

## استدلال ریاضی

۶. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند،

$$\text{داریم: } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

از این قسمت قصد داریم درباره‌ی برخی از راه‌هایی که استدلال و ثابت کردن در ریاضی رو بهتر یاد بدیم و از یاد گرفتن اون‌ها لذت ببریم.

## مثال نقض

۷. برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

خیلی وقت‌ها خیلی از رابطه‌ها رو می‌تونیم با زدن یه مثال ساده رد کنیم و به صاحبش بفهمونیم که داره اشتباه می‌کنه. به عنوان مثال یکی اومده به من میگه ضرب هر دو عدد طبیعی یه عدد زوج هست. من برای این‌که بهش بگم داره اشتباه می‌کنه گفتم حاصل  $3 \times 5$  چند میشه و وقتی گفت برابر ۱۵ هست، خودش متوجه اشتباهش شد.

۸. برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$$

است.

**تمرین: هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت نادرست بودن با یک مثال نقض رد کنید.**

۹. ضرب دو عدد گنگ غیر مساوی، عددی گنگ است.

۱. جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۰. برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $3^n + 4$  اول است.

۲. حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، گویا است.

۱۱. ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، گنگ می‌شود.

۳. مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گویا است.

۱۲. معکوس هر عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است.

۴. توان دوم هر عدد گنگ، عددی گویا است.

۱۳. اگر برای هر سه مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  و  $C$  داشته باشیم  $A \cup B = A \cup C$  آن‌گاه  $B = C$ .

۵. اگر  $a^2 < b^2$  باشد، آن‌گاه  $a < b$  خواهد بود.

**اثبات مستقیم**

۳. مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

هر وقت بخواهیم با استفاده از قانون‌هایی که در قبل یاد گرفتیم مطالبی رو در ریاضی ثابت کنیم از اثبات به روش مستقیم استفاده خواهیم کرد، به مثال زیر دقت کنید.

۴. اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه  $4k+1$  مربع کامل است.

مثال: ثابت کنید مجموع سه عدد متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ: برای این کار کافیست که سه عدد طبیعی رو با  $n$  و  $n+1$  و  $n+2$  نشون بدیم، پس داریم:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$$

پس خیلی راحت موفق شدیم این قانون رو ثابت کنیم.

**تمرین: هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت کنید.**

۱. مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

۲. حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

۶. میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۷. ثابت کنید جمع پنج عدد طبیعی متوالی بر ۵ بخش پذیر است.

۱۱. اگر  $n$  عددی فرد باشد، مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی بر  $n$  بخش پذیر است.

۸. نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش پذیر است.

۹. ثابت کنید اگر به ۴ برابر ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل خواهد بود.

### اثبات با در نظر گرفتن همهی حالتها

خیلی وقتها برای ثابت کردن قانونی باید قانون رو تو چند حالت ثابت کنیم تا یه وقت چیزی از قلم نیفته کارمون به مشکل بخوره، به مثال زیر توجه کن.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$  ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

پاسخ: این مثال رو تو دو حالت حل می کنیم.

اول:  $n$  یه عدد زوج باشه یعنی  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) اون وقت داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 =$$

$$4k^2 - 10k + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

$$2(\underbrace{2k^2 - 5k + 3}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$$

پس حاصل تو این حالت فرد شد.

دوم:  $n$  رو یه عدد فرد فرض کنیم یعنی  $n = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) اون وقت داریم:

۱۰. اگر  $a$  مضرب ۳ باشد، آنگاه  $a(a+3)$  مضرب ۱۸ خواهد بود.

۳.  $A = \{3, 4\}$  یک زیر مجموعه از مجموعه

$S = \{1, 2, \dots, 6\}$  است و  $n \in S$ ، اگر  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

یک عدد زوج باشد، ثابت کنید  $n \in A$ .

$$\begin{aligned} n^2 - 5n + 7 &= (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7 = \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 \\ &= 4k^2 - 6k + 3 = 4k^2 - 6k + 2 + 1 = \\ &= 2 \underbrace{(2k^2 - 3k + 1)}_{k'} + 1 \end{aligned}$$

پس باز هم حاصل یه عدد فرد شد.

بنابراین نتیجه می‌گیریم به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  یه عدد فرد است.

**تمرین: درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.**

۱. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $ab = 0$  آن‌گاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

۴. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $n^2 + 2$  بر ۴ بخش پذیر نیست.

۲. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند و  $ab$  عددی فرد باشد، ثابت کنید  $a^2 + b^2$  زوج است.

**اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)**

۲. اگر  $x$  یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید  $\frac{1}{x}$  نیز

گنگ است.

خیلی وقت‌ها برای این‌که درستی یا حکم رو ثابت کنیم برعکس عمل می‌کنیم یعنی این‌که فرض می‌کنیم حکم درست نیست بعد با استفاده از استدلال‌های درست به یه نتیجه‌ای غیر ممکن یا متضاد با فرض برسیم، پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود.

پاسخ: اگر  $a$  رو عددی گویا و  $b$  عددی گنگ باشه قراره ثابت کنیم  $a+b$  عددی گنگ است. حالا اگه بخواهیم از برهان خلف استفاده کنیم باید فرض کنیم  $a+b$  عدد گویایی مثل  $m$  هست یعنی  $m = a+b$  پس  $b = m - a$  خواهد بود و می‌دونیم  $m - a$  عددی گویا است پس  $b$  هم که مساوی  $m - a$  هست گویا خواهد بود که این خلاف فرض است (چون قبل گفته بودیم  $b$  عددی گنگ است) پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

**تمرین: درستی گزاره‌های زیر را از روش برهان خلف ثابت کنید.**

۱.  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  عددهایی صحیح هستند و  $b_1$  و  $b_2$  و  $b_3$  همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند، ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی زوج است.

۴. می‌دانیم  $\sqrt{3}$  عددی گنگ است، ثابت کنید  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  نیز عددی گنگ است.

## گزاره‌های هم ارز

اگر ارزش دو گزاره یکی باشد آن‌ها رو گزاره‌های هم ارز (هم ارزش) می‌نامیم. یعنی اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره‌ی هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشد و هر دو گزاره  $p \Rightarrow q$ ,  $q \Rightarrow p$  درست باشد، اون وقت  $p \Leftrightarrow q$  هم به گزاره درست خواهد بود.

مثال: آیا گزاره‌ی  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$  درست است؟  
چرا؟

پاسخ: ابتدا باید ببینیم گزاره‌ی  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$  درست است که متوجه می‌شویم درست هست چون که از  $a = b$  می‌تونیم نتیجه بگیریم  $a^2 = b^2$  است. تو مرحله‌ی بعدی باید بررسی کنیم ببینیم گزاره‌ی  $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$  نیز درست هست یا خیر که با کمی دقت می‌فهمیم که اگر  $a^2 = b^2$  باشد اون وقت  $a = \pm b$  است پس گزاره‌ی  $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$  همیشه درست نیست پس گزاره‌ی  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$  به گزاره‌ی نادرست است.

تمرین: کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است.

$$۱. a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$۲. a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

۵. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد گنگ باشند به طوری که  $a + b$  گویا باشد، ثابت کنید  $a - b$  عددی گنگ است.

۶. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی و  $ab$  زوج باشد، ثابت کنید یا  $a$  زوج است و یا  $b$ .

۷. اگر  $n$  عددی طبیعی و  $4 - 3n$  عددی فرد باشد، ثابت کنید  $n$  نیز فرد است.

## اثبات بازگشتی

۳.  $a < b \Leftrightarrow a^r < b^r \quad (a, b \in \mathbb{R})$

بعضی وقت‌ها برای اثبات خیلی از حکم‌های ریاضی به خصوص نامساوی‌ها از این روش استفاده می‌کنیم ولی طرز استفاده از این روش به این صورت هست که از حکم مسأله شروع می‌کنیم و به یک گزاره‌ی هم ارز تبدیلش می‌کنیم و گزاره‌ی بعدی رو به بعدی و این قدر ادامه می‌دهیم تا به یه گزاره برسیم که مطمئن هستیم درست است. اگه همه‌ی این گزاره‌ها دو شرطی باشن کار تموم شده و مسأله را ثابت کردیم.

۴. زوج  $n \Leftrightarrow n^2$  زوج

مثال: ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  دو عدد مثبت باشند

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ است.}$$

پاسخ: این مسأله رو به روش اثبات بازگشتی حل می‌کنیم، یعنی داریم:

۵.  $x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

عبارت فوق همواره درست است.

**تمرین: درستی هر یک از گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید.**

۱. برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی  $x$  و  $y$  داریم:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

۶.  $x^r \leq x^r \Leftrightarrow x \leq 1$

۲. اگر  $a < 0$  باشد، آنگاه  $a + \frac{1}{a} \leq -2$ .

۵. برای هر سه عدد حقیقی  $x$  و  $y$  و  $z$  داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

۳. میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۶. برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  داریم:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

۴. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0$$



۷. برای هر سه عدد حقیقی  $a$  و  $b$  و  $c$  داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a+b+c) - 3$$

۹. برای هر عدد حقیقی  $a$  ثابت کنید  $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$ .

۱۰. برای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $a$  و  $b$  داریم:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

۸. برای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $a$  و  $b$  داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

۱۱. اگر  $a < 0$  باشد، ثابت کنید  $a + \frac{1}{a} \leq -2$  است.

۱۳. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد،

آن‌گاه  $\alpha - \beta$  ..... است و  $\alpha + 2\beta$  .....  
است.

(۱) گنگ-گنگ (۲) گنگ-گویا

(۳) گویا-گنگ (۴) گویا-گویا

۱۴. رابطه‌ی  $n! < 2^n$  به ازای چند مقدار طبیعی  $n$  دارای مثال نقض است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) بیش‌تر از ۳ تا

۱۴. چند عدد طبیعی مانند  $n$  در مجموعه‌ی اعداد

کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که به ازای آن

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

عددی زوج شود؟

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰

(۳) ۴۵ (۴) ۵۰

۱۵. اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

(۱) عدد  $\sqrt{5}$  گنگ است.

(۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

(۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

(۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیش‌تر است.

۷. به جای  $k$  کدام گزینه را قرار دهیم تا مثال نقض مناسبی برای حکم "اگر مربع یک عدد به صورت  $6k+1$  باشد؛ خود عدد، عددی اول است" باشد؟

(۱) ۸

(۲) ۱۰۴

(۳) ۱۰۰

(۴) ۴

۸. کدام یک از گزینه‌های زیر مثال نقض ندارد؟

(۱) تفاضل مربعات هر دو عدد فرد دلخواه مضرب ۸ است.

(۲) مجموع مربعات هر دو عدد زوج دلخواه مضرب ۸ است.

(۳) مجموع هر سه عدد زوج متوالی، عددی مضرب ۸ است.

(۴) مجموع هر سه عدد فرد متوالی دلخواه عددی مضرب ۶ است.

۵. اگر  $x$  و  $y$  و  $z$  سه عدد حقیقی باشند، آنگاه گزاره‌ی:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  هم‌ارز کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

(۱)  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 0$

(۲)  $x^2(y-1)^2 + y^2(z-1)^2 + z^2(x-1)^2 \geq 0$

(۳)  $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \geq 0$

(۴)  $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$

۹. چند زوج مرتب  $(a, b)$  از اعداد صحیح و ناصفر

وجود دارد به گونه‌ای که رابطه‌ی  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

برقرار باشد؟

(۱) هیچ

(۲) ۱

(۳) بی‌شمار

(۴) ۲

۹. رابطه‌ی  $n^2 \leq 2^n$  چند مثال نقض دارد؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

۱۱. کدام گزینه مثال نقض دارد؟

۱ (۱)

۳ (۲)

۱) هر مربع یک لوزی است.

۴ (۳)

۴) بیش‌تر از ۴ تا

۲) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۲، فرد است.

۳) هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.

۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان سوم آن است.

۱۰. کدام یک از عبارتهای زیر، یک قضیه‌ی دو شرطی

است؟ ( $a, k \in \mathbb{R}$ )

۱) اگر  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  باشد، آن‌گاه  $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$  است.

۲) اگر  $a > 0$  باشد، آن‌گاه  $a \neq -1$  است.

۳) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند، آن‌گاه  $\alpha - \beta$

گویا است.

۴) اگر  $k^2 > k^3$  باشد، آن‌گاه  $k > 1$  است.

۱۲. کدام عدد کلیت حکم "هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت" را نقض می‌کند؟

۶۴ (۲)

۵۶ (۱)

۷۴ (۴)

۷۲ (۳)

## نظریه اعداد

## مسئله علمدار

۱۵. کدام یک از اعداد زیر، مثال نقضی برای حکم "اگر  $n$  یک عدد طبیعی فرد باشد، آن گاه  $2^n - 2$  بر  $n$  بخش پذیر است" می باشد؟

(۱) ۵      (۲) ۶

(۳) ۷      (۴) ۹

۱۳. کلیت حکم "هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت" با کدام عدد رد نمی شود؟

(۱) ۶۴      (۲) ۲۵۶

(۳) ۱۶      (۴) ۷۲

۱۶. کدام عدد حکمیت "هر عدد حقیقی معکوس پذیر است" را نقض می کند؟

(۱) صفر      (۲) ۱

(۳)  $\infty$       (۴) -۱

۱۴. کدام رابطه شرطی زیر خاصیت بازگشتی دارد؟

(۱)  $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

(۲)  $x \cdot y > 0 \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

(۳)  $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a + b = c + d$

(۴)  $(a, b) = (c, d) \Rightarrow ab = cd$

۱۷. کدام عدد حکم کلی "هر عدد زوج را می توان به صورت مجموع سه عدد طبیعی و زوج متوالی نوشت" را نقض می کند؟

(۱) ۳۰۶      (۲) ۱۸۰

(۳) ۵۰۲      (۴) ۹۱۸

تمرین الف: با توجه به تعریف رابطه‌ی عاد کردن جاهای خالی رو پر کنید.

۱.۱ اگر  $a < 0$  باشد، ثابت کنید  $-2 \leq a + \frac{1}{a}$  است.

۱)  $7|63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$

۲)  $91 = 7 \times \dots \Leftrightarrow \dots | 91$

۳)  $-6|54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times -6$

۴)  $5|-35 \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots$

۵)  $0 = 18 \times \dots \Leftrightarrow 18 | \dots$

۶)  $a|1 \Rightarrow a = \dots$  یا  $a = \dots$

۷)  $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 | \dots, \dots | 26$

تمرین ب: با استفاده از تعریف عاد کردن هر یک از ویژگی‌های زیر را ثابت کنید.

۱.  $a|b \Rightarrow a|mb$

۲.  $a|b \Rightarrow a|b^2$

۳.  $a|b \Rightarrow a|b^n$

### بخش‌پذیری در اعداد صحیح

از دوران دبستان معنی بخش‌پذیری رو فهمیدیم، به عنوان مثال عدد ۱۸ به ۳ بخش‌پذیر هست یعنی وقتی ۱۸ رو به ۳ تقسیم کنیم باقی‌مانده نداره به عبارت دیگه ۳ در یه عددی ضرب میشه و حاصل برابر ۱۸ خواهد شد. حالا همین مطلب رو تو سال پایانی قصد دارند بهتون یاد بدهند و کلی نتیجه بگیرند، پس خوبه خوب توجه کن و از یاد گرفتن اون لذت ببر.

### تعریف بخش‌پذیری

اگر عدد  $b$  به  $a$  بخش‌پذیر باشه به شکل  $a|b$  نشون می‌دهیم. به عنوان مثال  $3|18$  و یعنی این‌که یه عدد صحیح مثل  $q$  داریم که  $b = aq$ .

توجه: از اون جایی‌که ریاضی‌دان‌ها دوست دارن بگن زبون ریاضی خیلی خاص هست (برعکس من که همیشه دارم داد و فریاد می‌کنم که بابا ریاضی کاری نداره) عبارت  $a|b$  رو به یکی از صورت‌های زیر صدا می‌زنند.

۱.  $a$  شمارنده  $b$  است.

۲.  $a, b$  را می‌شمارد.

۳.  $a, b$  را عاد می‌کند.

۹.  $a|b \Rightarrow |a| \leq |b| \quad (b \neq 0)$

۴.  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$

۱۰.  $a|b \Rightarrow a^n | b^n$

۵.  $a|b \Rightarrow ka | kb \quad (k \in \mathbb{Z})$

۱۱.  $a|b, c|d \Rightarrow ac | bd$

۶.  $ka | kb \Rightarrow a | b \quad (k \in \mathbb{Z})$

۱۲.  $a|b, a|c \Rightarrow a | mb \pm nc$

۷.  $a|b, b|c \Rightarrow a | c$

۱۳.  $a|b \Rightarrow a | -b$

۸.  $a|b, a|c \Rightarrow a | b \pm c$

۱۴.  $a|b \Rightarrow -a | b$

۳.  $a|b+c \Rightarrow a|b$  یا  $a|c$

۱۵.  $a|b \Rightarrow -a|-b$

تمرین ده: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. اگر  $a \neq 0$  عددی صحیح و دو عدد  $(7m+6)$  و  $(6m+5)$  بر  $a$  بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید  $a = \pm 1$ .

۱۶.  $3a|b, b^2|c \Rightarrow a|c^5$

۱۷.  $a-b|c, c^2|a \Rightarrow a-b|b$

۲. اگر عدد طبیعی  $a$ ، دو عدد  $(9k+7)$  و  $(7k+6)$  را عا د کند، ثابت کنید  $a=1$  یا  $a=5$ .

۱۸.  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a+b|c$

تمرین ه: برای هریک از قوانین زیر نادرست است، یک مثال نقض بیاورید.

۱.  $a|b+c \Rightarrow a|b$  یا  $a|c$

۲.  $a|b, c|d \Rightarrow a+c|b+d$



۶. اگر  $a > 1$  طوری باشد که  $a | 4k^2 + 6$  و  $a | 2k + 1$  عدد  $a$  را پیدا کنید.

۳. اگر  $a > 1$  و  $a | 9k + 4$  و  $a | 5k + 3$ ، ثابت کنید  $a$  عددی اول است.

۷. اگر  $63 | n!$  کمترین مقدار  $n$  را به دست آورید.

۴. اگر عددی مانند  $k$  در  $\mathbb{Z}$  باشد به طوری که  $5 | 4k + 1$ ،  $25 | 16k^2 + 28k + 6$  ثابت کنید.

۸. تمامی نقطه‌ها با مختصات صحیح روی تابع  $2xy - y = 5x + 3$  را به دست آورید.

۵. اگر  $5 | 6a + 2$  ثابت کنید  $25 | 36k^2 + 54k + 14$ .

(۳) کدام نادرست است؟

$$a|b \Rightarrow a^n|b^n \quad (۱)$$

$$(9n+7, 5n+4)=2 \quad (۲)$$

$$a^n|b^n \Rightarrow a|b \quad (۳)$$

$$3|n^2+2n \quad (۴)$$

(۱) تعداد عضوهای مجموعه  $\{n : 65 | 2^n + 1\}$  از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟

$$6 \quad (۱) \quad 7 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۳) \quad 9 \quad (۴)$$

(۲) اگر  $b$  فرد باشد و  $a|b$  بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک  $18ab$  و  $12a^2$  کدام است؟

$$a^2 \quad (۱) \quad 6ab \quad (۲)$$

$$6a^2 \quad (۳) \quad 6b^2 \quad (۴)$$

(۴) اگر  $a-b|a$  آن گاه:

$$a|a-b \quad (۱) \quad b|a-b \quad (۲)$$

$$a|b \quad (۳) \quad a-b|b \quad (۴)$$

(۷) اگر  $112 \mid b^3$  و  $13 \mid 5a^2$  کمترین مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۲۹  
(۲) ۷۳  
(۳) ۵۳  
(۴) ۵۹

(۵) اگر  $a \mid c$  و  $ab \mid c$  کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $b \mid c$   
(۲)  $a + b \mid c$   
(۳)  $a - b \mid c$   
(۴)  $a^2 \mid c$

(۸) به ازای چند عدد طبیعی  $n$ ، رابطه‌ی  $n^2 + 7 \mid n + 3$  صحیح است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

(۶) کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $(a+b) \mid (a+b)^2 - 2ab$   
(۲)  $(a+b) \mid (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$   
(۳)  $(a+b) \mid (a-b)^3 - 3a^2b - 3b^2a$   
(۴)  $(a+b) \mid (a-b)^2 + 2ab$

نظریه اعداد

مسئله علمدار

(۱۱) اگر بدانیم  $a+b \mid 11$  آن گاه کدامیک صحیح است؟

(۹) عدد  $2^{18} + 3^{18}$  بر کدامیک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

$$11 \mid 7a+4b \quad (2)$$

$$11 \mid 6a-5b \quad (1)$$

$$13 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$11 \mid a^2+b^2 \quad (4)$$

$$11 \mid 3a+9b \quad (3)$$

$$97 \quad (4)$$

$$35 \quad (3)$$

(۱۲) برای چند عدد طبیعی  $n$  رابطه‌ی  $2n+1 \mid 2n^2-3n+3$  برقرار است؟

(۱۰) به ازای چند عدد طبیعی  $n$ ، رابطه‌ی  $n+1 \mid n^2+1$  برقرار است؟

$$4 \quad (2)$$

(۱) هیچ

$$1 \quad (2)$$

(۱) صفر

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

۱۵) چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح نیست؟  $(n \in \mathbb{N}), (a, b, c \in \mathbb{Z})$

الف)  $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

ب)  $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$  یا  $a \mid c$

ج)  $a \mid b \Rightarrow a^{rn} \mid b^{rn+1}$

د)  $a \mid b \Rightarrow a \mid a^n - b^n$

ه)  $a - b \mid b \Rightarrow a - b \mid 2a + 3b$

۲ (۱)                      ۳ (۲)

۴ (۳)                      ۱ (۴)

۱۳) اگر باقی‌مانده‌ی  $a$  بر ۱۴ برابر ۳ باشد و  $a \mid 64b$  آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم  $b$  بر  $a$  کدام است؟

۳ (۱)                      ۲ (صفر)

۶ (۳)                      ۱ (۴)

۱۴) چند عدد مثبت  $a$  مضرب ۱۸ وجود دارد که  $a \mid 2700$

۶ (۱)                      ۱۲ (۲)

۱۸ (۳)                      ۲۴ (۴)

۱۸) اگر  $a^2 - b^2 \mid a$  چه تعداد از نتایج زیر صحیح نیست؟

الف)  $a - b \mid b$       ب)  $a^2 - b^2 \mid b^2$

ج)  $a + b \mid b$       د)  $a - b \mid a + b$

۱) ۳      ۲) ۱

۳) ۲      ۴) صفر

۱۶) تعداد عضوهای مجموعه  $\{n : 65 \mid 2^n + 1\}$  از مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۸۰ کدام است؟

۱) ۶      ۲) ۷

۳) ۸      ۴) ۹

۱۷) عدد  $a^{20} + 1$  بر کدام عبارت تقسیم پذیر نیست؟

۱)  $a^6 + 1$       ۲)  $a^7 + 1$

۳)  $a^2 + 1$       ۴)  $a^{10} + 1$

۱۹) کدام یک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟  $(x, y \in \mathbb{Z})$

۱)  $x^5 + y^5 \mid x^{20} - y^{20}$

۲)  $x^2 + y^2 \mid x^{10} - y^{10}$

۳)  $x^2 + y^2 \mid x^{12} + y^{12}$

۴)  $x^2 + y^2 \mid x^{24} + y^{24}$

نظریه اعداد

مسئله علمدار

۲۲) چند عدد طبیعی فرد مانند  $a$  می توان یافت که در رابطه‌ی بخش پذیری  $a \mid 2^3 \times 3^2 \times 5^4$  صدق کند؟

- ۸ (۱)      ۹ (۲)  
۱۲ (۳)    ۱۵ (۴)

۲۰) روی منحنی  $xy - 2x + 3y + 5 = 0$  چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)  
۴ (۳)      ۴ بی شمار (۴)

۲۳) اگر  $n$  عددی صحیح بوده و  $n^2$  مضربی از ۲۴ باشد، بزرگ‌ترین عددی که  $n$  مضربی از آن باشد، کدام است؟

- ۶ (۱)      ۸ (۲)  
۱۲ (۳)    ۲۴ (۴)

۲۱) تعداد عضوهای مجموعه‌ی  $\{n : 65 \mid 3^n + 1\}$  به طوری که  $n < 200$  باشد، کدام است؟

- ۱۶ (۱)      ۱۷ (۲)  
۱۸ (۳)      ۱۹ (۴)

(۲۶) اگر  $a|b+c$  و  $a|2c$ ، آن گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $a|b^2$       (۲)  $a|c$   
 (۳)  $2a|b$       (۴)  $a|2b$

(۲۴) تعداد اعداد طبیعی مانند  $n$  به طوری که  $40|n$  و  $1120|n$ ، کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۸  
 (۳) ۱۶      (۴) ۲۴

(۲۷) اگر  $a$  مضرب ۲ باشد ولی مضرب ۴ نباشد،  $a^2$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $4k$       (۲)  $4k+1$   
 (۳)  $4k+2$       (۴)  $4k+3$

(۲۵) اگر  $a|b$  و  $a|c$ ، کدام درست نیست؟

- (۱)  $a|b+c$       (۲)  $a|b^2+c$   
 (۳)  $a^2|b+c$       (۴)  $a^2|bc$



۲۸) به ازای چند مقدار طبیعی  $n$ ، عدد  $7n+5$  بر  $2n+1$  تقسیم پذیر است؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

۲۹) به ازای چند عدد صحیح  $n$ ، رابطه‌ی  $(n+1) \mid (2n+1)$  صحیح است؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

$$b) \forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$$

تمرین الف: ب.م.م.های زیر را پیدا کنید.

۱. (۳۶, ۴۸)

۲. (۱۲, ۲۱)

۳. (۱, ۱۱)

۴. (۴, ۱۲)

۵. (۰, ۶)

۶. (۴, -۱۲)

۷. (۲۴, ۷)

۸. (۱۳, ۶)

۹. (۷, ۳۱)

۱۰. (-۱۲, -۴۸)

### بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب.م.م.)

حُب بازم مجبوریم که به یه زبون خیلی ساده ب.م.م رو براتون بگم. چون این ریاضی‌دان‌ها هیچ جوهر بلد نیستند به زبون آدمی‌زاد صحبت کنند، من الان میخام ب.م.م دو عدد ۳۶ و ۶۰ رو پیدا کنم برای همین این دو عدد رو به صورت کسری می‌نویسم و تا جایی که میتونم ساده می‌کنم.

حُب خیلی سریع کسر  $\frac{۳۶}{۶۰}$  رو به ۲ ساده می‌کنم حاصل

$\frac{۱۸}{۳۰}$  میشه دوباره به دو ساده می‌کنیم  $\frac{۹}{۱۵}$  میشه، حالا به

۳ ساده می‌کنم  $\frac{۳}{۵}$  میشه دیگه  $\frac{۳}{۵}$  به هیچ چیزی ساده

نمی‌شه. حُب کسر  $\frac{۳۶}{۶۰}$  رو دوبار به ۲ و یه بار به ۳ ساده

کردیم پس ب.م.م این دو تا عدد  $۲ \times ۲ \times ۳ = ۱۲$  خواهد شد. به زبون ریاضی می‌نویسند  $(۳۶, ۶۰) = ۱۲$  و می‌خوانند ب.م.م دو عدد ۳۶ و ۶۰ برابر ۱۲ است.

حالا یه مطلب باحال بهتون بگم اون هم این هست که ۶۰ و ۳۶ به ۱۲ بخش پذیر هستند یعنی  $۱۲|۶۰$  و  $۱۲|۳۶$  و عمراً بتونید عددی بزرگ‌تر از ۱۲ پیدا کنید که ۶۰ و ۳۶ به اون عدد بخش پذیر باشد. به عنوان مثال  $۳|۶۰$  و  $۳|۳۶$  ولی ۳ از عدد بزرگ‌تره.

حالا در زیر میخام به زبون ریاضی معنی ب.م.م رو بگم.

### ب.م.م

عدد طبیعی  $d$  رو ب.م.م دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  می‌نامیم  $a$  و  $b$  هم‌زمان صفر نیستند و می‌نویسیم  $(a, b) = d$  وقتی هر دو تا شرط زیر رو با هم داشته باشیم:

$$d|a, d|b \text{ (الف)}$$

۴. ثابت کنید هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول هستند.

$$۱۱. (-۲۴, ۳۶)$$

$$۱۲. (۲^n, ۳^n)$$

**توجه:** هر وقت ب.م.م دو تا عدد برابر یک بشه یعنی اون دو عدد نسبت به هم اولند.

۵. ثابت کنید بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد زوج متوالی ۲ است.

$$a \text{ و } b \text{ نسبت به هم اولند} \Leftrightarrow (a, b) = 1$$

**تمرین:** به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

$$۱. \text{ اگر } a|b \text{ ثابت کنید } (a, b) = |a|$$

۶. اگر  $(a, b) = 1$  ثابت کنید دو عدد  $a + 2b$  و  $3a + 5b$  نسبت به هم اول هستند.

$$۲. a \text{ عددی فرد است، ثابت کنید } (2a, a + 2) = 1$$

۷. اگر  $(a, b) = 1$  و  $a | c$  ثابت کنید  $(a, c) = 1$ .

۳. ثابت کنید هر دو عدد متوالی نسبت به هم اول هستند.

۱۱. حاصل  $(n^3 - n, 6)$  را پیدا کنید.

۸. به ازای چند عدد دو رقمی  $n$ ،  $(n-13, 5)$  از ۱ بزرگتر می‌شود؟

### کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م)

باز از اون جایی که من مجبورم به زبون آدمی‌زاد یه مفهوم دیگه رو توضیح بدم، پس چشم‌هات رو تیز کن و با دقت این مطلب رو هم بخون.

مضرب عددها رو که از قدیم بلد هستیم، به عنوان مثال مضرب‌های طبیعی عدد ۳ مجموعه‌ی  $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$  است و مضرب‌های طبیعی عدد ۵ مجموعه‌ی  $B = \{5, 10, 15, \dots\}$  است که این دو مجموعه رو مشترک‌هانش رو بنویسیم مجموعه‌ی  $A \cap B = \{15, 30, 45, \dots\}$  خواهد شد. واضح هست که عدد ۱۵ کوچک‌ترین عضو مضرب‌های مشترک دو عدد ۳ و ۵ هست.

ریاضی‌دان‌ها از این کشف بزرگ کلی کیف کردند و اسمش رو گذاشتند کوچک‌ترین مضرب مشترک و به طور اختصار ک.م.م بهش گفتند و بعدش هم یه علامت براش پیدا کردن و این‌طوری  $[3, 5] = 15$  نشون دادند. حواست باشه که همه‌ی عضوهای  $A \cap B$  مثل ۳۰ به ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند  $(3|30, 5|30)$  ولی عدد ۱۵ از همه‌ی اون‌ها کوچک‌تره.

حالا بیاییم با زبون ریاضی مطالب پایین رو توضیح بدیم.

۹. به ازای کدام‌یک از عددهای طبیعی دو رقمی  $n$ ، ب.م.م دو عدد  $5n-6$  و  $n+5$  از ۱ بزرگتر می‌شود.

۱۰. اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشه، حاصل  $((n+1)! + 1, n! + 1)$  را پیدا کنید.

## کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

دو عدد  $a$  و  $b$  که هیچ کدوم از اون‌ها صفر نیستند رو در نظر بگیریم. عدد طبیعی  $c$  رو ک.م.م دو عدد  $a$  و  $b$  می‌گیریم و می‌نویسیم:  $[a, b] = c$  هر وقت هر دو تا شرط زیر با هم برقرار باشه.

الف)  $a|c, b|c$

ب)  $\forall m > 0; a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

توجه: وقتی داشتیم به زبون آدمی زاد ب.م.م دو تا عدد ۳۶

و ۶۰ رو پیدا می‌کردم کسر  $\frac{۳۶}{۶۰}$  رو ساده کردم تا به کسر

$\frac{۳}{۵}$  رسیدم و گفتم  $(۳۶, ۶۰) = ۱۲$  حالا اگه بخواهیم

$[۳۶, ۶۰]$  رو پیدا کنیم کافیه صورت و مخرج کسر

ساده شده یعنی  $\frac{۳}{۵}$  رو تو عدد ۱۲ ضرب کنیم یعنی:

$$[۳۶, ۶۰] = ۱۲ \times ۳ \times ۵ = ۱۸۰$$

تمرین الف: حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱.  $[-۹۱, ۲۱]$

۲.  $[۱۲, ۱۸]$

۳.  $[۲۴, -۴۸]$

۴.  $[۳^n, ۳^n]$

مسئله علمدار

۵.  $[۱۱, ۷]$

۶.  $[۱۲, ۳۵]$

۷.  $[۲۴, ۱]$

۸.  $([a, ۰], [a, ۱])$

۹.  $[(a, a^n), (a, a^n)]$

۱۰.  $[a, (a, b)]$

تمرین ب: به هریک از سؤالهای زیر پاسخ دهید.

۱. اگر  $[a, b] = (a, b)$  باشد، ثابت کنید  $|a| = |b|$  است.

۱) اگر  $m \in \mathbb{Z}$  باشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد غیر اول  $3m^2 + 3$  و  $3m - 1$  کدام است؟

$$۱۹ \quad (۲)$$

$$۱۷ \quad (۱)$$

$$۳۷ \quad (۴)$$

$$۲۹ \quad (۳)$$

۲. در صورتی که  $(a, b) = a$  باشد، حاصل  $[4a, 4b]$  را پیدا کنید.

۳. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $[(72, 48), 120]$

ب)  $[m^y, (m^x, m^z)]$

۴) کدام گزینه نادرست است؟

$$(a, 1) = 1 \quad (۲)$$

$$(\cdot, \cdot) = 0 \quad (۱)$$

$$(a, \cdot) = |a| \quad (۴)$$

$$(a, a) = |a| \quad (۳)$$

(۵) به ازای چند عدد طبیعی  $a, 600 = [a, 120]$  می‌باشد؟  $[a, b]$  ک.م.م  $a$  و  $b$  است.

$$5 (1) \quad 6 (2)$$

$$8 (3) \quad 12 (4)$$

(۳) به ازای مقادیر مختلف  $a > 3$ ، بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $(15a - 12)$  و  $(15a + 3)$  کدام است؟

$$15 (1) \quad 1 (2)$$

$$3 (3) \quad 5 (4)$$

(۶) اگر  $(n^3 - n, n^4 - 1) = 15$ ، آن‌گاه حاصل  $[n + 2, 2n]$  کدام است؟  $(n \in \mathbb{N})$

$$2n^2 + 2n (1) \quad 2n(n + 2) (2)$$

$$2n (3) \quad 6n (4)$$

(۴) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $A = 16a + 8$  و  $B = 16a + 32$  به ازای مقادیر مختلف  $a$  با شرط  $A, B > 0$  چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

$$1 (1) \quad 2 (2)$$

$$4 (3) \quad 8 (4)$$

۹) حاصل  $(n+2, n^2+5n+6)$  برابر کدام است؟  
( $n \in \mathbb{N}$ )

۶ (۲)

۱ (۱)

$n+3$  (۴)

$n+2$  (۳)

۷) به ازای کدام مقدار  $a$  دو عبارت  $2a+3$  و  $a-1$  نسبت به هم اولند؟

$a = 5k + 3$  (۲)

$a = 5k + 1$  (۱)

$a \neq 5k + 4$  (۴)

$a \neq 5k + 1$  (۳)

۱۰) فرض کنید  $n$  عددی صحیح باشد و  
کدام  $d = (9n+5, n-4)$  گزینه درست است؟

$d|32$  (۲)

$d|23$  (۱)

$d|41$  (۴)

$d|36$  (۳)

۸) اگر  $72 = (n^4 - n, n^2 - n)$  باشد، حاصل  $n^2 + n$  کدام است؟

۹۰ (۲)

۷۲ (۱)

۱۳۲ (۴)

۱۱۰ (۳)



۱۱) در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ ، خارج قسمت و باقی مانده به ترتیب برابر  $q$  و  $r$  هستند. کدام رابطه‌ی زیر همواره درست است؟

$$(1) \quad (a, r) = (b, r) \quad (2) \quad (a, b) = (b, r)$$

$$(3) \quad (a, q) = (b, q) \quad (4) \quad (a, b) = (a, r)$$

۱۱) اگر  $(a, b) = 1$  و  $(a-b)^2 \mid 168$  آن گاه ب.م.م دو عدد  $42$  و  $ab$  برابر کدام است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 21$$

$$(3) \quad 12 \quad (4) \quad 28$$

۱۲) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد  $n^2 + n$  و  $3n - 1$  برای مقادیر مختلف طبیعی  $n$ ، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2$$

$$(3) \quad 3 \quad (4) \quad 6$$

۱۲) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد  $a = 330$  و  $b$  ( $b < a$ ) برابر  $33$  می‌باشد. برای  $b$  چند مقدار طبیعی به دست می‌آید؟

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 5$$

$$(3) \quad 9 \quad (4) \quad 8$$

## نظریه اعداد

## مسئله علمدار

۱۷) فرض کنید  $a$  و  $b$  عددهایی طبیعی باشند به طوری که  $a|b$  حاصل  $[a^r b^s, a^t b^u]$  برابر کدام است؟

$$a^r b^s \quad (۲)$$

$$a^r b^t \quad (۱)$$

$$a^t b^s \quad (۴)$$

$$a^t b^u \quad (۳)$$

۱۵) حاصل  $(a^r - 4a + 1, a - 3)$  کدام است؟

$$۵ \text{ یا } ۱ \quad (۲)$$

$$۲ \text{ یا } ۱ \quad (۱)$$

$$۶ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۱ \quad (۴)$$

$$۴ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۱ \quad (۳)$$

۱۸) اگر  $[a, 54] = 108$  چند مقدار طبیعی برای  $a$  وجود دارد؟

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

۱۶) با توجه به نمادهای "بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک"، عدد  $[(627, 429), 154]$  کدام است؟

$$۴۷۸ \quad (۲)$$

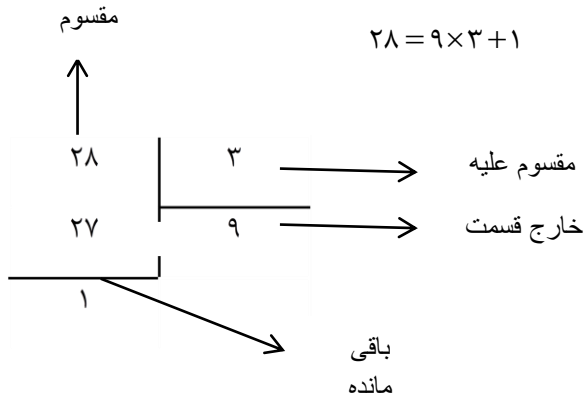
$$۴۶۲ \quad (۱)$$

$$۹۲۴ \quad (۴)$$

$$۵۰۶ \quad (۳)$$

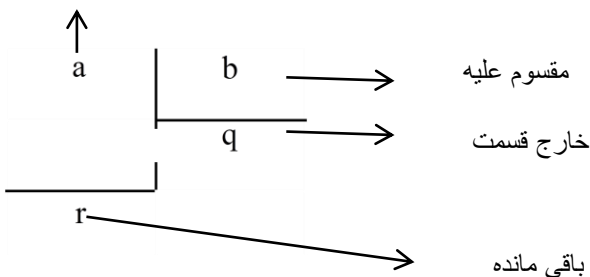
**قضیه‌ی تقسیم**

قضیه‌ی تقسیم همون تقسیم هست که تو دوره‌ی دبستان خوندم و برای این که مطمئن بشیم تقسیم رو درست حل کردیم امتحانش می‌کردیم یعنی ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه رو با باقی‌مانده جمع می‌کنیم و حاصل همون مقسوم می‌شه.



به زیون ریاضی همین کار رو به شکل زیر نشون خواهیم داد.

مقسوم



$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

(۱۹) اگر  $a = 2^\alpha \times 3 \times 7^\beta$  و  $b = 3^2 \times 5^7 \times 7$  و

$[a, b] = 88200$ ، آن گاه  $a \times b$  چند مقسوم علیه

طبیعی دارد؟

(۱) ۷۲ (۲) ۹۸

(۳) ۱۴۴ (۴) ۱۹۲

۲. در تقسیم عدد ۴۲ بر  $b$  خارج قسمت مربع باقی‌مانده است.  $b$  را به دست آورید.

مثال: در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر  $۷۱$  باقی‌مانده از مربع خارج قسمت  $۳$  واحد بیش‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار  $a$  را به دست آورید.

$$\begin{array}{r|l} a & ۷۱ \\ \hline & q \\ \hline & q^2 + ۳ \end{array}$$

پاسخ: مثل یه تقسیم معمولی مثال رو نشون خواهیم داد و می‌دونیم باقی‌مانده از مقسوم علیه همیشه کم‌تر هست،

یعنی  $۷۱ < q^2 + ۳$  هست، پس داریم:

$$q^2 + ۳ < ۷۱ \Rightarrow q^2 < ۶۸ \Rightarrow q = ۱, ۲, \dots, ۸$$

از طرفی  $a = ۷۱q + q^2 + ۳$  هست و خیلی واضح هست که بیش‌ترین مقدار  $a$  به ازای  $q = ۸$  پیدا می‌شود، پس داریم:

$$\begin{aligned} a &= ۷۱(۸) + (۸)^2 + ۳ = ۸(۷۱ + ۸) + ۳ \\ &= ۸(۷۹) + ۳ = ۶۳۵ \end{aligned}$$

**تمرین الف: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.**

۴. اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح  $n$  بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم نیز همواره بر  $n$  بخش‌پذیر است.

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $۷$  و  $۶$  به ترتیب برابر  $۴$  و  $۵$  هست. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $۴۲$  را پیدا کنید.

۸. باقی مانده‌ی تقسیم  $a$  و  $b$  بر  $5$  برابر  $3$  شده است، باقی مانده‌ی تقسیم  $ab$  بر  $5$  را به دست آورید.

۵. باقی مانده‌ی تقسیم یک عدد زوج بر  $27$  برابر  $13$  شده است. باقی مانده نصف این عدد بر  $27$  را پیدا کنید.

۹. در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی  $a$  بر عدد  $b$ ، خارج قسمت برابر  $21$  و باقی مانده برابر  $37$  است. اگر  $a|5$ ، مقسوم را به دست آورید.

۶. در تقسیم عدد  $191$  بر  $b$ ، خارج قسمت مربع باقی مانده است. مقسوم علیه را به دست آورید.

۱۰. در یک تقسیم خارج قسمت و باقی مانده به ترتیب برابر  $9$  و  $15$  هستند. حداکثر چند واحد می توانیم به مقسوم علیه اضافه کنیم تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند؟

۷. در تقسیم عدد  $a$  بر  $17$  باقی مانده برابر جذر خارج قسمت است، بزرگ ترین مقدار مقسوم را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} n = 2k &\Rightarrow n(n+1) = 2k(2k+1) \\ &= 2k \underbrace{(2k+1)}_q = 2q \Rightarrow 2|n(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2k+1 &\Rightarrow n(n+1) = (2k+1)(2k+2) \\ &= 2 \underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q'} = 2q' \Rightarrow 2|n(n+1) \end{aligned}$$

تمرین الف: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱.  $a$  عددی صحیح است، ثابت کنید  $a^2 + 2$  بر ۴ بخش پذیر نیست.

۲. نشان دهید هر عدد فرد یا به صورت  $4k+1$  و یا به صورت  $4k+3$  است و سپس ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ دارای باقی‌مانده ۱ است.

### افراز عددهای صحیح

فرض کنید  $n$  داشته باشیم وقتی این عدد رو به ۲ تقسیم کنیم باقیمانده صفر یا یک می‌شود پس  $n = 2k$  یا  $n = 2k+1$  هست به عبارت دیگه عددهای صحیح رو به دو مجموعه تقسیم کردیم.

برای تمرین بیشتر هریک از حالت‌های زیر رو پیدا کنید.

۱. تقسیم بر ۳  
 $\Rightarrow n = 3k, n = 3k+1, n = 3k+2$

۲. تقسیم بر ۴

۳. تقسیم بر ۵

۴. تقسیم بر  $k$

مثال: ثابت کنید ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.

پاسخ: برای حل این مثال عددهای صحیح رو به دو مجموعه‌ی  $n = 2k$  و  $n = 2k+1$  تبدیل می‌کنیم و داریم:

۳. اگر  $p > 3$  عددی اول باشد، نشان دهید  $p$  را به یکی از دو صورت  $6k+1$  یا  $6k+5$  می توان نوشت.

۴. اگر  $p > 3$  عددی اول باشد، نشان دهید باقیمانده‌ی تقسیم  $p^2$  بر ۱۲ همواره برابر ۱ است.

۱۳) اگر باقی‌مانده عدد  $A$  بر  $۳۷$  برابر  $۲۳$  باشد، باقی‌مانده عدد  $۳ - ۲A$  بر  $۳۷$  کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۱۷  
(۳) ۲۰  
(۴) ۲۶

۱) در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  خارج‌قسمت و باقی‌مانده مساوی  $q$  اند، اگر  $۳$  واحد از مقسوم علیه کم شود  $۵$  واحد به خارج‌قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود، مقادیر  $q$  کدام‌اند؟

- (۱) ۵ و ۸  
(۲) ۴ و ۹  
(۳) ۵ و ۱۰  
(۴) ۸ و ۱۰

۱۴) در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر  $۳۷$  باقی‌مانده‌ی تقسیم از مربع خارج‌قسمت آن  $۲$  واحد کم‌تر است، بزرگ‌ترین مقدار  $a$  مضرب کدام است؟

- (۱) ۹  
(۲) ۱۲  
(۳) ۱۴  
(۴) ۱۶

۱۵) در یک تقسیم اگر به مقسوم  $۲۷$  واحد اضافه کنیم از باقی‌مانده  $۱۵$  واحد کم کنیم و به خارج قسمت  $۲$  واحد اضافه می‌شود. مقسوم علیه کدام است؟

- (۱) ۲۱  
(۲) ۲۳  
(۳) ۲۵  
(۴) ۲۹



۱۷) اگر  $a$  یک مضرب شش نباشد و مضرب سه باشد باقی مانده  $a^2$  بر ۴ کدام است؟

۱ (۲)                      ۳ (۱)

۲ (۴)                      ۳ (صفر)

۵) در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی  $b$ ، خارج قسمت مجذور باقی مانده است، چند عدد  $b$  می توان یافت؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

۸) باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۴ و ۶ برابر ۳ است. باقی مانده ی تقسیم  $a$  بر ۱۲ کدام است؟

۱ (صفر)                      ۲ (۳)

۳ (۱)                      ۴ (۹)

۶) در تقسیم بر ۱۷ اگر باقی مانده ۸ باشد و ۱۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم:

۱) باقی مانده تغییری نمی کند.

۲) باقی مانده ۱ واحد کم می شود.

۳) باقی مانده ۷ واحد کم می شود.

۴) باقی مانده ۷ واحد اضافه می شود.

(۹) مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی‌مانده آن توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۱

(۳) ۱۲ (۴) ۱۴

(۱۰) در تقسیم عدد  $a$  بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به  $a$  اضافه کنیم باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کند؟

(۱) سه واحد کم می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود.

(۲) سه واحد اضافه می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود -  
شود.

(۳) سه واحد اضافه می‌شود - تغییری نمی‌کند.

(۴) سه واحد کم می‌شود - دو واحد اضافه می‌شود.

(۱۱) باقی‌مانده عدد  $A$  بر ۳۷ برابر ۲۳ می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم  $3 - 2A$  بر ۳۷ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸

(۳) ۹ (۴) ۱۱

۱۴) در تقسیم طبیعی  $a$  بر  $۶۹$  باقی‌مانده از مکعب خارج قسمت  $۲$  واحد بیش‌تر است، بزرگ‌ترین مقدار  $a$  بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۲۰ (۲)

۲۱ (۱)

۲۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲) در تقسیم عدد صحیح بر  $a$ ،  $b$  مقسوم مخالف صفر و مقسوم علیه برابر  $۱۰۴$  است اگر باقی‌مانده-ی  $۴$  برابر مجذور خارج قسمت باشد، خارج قسمت چند مقدار را می‌تواند اختیار کند؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۱۵) بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر  $۳۷$  باقی-مانده آن مربع خارج قسمت تقسیم باشد، کدام گزینه است؟

۲۳۶ (۲)

۲۱۰ (۱)

۳۰۸ (۴)

۲۵۸ (۳)

۱۳) در تقسیمی مقسوم برابر  $۲۰$  و باقی‌مانده از حداکثر مقدار مجاز خود سه واحد کم‌تر است. مقسوم علیه چند مقدار مختلف می‌تواند بگیرد؟

۹ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۴ (۳)

۱۸) در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر  $10$ ، باقی مانده  $\frac{4}{3}$  خارج قسمت است بزرگترین مقدار ممکن برای  $a$  کدام است؟

۵۴ (۲)

۳۴ (۱)

۸۵ (۴)

۶۸ (۳)

۱۶) قدرمطلق تفاضل بزرگترین و کوچکترین عدد طبیعی که باقی مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر  $12$  از  $\frac{3}{5}$  خارج قسمت  $2$  واحد بیش تر است کدام است؟

۱۲۶ (۲)

۱۸۹ (۱)

۲۸۳ (۴)

۶۳ (۳)

۱۹) در تقسیم عدد  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  خارج قسمت  $7$  و باقی مانده  $17$  است، حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییری نکنند؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۱۷) در یک تقسیم اگر به مقسوم  $27$  اضافه شود آن‌گاه  $2$  واحد به خارج قسمت اضافه شده و  $15$  واحد از باقی مانده کم می‌شود مقسوم علیه کدام است؟

۲۱ (۲)

۱۹ (۱)

۲۵ (۴)

۲۳ (۳)

(۲۲) در تقسیم عدد ۱۳۳ بر عدد طبیعی  $b$  باقی-مانده ۱۳ می باشد تعداد جواب‌های  $b$  کدام است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

(۲۰) خارج قسمت تقسیم ۵۰۰ بر عدد  $b$  برابر ۱۴ است. رقم یکان کوچک‌ترین مقدار طبیعی  $b$  کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

(۲۳) در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  باقی‌مانده و خارج قسمت  $q$  است اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود  $q$  کدام است؟

۵ و ۱۰ (۲)

۴ و ۹ (۱)

۸ و ۱۰ (۴)

۵ و ۸ (۳)

(۲۱) اگر در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  خارج قسمت برابر ۲۲ و باقی‌مانده برابر ۳۱ باشد، چه تعداد از جواب‌های  $a$  مضرب ۷ هستند؟

۱۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

۲۶) چند عدد مانند  $b$  وجود دارد که باقی مانده تقسیم  $۱۲۰$  بر آن، برابر  $۲۲$  باشد؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

۲۴) اگر عدد  $a$  مضرب  $۵$  نباشد باقی مانده‌ی تقسیم مربع  $a$  بر  $۵$  چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

۲۷) خارج قسمت تقسیم  $۴۰۰$  بر عدد طبیعی  $b$  برابر  $۱۳$  است. رقم یکان کوچک‌ترین مقدار ممکن برای  $b$  کدام است؟

۱ (۱)                      ۶ (۶)

۳ (۳)                      ۸ (۸)

۲۵) در یک تقسیم به مقسوم،  $۱۴$  واحد اضافه می‌کنیم در این صورت به خارج قسمت  $۲$  واحد اضافه می‌شود اما مقسوم علیه و باقی مانده تغییری نمی‌کند مقسوم علیه کدام است؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)                      ۳ (۳)

۷ (۷)                      ۱۲ (۱۲)

۱۲۸) مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۲ از  $\frac{۳}{۵}$  خارج قسمت ۲ واحد بیش‌تر است، کدام است؟

۱۰ (۱)                      ۱۱ (۲)

۱۴ (۳)                      ۱۶ (۴)

۱۲۹) چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۲۵ برابر مکعب خارج قسمت باشد؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

## رابطه‌ی هم‌نهشتی

**توجه توجه:** حالا قصد داریم همه‌ی خاصیت‌های

هم‌نهشتی رو در زیر بهتون یاد بدیم تا تو حل مسأله‌ها ازشون کمک بگیرید.

۱. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $m$  مساوی  $r$  باشد  

$$a \equiv r \pmod{m} \quad (a = mq + r)$$

اثبات:

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m | a - r \Rightarrow a \equiv r \pmod{m}$$

۲. به هر دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی می‌تونیم عددی اضافه یا کم کنیم.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \pmod{m} \\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \end{cases}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} &\Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | a + c - b - c \\ &\Rightarrow m | (a + c) - (b + c) \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m} \end{aligned}$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $a$  بر  $7$  برابر  $2$  است. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a + 123$  بر  $7$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$a \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow a + 123 \equiv 123 + 2 \pmod{7} \Rightarrow a + 123 \equiv 125 \equiv 6 \pmod{7}$$

۳. دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی رو می‌تونیم تو یه عدد ضرب کنیم.

در این جا قصد داریم یه خاصیت عجیب از عددها رو براتون بگم اونم این هست که یه سری از عددها مثل  $17$  و  $32$  هر دو وقتی به  $5$  تقسیم بشن باقی‌مانده‌ای برابر  $2$  بهمون می‌دهند حالا اگه این دو تا عدد رو از هم کم کنیم  $(32 - 17 = 15)$  به عدد  $5$  بخش‌پذیر هستند  $(5 | 32 - 17)$ . از اون جایی که هر چیزی تو ریاضی با یه نمادی مشخص میشه این مطلب رو به شکل  $32 \equiv 17 \pmod{5}$  نشون می‌دهند. حالا این حرف‌ها رو در زیر با زبون ریاضی می‌خواهیم نشون بدیم.

## هم‌نهشتی

$m$  عدد طبیعی،  $a$  و  $b$  دو تا عدد صحیح هستند. پس می‌گیریم  $a$  با  $b$  به پیمانه‌ی  $m$  هم‌نهشت هستند موقع  $m | a - b$ .

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m | a - b$$

**قرارداد:** همه‌ی عددهای صحیح که باقی‌مانده‌ی تقسیم اون‌ها بر عدد طبیعی  $m$  برابر با  $r$  بشه رو با مجموعه‌ی  $A_r = \{x \in \mathbb{Z} | x = mk + r\}$  رو یه کلاس یا یه دسته‌ی هم‌نهشتی  $r$  به پیمانه‌ی  $m$  می‌گیریم و به شکل  $[r]_m$  نمایش خواهیم داد.

مثال: عدد  $1398$  به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی  $9$  تعلق دارد؟

پاسخ: اول از همه باید ببینیم باقی‌مانده  $1398$  به عدد  $9$  چه عددی میشه، وقتی حساب کنیم می‌بینیم عدد  $3$  خواهد شد، پس عدد  $1398$  متعلق به کلاس یا همون دسته‌ی هم‌نهشتی  $[3]_9$  خواهد بود.



۵. دو طرف به رابطه‌ی هم‌نهستی که پیمانه‌های یکی داشته باشند رو در هم ضرب کنیم.

$$a \equiv b^m, c \equiv d^m \Rightarrow ac \equiv bd^m$$

اثبات:

$$a \equiv b^m \Rightarrow m|a - b \xrightarrow{\times c} m|ac - bc \Rightarrow$$

$$c \equiv d^m \Rightarrow m|c - d \xrightarrow{\times b} m|bc - bd$$

$$m|ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd^m$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  و  $b$  بر  $7$  به ترتیب  $3$  و  $4$  شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $ab$  را بر  $7$  پیدا کنید.

پاسخ:

$$a \equiv 3^7, b \equiv 4^7 \Rightarrow ab \equiv (3)(4)^7 \equiv 12^7 \equiv 5$$

۶. دو طرف دو رابطه‌ی هم‌نهستی به پیمانه‌ی رو می‌تونیم با هم جمع کنیم.

$$a \equiv b^m, c \equiv d^m \Rightarrow a + c \equiv b + d^m$$

$$a \equiv b^m \Rightarrow m|a - b \Rightarrow$$

$$c \equiv d^m \Rightarrow m|c - d$$

$$m|(a - b) + (c - d) \Rightarrow m|(a + c) - (b + d)$$

$$\Rightarrow a + c \equiv b + d^m$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $a$  و  $b$  بر  $7$  به ترتیب برابر  $3$  و  $4$  شده است، باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a^2 + b^2 + 2ab + 18$  را بر  $7$  به دست آورید.

پاسخ:

$$a \equiv b^m \Rightarrow ac \equiv bc^m$$

اثبات:

$$a \equiv b^m \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc^m$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $a$  بر  $13$  برابر  $2$  شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $3a + 141$  را بر  $13$  به دست آورید.

پاسخ:

$$a \equiv 2^{13} \Rightarrow 3a \equiv 6^{13} \Rightarrow 3a + 141 \equiv 147 \equiv 7^{13}$$

۴. دو طرف به رابطه‌ی هم‌نهستی رو می‌تونیم به توان  $n$  برسونیم ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$a \equiv b^m \Rightarrow a^n \equiv b^{nm}$$

اثبات: با استفاده از اتحاد

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

داریم:

$$a \equiv b^m \Rightarrow m|a - b$$

$$\Rightarrow m|(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow m|a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^{nm}$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $7$  برابر  $3$  شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a^2 + 6a + 17$  را بر  $7$  به دست آورید.

پاسخ:

$$a \equiv 3^7 \Rightarrow a^2 + 6a + 17 \equiv 9 + 18 + 17 \equiv 44 \equiv 2^7$$

۲. ثابت کنید اگر باقی مانده های تقسیم دو عدد  $a$  و  $b$  بر  $m$  مساوی باشند، آنگاه  $a \equiv b \pmod{m}$ .

$$a^2 + b^2 + 3ab + 18 \equiv 3^2 + 4^2 + 3(3)(4) + 18 \\ \equiv 9 + 16 + 36 + 18 \equiv 79 \equiv 2$$

۷. دو طرف دو رابطه ی هم نهشتی به پیمانه ی رو می تونیم از هم کم کنیم:

$$a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow$$

$$c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m | c - d$$

$$m | (a - b) - (c - d) \Rightarrow m | (a - c) - (b - d)$$

$$\Rightarrow a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

۳. فرض کنیم  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $b \equiv c \pmod{n}$  و  $(m, n) = d$  در این صورت ثابت کنید  $a \equiv c \pmod{d}$ .

مثال: باقی مانده ی تقسیم دو عدد  $a$  و  $b$  بر ۱۱ به ترتیب ۲ و ۴ شده است. باقی مانده ی تقسیم  $3a - 2b + 17$  را بر ۱۱ پیدا کنید.

$$3a - 2b + 17 \equiv 12 - 4 + 17 \equiv 25 \equiv 3$$

تمرین الف: به هریک از سؤال های زیر پاسخ دهید.

۱. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $n | m$  ثابت کنید  $a \equiv b \pmod{n}$ .

۴. ثابت کنید برای هر  $a, b \in \mathbb{Z}$ ،  $n \in \mathbb{N}$  همواره

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{n}$$

۸. باقی مانده‌ی تقسیم  $7^{14}$  را بر ۱۱ به دست آورید.

۵. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $A = (2^{11} + 7) \times 9$  را بر ۲۳ به دست آورید.

۹. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $3^{50} + 2$  را بر ۲۸ به دست آورید.

۶. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$  را بر ۱۰ پیدا کنید.

۱۰. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $1000^{23} + 10^6$  را بر ۷ بیابید.

۷. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $3 \times (27)^{100} + 17$  را بر ۱۳ پیدا کنید.

نظریه اعداد

مسئله علمدار

۱۴. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $5^{2n+2} + 5^{6n+4} + 3$  را بر ۳۱ به ازای هر عدد طبیعی  $n$  به دست آورید.

۱۱. عدد  $-1399$  به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانۀ ۷ تعلق دارد؟

۱۲. باقی مانده‌ی تقسیم  $5 + 3^{102}$  را بر ۲۸ به دست آورید.

۱۵. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $7^{2n+2} + 7^{6n+4} + 9$  را بر ۱۹ به دست آورید.

۱۳. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $(-6)^{25} + 11^{26}$  را بر ۳۳ پیدا کنید.

۱۶. کوچک‌ترین عدد مثبت  $m$  را طوری به دست آورید که عدد  $2^{17} + m$  مضرب ۲۱ باشد.

$$a^2 + 5a - 19 \equiv 2^4 + 5(2) - 19 \equiv 3$$

$$-5 + 2 \times 4 \Rightarrow a^2 + 5a - 19 \equiv 3$$

## معادله‌ی هم‌نهشتی

هر معادله‌ای که قیافه‌ی آن به صورت  $ax \equiv b^m$  باشد رو معادله‌ی هم‌نهشتی می‌گن و برای حل اون اول از همه اگه  $b, a$  بزرگ‌تر از  $m$  باشه به جاش باقی‌مانده تقسیم اون رو به  $m$  می‌نویسیم بعدش هر دو طرف هم‌نهشتی رو به ضرب  $X$  تقسیم می‌کنیم ولی حواسمون باشه اگه سمت دیگه تساوی  $(b)$  به ضرب  $X$  قابل قسمت نباشه یه مضربی از پیمانه  $(m)$  رو بهش اضافه می‌کنیم  $(mt + b)$  تا هر دو طرف به ضرب  $X$  بخش‌پذیر شوند تا معادله به قیافه‌ی  $X \equiv C^m$  در بیاید اون وقت  $x = mk + c$  در خواهد اومد.

مثال: معادله‌ی هم‌نهشتی  $3x \equiv 120^{11}$  را حل کنید.

پاسخ: چون عدد  $120$  از عدد  $11$  بزرگ‌تر هست به جاش باقی‌مانده‌ی تقسیم اون رو به  $11$  می‌نویسیم:

$$3x \equiv 120^{11} \xrightarrow{120 \equiv 10^{11}} 3x \equiv 10^{11}$$

چون عدد  $10$  به  $3$  بخش‌پذیر نیست عدد  $11$  رو با عدد  $10$  جمع می‌کنیم، یعنی داریم:

$$3x \equiv 10^{11} \Rightarrow 3x \equiv 11 + 10 \Rightarrow 3x \equiv 21^{11}$$

حالا دو طرف هم‌نهشتی رو به  $3$  تقسیم می‌کنیم.

$$3x \equiv 21^{11} \xrightarrow{\div 3} x \equiv 7^{11} \Rightarrow x \equiv 7 \Rightarrow x = 11k + 7$$

۱۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $a+7$  بر  $11$  برابر  $6$  است. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a^2 + 4a - 19$  را بر  $11$  به دست آورید.

۱۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عدد  $66$  و  $145$  بر  $m > 1$  یکسان است،  $m$  را به دست آورید.

**نکته:** اگر دو طرف یه رابطه‌ی هم‌نهشتی رو به یه عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه رو به ب.م.م اون عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{(m,c)}}$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $3a+2$  بر  $12$  برابر  $8$  شده است، باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a^2 + 5a - 19$  را بر  $4$  به دست آورید.

$$3a + 2 \equiv 8 \Rightarrow 3a \equiv 6 \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{\frac{12}{(12,3)}} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{4}$$

$$4) 7x \equiv 2 \pmod{13}$$

**قضیه:** معادله‌ی هم‌نهشتی  $ax \equiv b \pmod{m}$  وقتی جواب دارد  
 $(a, m) | b$  و برعکس اگر  $(a, m) | b$  معادله‌ی  
 $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب خواهد بود.

**تمرین الف:** هر یک از معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

$$1) 423x \equiv 79 \pmod{11}$$

$$5) 2 - 11x \equiv 37 \pmod{17}$$

$$2) 8x \equiv 20 \pmod{12}$$

$$6) 24x \equiv 18 \pmod{10}$$

$$3) 51x \equiv 11 \pmod{6}$$

۲. به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کرد.

## معادله‌ی سیاله

هر معادله‌ای که شکل اون به صورت  $ax + by = c$  باشه رو معادله‌ی سیاله می‌گن و برای این‌که اون رو حل کند به معادله هم‌نهشتی  $ax \equiv c \pmod{|b|}$  در میارن، و وقتی که  $X$  رو پیدا کردیم تو معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم تا  $Y$  رو پیدا کنیم.

توجه: معادله‌ی سیاله زمانی دارای جواب هست که  $(a, b) | c$ .

مثال: معادله‌ی  $4x + 5y = 9$  را حل کنید.

پاسخ: اول معادله رو به شکل  $4x \equiv 9 \pmod{5}$  در بیاریم تا بعد حلش کنیم.

$$4x \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 1$$

$$4(5k + 1) + 5y = 9 \Rightarrow 5y = -20k + 5$$

$$\Rightarrow y = -4k + 1$$

تمرین ب: به هریک از سؤال‌های زیر جواب دهید.

۱. جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله  $7x + 5y = 11$  را به دست آورید.

۳. به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

نظریه اعداد

مسئله علمدار

۶. به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۴. در یک رستوران فقط دو نوع خورشید قرمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟

۷. به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۵. تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره‌ی هم‌مرکز تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره‌ی با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره‌ی بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کم‌تر از ۱۵ تیر انداخته و همه‌ی تیرها به داخل دایره‌ی بزرگ‌تر اصابت کرده باشد، در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟



۸. به چند طریق می‌توان دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

**طریقه‌ی به دست آوردن باقی‌مانده‌ی تقسیم بر عددهای خاص**

۱. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی به عددهای ۳ یا ۹ کافیست که جمع رقم‌های اون عدد رو پیدا کنیم و باقی‌مانده‌اش رو به ۳ یا ۹ پیدا کنیم.

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد ۴۳۲۵۶۹۱۷۳۲ را بر ۳ و ۹ به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} 4325691732 &\equiv 4+3+2+5+6+9+1+7+3+2 \equiv 42 \equiv 6 \pmod{3} \\ 42 &\equiv 4+2 \equiv 6 \pmod{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4325691732 &\equiv 4+3+2+5+6+9+1+7+3+2 \equiv 42 \equiv 6 \pmod{9} \\ 42 &\equiv 4+2 \equiv 6 \pmod{9} \end{aligned}$$

۲. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عددی به یکی از عددهای ۳<sup>n</sup> و ۵<sup>n</sup> و ۱۰<sup>n</sup> کافیست که باقی‌مانده‌ی تقسیم n رقم سمت راست رو به اون عدد پیدا کنیم.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۹۶۵۱ را بر عددهای ۲۵ و ۸ و ۱۰۰ به دست آورید.

پاسخ: چون  $25 = 5^2$  است، پس کافیست باقی‌مانده‌ی دو رقم سمت راست رو به ۲۵ پیدا کنیم.

$$139651 \equiv 51 \equiv 1 \pmod{25}$$

می‌دونیم  $8 = 2^3$  پس باقی‌مانده‌ی سه رقم سمت راست رو به ۸ پیدا می‌کنیم.

$$139651 \equiv 651 \equiv 3 \pmod{8}$$

۹. شخصی در یک مسابقه‌ی علمی شرکت کرده است. او به سوالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و در مجموع ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی می‌تواند این امتیاز را به دست آورد.

## نظریه اعداد

## مسئله علمدار

به جای این همه دردرس کافی بود که ببینیم عدد ۱۷ به پیمانہ ۷ چند میشه که محاسبه کنیم ۳ خواهد شد  
 $(17 \equiv 3) \pmod{7}$  پس ۳ روز باید جلو می‌رفتیم حالا اگه می‌گفت هفده روز قبل‌تر چند شنبه بوده باید سه روز به عقب می‌رفتیم که اگه بریم عقب به شنبه می‌رسیم.

**توجه:** تو مسأله‌هایی که بهمون در رابطه با تاریخ می‌دهند، باید فاصله‌ی تاریخ‌ها رو از هم کم کنیم و برای این که اشتباه نکنیم باید هر تاریخی چندمین روز سال هست بعد از هم کمشون کنیم.

مثال: اگر در یک سال اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

پاسخ: اول از همه باید ببینیم اول مهر چندمین روز سال و ۱۲ بهمن نیز چندمین روز سال هست.

$$1 + 31 \times 6 = \text{اول مهر}$$

$$12 + 30 \times 4 + 6 \times 6 = \text{دوازده بهمن}$$

حالا این دو تا رو از هم کم می‌کنیم و باقی‌مانده‌ی اون‌ها رو به ۷ پیدا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & (6 \times 31 + 4 \times 30 + 12) - (6 \times 31 + 1) \pmod{7} \\ & 4 \times 30 + 11 \pmod{7} \equiv 4 \times 2 + 4 \equiv 5 \end{aligned}$$

پس کافیه ۵ روز به جلو حرکت کنیم، یعنی ۱۲ بهمن پنج‌شنبه است.

به دلیل این که  $10^2 = 100$  هست. پس باقی‌مانده‌ی دو رقم سمت راست رو به ۱۰۰ به دست بیاریم.

$$139651 \equiv 51 \pmod{100}$$

۳. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم به ۱۱ باید از سمت راست عددها رو یکی در میان مثبت و منفی نوشت و باقی‌مانده‌ی عدد حاصل رو به پیدا کنیم.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم ۳۴۵۳۲۹ را بر ۱۱ به دست آورید.

پاسخ:

$$345329 \equiv 9 - 2 + 3 - 5 + 4 - 3 \equiv 6 \pmod{11}$$

توجه: برای پیدا کردن رقم سمت راست یه عدد یا همون رقم یکان کافیه باقی‌مانده‌ی تقسیم رو به ۱۰ پیدا کنیم.

مثال: رقم یکان عدد  $143 + (139)^{11}$  را به دست آورید.

$$\begin{aligned} 139 \equiv 9 \pmod{10} & \Rightarrow (139)^{11} \equiv (-1)^{11} \pmod{10} \Rightarrow (139)^{11} \equiv -1 \pmod{10} \\ & \Rightarrow (139)^{11} + 143 \equiv 143 - 1 \equiv 142 \equiv 2 \pmod{10} \end{aligned}$$

## مماسبیه‌ی روز هفته برمسب تاریخ

چون روزهای هفته، بعد هفت روز تکرار می‌شوند پس اگه بدونیم امروز سه‌شنبه هست و بخواهیم بدونیم ۱۷ روز بعد چند شنبه خواهد بود. می‌دونیم که هفت روز دیگه مجدد سه‌شنبه و هفت روز دیگه دوباره سه‌شنبه است پس چهارده روز دیگه سه‌شنبه است پس تا روز هفدهم سه روز باید جلو بریم یعنی چهارشنبه و پنج‌شنبه رو رد کنیم و برسیم به روز سوم که جمعه هست. پس هفده روز دیگه جمعه است.

تمرین الف: به هریک از سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۳. عدد  $\overline{2a42b}$  بر ۹۹ بخش پذیر است،  $2a + b$  را پیدا کنید.

۱. باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $1394563$  را به هریک از عددهای زیر به دست آورید.

۸ (الف)

۱۱ (ب)

۹ (ج)

۳ (د)

۴. اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفند در همان سال چه روزی از هفته است؟

۲۵ (ه)

۱۰ (و)

۵. ۱۱ مرداد در یک سال چهارشنبه است، دومین دوشنبه بهمن ماه چه تاریخی خواهد بود؟

۲. باقی مانده‌ی تقسیم عدد چهار رقمی  $\overline{3a26}$  بر ۹ برابر ۴ است،  $a$  را پیدا کنید.

۱) رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه رقمی  $a$  که در رابطه‌ی هم‌نهمشتی: (پیمانه ۹)  $1 \equiv 3a \pmod{9}$  صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱                      ۲) ۲

۳) ۳                      ۴) ۴

۶. اگر ۱۰ خرداد دوشنبه باشد، سومین شنبه اردیبهشت چه تاریخی بوده است؟

۷. اگر سومین شنبه مهرماه بیست و هفتم باشد، سومین دوشنبه بهمن ماه چه تاریخی خواهد بود.

۲) به ازای کدام مقدار  $n$  معادله‌ی  $3x + 6y = n$  در  $\mathbb{Z}$  جواب دارد؟

۱) ۷                      ۲) ۸

۳) ۹                      ۴) ۱۰

۸. دو عدد  $3 - 6a$  و  $4 + 3a$  رقم یکان برابر دارند. رقم یکان  $7 + 2a$  را پیدا کنید.

۹. رقم یکان  $1398! + 4! + 2!$  را به دست آورید.

(۵) کدام یک از مجموعه‌های زیر یک دسته کامل مانده‌ها هم‌نهشت به پیمانه ۵ است؟

- (۱)  $\{0, 3, 5, 7\}$  (۲)  $\{0, 1, 6, 7, 8\}$   
 (۳)  $\{0, 6, 7, 13, 14\}$  (۴)  $\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$

(۳) باقیمانده‌ی تقسیم  $7^{4k} - 1$  (که در آن  $k$  عددی است صحیح و مثبت) بر ۵ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱  
 (۳) ۲ (۴) ۳

(۶) به ازای کدام مقدار  $a$  معادله‌ی  $20 = (15 + a)x + ay$  در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۵  
 (۳) ۱۵ (۴) ۳۰

(۴) معادله‌ی سیاله خطی  $7x + 5y = 130$  در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴  
 (۳) ۳ (۴) ۲

۹) باقی مانده تقسیم عدد  $2^{500}$  بر ۱۳ کدام است؟

۸ (۱)      ۹ (۲)

۱۰ (۳)      ۱۱ (۴)

۷) اگر  $S = (1!) + (2!) + \dots + (19!)$  رقم

یکان عدد  $S^2$  کدام است؟

۶ (۱)      ۴ (۲)

۵ (۳)      ۹ (۴)

۱۰) شرط اینکه معادله هم نهشتی (پیمانه  $m$ )

$ax \equiv b$  دارای جواب باشد، کدام است؟

(۱)  $(a, m) | b$       (۲)  $(a, b) = 1$

(۳)  $m$  عدد اول باشد.      (۴)  $(a, b) = m$

۸) فرض کنید به تعداد کافی وزنه‌های ۳ کیلویی

و ۵ کیلویی در اختیار داشته باشیم. معین کنید به

چند طریق می‌توان جسمی به وزن ۳۲ کیلو را با

این وزنه‌ها توزین نمود به نحوی که این نوع

وزنه‌ها فقط در یک کفه ترازو قرار گیرند؟

۱ (۱)      ۲ (۲)

۳ (۳)      ۴ (۴)

نظریه اعداد

مسئله علمدار

(۱۱) عدد  $209 -$  به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانۀ ۱۲ تعلق دارد؟

(۱۳) به چند طریق می‌توان  $350$  ریال را به وسیله‌ی سکه‌های  $20$  و  $50$  ریالی پرداخت که از هر دو استفاده شود؟

(۱)  $[-9]$  (۲)  $[7]$

(۱)  $3$  (۲)  $4$

(۳)  $[-7]$  (۴)  $[9]$

(۳)  $5$  (۴)  $6$

(۱۲) باقیمانده‌ی عدد  $2^{61}$  بر  $17$  کدام است؟

(۱)  $9$  (۲)  $11$

(۱۴) باقیمانده‌ی تقسیم عدد  $8^{12} + 7^{12} + 6^{12} + 5^{12}$  بر عدد  $13$  کدام است؟

(۳)  $13$  (۴)  $15$

(۱)  $0$  (۲)  $3$

(۳)  $4$  (۴)  $6$

نظریه اعداد

مسئله علمدار

۱۷) باقیمانده‌ی تقسیم عدد  $2^{22}$  بر ۱۷ کدام است؟

۱۳ (۲)

۱۶ (۱)

۱ (۴)

۴ (۳)

۱۵) مجموعه همه دسته‌های هم‌ارزی به پیمانه ۵ چنین است:

$$\{[0], [a], [a^2], [a^3], [a^4]\}$$

مقدار  $a$  کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۵ (۳)

۱۸) بیست و هفتم اردیبهشت روز سه‌شنبه است. سومین شنبه در ماه اردیبهشت کدام روز این ماه است؟

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۶) کدام دو عدد در هم‌نهشتی (پیمانه ۱۲)  $a \equiv b$  صادق است؟

۱۲, ۲۳ (۲)

۶۳, ۲۰ (۱)

۲۴, ۵۹ (۴)

۵۹, ۲۳ (۳)



(۲۱) از رابطه: (پیمانه ۱۲)  $8a \equiv 64$  ، کدام تساوی

حاصل می‌شود؟

(۲)  $a + 4 = 12k$

(۱)  $a + 1 = 3k$

(۴)  $a - 8 = 12k$

(۳)  $a - 1 = 3k$

(۱۹) تعداد جواب‌های معادله هم‌نهشتی (پیمانه ۶)

$2x + 1 \equiv 4x$  در مجموعه اعداد صحیح کدام

است؟

(۲) ۶

(۱) صفر

(۴) بی‌شمار

(۳) ۸

(۲۲) اگر (پیمانه ۱۷)  $a \equiv 8^{16} \times 5 - 7^{22}$  آن‌گاه

a کدام است؟

(۲) ۱۱

(۱) ۷

(۴) ۱۳

(۳) ۱۲

(۲۰) با افزودن کدام عدد به مجموعه

$\{3^m \mid 0 < m \leq 6\}$  یک دسته کامل مانده‌ها به

پیمانه ۷ حاصل می‌شود؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۷

(۳) ۵

نظریه اعداد

مسئله علمدار

۲۵) اگر  $a + 7^{17}$  بر عدد ۵۷ بخش پذیر باشد، کوچک ترین عدد طبیعی  $a$  کدام است؟

۲۳) عدد  $11^{11} \times 8^{10}$  به کدام دسته مانده‌ها در هم‌نهشتی به پیمانۀ ۱۰ تعلق دارد؟

۵ (۲)

۱ (۱)

[۴] (۲)

[۲] (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

[۸] (۴)

[۶] (۳)

۲۶) باقیمانده‌ی عدد  $4^{31} + 3^{31} + 2^{31}$  بر ۷ چیست؟

۲۴) رقم سمت راست عدد  $13^{15}$  کدام است؟

۲ (۲)

۱) صفر

۳ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۹ (۴)

۷ (۳)

(۲۹) به ازای کدام مقدار  $m$  معادله سیاله  
 $60x + 84y = 5m - 1$  در مجموعه  $\mathbb{Z}$  دارای  
 جواب است؟

۲۹ (۲)

۲۴ (۱)

۳۵ (۴)

۳۳ (۳)

(۲۷) در رابطه: (پیمانه ۲۰)  $9a \equiv 36 - 3a$  عدد  
 $a$  به کدام صورت است؟

۵k + ۱ (۲)

۵k + ۳ (۱)

۴k + ۱ (۴)

۴k + ۳ (۳)

(۳۰) از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۹)  $12a \equiv 18b$   
 کدام نتیجه‌گیری به (پیمانه ۳) نادرست است؟

۴a ≡ ۶b (۲)

۲a ≡ ۳b (۱)

b ≡ ۲ (۴)

a ≡ ۰ (۳)

(۲۸) جواب معادله هم‌نهشتی (پیمانه ۱۳)  $5x \equiv 3$   
 به کدام صورت است؟

۱۳k - ۳ (۲)

۱۳k - ۲ (۱)

۱۳k - ۶ (۴)

۱۳k - ۵ (۳)

(۳۳) رابطه‌ی هم‌نهشتی مجموعه‌ی  $\mathbb{Z}$  را به ۱۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است و عدد سه رقمی  $\overline{6a4}$  در کلاس هم‌ارزی  $[9]$  قرار دارد، تعداد جواب‌های  $a$  کدام است؟

- (۱) ۵  
(۲) ۴  
(۳) ۳  
(۴) ۲

(۳۱) باقیمانده‌ی تقسیم عدد  $2^{26}$  بر عدد ۴۳ کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۷  
(۳) ۱۱  
(۴) ۲۶

(۳۲) عددی به صورت  $\overline{13x5y}$  نوشته شده و رقم یکان و صدگان آن مجهول است. برای آن‌که این عدد بر ۳ قابل قسمت باشد، ماکزیم  $x + y$  کدام است؟

- (۱) ۸  
(۲) ۹  
(۳) ۱۸  
(۴) ۱۹

(۳۴) از رابطه‌ی هم‌نهشتی (پیمانه ۳۰)  $20b \equiv 15a$  کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) (پیمانه ۳۰)  $3a \equiv 4b$   
(۲) (پیمانه ۶)  $3a \equiv 4b$   
(۳) (پیمانه ۳)  $b \equiv 0$   
(۴) (پیمانه ۲)  $a \equiv 0$

نظریه اعداد

مسئله علمدار

(۳۷) در هم‌نهشتی به پیمانۀ  $m$  سه عدد  $a$  و  $41$  و  $132$  در یک کلاس هم ارزی قرار دارند، کوچک‌ترین عدد سه رقمی  $a$  به طوری که مجموعه  $\mathbb{Z}$  به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افراز شود، کدام است؟

- (۱)  $102$  (۲)  $103$   
 (۳)  $104$  (۴)  $105$

(۳۵) به ازای کدام عدد طبیعی  $n$ ، معادله‌ی خطی  $24x + 39y = 2n + 1$  در مجموعه‌ی  $\mathbb{Z}$  جواب دارد؟

- (۱)  $29$  (۲)  $33$   
 (۳)  $37$  (۴)  $41$

(۳۸) عدد  $a + 7^{15}$  مضرب  $17$  است. کوچک‌ترین عدد طبیعی  $a$  کدام است؟

- (۱)  $5$  (۲)  $10$   
 (۳)  $11$  (۴)  $12$

(۳۶) معادله سیاله خطی  $15x + 14y = 1050$  در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$   
 (۳)  $4$  (۴)  $5$

نظریه اعداد

مسئله علمدار

۳۹) کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۵۰ ریال دارد با تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟

۴۱) دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته هم‌ارزی به پیمانه  $m$  هم‌نهشت شده‌اند. اگر  $(m, 7) = 1$ ، باقیمانده‌ی عدد  $m^m$  بر ۷ کدام است؟

- |        |        |       |       |
|--------|--------|-------|-------|
| ۱۱ (۱) | ۱۲ (۲) | ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۱۳ (۳) | ۱۴ (۴) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |

۴۰) باقیمانده‌ی عدد  $3^{48}$  بر ۱۱ کدام است؟

۴۲) باقیمانده‌ی تقسیم عدد  $2^{42} - 3^{42}$  بر عدد ۳۵ کدام است؟

- |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| ۵ (۱) | ۶ (۲) | ۰ (۱) | ۱ (۲) |
| ۷ (۳) | ۸ (۴) | ۵ (۳) | ۶ (۴) |

(۴۵) از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۱۸)  $9a \equiv 6b$ ،  
کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- (۱) (پیمانه ۲)  $a \equiv 0$  (۲) (پیمانه ۳)  $b \equiv 0$   
(۳) (پیمانه ۶)  $a \equiv 2$  (۴) (پیمانه ۶)  $3a \equiv 2b$

(۴۳) اگر عدد  $a + 7^{200}$  مضرب ۱۹ باشد،  
کوچک‌ترین عدد طبیعی  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵  
(۳) ۶ (۴) ۸

(۴۶) باقی‌مانده تقسیم عدد  $2^{60} + 3^{60} - 2^{60}$  بر  
عدد ۳۵ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲  
(۳) ۳ (۴) صفر

(۴۴) باقیمانده‌ی تقسیم  $(-6)^{23}$  بر عدد ۳۳  
کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۱۵  
(۳) ۱۵ (۴) ۱۸

## نظریه اعداد

## مسئله علمدار

۴۹) اگر عدد  $(6^n - 3^n)$  مضرب ۲۵ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی  $n$  کدام است؟

- ۱۰ (۱)      ۱۵ (۲)  
۱۶ (۳)      ۲۰ (۴)

۴۷) معادله‌ی هم‌نهشتی (پیمانه ۳۱)  $72x \equiv 1$  در مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

- ۲۹ (۱)      ۳۰ (۲)  
۳۲ (۳)      ۳۳ (۴)

۵۰) به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟

- ۳ (۱)      ۴ (۲)  
۵ (۳)      ۶ (۴)

۴۸) باقی‌مانده‌ی عدد  $5^{10}$  بر ۱۱، به کدام دسته‌ی هم‌ارزی تعلق دارد؟

- [۱] (۱)      [۳] (۲)  
[۵] (۳)      [۷] (۴)



نظریه اعداد

مسئله علمدار

(۵۳) در تقسیم عدد  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  باقی‌مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر  $a$  مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی  $a$  کدام است؟

۷ (۲)

۸ (۱)

۹ (۴)

۶ (۳)

(۵۱) در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ می‌باشد، چند عضو از مجموعه جواب‌های  $a$  مضرب ۵ می‌باشد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

(۵۴) از رابطه‌ی هم‌نهشتی (پیمانه ۸۴)  $۱۹۲ \equiv ۳۶a$ ، کدام نتیجه‌گیری در پیمانه‌ی ۷ نادرست است؟

$a \equiv ۴ \pmod{۲}$

$۲a \equiv -۱ \pmod{۱}$

$۳a \equiv ۲ \pmod{۴}$

$a \equiv ۳ \pmod{۳}$

(۵۲) عدد  $B + ۷^{۵۴} \times ۱۳$  بر ۴۳ بخش‌پذیر است، کوچک‌ترین عدد طبیعی  $B$ ، کدام است؟

۲۸ (۲)

۲۰ (۱)

۳۰ (۴)

۲۹ (۳)

نظریه اعداد

مسئله علمدار

(۵۷) معادله‌ی سیاله‌ی  $25x + 12y = 1110$  بر روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی  $(\mathbb{N})$  چند زوج جواب دارد؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

(۵۵) برای خرید کتاب به قیمت ۷۵۰ تومان، به تعداد  $A$  بن دویست تومانی و  $B$  بن یکصد و پنجاه تومانی پرداخت نموده‌ایم. حداقل  $A + B$  کدام است؟

- (۱) ۳۵  
(۲) ۳۶  
(۳) ۳۷  
(۴) ۳۸

(۵۸) باقی‌مانده‌ی عدد  $3344556$  بر ۱۱ چه قدر است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

(۵۶) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $13^{43}$  بر عدد ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

مسئله علمدار

نظریه اعداد

(۶۱) مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی  $x$  که در معادله  $۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲$  صدق کند، کدام است؟

(۵۹) باقی‌مانده‌ی  $۱۰! + ۸! + ۶! + ۴! + ۲!$  بر ۱۵ چه قدر است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۶ (۲)

۱۱ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

۲ (۴)

۹ (۳)

(۶۲) معادله‌ی سیاله‌ی  $۳x + ۶y = a + ۱$ ، به ازای کدام مقدار  $a$  جواب دارد؟

(۶۰) در معادله‌ی  $۹x + ۵y = ۱۱۳$  چند جواب صحیح برای  $x$  در بازه‌ی  $۱۰ < x < ۲$  پیدا می‌شود؟

۱۷ (۲)

۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۱۱ (۱)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

نظریه اعداد

مسئله علمدار

۶۵) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، دو عدد به صورت‌های  $5n + 4$  و  $13n - 3$ ، نسبت به هم غیر اول‌اند؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

۶۳) اگر  $(357, 629) = 357x + 629y$ ، آن‌گاه کوچک‌ترین عدد مثبت  $x + y$  کدام است؟

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۶۶) اگر عدد  $2x^2 - x - 6$  مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی  $x$ ، کدام است؟

۷ (۲)

۶ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

۶۴) اگر یک عدد چهار رقمی به صورت  $\overline{a70b}$  مضرب ۴۴ باشد، ولی مضرب ۵۵ نباشد، آن‌گاه  $a + b$  کدام است؟

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۶۹) اگر  $221x + 357y = (221, 357)$  باشد، تعداد اعداد طبیعی دو رقمی  $x$ ، کدام است؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)  
۶ (۳)      ۷ (۴)

۶۷) چند عدد پنج رقمی به صورت  $\overline{a35b2}$  بخش پذیر بر ۳۶ موجود است؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)  
۶ (۳)      ۷ (۴)

۷۰) اگر عدد طبیعی به صورت  $2n + 1$  بر ۵ بخش پذیر باشد. باقی مانده‌ی عدد طبیعی به صورت  $6 + 19n + 14n^2$  بر عدد ۲۵، کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)  
۳ (۳)      ۴ (صفر)

۶۸) به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی  $n$ ، اعداد  $4n + 1$  و  $5n - 3$  نسبت به هم اول اند؟

- ۸۱ (۱)      ۸۲ (۲)  
۸۴ (۳)      ۸۵ (۴)

(۷۳) باقیمانده‌ی تقسیم عدد طبیعی  $N$  بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ می‌باشد. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر خارج قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر  $N$ ، کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۴  
(۳) ۶  
(۴) ۷

(۷۱) اگر عدد طبیعی پنج رقمی  $\overline{5abb6}$  بر عدد ۹۹ بخش پذیر باشد، رقم  $b$  کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۶  
(۳) ۷  
(۴) ۸

(۷۴) به ازای کدام مقادیر  $n$  از عدد طبیعی، عبارت  $1 + 5^{3n+2} + 5^{6n+4}$  بر عدد ۳۱ بخش پذیر است؟

- (۱) فقط اعداد فرد  
(۲) فقط اعداد زوج  
(۳) فقط اعداد مضرب ۵  
(۴) تمام اعداد

(۷۲) از رابطه‌ی هم‌نهشتی (پیمانه ۹)  $18a \equiv 12b$  ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) (پیمانه ۲)  $a \equiv 0$   
(۲) (پیمانه ۳)  $b \equiv 0$   
(۳) (پیمانه ۳)  $3a \equiv b$   
(۴) (پیمانه ۳)  $3a \equiv 2b$

(۷۷) عدد شش رقمی  $\overline{5a7b24}$  بر عدد ۴۴

تقسیم پذیر است، باقی مانده تقسیم آن عدد بر ۹

کدام است؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

(۷۵) اگر  $x$  و  $y$  جواب های معادله هم نهشتی

$11x + 9y = 18$  باشند،  $x + y$  کدام است؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

(۷۸) اگر (به)  $m$  پیمانه

و  $a^2 - a^2 - a + 1 \equiv a^2 - 1$

$(a^2 - 1, m) = 1$  آن گاه:

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

(۷۶) معادله هم نهشتی (پیمانه ۹)  $6x = 2a + 5$

در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است.

صورت نمایش  $a$ ، بر حسب  $k \in \mathbb{Z}$  کدام است؟

۱ (۱)                      ۲ (۲)

۳ (۳)                      ۴ (۴)

۸۱) به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی  $n$ ، دو عدد به صورت‌های  $۱۱n+۴$  و  $۲۵n+۴$  نسبت به هم اول

هستند؟

۹۰ (۲)

۸۶ (۱)

۸۷ (۴)

۸۹ (۳)

۷۹) اگر  $a^p = ۱۰k + ۷$  آن‌گاه رقم یکان عدد  $a^{p+۴}$  کدام است؟

۳ (۲)

۱ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

۸۲) به ازای چند عدد طبیعی  $n$  کمتر از ۵۰،  $۵n-۲$  و  $n+۳$  نسبت به هم اول نیستند؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۸۰) مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه رقمی  $n$  که به ازای آن، دو عدد  $۴n-۵$  و  $۹n+۴$  نسبت به هم اول نباشند، کدام است؟

۱۰ (۲)

۱۷ (۱)

۱۵ (۴)

۲۵ (۳)



(۸۵) به ازای چند مقدار طبیعی  $n < ۵۰$ ، دو عدد  $۷n + ۴$  و  $۵n + ۳$  نسبت به هم اول هستند؟

- (۱) ۵۰  
(۲) ۲۵  
(۳) ۲۰  
(۴) ۰

(۸۳) به ازای چند عدد طبیعی  $n < ۳۰۰$ ، دو عدد  $۹n + ۲$  و  $۱۱n - ۵$  نسبت به هم اول نیستند؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

(۸۶) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، دو عدد به صورت‌های  $۵n - ۲$  و  $۷n + ۳$  نسبت به هم غیر

- اول‌اند؟  
(۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

(۸۴) اگر  $n$  عدد طبیعی و ب.م.م دو عدد  $n + ۲$  و  $n - ۱$  عددی مخالف ۱ باشد، جمع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی  $n$  کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳) ۶  
(۴) ۷

## نظریه اعداد

## مسئله علمدار

(۸۹) به ازای کدام مقدار  $a$ ، دو عدد صحیح  $5n+3$  و  $an+11$  همواره نسبت به هم اول هستند؟ ( $n \in \mathbb{Z}$ )

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

(۸۷) به ازای چند عدد طبیعی  $n$ ، هر دو عدد  $7n+5$  و  $11n+2$  مقسوم علیه مشترک برابر ۳ دارند؟

۲) یک

۱) هیچ

۴) بی شمار

۳) دو

(۹۰) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، دو عدد به صورت‌های  $5n+4$  و  $11n-1$  نسبت به هم غیر اول‌اند؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

(۸۸) . به ازای چند عدد طبیعی سه رقمی  $n$ ، اعداد  $11n+9$  و  $5n+4$  نسبت به هم اول هستند؟

۱۸۰ (۲)

۹۰ (۱)

۹۰۰ (۴)

۴۵۰ (۳)