار می‌توانیم بنویسیم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & x < -1 \\ \frac{1}{4}(x-1) & x \geq 1 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع وارون به صورت روبه‌رو است:

ضابطه تابع وارون تابع  $f(x) = \sqrt{x} + 3$  را به دست آورید.

$$y = \sqrt{x} + 3 \Rightarrow \sqrt{x} = y - 3$$

$$x = (y - 3)^2$$

$$f^{-1}(x) = (x - 3)^2$$

می‌دانیم دامنه تابع  $y = (x - 3)^2$  برابر  $\mathbb{R}$  است اما دامنه  $f^{-1}(x) = (x - 3)^2$  برابر  $\mathbb{R}$  نمی‌باشد. برای تعیین دامنه  $f^{-1}$  باید برد  $f$  را به دست بیاوریم:

$$\sqrt{x} \geq 0 \xrightarrow{+3} \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3 \Rightarrow R_f = [3, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

برد  $f$  را به صورت مقابل نیز می‌توانیم به دست بیاوریم.  $f$  تابعی اکیداً صعودی است:  $D_f = [0, +\infty) \Rightarrow R_f = [f(0), +\infty) = [3, +\infty)$  داریم:

**تعیین ضابطه تابع وارون:** تعیین ضابطه تابع وارون، در تست‌های کنکور زیاد مطرح می‌شود. برای حل این‌گونه تست‌ها می‌توان از عددگذاری و رد گزینه‌ها استفاده کرد. برای این کار، مقدار تابع را به ازای یک  $a$  دلخواه به دست می‌آوریم ( $b$ ). در تابع‌های داده شده به جای  $x$ ،  $b$  قرار می‌دهیم، هر کدام که حاصل برابر  $a$  نشود، جواب تست نمی‌باشد.

تابع با ضابطه  $f(x) = x - |2 - x|$  روی بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه وارون آن کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 2), x \geq 2 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 2), x \leq 2 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x - 2), x \geq 2 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x - 2), x \leq 2 \quad (3)$$

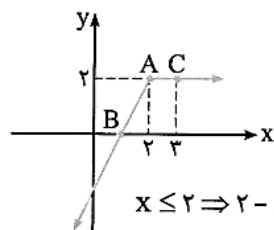
روش اول: با رسم نمودار تابع قدرمطلق از درجه اول  $y = x - |2 - x|$  به کمک نقطه‌یابی، ابتدا بازه‌ای که نمودار در آن بازه وارون پذیر

است را مشخص می‌کنیم:

$$(ریشه داخل قدرمطلق) \quad x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

دو نقطه کمکی در دو طرف نقطه  $A$  مشخص می‌کنیم:

$$B(1, 0), C(3, 2)$$



با توجه به نمودار،  $f$  روی بازه  $(-\infty, 2]$  اکیداً صعودی و در نتیجه وارون پذیر است.

باید برد تابع  $f$  را به دست آوریم تا دامنه  $f^{-1}$  به دست آید. با تصویر کردن نمودار تابع روی محور  $y$  ها، بازه  $(-\infty, 2]$  به دست می‌آید که این بازه، برد تابع است. پس دامنه  $f^{-1}$  برابر  $(-\infty, 2]$  است و ضابطه  $f^{-1}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x \leq 2 \Rightarrow 2 - x \geq 0 \Rightarrow |2 - x| = 2 - x = -x + 2 \Rightarrow y = x - (-x + 2)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow 2x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 2) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 2), x \leq 2 \Rightarrow \text{گزینه (1) صحیح است.}$$

روش دوم: از عددگذاری برای رد گزینه‌ها استفاده می‌کنیم. می‌دانیم اگر  $f(a) = b$ ، آن‌گاه  $f^{-1}(b) = a$  می‌باشد. عدد دلخواهی از بازه  $(-\infty, 2]$ ،

$$f(0) = 0 - |2 - 0| = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 0$$

مثلاً  $x = 0$  را انتخاب می‌کنیم و  $f(0)$  را به دست می‌آوریم:

پس  $x = -2$  باید در دامنه  $f^{-1}$  قرار داشته باشد که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌های (2) و (4) حذف می‌شوند. با قرار دادن عدد  $-2$  در ضابطه گزینه‌های

$$f^{-1}(-2) = \frac{1}{4}(-2 + 2) = 0 \Rightarrow \text{برقرار است.}$$

(1) و (3) داریم:

$$f^{-1}(-2) = \frac{1}{4}(-2 - 2) = -2 \Rightarrow \text{برقرار نیست.}$$

$\Rightarrow$  گزینه (1) صحیح است.

ضابطه تابع وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ \frac{1}{3}x - 4 & x < 0 \end{cases}$  در صورت وجود کدام است؟

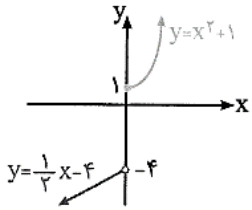
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 2x+8 & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ \frac{1}{3}x+4 & x < -4 \end{cases} \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 2x+8 & x < -4 \end{cases} \quad (3)$$

(4)  $f$  وارون پذیر نمی باشد.

روش اول: نمودار تابع دوضابطه ای  $f$  به صورت مقابل است:



هر خط به موازات محور  $x$  ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند، بنابراین  $f$  تابعی یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. برای محاسبه  $f^{-1}$  باید ضابطه وارون هر یک از ضابطه ها را جداگانه به دست آوریم. البته توجه داشته باشید که برای هر ضابطه باید برد آن را نیز مشخص کنیم، زیرا برد آن، دامنه وارون آن می باشد.

با توجه به نمودار، برد تابع  $y = x^2 + 1$  برای  $x \geq 0$ ، مجموعه  $(1, +\infty)$  و برد تابع  $y = \frac{1}{3}x - 4$  برای  $x < 0$ ، مجموعه  $(-\infty, -4)$  می باشد.

$$x \geq 0 \Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون در این حالت داریم:

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1 \quad (1)$$

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 4 \Rightarrow y < -4 \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, -4)$$

$$y = \frac{1}{3}x - 4 \xrightarrow{\times 3} 2y = x - 8 \Rightarrow x = 2y + 8 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x + 8, x < -4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 2x+8 & x < -4 \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه (3) صحیح است.}$$

روش دوم: ابتدا با رسم نمودار، مشخص می کنیم که تابع وارون پذیر است یا خیر. چون تابع وارون پذیر است، پس گزینه (4) نادرست است. مقدار  $f(1)$  برابر 2 است. اگر به جای  $x$  در گزینه های (1)، (2) و (3)، عدد 2 قرار دهیم، حاصل گزینه های (1) و (3) برابر 1 می شوند، بنابراین گزینه (2) نادرست است. از عدد دلخواه دیگری استفاده می کنیم:

$$f(-2) = -5 \xrightarrow{f^{-1}(x)=2x+8} f^{-1}(-5) = -10 + 8 = -2 \quad \checkmark$$

بنابراین گزینه (3) صحیح است.

### نکات مهم تابع معکوس

**نکته ۱:** دامنه تابع معکوس برابر است با برد تابع اصلی.  $D_{f^{-1}} = R_f$

**نکته ۲:** برد تابع معکوس برابر است با دامنه تابع اصلی.  $R_{f^{-1}} = D_f$

**نکته ۳:** ترکیب هر تابع با معکوسش برابر است با تابع همانی  $f \circ f^{-1}(x) = x$

**نکته ۴:** تابعی که خودش یا معکوسش برابر است، تابع پیچ نامیده می شود.  $f(x) = x \rightarrow f^{-1}(x) = x$

**نکته ۵:** معکوس معکوس یک تابع برابر است با خود تابع  $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

**نکته ۶:** معکوس ترکیب دو تابع برابر است به صورت زیر است:  $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

تست آموزشی

کدام گزینه بیانگر تابعی وارون پذیر است؟

(۲)  $y = 1 - 3|x| + x$

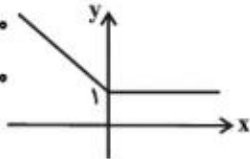
(۱)  $y = |x| + 1 - x$

(۴)  $y = 1 - 3x + |x|$

(۳)  $y = 1 + 3|x| - x$

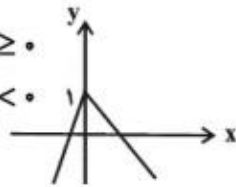
شرط آن که تابع وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد، برای بررسی یک به یک بودن نمودار توابع را رسم می کنیم:

گزینه «۱»:  $y = |x| + 1 - x = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ -2x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



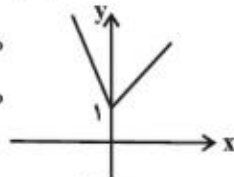
یک به یک نیست.

گزینه «۲»:  $y = 1 - 3|x| + x = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \geq 0 \\ 4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



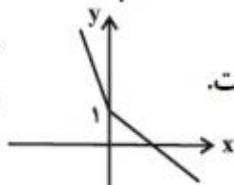
یک به یک نیست.

گزینه «۳»:  $y = 1 + 3|x| - x = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 0 \\ -4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



یک به یک نیست.

گزینه «۴»:  $y = 1 - 3x + |x| = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \geq 0 \\ -4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



یک به یک است، پس وارون پذیر است.

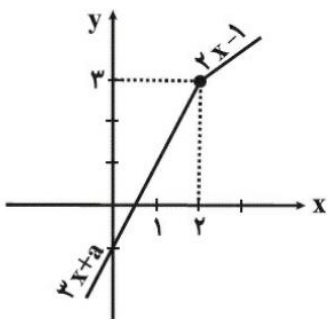
بیشترین مقدار صحیح  $a$  برای آن که تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 2 \\ 3x + a & x < 2 \end{cases}$  وارون پذیر باشد، کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) -۴

(۳) -۳



$$\left. \begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow 2(2) - 1 = 3 \\ x = 2 &\Rightarrow 3(2) + a = 6 + a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6 + a \leq 3 \Rightarrow a \leq -3$$

$\max\{a\} = -3$

اگر  $f = \{(4, 2), (a, 5), (4, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  یک تابع یک به یک باشد، زوج مرتب  $(a, b)$  کدام است؟

(۴)  $(2, 2)$

(۳)  $(-1, 4)$

(۲)  $(2, 4)$

(۱)  $(2, -1)$

$$f \text{ تابع است} \Rightarrow \begin{cases} (4, 2) \in f \\ (4, a^2 - a) \in f \end{cases} \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

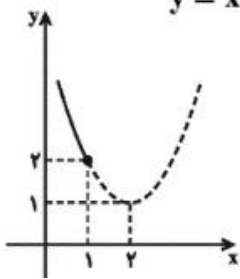
$$\text{اگر } a = 2 \text{ باشد: } \begin{cases} (4, 2) \in f \\ (b, 2) \in f \end{cases} \Rightarrow b = 4$$

اگر  $a = -1$ ، آن گاه  $f = \{(4, 2), (-1, 5), (4, 2), (4, 2), (-1, 4)\}$  تابع نخواهد بود، بنابراین  $a = 2$  صحیح است و  $(a, b) = (2, 4)$  می باشد.

دامنه تابع وارون تابع  $y = x^2 - 4x + 5$ ،  $x \leq 1$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, 2]$       (۲)  $(2, +\infty)$       (۳)  $(-\infty, 1]$       (۴)  $(1, +\infty)$

دامنه تابع وارون، با برد تابع اصلی برابر است، پس برد تابع با ضابطه  $y = x^2 - 4x + 5$  را با شرط  $x \leq 1$  به دست می آوریم. برای این منظور، نمودار تابع را رسم می کنیم:



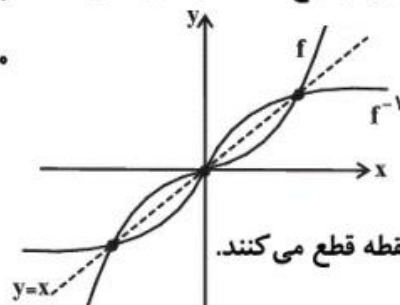
$$y = x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 1$$

همان طور که در شکل دیده می شود با شرط  $x \leq 1$ ، برد تابع بازه  $[2, +\infty)$  است که همان دامنه تابع وارون است.

تابع  $f(x) = x|x|$ ، وارون خود را در چند نقطه قطع می کند؟

- (۱) صفر      (۲) دو      (۳) سه      (۴) پنج

قرینه نمودار تابع یک به یک  $f$  نسبت به خط  $y = x$ ، نمودار تابع  $f^{-1}$  را نتیجه می دهد.  $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



با توجه به شکل فوق، تابع و وارونش همدیگر را در سه نقطه قطع می کنند.

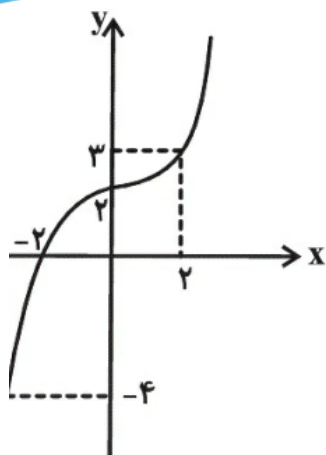
اگر  $f(x) = \frac{a+1}{x+2} - 1$  و  $f^{-1}(2) = -3$ ، آن گاه مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) -۳      (۳) ۴      (۴) -۴

ابتدا توجه کنید که از  $f^{-1}(2) = -3$  نتیجه می شود، بنابراین  $f(-3) = 2$ .

$$f(-3) = \frac{a+1}{-3+2} - 1 = 2 \Rightarrow -a-1 = 3 \Rightarrow a = -4$$





نمودار تابع  $y = -f(x-1)$  به شکل مقابل است. کدام تساوی درست نیست؟

(۱)  $f^{-1}(-۳) = ۱$   
با توجه به نمودار تابع  $g(x) = -f(x-1)$  داریم:

$g(۲) = ۳ \Rightarrow -f(۲-۱) = ۳ \Rightarrow f(۱) = -۳ \Rightarrow f^{-1}(-۳) = ۱$  (۱)  $f^{-1}(-۲) = -۱$  (۲)

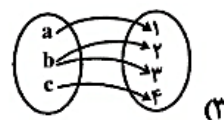
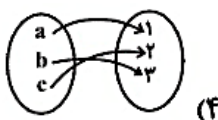
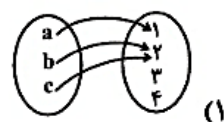
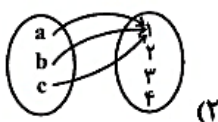
$g(۰) = ۲ \Rightarrow -f(۰-۱) = ۲ \Rightarrow f(-۱) = -۲ \Rightarrow f^{-1}(-۲) = -۱$  (۲)  $f^{-1}(۰) = -۳$  (۳)

$g(-۲) = ۰ \Rightarrow -f(-۲-۱) = ۰ \Rightarrow f(-۳) = ۰ \Rightarrow f^{-1}(۰) = -۳$  (۳)  $f^{-1}(۴) = ۴$  (۴)

$g(-۳) = -۴ \Rightarrow -f(-۳-۱) = -۴ \Rightarrow f(-۴) = ۴ \Rightarrow f^{-1}(۴) = -۴$  (۴)

بنابراین تساوی  $f^{-1}(۴) = ۴$  درست نیست.

کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابعی است که وارونش نیز یک تابع است؟



اگر وارون تابع  $f$ ، خود یک تابع باشد به این معنی است که تابع  $f$  باید یک به یک باشد که تنها تابع گزینه «۴» یک به یک است.

$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$   
توجه کنید که گزینه «۳» تابع نیست.

اگر نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x+2}{ax+b}$  بر نمودار تابع معکوس خود منطبق باشد، مقدار  $b$  چقدر است؟ ( $a \neq 0$ )

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

$$y = \frac{2x+2}{ax+b} \Rightarrow axy + by = 2x+2 \Rightarrow axy - 2x = 2 - by$$

$$x(ay - 2) = 2 - by \Rightarrow x = \frac{2 - by}{ay - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2 - bx}{ax - 2}$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow b = -2$$

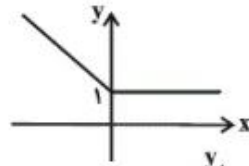
کدام گزینه بیانگر تابعی وارون پذیر است؟

(۱)  $y = |x| + 1 - x$  (۲)  $y = 1 - 2|x| + x$

(۳)  $y = 1 + 2|x| - x$  (۴)  $y = 1 - 2x + |x|$

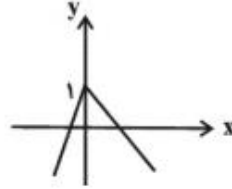
شرط آن که تابع وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد. برای بررسی یک به یک بودن نمودار توابع را رسم می کنیم:

گزینه «۱»:  $y = |x| + 1 - x = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ -2x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



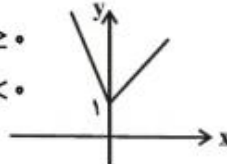
یک به یک نیست.

گزینه «۲»:  $y = 1 - 3|x| + x = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \geq 0 \\ 4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



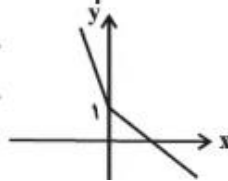
یک به یک نیست.

گزینه «۳»:  $y = 1 + 3|x| - x = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 0 \\ -4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



یک به یک نیست.

گزینه «۴»:  $y = 1 - 3x + |x| = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \geq 0 \\ -4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$



یک به یک است، وارون پذیر است.

- معکوس تابع  $y = x^3 - 8$  کدام است؟

(۴)  $y = \sqrt[3]{x+8}$

(۳)  $y = \sqrt[3]{x-2}$

(۲)  $y = \sqrt[3]{x-8}$

(۱)  $y = \sqrt[3]{x+2}$

را بر حسب  $y$  پیدا می کنیم و بعد جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم:

$y = x^3 - 8 \Rightarrow x^3 = y + 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+8} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \sqrt[3]{x+8}$

تابع وارون تابع  $y = \sqrt{1-x}$  کدام است؟

(۴)  $y = 1 + x^2$

(۳)  $y = \sqrt{1+x}$

(۲)  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(۱)  $y = 1 - x^2, x \geq 0$

همان طور که گفتیم برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون یک تابع،  $x$  را بر حسب  $y$  پیدا می کنیم و بعد جای

$x$  و  $y$  را عوض می کنیم:  $y = \sqrt{1-x} \Rightarrow y^2 = 1-x \Rightarrow x = 1-y^2 \xrightarrow{\text{وارون}} y = 1-x^2$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$

فقط چون در خود تابع  $y = \sqrt{1-x}$  مقدار  $y \geq 0$  است، پس تابع وارون باید داشته باشیم  $x \geq 0$ .

ضابطه معکوس تابع  $y = 2 - \sqrt{x-1}$  به کدام صورت است؟

(۱)  $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$  (۲)  $y = -x^2 - 4x + 5; x \leq 2$  (۳)  $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$  (۴)  $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

برای پیدا کردن محدوده  $x$  در تابع وارون باید محدوده  $y$  در تابع اصلی یا همان برد تابع را پیدا کنیم:

$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \Rightarrow x - 1 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \xrightarrow{\text{وارون}} y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$

ضابطه معکوس  $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  به کدام صورت است؟

(۱)  $y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R}$  (۲)  $y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} - \{0\}$  (۳)  $y = x|x|; x \in \mathbb{R} - \{0\}$  (۴)  $y = x|x|; x \in \mathbb{R}$

برای آن که ضابطه معکوس تابع را پیدا کنیم، بهتر است مجموعه  $\mathbb{R}$  را به دو بازه  $x > 0$  و  $x < 0$  تقسیم کنیم:

$x > 0 \Rightarrow y = \frac{x}{x} \sqrt{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \xrightarrow{\text{وارون}} y = x^2, x > 0$

$x < 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{x} \sqrt{-x} = -\sqrt{-x} \Rightarrow -x = y^2 \xrightarrow{\text{وارون}} y = -x^2, x < 0$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

پس تابع وارون برابر است با  $y = x|x|, x \in \mathbb{R}$

### تست ارزشیابی

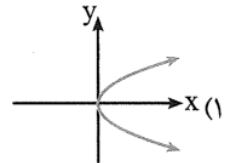
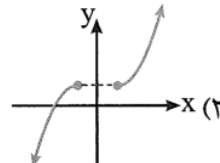
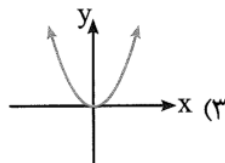
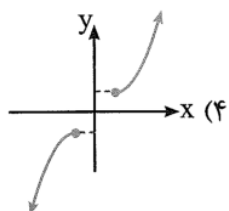
اگر رابطه  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  تابع یک به یک باشد، دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟

(۱)  $(-1, 1)$  (۲)  $(-1, 3)$  (۳)  $(2, 1)$  (۴)  $(2, 3)$

از رابطه  $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + |y| \leq 2\}$ ، حداقل چند زوج مرتب حذف شود تا تابعی یک به یک به دست آید؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

کدام نمودار زیر، نمودار تابعی یک به یک است؟



توابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 2+x & x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$  به ترتیب چگونه اند؟

(۱) یک به یک - یک به یک (۲) یک به یک - غیر یک به یک (۳) غیر یک به یک - یک به یک (۴) غیر یک به یک - غیر یک به یک

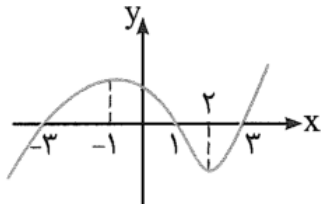
تابع با کدام ضابطه زیر، یک به یک است؟

$$y = \begin{cases} -x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$y = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad (۳)$$

$$y = x^2 \quad (۲)$$

$$y = |x| \quad (۱)$$



نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. روی کدام بازه زیر،  $f^{-1}$  تابع است؟

$$(-3, 0) \quad (۲)$$

$$(-\infty, 2) \quad (۱)$$

$$(-1, 2) \quad (۴)$$

$$(1, 3) \quad (۳)$$

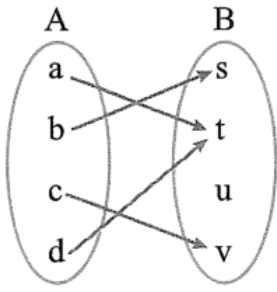
تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2 + 4x - 1$  روی  $(-\infty, x_0]$ ، تابعی یک به یک است. مقدار تابع  $f$  به ازای بزرگ‌ترین مقدار  $x_0$  کدام است؟

$$-5 \quad (۴)$$

$$-1 \quad (۳)$$

$$11 \quad (۲)$$

$$31 \quad (۱)$$



تابع  $f$  با نمودار مقابل نمایش داده شده است.  $f$  تابعی ..... و  $f^{-1}$  ..... می باشد.

(۱) یک به یک - تابع

(۲) غیر یک به یک - غیر تابع

(۳) یک به یک - غیر تابع

(۴) غیر یک به یک - تابع

اگر  $f$  تابعی خطی با شرایط  $f(2) = 8$  و  $f^{-1}(3) = 7$  باشد، عرض از مبدأ نمودار  $f$  کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

اگر ضابطه تابع  $f$  به صورت  $f(x) = x^3 + x - 1$  باشد، نمودار  $f^{-1}$  الزاماً از کدام نقطه می گذرد؟

(۴)  $(-2, -11)$

(۳)  $(1, 5)$

(۲)  $(0, 2)$

(۱)  $(-3, -1)$

وارون تابع  $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2+1}}$  از نقطه  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$  می گذرد،  $a$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

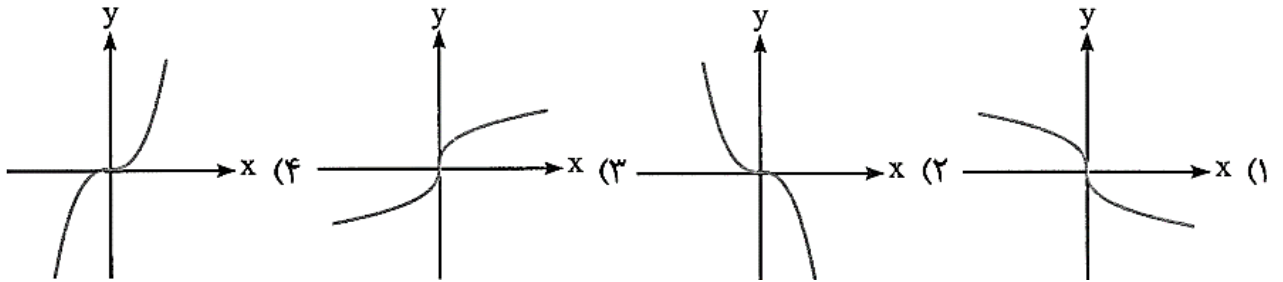
دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$  و  $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$  مفروض‌اند. اگر  $g^{-1}(f(a)) = 3$  باشد، کدام است  $a$ ؟

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۴

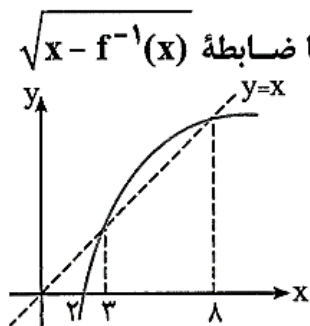
تابع با ضابطه  $f(x) = (a+2)x^2 - x + a$  روی  $\mathbb{R}$ ، تابعی یک‌به‌یک می‌باشد.  $f^{-1}(3)$  کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) ۵

اگر  $f(x) = x|x|$  باشد، نمودار تابع  $y = f^{-1}(x)$  کدام است؟



شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = f(x)$  و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$  کدام است؟



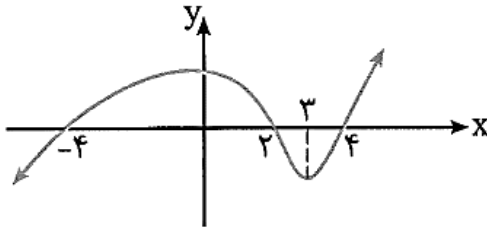
- (۱) (۰, ۲] (۲) [۲, ۳] (۳) [۲, ۸] (۴) [۳, ۸]

تابع  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  با دامنه  $(-1, +\infty)$  مفروض است. نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  در چند نقطه متقاطع هستند؟  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ غیرمتقاطع

تابع با ضابطه  $f(x) = (a+2)x^2 + 4x + a + 1$  روی  $\mathbb{R}$  وارون پذیر است. نمودار توابع  $f$  و  $f^{-1}$  همدیگر را با کدام طول قطع می کنند؟  
 ۱ (۱)       $\frac{1}{2}$  (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

اگر تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x+1} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x-3} & x \leq -3 \end{cases}$  وارون پذیر باشد، کدام نقطه زیر باید از نمودار  $f$  حذف شود؟  
 ۱ (۳، -۲)      ۲ (۰، -۱)      ۳ (-۳، ۰)      ۴ همواره وارون پذیر است.

نمودار تابع  $y = f(x+2)$  به صورت مقابل است. تابع  $y = f(2x)$  در کدام بازه زیر، تابعی وارون پذیر است؟



(۱)  $[2, 3]$

(۲)  $[0, 2]$

(۳)  $[1, \frac{5}{2}]$

(۴)  $[-3, 2]$

قرینه خط به معادله  $3y - 2x = 4$  را نسبت به خط  $y = x$ ، خط  $d$  می نامیم. عرض از مبدأ خط  $d$  کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) -۱

(۱) -۲

تابع با ضابطه  $f(x) = 2x - |4 - 2x|$  در بازه ای وارون پذیر است. ضابطه  $f^{-1}(x)$  در آن بازه کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$

(۳)  $\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$

(۲)  $\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$

(۱)  $\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$

نمودار تابع  $y = 4 + \sqrt{x+1}$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می کنیم. ضابطه نمودار حاصل کدام است؟

(۲)  $y = x^2 - 8x + 15, x \geq 4$

(۱)  $y = x^2 - 8x + 15, x \leq 4$

(۴)  $y = x^2 + 2x, x \leq -1$

(۳)  $y = x^2 + 2x, x \geq -1$



ضابطه وارون تابع  $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

(۱)  $y = x|x|, x \in \mathbb{R}$  (۲)  $y = x^2, x < 0$  (۳)  $y = \pm x^2, x \in \mathbb{R}$  (۴)  $y = \pm x|x|, x \in \mathbb{R}$

ضابطه وارون تابع  $y = \frac{x}{1+|x|}$  کدام است؟

(۱)  $y = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1$  (۲)  $y = \frac{1-|x|}{|x|}, |x| > 1$  (۳)  $y = \frac{x}{|x|-1}, |x| > 1$  (۴)  $y = \frac{|x|-1}{x}, |x| < 1$

تابع با ضابطه  $y = x|x-2|$  در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

(۱)  $1 - \sqrt{1+x}, x < 0$  (۲)  $1 - \sqrt{1-x}, x < 1$  (۳)  $1 + \sqrt{1-x}, 0 < x < 1$  (۴)  $1 - \sqrt{1-x}, 0 < x < 1$