



آزمون غیر حضوری

دروس اختصاصی دوازدهم ریاضی

(۱۵ آذر ۱۳۹۸)

(مباحث ۲۹ آذر ۹۸)

گروه فنی و تولید:

محمد اکبری	مسئول تولید آزمون غیر حضوری
عادل حسینی	مسئول دفترچه آزمون غیر حضوری
مدیر گروه: فاطمه رسولی نسب مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری	گروه مستندسازی
حسن خرم‌جو	حروف‌نگار و صفحه‌آرا
سوران نعیمی	ناظر چاپ

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»



حسابان ۲

حسابان ۲

مثلثات، حدهای نامتناهی، حد

در بی نهایت

صفحه‌های ۳۵ تا ۵۸

(۴) متناوب نیست.

$$-۱ \text{ دوره تناوب تابع } y = \begin{cases} ۴ & ; x \in \mathbb{Q} \\ \sin(\pi x) \cos(\pi x) & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) π (۴) ۴

$$-۲ \text{ جواب کلی معادله مثلثاتی } \cos \frac{5\pi}{3} + \sin(\frac{2\pi}{3} + x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0 \text{ کدام است؟ } (k \in \mathbb{Z})$$

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi$

$$-۳ \text{ جواب کلی معادله مثلثاتی } \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \text{ به کدام صورت است؟ } (k \in \mathbb{Z})$$

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

$$-۴ \text{ معادله } \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{3} \text{ در بازه } [0, 2\pi] \text{ چند ریشه دارد؟}$$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$-۵ \text{ معادله } x^2 - \cos x = 2x \text{ چند ریشه مثبت دارد؟}$$

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$-۶ \text{ نمودار تابع } f(x) = \tan(\pi \sin x) \text{ در اطراف مجانب قائم بازه } (0, \frac{\pi}{2}) \text{ چگونه است؟}$$



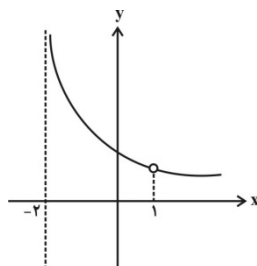
$$-۷ \text{ نمودار منحنی به معادله } y = \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1} \text{ در اطراف مجانب‌های قائم خود چگونه است؟}$$



$$-۸ \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left[\frac{1}{[x] - x} \right] \text{ کدام است؟ } ([] \text{ نماد جزء صحیح است.})$$

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $-\infty$

$$-۹ \text{ قسمتی از نمودار تابع } y = \frac{2x + a}{x^2 + bx + c} \text{ به صورت مقابل است. } a + c \text{ کدام است؟}$$



- (۱) ۱۴ (۲) -۱۴ (۳) ۸ (۴) -۸

$$-۱۰ \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 + ax + b} = -\infty \text{ مقدار } a - b \text{ کدام است؟}$$



ریاضی پایه

ریاضی پایه

ریاضی (۱):

معادله‌ها و نامعادله‌ها

صفحه‌های ۶۹ تا ۹۳

حسابان (۱): جبر و معادله

صفحه‌های ۷ تا ۱۶

۱۱- به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله $x^2 + 4x + 3m^2 = 0$ ، دو ریشه متمایز دارد؟

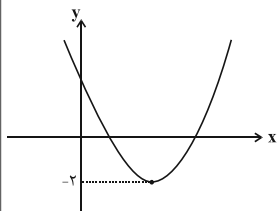
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲- اگر عبارت $(m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره مثبت باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $-2 < m < 1$ (۲) $1 < m < 3$ (۳) $-1 < m < 2$ (۴) $-1 < m < 3$

۱۳- اگر $x=1$ بین مقادیر دو ریشه معادله $x^2 + kx + 2k = 0$ قرار داشته باشد، محدوده k کدام گزینه زیر می‌باشد؟

- (۱) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{3}, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \frac{1}{3})$ (۴) $(-\infty, -\frac{1}{3})$

۱۴- در شکل روبه‌رو سهمی $y = p(x)$ رسم شده است. معادله $p^2(x) - 2p(x) - 8 = 0$ چند جواب متمایز دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۵- مجموع مربعات ریشه‌های معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ برابر $\frac{65}{16}$ است. مقدار m^2 کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۲۵ (۴) ۴

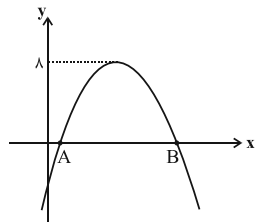
۱۶- هر یک از ریشه‌های معادله $x^2 - ax + a - 4 = 0$ ، نصف ریشه‌های معادله $x^2 - bx - 2x - b = 0$ است. مقدار $b - a$ کدام

است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۷- با ۲ واحد انتقال افقی سهمی $y = x^2 + ax + b$ به سمت راست، رأس آن در نقطه $(3, -4)$ قرار می‌گیرد. مجموع جواب‌هایمعادله $y = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۸- نمودار $y = -2x^2 + ax + b$ به صورت مقابل است. اندازه قطعه‌ای که نمودار روی محور x ها ایجاد می‌کند، (یعنی طول پاره‌خط AB) کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $2\sqrt{2}$

- (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۳

۱۹- اگر نمودار سهمی $y = mx^2 + (m+4)x + (2-m)$ دقیقاً از سه ناحیه مختصاتی عبور کند، حدود m کدام است؟

- (۱) $(-1, 3]$ (۲) $(0, 2]$ (۳) $(1, 3]$ (۴) $(0, 3]$

۲۰- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) $4\sqrt{10}$ (۳) ۱۶۰ (۴) $5\sqrt{6}$



هندسه ۳

هندسه ۳

آشنایی با مقاطع مخروطی

صفحه‌های ۳۳ تا ۴۳

۲۱- دو خط L_1 و L_2 برهم عمودند. پاره خط AB که طول آن مقدار ثابتی است، طوری تغییر می‌کند که همواره A روی L_1 و B روی L_2 قرار دارد. مکان هندسی وسط پاره خط AB کدام است؟

(۱) دایره (۲) دو خط موازی

(۳) دو خط عمود بر هم (۴) یک خط

۲۲- B و C دو نقطه ثابت و A یک نقطه متحرک در یک صفحه هستند. مکان هندسی نقطه A به گونه‌ای که در مثلث ABC ، ارتفاع AH برابر عدد ثابت h و میانه AM حداکثر برابر $2h$ باشد، کدام است؟

(۱) پاره خطی به طول $\sqrt{3}h$ (۲) پاره خطی به طول $2\sqrt{3}h$ (۳) دو پاره خط به طول $\sqrt{3}h$ (۴) دو پاره خط به طول $2\sqrt{3}h$

۲۳- اگر دایره‌های $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0$ و $C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ مماس درون باشند، آن گاه m کدام است؟

-۱ (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴)

۲۴- نقطه A به طول ۲ و با عرض مثبت روی دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 7 = 0$ قرار دارد. معادله خط D که از نقطه A بگذرد و بر دایره C مماس باشد، کدام است؟

(۱) $4x - y + 7 = 0$ (۲) $x + 4y - 6 = 0$ (۳) $4x - y - 7 = 0$ (۴) $x + 4y + 6 = 0$

۲۵- مرکز دایره مماس بر خطوط $x = -3$ و $x = 7$ ، بر خط $2y + 3x + 1 = 0$ واقع است. به ازای کدام مقدار b ، خط $x + 2y + b = 0$ قائم بر دایره است؟

۱ (۱) -۱ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴)

۲۶- کم‌ترین فاصله بین نقاط دو دایره $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ و $C': (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴)

۲۷- حدود تغییرات m کدام باشد تا نقطه $A = (1, m)$ خارج دایره $x^2 + y^2 - m(x+y) + 2m = 0$ قرار گیرد؟

 $m > -1$ (۱) $m > 4$ یا $-1 < m < 4$ (۲) $m > 0$ (۳) $-1 < m < 4$ (۴)

۲۸- دو دایره به معادله‌های $(x-2)^2 + (y-m)^2 = 16$ و $x^2 + y^2 + 6x = 0$ بر هم مماس هستند. مقدار مثبت m کدام است؟

 $\sqrt{6}$ (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $4\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴)

۲۹- نقطه متغیر H را روی خط $d: 3x - 4y + 8 = 0$ و نقطه متغیر A را روی دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ در نظر می‌گیریم. کوتاه‌ترین فاصله AH کدام است؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴)

۳۰- دایره‌ای به شعاع ۲ که در مبدأ مختصات بر محور y ها مماس است، خط $x = 1$ را در دو نقطه قطع کرده است. عرض مثبت نقطه تلاقی کدام است؟

 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)



ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته

آشنایی با نظریه اعداد

گراف و مدل سازی

صفحه‌های ۲۶ تا ۳۸

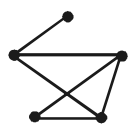
۳۱- مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی دو رقمی n به طوری که معادله $1 - 2^n = 39x + 91y$ در مجموعه اعداد صحیح جواب داشته باشد، کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

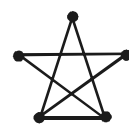
۳۲- اگر به گراف ۴-منتظم مرتبه p ، ۱۲ یال اضافه کنیم، گراف کامل K_p به دست می آید. p کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۳۳- نمودار گراف $G = (V, E)$ که در آن $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{ab, ad, ae, bc, bd, de\}$ ، کدام است؟



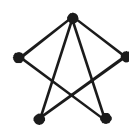
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۳۴- در گراف ساده‌ای که ۱۹ یال دارد، $\delta = 4$ است. حداکثر تعداد رئوس این گراف کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۵

۳۵- در گرافی از اندازه ۱۳، چهار رأس از درجه ۲ و بقیه رئوس از درجه ۳ هستند. میانگین درجات رئوس این گراف کدام است؟

(۱) ۲/۴ (۲) ۲/۵ (۳) ۲/۶ (۴) ۲/۷

۳۶- تعداد مسیرهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبه ۷ با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ به طوری که ابتدای همه آن‌ها از رأس a باشد، کدام است؟

(۱) ۲۴۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۳۶۰

۳۷- در گراف $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_6\}$ ، در صورتی که $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6\}$ باشد، کدام یال‌ها اضافه یا حذف شوند تا یک گراف ۲-منتظم از مرتبه ۶ به دست آید؟

(۱) v_1v_6 و v_5v_6 اضافه، v_1v_3 و v_3v_4 حذف

(۲) v_6v_3 و v_6v_5 اضافه، v_1v_3 و v_2v_3 حذف

(۳) v_1v_6 و v_6v_5 اضافه، v_1v_3 و v_1v_4 حذف

(۴) v_6v_5 و v_6v_4 اضافه، v_1v_3 و v_3v_4 حذف

۳۸- در یک گراف ساده از مرتبه ۸، دو رأس از درجه ۳ $\delta = 3$ وجود دارد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۱) ۲۱ (۲) ۲۸ (۳) ۲۵ (۴) ۱۸

۳۹- در یک گراف ۳-منتظم، اندازه گراف از ۵ برابر مرتبه آن ۲۱ واحد کم تر است. مجموع مرتبه و اندازه گراف کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۱۸ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

۴۰- در گراف K_8 با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ، چند دور به طول ۴ وجود دارد، که شامل رأس a باشد و شامل رأس g نباشد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰



هندسه ۱ و آمار و احتمال

هندسه ۱

تجسم فضایی

صفحه‌های ۷۷ تا ۹۶

آمار و احتمال

احتمال

صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲

۴۱- دو صفحه متقاطع P و Q برهم عمودند و فصل مشترک آنها خط d است. گزینه نادرست کدام است؟

(۱) هر صفحه موازی با P ، بر صفحه Q عمود است.

(۲) هر صفحه عمود بر P ، با صفحه Q موازی است.

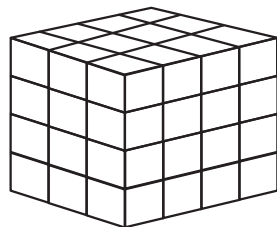
(۳) هر صفحه عمود بر خط d ، بر دو صفحه P و Q عمود است.

(۴) صفحه گذرنده از خط d و عمود بر P ، بر صفحه Q منطبق است.

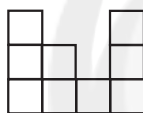
۴۲- دو خط متناظر d و d' با صفحه P متقاطع هستند. چند خط یافت می‌شود که این دو خط را قطع کند و با صفحه P موازی باشد؟

(۱) بی‌شمار (۲) یک (۳) دو (۴) هیچ

۴۳- تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شود تا نمای بالای شکل A به صورت شکل B باشد، کدام است؟



A



B

(۱) ۲۷

(۲) ۲۱

(۳) ۱۸

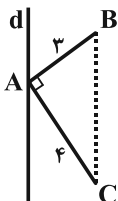
(۴) ۱۲

۴۴- اگر صفحه P ، کره‌ای به شعاع R را در فاصله $\frac{R}{4}$ از مرکز کره قطع کند و مساحت سطح مقطع حاصل 18π باشد، شعاع کره کدام

است؟

(۲) $2\sqrt{6}$ (۱) $\sqrt{6}$ (۴) $4\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{6}$

۴۵- در شکل روبه‌رو، BC با خط d موازی است. اگر پاره‌خط‌های AB و AC را حول خط d دوران دهیم، حجم شکل حاصل چقدر

است؟ ($AB = 3, AC = 4$)(۲) $7/2\pi$ (۱) $5/4\pi$ (۴) $9/6\pi$ (۳) $8/4\pi$

۴۶- یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a, b, c و d است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{1}{4}$ ، $P(\{a, c\}) = \frac{1}{3}$ و پیشامدهای $\{a, b\}, \{a, c\}$

مستقل از یکدیگر باشند، احتمال رخداد پیشامد $\{d\}$ چقدر است؟(۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{6}$



۴۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم، $P(B-A) = 0/2$ و $P(A \cap B) = 0/3$ باشند، حاصل $P(A' \cap B')$ کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/3$ (۳) $0/2$ (۴) $0/1$

۴۸- دانش آموزی به ۳ تست سه گزینه‌ای به طور تصادفی پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال حداقل به دو تست، به طور صحیح پاسخ می‌دهد؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{7}{27}$ (۴) $\frac{2}{9}$

۴۹- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در دو بار پرتاب این تاس، احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده کوچک‌تر از ۴ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{144}$ (۲) $\frac{5}{144}$ (۳) $\frac{7}{144}$ (۴) $\frac{11}{144}$

۵۰- در یک کیسه، ۴ مهره سیاه و ۶ مهره سبز وجود دارد. دو مهره به‌طور متوالی و با جای‌گذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یک بار مهره سیاه از کیسه خارج شود، کدام است؟

- (۱) $0/64$ (۲) $0/48$ (۳) $0/40$ (۴) $0/16$

فیزیک ۳

فیزیک ۳
دینامیک و حرکت دایره‌ای
نوسان و موج
صفحه‌های ۴۸ تا ۶۹

۵۱- در یک ساعت دیواری، طول عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار به ترتیب برابر با 8cm و 12cm

است. تندی نوک عقربه ساعت‌شمار، چند برابر تندی نوک عقربه دقیقه‌شمار است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) $\frac{1}{18}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۵۲- روی پره‌های یک بالگرد (هلیکوپتر)، نقطه‌ای به فاصله 3m از محور دوران آن با شتاب مرکز‌گرای $\frac{24300}{s^2}\text{m}$ در حال چرخش

است. پره‌های این بالگرد در هر دقیقه چند دور می‌زنند؟ ($\pi = 3$)

- (۱) ۱۵ (۲) ۹۰۰ (۳) ۳۰ (۴) ۴۵۰

۵۳- دو ماهواره به جرم‌های m_1 و $m_2 = 3m_1$ در ارتفاع‌های R_e و $h_1 = R_e$ نسبت به سطح زمین، با سرعت ثابت در مدارهای

دایره‌ای شکل به دور زمین می‌چرخند. نسبت تندی ماهواره دوم به تندی ماهواره اول، کدام است؟ (R_e شعاع کره زمین است.)

- (۱) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$



۵۴- معادله‌های حرکت هماهنگ ساده دو ذره با جرم‌های مساوی در SI به ترتیب به صورت $x_1 = 4 \cos 20\pi t$ و $x_2 = 2 \cos 40\pi t$ است.

نسبت انرژی مکانیکی ذره (۱) به انرژی مکانیکی ذره (۲)، کدام است؟

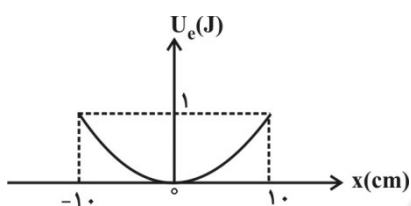
(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{4}$

۵۵- نمودار انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که با دوره $\frac{\pi}{5}$ s در حال نوسان است، مطابق شکل زیر می‌باشد. جرم



نوسانگر چند گرم است؟

(۱) ۰/۰۲

(۲) ۲۰

(۳) ۰/۰۴

(۴) ۴۰

۵۶- یک آونگ ساده به طول L و یک سامانه جرم و فنر که وزن و وزن آن W و ثابت فنر آن k است، هم‌زمان به نوسان در می‌آیند. اگر

دوره تناوب آونگ ساده و سامانه جرم و فنر یکسان باشد، کدام رابطه زیر برقرار است؟

(۱) $W = kL$

(۲) $W = 2kL$

(۳) $W = \sqrt{2}kL$

(۴) $W = \frac{1}{2}kL$

۵۷- مطابق شکل زیر، فردی به جرم m بر روی لبه صفحه افقی دواری ایستاده است، به طوری که فاصله‌اش تا مرکز صفحه برابر

با ۵m است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی برابر با ۰/۵ باشد، بیشینه تندی این صفحه چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد تا شخص



بر روی آن نلغزد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

(۱) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(۲) ۵

(۳) $5\sqrt{2}$

(۴) ۱۰

۵۸- دامنه نوسان‌های یک نوسانگر هماهنگ ساده ۳cm و انرژی مکانیکی آن ۹J است. چند ژول انرژی باید به آن داده شود تا دامنه

نوسان‌های آن ۱cm افزایش یابد؟ (بسامد نوسان‌ها ثابت فرض شود).

(۱) ۴

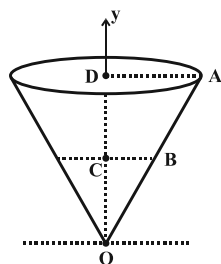
(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹



۵۹- در شکل زیر جسم مخروطی شکل به طور یکنواخت حول محور y می چرخد. اگر ارتفاع مخروط، برابر با 20cm و $CD = 15\text{cm}$ باشد، تندی نقطه A چند برابر تندی نقطه B است؟



- (۱) ۴
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{3}{4}$

۶۰- یک سکه روی صفحه گردان افقی ساکن است و همراه آن می گردد. اگر حداکثر اندازه شتاب مرکزگرای دوران برای آن که سکه

روی صفحه نلغزد برابر با $\frac{3m}{s^2}$ باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین سکه و صفحه چه قدر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) داده ها کافی نیستند.

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن
صفحه های ۱ تا ۲۷

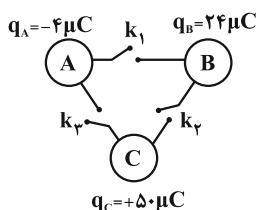
فیزیک ۲

۶۱- در شکل زیر، کره های رسانا مشابه و تمامی کلیدها در ابتدا باز هستند. ابتدا کلید k_1 را بسته و

سپس باز می کنیم، بعد از آن کلید k_2 را بسته و سپس باز می کنیم و در آخر کلید k_3 را

می بندیم. در این حالت بار خالص کره A چند برابر بار خالص اولیه کره B است؟ (فرض کنید بار

الکتریکی روی سیم های رابط قرار نمی گیرد.)

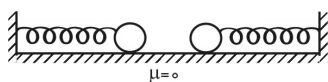


- (۱) ۲ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۲- در شکل زیر، ثابت هر یک از فنرها برابر با $10 \frac{N}{m}$ می باشد و دو گلوله مشابه خنثی در حال تعادل، فاصله ای برابر با 10cm از

یکدیگر دارند. اگر به گلوله ها بار الکتریکی یکسان بدهیم، در فاصله 30cm از یکدیگر ثابت می مانند. اندازه بار هر یک از

گلوله ها چند μC است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$ و از نیروی گرانشی که گلوله ها بر هم وارد می کنند، صرف نظر کنید.)

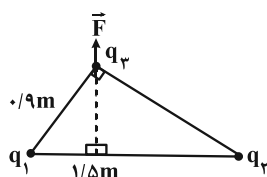


- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

۶۳- در شکل زیر سه بار الکتریکی نقطه ای هم نام بر روی سه رأس یک مثلث قائم الزاویه ثابت شده اند. اگر اندازه نیرویی که بار q_2 به

بار q_3 وارد می کند برابر با 12N باشد، بزرگی \vec{F} (نیروی خالص وارد بر بار q_3 واقع در رأس قائمه که در شکل مشخص شده

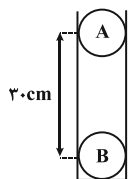
است) چند نیوتون است؟



- (۱) ۱۶ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴) ۲۰



۶۴- در شکل زیر، بار هر یک از گلوله‌های نارسانا برابر با $2\mu\text{C}$ است و در لحظه‌ای که فاصله مراکز آن‌ها از یکدیگر 30cm است، گلوله A را رها می‌کنیم. اگر در این لحظه گلوله A با شتاب 3m/s^2 به طرف بالا حرکت کند، جرم آن چند گرم است؟ (از اصطکاک و نیروی مقاومت هوا صرف نظر می‌کنیم، $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$ است.)

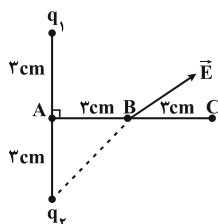


$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(۱) 0.01

(۳) 0.02

۶۵- مطابق شکل مقابل، بارهای الکتریکی $q_1 = |q_2| = 6\mu\text{C}$ در جای خود ثابت شده‌اند. اگر بار الکتریکی به بزرگی q_3 را در یکی از نقاط A یا C قرار دهیم، میدان الکتریکی برآیند حاصل از هر سه بار در نقطه B به صورت بردار \vec{E} (روی شکل) و بزرگی آن برابر با $5\sqrt{2} \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ خواهد شد. در این صورت، بارهای q_1 و q_2 بوده و بزرگی بار q_3 برابر با..... میکروکولن است.

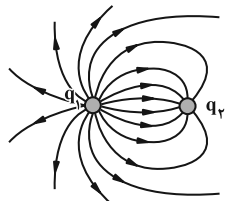


$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$$

(۱) هم‌نام، ۴

(۳) ناهم‌نام، ۴

۶۶- خطوط میدان الکتریکی برای دو بار الکتریکی نقطه‌ای در شکل مقابل نشان داده شده است. کدام گزینه در مورد مقایسه این دو بار الکتریکی درست می‌باشد؟



(۱) $q_1 > 0, q_2 < 0$ و $|q_1| > |q_2|$

(۳) $q_1 < 0, q_2 > 0$ و $|q_1| > |q_2|$

۶۷- یک پروتون و یک پوزیترون در یک میدان الکتریکی یکنواخت از حال سکون رها می‌شوند. پس از طی مسافتی معین، کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟ (پوزیترون، ذره‌ای با بار الکتریکی پروتون و با جرمی برابر با جرم الکترون است و از نیروی وزن وارد بر آن‌ها صرف نظر شود.)

(۱) تندی پروتون بیشتر است.

(۳) تندی هر دو ذره یکسان است.

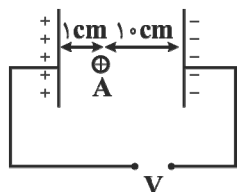
۶۸- اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری یک خودرو برابر با 12V است. اگر بار الکتریکی $1/5\text{C}$ از پایانه مثبت تا پایانه منفی باتری جابه‌جا شود، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند ژول است؟

(۱) 12

(۳) 18

۶۹- در شکل زیر و در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $E = 2 \times 10^2 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ ، پروتونی را از نقطه A با تندی اولیه v به طرف

صفحه منفی پرتاب می‌کنیم. اگر پروتون با سرعت $3 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به صفحه منفی برخورد کند، اندازه v چند متر بر ثانیه است؟ (از نیروی وزن پروتون صرف نظر شود، $m_p = 1/6 \times 10^{-27}\text{kg}$ و $e = 1/6 \times 10^{-19}\text{C}$ می‌باشد.)

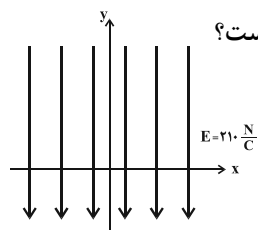


(۱) 10^5

(۳) صفر



۷۰- مطابق شکل زیر، در ناحیه‌ای از فضا، میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $210 \frac{N}{C}$ در خلاف جهت محور y ها وجود دارد. با



فرض $A(16cm, 20cm)$ و $B(16cm, 50cm)$ ، اختلاف پتانسیل $(V_A - V_B)$ برابر با چند ولت است؟

(۱) ۸۴

(۲) -۸۴

(۳) ۶۳

(۴) -۶۳

فیزیک ۱

فیزیک و اندازه‌گیری

صفحه‌های ۱ تا ۲۶

فیزیک ۱

۷۱- کمیت $\frac{\mu g \cdot Hz^2 \cdot cm^2}{ms}$ بر حسب یکاهای SI در کدام گزینه آمده است؟

(۴) ۴ J

(۳) $4 \times 10^3 J$ (۲) $4 \times 10^4 W$ (۱) $4 \times 10^1 W$

۷۲- جرم جسمی به صورت 0.0000282 تن اندازه گرفته شده است. جرم این جسم بر حسب گرم و به صورت نمادگذاری علمی برابر با کدام گزینه است؟

(۴) 2.82×10^1 (۳) 0.282×10^2 (۲) 2.82×10^{-5} (۱) $28/2$

۷۳- برای اندازه‌گیری طول یک جسم از یک خط‌کش میلی متری رقمی (دیجیتال) استفاده می‌کنیم. با ۴ بار اندازه‌گیری به وسیله این خط‌کش مقادیر $22/6mm$ ، $20/3mm$ ، $28/2mm$ و $21/9mm$ به دست آمده است. نتیجه اندازه‌گیری به وسیله این خط‌کش بر حسب میلی متر چگونه گزارش می‌شود؟

(۴) $21/3$ (۳) $21/6$ (۲) $23/25$ (۱) $22/48$

۷۴- یک استخر ذخیره آب کشاورزی به شکل مکعب مستطیل با ابعاد 80 اینچ، 20 فوت و 20 یارد پُر از آب است. اگر آهنک ورود و خروج آب از شیرهای این استخر به ترتیب برابر با $200 \frac{L}{min}$ و $5 \frac{m^3}{min}$ باشد، این استخر پس از چه مدتی خالی می‌شود؟
(۳ فوت = ۱ یارد، ۱۲ اینچ = ۱ فوت و $2/5cm$ = ۱ اینچ)

(۴) ۶ ساعت و ۱۲ دقیقه

(۳) ۱۲ ساعت

(۲) ۱۸ ساعت

(۱) ۵ ساعت و ۸ دقیقه

۷۵- دماسنج مدرج A و دماسنج رقمی (دیجیتال) B هر دو دما را بر حسب درجه سلسیوس نمایش می‌دهند. هر دو دماسنج را در یک اتاق قرار داده و عدد دما را از روی دماسنج A به صورت $C(28/73 \pm 0.05)$ گزارش می‌کنیم. اگر دقت اندازه‌گیری دو دماسنج یکسان باشد، عددی که از دماسنج B گزارش می‌شود بر حسب درجه سلسیوس کدام است؟

(۲) $28/7 \pm 0.1$ (۱) 28 ± 1

(۴) بسته به خطای اندازه‌گیری دماسنج B، هر سه گزینه ممکن است.

(۳) $28/73 \pm 0.01$

۷۶- ابعاد صفحات یک کتاب رمان 140 صفحه‌ای با صفحه A۴ تقریباً معادل $22cm \times 29cm$ است و هر صفحه از هر چهار طرف به اندازه یک سانتی‌متر حاشیه خالی دارد. اگر این کتاب فقط شامل کلمات بوده و فاقد تصویر و یا جای خالی باشد و هر کلمه به طور متوسط مساحتی معادل $5cm^2$ را اشغال کند، تخمین بزنید این کتاب شامل چند کلمه است؟

(۴) 10^2 (۳) 10^{11} (۲) 10^8 (۱) 10^5



۷۷- دو کره A و B که شعاع ظاهری هر یک برابر با ۲cm است، جرم یکسانی دارند و درون یکی از آنها حفره‌ای وجود دارد.

اگر $\rho_A = 3 \frac{g}{cm^3}$ و $\rho_B = 8 \frac{g}{cm^3}$ باشد، حجم حفره چند سانتی متر مکعب است؟ ($\pi = 3$)

- ۱۲ (۱) ۲۰ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) صفر

۷۸- یک طلا ساز قصد دارد آلیاژی از ترکیب طلا و مقداری ناخالصی بسازد. اگر او بخواهد جرم کل آلیاژ ساخته شده برابر با ۹۲g و

چگالی آن $11/5 \frac{g}{cm^3}$ باشد، چند گرم طلا در ساخت این قطعه باید استفاده کند؟ (چگالی طلا و ماده ناخالصی را

به ترتیب $19 \frac{g}{cm^3}$ و $7 \frac{g}{cm^3}$ در نظر بگیرید و تغییر حجم نداریم.)

- ۳۵ (۱) ۳۰ (۲) ۶۲ (۳) ۵۷ (۴)

۷۹- یک جسم فلزی را به آرامی داخل ظرف لبریز از الکی می‌اندازیم و ۸۰g الکل از ظرف بیرون می‌ریزد. اگر چگالی فلز $8 \frac{g}{cm^3}$ و

جرم آن ۷۰g باشد، حجم حفره داخل جسم فلزی چند سانتی متر مکعب می‌باشد؟ ($\rho_{\text{الکل}} = 0/8 \frac{g}{cm^3}$)

- ۲۵۰ (۱) ۲۵ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۲/۵ (۴)

۸۰- یک آزمایشگر ۱۰۰ گرم از ماده‌ای به چگالی $10 \frac{g}{cm^3}$ را با ۵۰ گرم از ماده‌ای به چگالی $5 \frac{g}{cm^3}$ ترکیب نموده و یک آلیاژ با

چگالی $8 \frac{g}{cm^3}$ ایجاد می‌کند. اگر تغییر جرمی در این فرایند صورت نگرفته باشد، حجم مورد استفاده در ساخت آلیاژ چگونه

تغییر کرده است؟

- (۱) $1/25 cm^3$ افزایش یافته است. (۲) $0/5 cm^3$ افزایش یافته است.
(۳) $1/25 cm^3$ کاهش یافته است. (۴) $0/5 cm^3$ کاهش یافته است.

شیمی ۳

۸۱- کدام گزینه نادرست است؟

«در سلول برخلاف سلول»

(۱) گالوانی - سوختی - قطب‌های مثبت و منفی به ترتیب آند و کاتد هستند.

(۲) گالوانی - الکترولیتی - دو الکترولیت مختلف وجود دارد.

(۳) دانز - سوختی هیدروژنی - ماده خروجی از بخش آندی یک گاز است.

(۴) الکترولیتی - گالوانی - واکنش در خلاف جهت طبیعی رخ می‌دهد.

۸۲- کدام گزینه مطلب درستی را در رابطه با عدد اکسایش مطرح می‌کند؟

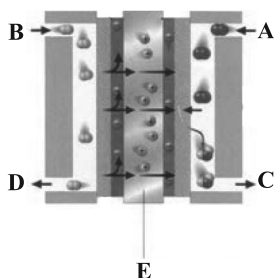
(۱) کاهش عدد اکسایش ماده اکسند در باتری دگمه‌ای روی - نقره برابر با افزایش عدد اکسایش کربن طی تولید Al خالص است.

(۲) عدد اکسایش کربن‌های موجود در ساختار اتانویک اسید (CH_3COOH) برابر ۳- است.

(۳) در هر واکنش اکسایش - کاهش، همواره تغییر عدد اکسایش مواد اکسند و کاهنده برابر است.

(۴) عدد اکسایش گوگرد در ترکیبات گوناگون می‌تواند از ۲- تا ۶+ تغییر کند.

شیمی ۳
آسایش و رفاه در سایه شیمی
صفحه‌های ۴۴ تا ۵۶



۸۳- با توجه به شکل داده شده کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) گاز اکسیژن و B گاز هیدروژن است.
- (۲) C گاز H_2O تولید شده در کاتد و D گاز H_2 اضافی آندی است.
- (۳) واکنش آندی به صورت $H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-$ می باشد.
- (۴) E غشای مبادله کننده پروتون است و جهت حرکت H^+ از کاتد به آند و هم جهت با حرکت الکترون ها در مدار خارجی است.

۸۴- کدام گزینه در مورد برقکافت سدیم کلرید مذاب درست است؟

- (۱) در تیغه گرافیتی که به قطب منفی باتری متصل می شود، نیم واکنش آندی رخ می دهد.
- (۲) اطراف قطب منفی سلول، گاز تولید می شود.
- (۳) برای تولید فلز سدیم علاوه بر این روش، می توان از برقکافت محلول سدیم کلرید نیز استفاده کرد.
- (۴) اندازه تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده برابر با گونه اکسنده است.

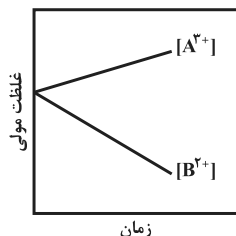
۸۵- کدام گزینه در رابطه با SHE درست است؟

- (۱) یک سلول گالوانی با emf صفر است.
- (۲) نیم سلولی حاوی کاتد هیدروژن است.
- (۳) پتانسیل کاهش آن از آلومینیم برخلاف نقره بیشتر است.
- (۴) در آن نیم واکنش $2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$ رخ می دهد.

۸۶- کدام عبارت در رابطه با لیتیم درست است؟

- (۱) کمترین چگالی را در بین مواد دارد.
- (۲) کاهنده ترین فلز است.
- (۳) فقط در ساخت باتری های قابل شارژ کاربرد دارد.
- (۴) با وجود افزایش تقاضا برای باتری های لیتیومی، این فلز جایگاه ممتازی در تأمین انرژی جهان ندارد.

۸۷- نمودار تغییر غلظت یون ها در یک سلول گالوانی بر حسب زمان به صورت مقابل است. کدام مطلب در مورد آن نادرست است؟



- (۱) اتم A کاهنده تر از اتم B است و می تواند باعث کاهش کاتیون های B^{2+} شود.
- (۲) تمایل A به از دست دادن الکترون بیشتر از B است و پایداری کاتیون A^{3+} بیشتر از عنصر A است.
- (۳) به ازای مصرف ۲ مول A، ۳ مول الکترون بین گونه های اکسنده و کاهنده مبادله می شود.
- (۴) آنیون ها از سمت نیم سلول B و از طریق دیواره متخلخل به سمت نیم سلول A می روند.

۸۸- در سلول گالوانی روی - مس، در هر ثانیه ۱/۳ گرم از جرم تیغه آندی کاسته می شود. اگر در نیم سلول کاتد، ۲۰٪ از کاتیون های

Cu^{2+} به صورت فلز جامد در کف ظرف رسوب کنند و باقی در سطح تیغه قرار بگیرند، پس از گذشت ۲۵ دقیقه جرم کاتد چند

گرم افزایش می یابد؟ ($E^*(Zn^{2+}/Zn) = -0.76V$, $E^*(Cu^{2+}/Cu) = +0.34V$, $Cu = 64$, $Zn = 65$; $g \cdot mol^{-1}$)

- ۱) ۱۵۳۶ (۲) ۱۹۲۰ (۳) ۳۲ (۴) ۲۵/۶

۸۹- چند مورد از موارد زیر می توانند جاهای خالی عبارت زیر را به درستی تکمیل نمایند؟

($E^*(Cu^{2+}/Cu) = +0.34V$, $E^*(Fe^{2+}/Fe) = -0.44V$, $E^*(Mn^{2+}/Mn) = -1.18V$, $E^*(Ag^+/Ag) = +0.80V$)

«اگر بخواهیم تمام ولتاژ مورد نیاز را برای انجام واکنش در سلول الکترولیتی با قطب منفی و قطب مثبت تأمین کنیم، می توانیم از انرژی الکتریکی حاصل از سلول گالوانی استفاده کنیم که آند آن و کاتد آن باشد.»

- (الف) مس - نقره - آهن - منگنز
(ب) آهن - منگنز - مس - نقره
(پ) آهن - مس - منگنز - نقره
(ت) منگنز - نقره - آهن - مس
- ۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



۹۵- جرم $1/505 \times 10^{22}$ مولکول از اکسید عنصر فسفر با فرمول کلی P_xO_y ، $7/1$ گرم می‌باشد. مقدار y در این ترکیب کدام است

و در 213 گرم از این ترکیب، چند گرم اکسیژن وجود دارد؟ ($P = 31, O = 16: g.mol^{-1}$)

۱۰۰-۱۰ (۱) ۱۲۰-۶ (۲) ۱۲۰-۱۰ (۳) ۱۰۰-۶ (۴)

۹۶- عدد جرمی و تعداد الکترون‌های اتم عنصر M به ترتیب با عدد جرمی و تعداد الکترون‌های آنیون عنصر N برابر است. چه تعداد

از عبارتهای زیر در مورد آن‌ها، نادرست است؟ (M و N نمادهای فرضی عناصر هستند).

(ا) M و N می‌توانند ایزوتوپ‌های یک عنصر باشند.

(ب) عدد اتمی M به اندازه بار آنیون N ، از عدد اتمی N بیش‌تر است.

(پ) تعداد نوترون‌های M به اندازه بار آنیون N ، از نوترون‌های N کم‌تر است.

(ت) مجموع تعداد تمام ذرات موجود در دو اتم خنثی عناصر M و N ، با هم برابر است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

شیمی ۲

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم
صفحه‌های ۱ تا ۱۷

۹۷- کدام گزینه جمله زیر را به‌درستی تکمیل می‌کند؟

«در هر شعاع اتمی کاهش می‌یابد زیرا»

(۱) گروه، از پایین به بالا - تعداد لایه‌های الکترونی افزایش می‌یابد.

(۲) تناوب، از راست به چپ - با ثابت ماندن تعداد لایه‌های الکترونی، قدرت جاذبه هسته افزایش می‌یابد.

(۳) گروه، از بالا به پایین - تعداد پروتون‌های هسته افزایش می‌یابد.

(۴) تناوب، از چپ به راست - در عناصر اصلی علی‌رغم افزایش تعداد الکترون‌های ظرفیتی، هسته با قدرت بیشتری الکترون‌ها را به سمت خود می‌کشد.

۹۸- با توجه به جدول زیر کدام گزینه صحیح می‌باشد؟ (حروفی که در جدول قرار دارند، هیچ ارتباطی با نماد شیمیایی عناصر ندارند).

گروه \ دوره	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۳	A		C		F	H
۴		B	D		G	

(۱) خصلت فلزی اتم B از خصلت فلزی اتم‌های C و D کم‌تر است.

(۲) مقایسه شعاع اتم‌های F, C, H و A به صورت $H > F > C > A$ است.

(۳) عنصر پتاسیم بوده که نرم است و با چاقو بریده می‌شود و به سرعت در هوا سطح آن کدر می‌شود.

(۴) خصلت نافلزی اتم H از خصلت نافلزی اتم‌های F و G بیشتر است.

۹۹- اختلاف شعاع اتمی در بین عناصر دوره سوم با افزایش عدد اتمی می‌یابد و در گروه اول با افزایش شعاع اتمی سرعت

واکنش فلز با گاز کلر، می‌یابد.

(۱) کاهش - کاهش (۲) کاهش - افزایش (۳) افزایش - کاهش (۴) افزایش - افزایش

۱۰۰- کدام یک از عبارتهای زیر در مورد هالوژن‌ها نادرست بیان شده است؟

(۱) ید با گاز هیدروژن در دمای $450^\circ C$ واکنش می‌دهد.

(۲) در گروه هالوژن‌ها از بالا به پایین، واکنش‌پذیری و فعالیت شیمیایی کاهش می‌یابد.

(۳) در تولید لامپ چراغ‌های جلوی خودروها، از هالوژن‌ها استفاده می‌شود.

(۴) به آنیون یک بار منفی هالوژن‌ها، یون هالوژن می‌گویند.



حسابان ۲

گزینه «۱» ۱-

$$y = \begin{cases} 4 & ; x \in \mathbb{Q} \\ \sin(\pi x) \cos(\pi x) & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = \begin{cases} 4 & ; x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{2} \sin(2\pi x) & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

دوره تناوب ضابطه بالایی، هر عدد گویایی ($T_1 \in \mathbb{Q}$) می تواند باشد و دوره تناوب ضابطه پائین را نیز می توان $T_2 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ در نظر گرفت. چون $T_2 \in \mathbb{Q}$ است، دوره تناوب تابع همان $T_2 = 1$ است.

گزینه «۱» ۲-

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\frac{2\pi}{3} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + x) = \cos(\frac{\pi}{6} + x)$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

گزینه «۴» ۳-

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

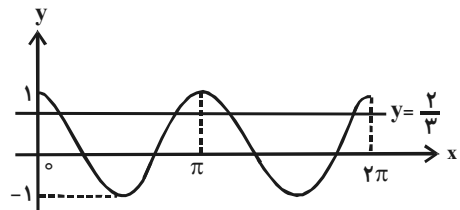
(چون جواب های به دست آمده، ریشه مخرج نیستند، قابل قبول هستند.)

گزینه «۴» ۴-

$$\sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} [\cos(\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4} - x) - \cos(\frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4} + x)]$$

$$= -\frac{1}{2} [0 - \cos 2x] = \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2x = \frac{2}{3}$$



با توجه به نمودارهای $y = \cos 2x$ و $y = \frac{2}{3}$ ملاحظه می کنیم که معادله

داده شده، چهار ریشه در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

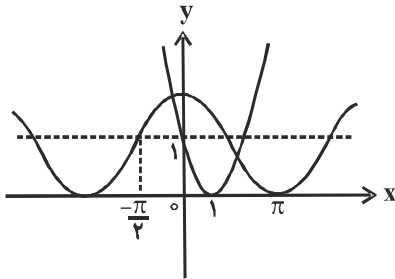
گزینه «۲» ۵-

$$x^2 - \cos x = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 = \cos x \Rightarrow (x-1)^2 = 1 + \cos x$$

با رسم نمودارهای دو تابع با معادله های $y_2 = (x-1)^2$ ، $y_1 = 1 + \cos x$

یک دستگاه مختصات داریم:



بنابراین معادله، یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

گزینه «۴» ۶-

تابع $y = \tan(u)$ در نقاط $u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، مجانب قائم دارد.

$$\pi \sin x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = k + \frac{1}{2}$$

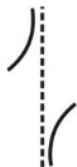
با توجه به این که $0 < x < \frac{\pi}{2}$ است. بنابراین:

$$k = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \tan(\pi \sin x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} \tan(\pi \sin x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} \tan x = +\infty$$

بنابراین نمودار در اطراف مجانب اش به صورت زیر است.



گزینه «۲» ۷-

برای یافتن معادله مجانب های قائم، ریشه های مخرج کسر را می یابیم:

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$



از طرفی، همواره:

ریاضی پایه

۱۱- گزینه «۴»

$$\Delta = 16 - 12m^2; \Delta > 0 \Rightarrow 16 - 12m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \pm 1, 0$$

۱۲- گزینه «۳»

$$(m+2)x^2 - 2mx + 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \\ \Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m+2) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 4(m^2 - m - 2) < 0 \Rightarrow 4(m+1)(m-2) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 < m < 2$$

۱۳- گزینه «۴»

معادله باید دو جواب داشته باشد، یعنی $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = k^2 - 8k > 0 \Rightarrow k < 0 \text{ یا } k > 8 \quad (1)$$

حال برای اینکه $x=1$ ، بین دو ریشه قرار بگیرد، علامت عبارت موردنظر بهازای $x=1$ ، مخالف علامت ضریب x^2 باشد، یعنی:

$$(1)^2 + k(1) + 2k < 0 \Rightarrow 3k + 1 < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} k \in (-\infty, -\frac{1}{3})$$

۱۴- گزینه «۲»

$$p^2(x) - 2p(x) - 8 = 0 \Rightarrow (p(x) - 4)(p(x) + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x) = 4 \\ p(x) = -2 \end{cases}$$

با توجه به شکل سهمی $p(x)$ ، مشاهده می‌شود که این سهمی خط افقی $y=4$ را در 2 نقطه قطع می‌کند، پس معادله $p(x)=4$ ، 2 جواب دارد.همچنین خط افقی $y=-2$ بر سهمی مماس است. بنابراین معادله

$$p(x) = -2 \text{ یک جواب دارد.}$$

در نتیجه این معادله 3 جواب دارد.

$$\cos x \leq 1 \Rightarrow \cos x - 1 \leq 0$$

حال اگر یکی از مجانب‌های قائم، مثلاً $x=0$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \frac{0+1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \frac{0+1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

بنابراین در اطراف مجانب قائم هر دو شاخه منحنی به سمت $(-\infty)$ میل

می‌کنند و در نتیجه گزینه «۲» صحیح است.

۸- گزینه «۱»

در توابع جزء صحیح، رابطه $\lim_{t \rightarrow \infty} [t] = t$ برقرار است؛ بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left[\frac{1}{[x] - x} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \times \frac{1}{1-x} = -1$$

۹- گزینه «۴»

تابع در $x=1$ تعریف نشده است. همچنین تابع در نزدیکی این نقطه، مقداریمحدود دارد. پس $x=1$ ریشه مشترک صورت و مخرج است.

$$\begin{cases} 2x + a = 0 \xrightarrow{x=1} 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2 \\ x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1 \end{cases}$$

چون $x=-2$ مجانب قائم است، پس ریشه مخرج می‌باشد.

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=-2} 4 - 2b + c = 0 \Rightarrow 2b - c = 4$$

$$\begin{cases} b + c = -1 \\ 2b - c = 4 \end{cases} \Rightarrow c = -2, b = 1$$

$$\Rightarrow a + c = -2 - 2 = -4$$

۱۰- گزینه «۴»

حد صورت -2 است، پس باید حد مخرج 0^+ شود. این در معادله درجه 2 هنگامی امکان پذیر است که مخرج، ریشه مضاعف -4 داشته باشد. یعنی

$$x^2 + ax + b = (x+4)^2 \text{ باشد.}$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow a = 8, b = 16$$

$$\Rightarrow a - b = -8$$



$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+4)^2 - 4m(2-m) > 0 \Rightarrow 5m^2 + 16 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{سهمی} \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3)$$

$$\frac{(1) \cap (2) \cap (3)}{\rightarrow} m \in (0, 2]$$

گزینه «۲» - ۲۰

$$\alpha + \beta = 6, \quad \alpha\beta = 4$$

$$A = \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} \rightarrow A^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

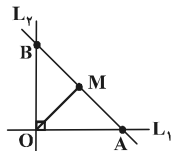
$$\Rightarrow A^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$= (\alpha + \beta)((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 6(36 - 12) + 16$$

$$= 160 \Rightarrow A = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

هندسه ۳

گزینه «۱» - ۲۱



مطابق شکل، در مثلث قائم الزاویه OAB، میانه وارد بر وتر، نصف طول وتر

است. پس با فرض اینکه طول AB برابر k است، داریم:

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{k}{2}$$

یعنی فاصله نقطه متغیر M، از نقطه ثابت O، برابر با مقدار ثابت $\frac{k}{2}$ است، لذا

مکان هندسی نقطه M، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{k}{2}$ است.

گزینه «۴» - ۲۲

چون فاصله A تا ضلع BC ثابت و برابر h است، پس نقطه A روی دو خط

موازی با BC و به فاصله h از BC است. از طرفی چون طول میانه AM از

عدد 2h کوچک‌تر یا مساوی است، پس نقطه A باید داخل یا روی دایره‌ای

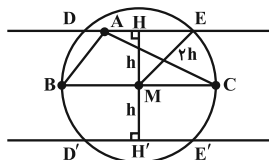
به مرکز M (وسط BC) و به شعاع 2h باشد. با توجه به آن که شعاع دایره

از فاصله دو خط موازی یعنی h بزرگتر است، پس مکان هندسی، دو پاره‌خط

DE و D'E' هستند. از طرفی مطابق شکل داریم:

$$\Delta MHE: EH^2 = 4h^2 - h^2 = 3h^2 \Rightarrow EH = h\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} DE = 2\sqrt{3}h \\ D'E' = 2\sqrt{3}h \end{cases}$$



گزینه «۱» - ۱۵

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشند. مجموع مربعات ریشه‌های این معادله به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{7}{2} = \frac{65}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow m^2 = 9$$

گزینه «۱» - ۱۶

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^2 - ax + a - 4 = 0$ و x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - bx - 2x - b = 0$ باشند. پس $\alpha = \frac{x_1}{2}$ و $\beta = \frac{x_2}{2}$ ، لذا:

$$\alpha + \beta = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b+2}{2} \\ a - 4 = -\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ 2a + b = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

گزینه «۱» - ۱۷

کافی است نقطه $(3, -4)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال

دهیم تا رأس سهمی $y = x^2 + ax + b$ به دست آید؛ بنابراین نقطه $(1, -4)$

رأس اولیه سهمی بوده است. حال چون طول رأس سهمی، میانگین صفرهای آن

است، مجموع جواب‌های معادله $y = 0$ به سادگی به دست می‌آید:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

گزینه «۱» - ۱۸

می‌دانیم مختصات رأس یک سهمی به صورت $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است، پس:

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\Delta}{4a} \frac{a-2}{4a} \Rightarrow \lambda = \frac{-\Delta}{-8} \Rightarrow \Delta = 64$$

$$\text{از طرفی } |AB| = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

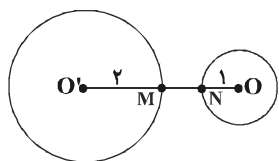
گزینه «۲» - ۱۹

نمودار $y = ax^2 + bx + c$ وقتی از سه ناحیه عبور می‌کند که دو ریشه هم

علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌ها صفر باشد؛ یعنی $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} \geq 0$ در

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{2-m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2 \quad (1)$$

این مسئله داریم:



پس کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط این دو دایره، مطابق شکل، طول پاره خط MN است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MN = OO' - (r + r') = 5 - (1 + 2) = 2$$

گزینه «۲» - ۲۷

$$x^2 + y^2 - mx - my + 2m = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2 - 4m}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره: } W = \left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \\ \text{شعاع: } R = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{m^2 - 4m}) \end{cases}$$

برای آن که نقطه $A = (1, m)$ خارج این دایره باشد باید $AW > R$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{m}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{m}{2} - m\right)^2} &> \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{m^2 - 4m} \\ \Rightarrow \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{m}{2}\right)^2 &> \frac{m^2 - 4m}{2} \\ \Rightarrow \frac{2m^2 - 4m + 4}{4} &> \frac{m^2 - 4m}{2} \Rightarrow m > -1 \quad (1) \end{aligned}$$

از طرفی برای شعاع دایره داریم:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{m^2 - 4m} \Rightarrow m^2 - 4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \text{یا} \\ m > 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} (-1 < m < 0) \cup (m > 4)$$

گزینه «۲» - ۲۸

$$C_1: (x-2)^2 + (y-m)^2 = 16 \Rightarrow O_1 = (2, m), R_1 = 4$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 6x = 0 \Rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 9$$

$$\Rightarrow O_2 = (-3, 0), R_2 = 3$$

$$O_1 O_2 = \sqrt{5^2 + m^2} = \sqrt{25 + m^2} > R_1 + R_2$$

بنابراین دو دایره تنها می‌توانند مماس خارج باشند. پس:

$$O_1 O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{25 + m^2} = 4 + 3 \Rightarrow m^2 + 25 = 49$$

$$\Rightarrow m^2 = 24 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$$

گزینه «۱» - ۲۳

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8 - m$$

$$\Rightarrow O(2, -2), R = \sqrt{8 - m}$$

$$C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$$

$$\Rightarrow O'(2, -4), R' = 1$$

$$\Rightarrow OO' = |R - R'| \Rightarrow \text{دو دایره مماس درون‌اند}$$

$$\sqrt{(2-2)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{8-m} - 1 \Rightarrow |\sqrt{8-m} - 1| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8-m} - 1 = 2 \Rightarrow 8 - m = 9 \Rightarrow m = -1 \\ \sqrt{8-m} - 1 = -2 \Rightarrow \sqrt{8-m} = -1 \text{ ریشه ندارد} \end{cases}$$

گزینه «۲» - ۲۴

$$C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 17 \xrightarrow{x=2} (y+2)^2 = 16$$

$$\xrightarrow{y>0} y = 1 \Rightarrow A = (2, 1)$$

از طرفی مرکز دایره، نقطه $O = (1, -3)$ است.

$$OA \text{ شیب: } m = \frac{1+3}{2-1} = 4 \Rightarrow D \text{ شیب} = -\frac{1}{4}$$

$$D: (y-1) = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow D: x + 4y - 6 = 0$$

گزینه «۳» - ۲۵

چون دایره بر دو خط $x = -3$ و $x = 7$ مماس است، پس مرکز دایره دقیقاً در وسط این دو خط، یعنی روی خط $x = 2$ قرار دارد.

$$2y + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 2y + 6 + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$$

$$O = \left(2, -\frac{7}{2}\right) \text{ نقطه } \Rightarrow \text{معنی دایره از مرکز دایره}$$

$$2 + 2\left(-\frac{7}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \text{پس داریم:}$$

گزینه «۲» - ۲۶

$$C \text{ شعاع دایره } r = 1, O = (2, -1) \text{ مرکز دایره}$$

$$C' \text{ شعاع دایره } r' = 2, O' = (-1, 3) \text{ مرکز دایره}$$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2} = 5 > r + r' \Rightarrow \text{دایره‌ها متخارج‌اند}$$

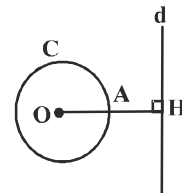


-۲۹ گزینه «۲»

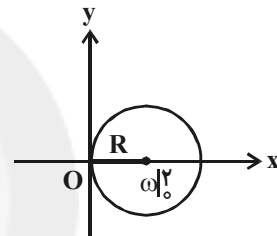
$$C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1, \quad O = (1, -1), \quad R = 1$$

مطابق شکل، فاصله مرکز دایره از خط d برابر است با:

$$OH = \frac{|3 \times 1 - 4(-1) + 8|}{\sqrt{9+16}} = 3 \Rightarrow \min(AH) = OH - R = 2$$



-۳۰ گزینه «۴»



چون این دایره خط $x = 1$ را قطع می‌کند، پس در سمت راست محور y ها قرار دارد. مطابق شکل، مختصات مرکز دایره‌ای به شعاع $R = 2$ که در مبدأ مختصات بر محور y ها مماس است، به صورت $\omega(2, 0)$ است، پس معادله این دایره به صورت $(x-2)^2 + y^2 = 4$ است، از تقاطع این دایره با خط $x = 1$ ، داریم:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow (1-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

ریاضیات گسسته

-۳۱ گزینه «۳»

$$\text{شرط جواب: } (3^9, 91) | 2^n - 1 \Rightarrow 13 | 2^n - 1$$

$$2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13} \rightarrow 2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به ازای $n = 12$ ، رابطه $13 | 2^n - 1$ برقرار است، پس ۱۲ کوچک‌ترین عدد دو رقمی است که دارای ویژگی مورد نظر می‌باشد.

$$\text{مجموع ارقام: } 1 + 2 = 3$$

-۳۲ گزینه «۲»

$$q = \frac{rp}{2} \quad \text{در گراف (2-منتظم) مرتبه } p$$

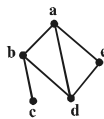
$$K_p \text{ در گراف کامل } q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} - \frac{rp}{2} = 12 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} - \frac{4p}{2} = 12$$

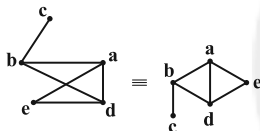
$$\Rightarrow p(p-1) - 4p = 24 \Rightarrow p(p-5) = 24 = 8 \times 3 \Rightarrow p = 8$$

-۳۳ گزینه «۲»

نمودار گراف $G = (V, E)$ با مجموعه V و E مورد نظر به صورت زیر است:



مطابق شکل زیر، با تغییر مکان رأس e ، از روی یک گراف، گراف دیگر حاصل می‌شود.



-۳۴ گزینه «۳»

در هر گراف ساده از مرتبه p داریم:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \Rightarrow 4 \leq \frac{28}{p} \Rightarrow p \leq \frac{28}{4} \Rightarrow p \leq 7 \Rightarrow p_{\max} = 7$$

-۳۵ گزینه «۳»

اگر مرتبه گراف را p در نظر بگیریم آنگاه با توجه به فرض داریم:

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \Rightarrow 4 \times 2 + (p-4) \times 3 = 2 \times 13$$

$$\Rightarrow 8 + 3p - 12 = 26 \Rightarrow 3p = 30 \Rightarrow p = 10$$

$$\text{میانگین درجات رئوس} = \frac{2q}{p} = \frac{2 \times 13}{10} = 2.6$$

-۳۶ گزینه «۴»

برای یک مسیر به طول ۴ به ۵ رأس نیاز داریم، که باید از رأس a شروع شوند.

تعداد این مسیرها برابر است با:

$$\frac{1}{a} \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$



هندسه ۱ و آمار و احتمال

۴۱- گزینه «۲»

دو صفحه عمود بر یک صفحه، لزوماً با یکدیگر موازی نیستند، پس گزینه «۲» در حالت کلی درست نیست.

۴۲- گزینه «۱»

می‌دانیم اگر خطی با یکی از دو صفحه موازی، متقاطع باشد، حتماً با دیگری نیز متقاطع است، پس هر صفحه موازی با صفحه P، دو خط d و d' را قطع می‌کند و خط واصل بین دو نقطه تلاقی، شرایط مسئله را داراست.

۴۳- گزینه «۱»

مکعب بزرگ از $4 \times 4 \times 3 = 48$ مکعب کوچک تشکیل شده است. حداکثر مکعب‌هایی که می‌تواند برداشته شود برابر است با: $48 - 9 = 39$ که در این صورت تنها یک ردیف به شکل B باقی می‌ماند.

همچنین حداقل باید $3 \times 4 = 12$ مکعب از شکل برداشته شود (۳ ردیف مکعب از بالا به پایین که هر کدام شامل ۴ مکعب هستند). در نتیجه تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شود، برابر است با:

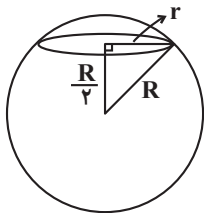
$$39 - 12 = 27$$

۴۴- گزینه «۲»

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$S = \pi r^2 = \frac{3}{4}\pi R^2 = 18\pi \text{ (سطح مقطع)}$$

$$\Rightarrow R^2 = 24 \Rightarrow R = 2\sqrt{6}$$



۴۵- گزینه «۴»

با توجه به قضیه فیثاغورس $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ است. حال با توجه به این که از دوران دو ضلع AB و AC، دو مخروط با رأس مشترک A و با شعاع قاعده یکسان R به دست می‌آید، پس خواسته سؤال در واقع به دست آوردن مجموع حجم دو مخروط است. ابتدا R را از روی مساحت مثلث به دست می‌آوریم (ارتفاع وارد بر ضلع BC است):

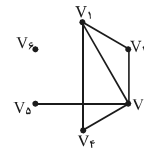
$$BC \times h = AB \times AC \Rightarrow 5h = 3 \times 4 \Rightarrow h = 2/5 \Rightarrow R = 2/4$$

۳۷- گزینه «۴»

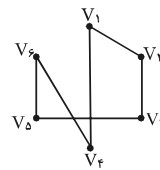
گراف $G = (V, E)$ از مرتبه ۶ و با مجموعه یال‌های

$$\{V_1V_2, V_1V_3, V_1V_4, V_2V_3, V_3V_4, V_3V_5\}$$

به صورت زیر است:



در صورتی که یال‌های V_6V_5 و V_6V_4 اضافه شوند و یال‌های V_1V_3 و V_3V_4 حذف شوند، یک گراف ۲-منتظم حاصل می‌شود:



۳۸- گزینه «۱»

ابتدا با ۶ رأس، گراف کامل K_6 را می‌سازیم. سپس دو رأس دیگر را هر کدام با ۳ یال به ۶ رأس قبلی وصل می‌کنیم. بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها برابر می‌شود با:

$$q(K_6) + 3 + 3 = \frac{6 \times 5}{2} + 6 = 21$$

۳۹- گزینه «۳»

طبق داده‌های سؤال می‌توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} 3p = 2q &\Rightarrow q = \frac{3}{2}p \\ q = 5p - 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}p = 5p - 21$$

$$\Rightarrow 3p = 10p - 42 \Rightarrow p = 6$$

$$q = 9 \Rightarrow p + q = 15$$

۴۰- گزینه «۴»

همان‌طور که می‌دانیم تعداد دورهای به طول m در گراف کامل K_p برابر

$$\frac{\binom{p}{m} (m-1)!}{2}$$

است با:

رأس a حتماً یکی از ۴ رأس موجود در دور به طول ۴ است و رأس g قطعاً در میان این رأس‌ها نیست. پس باید از ۶ رأس دیگر، ۳ رأس را انتخاب کنیم.

تعداد دورها با ویژگی مورد نظر برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times \frac{(4-1)!}{2} = 20 \times 3 = 60$$



۴۹ - گزینه «۳»

اگر احتمال وقوع هر عدد فرد را با x نمایش دهیم، آنگاه احتمال وقوع هر عدد زوج برابر $3x$ است. داریم:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1 \Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده دو تاس، کوچک‌تر از ۴ باشد، شامل $(1,1)$ ، $(1,2)$ و $(2,1)$ است. احتمال وقوع این پیشامد برابر است با:

$$P(\{(1,1), (1,2), (2,1)\})$$

$$= P(\{(1,1)\}) + P(\{(1,2)\}) + P(\{(2,1)\})$$

$$= P(1) \times P(1) + P(1) \times P(2) + P(2) \times P(1)$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} + \frac{3}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{7}{144}$$

۵۰ - گزینه «۱»

اگر پیشامد خارج شدن حداقل یک مهره سیاه را A بنامیم، آنگاه می‌توان به یکی از دو روش زیر، $P(A)$ را محاسبه کرد:
روش اول:

$$P(A) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = 0/16 + 0/24 + 0/24 = 0/64$$

روش دوم: متمم پیشامد A آن است که هر دو مهره خارج شده از کیسه، سبز باشند. در این صورت داریم:

$$P(A') = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = 0/36 \Rightarrow P(A) = 1 - 0/36 = 0/64$$

فیزیک ۳

۵۱ - گزینه «۱»

عقربه ساعت‌شمار در هر ۱۲ ساعت یک دور کامل می‌زند. بنابراین داریم:

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} \Rightarrow 12 \times 60 \times 60 = \frac{2 \times 3 \times 8 \times 10^{-2}}{v_1}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{6 \times 8 \times 10^{-2} \text{ m}}{12 \times 3600 \text{ s}}$$

عقربه دقیقه‌شمار در هر ۶۰ دقیقه یک دور کامل می‌زند. بنابراین داریم:

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2} \Rightarrow 60 \times 60 = \frac{2 \times 3 \times 12 \times 10^{-2}}{v_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{6 \times 12 \times 10^{-2} \text{ m}}{3600 \text{ s}}$$

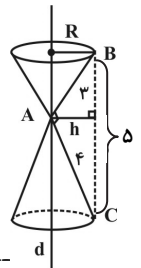
$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{6 \times 8 \times 10^{-2}}{12 \times 3600}}{\frac{6 \times 12 \times 10^{-2}}{3600}} = \frac{8}{12 \times 12} = \frac{1}{18}$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

اگر فرض کنیم h' و h'' ارتفاع مخروط‌های بالایی و پایینی است، آنگاه مجموع حجم‌های آن‌ها برابر است با:

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 h' + \frac{1}{3} \pi R'^2 h'' = \frac{1}{3} \pi (2/3)^2 (h' + h'')$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times \frac{576}{100} \times 5 = 9/6\pi$$



۴۶ - گزینه «۴»

$$S = \{a, b, c, d\}$$

$$P(\{a, b\}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{از هم مستقل اند}} P(\{a, b\} \cap \{a, c\}) = P(a) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{a, c\}) = \frac{1}{3}$$

از طرفی:

$$P(\{a, c\}) = P(a) + P(c) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(c) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{a, b, c\}) = P(\{a, b\}) + P(c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\{d\} = 1 - P(\{a, b, c\}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

۴۷ - گزینه «۳»

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

$$\Rightarrow P(B)P(A') = 0/2 \quad (1)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A)P(B) = 0/3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{P(B)P(A')}{P(B)P(A)} = \frac{0/2}{0/3} \Rightarrow \frac{1 - P(A)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(A) = 3 - 2P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5} = 0/6 \xrightarrow{(2)} P(B) = 0/5$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0/4 \times 0/5 = 0/2$$

۴۸ - گزینه «۳»

احتمال درست پاسخ دادن به طور تصادفی به یک تست سه گزینه‌ای $\frac{1}{3}$ است،

پس $p = \frac{1}{3}$ و $1 - p = \frac{2}{3}$ است. اگر پیشامد پاسخ صحیح دادن به حداقل دو

سؤال را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$



-۵۲ گزینه «۲»

ابتدا با استفاده از رابطه اندازه شتاب مرکزگرا، دوره حرکت را به دست می آوریم:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow 24300 = \frac{4\pi^2 \times 2}{T^2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{90} s = \frac{1}{15} s$$

با توجه به این که زمان یک دور چرخش برابر با T ثانیه است، داریم:

$$\text{rpm} = \left(\frac{\text{دور}}{T(s)} \right) \left(\frac{60s}{1 \text{ min}} \right) = \left(\frac{\text{دور}}{\frac{1}{15} s} \right) \left(\frac{60s}{1 \text{ min}} \right) = 900 \text{ دور دقیقه}$$

-۵۳ گزینه «۲»

نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره ای یکنواخت ماهواره به دور زمین

توسط نیروی گرانش وارد بر ماهواره تأمین می شود؛ بنابراین داریم:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM_e}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_e}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad r_1 = R_e + R_c = 2R_e \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{2R_e}{R_e}} = \sqrt{2}$$

-۵۴ گزینه «۲»

با استفاده از رابطه انرژی مکانیکی یک نوسانگر ساده، می توان نوشت:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad m_1 = m_2 \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \times \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{2\pi}{4\pi} \right)^2 \times \left(\frac{4}{2} \right)^2 = 1$$

-۵۵ گزینه «۲»

ابتدا بسامد زاویه ای نوسانگر را حساب می کنیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow \omega = 100 \frac{\text{rad}}{s}$$

با توجه به این که بیشینه انرژی پتانسیل کشسانی برابر با انرژی مکانیکی است،

جرم نوسانگر را به دست می آوریم:

$$E = U_{\text{max}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} m \times (100)^2 \times (0.1)^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{2}{100} \text{ kg} = 20 \text{ g}$$

-۵۶ گزینه «۱»

دوره تناوب حرکت نوسانی ساده یک آونگ ساده از رابطه $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ و

دوره تناوب سامانه جرم- فنر از رابطه $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست می آید. با توجه

به برابر بودن دوره آن ها داریم:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{L}{g} = \frac{m}{k}$$

$$\Rightarrow mg = kL \Rightarrow W = kL$$

-۵۷ گزینه «۲»

برای این که شخص بر روی صفحه دوار نلغزد، باید همراه با آن دوران کند.

نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دورانی شخص توسط نیروی اصطکاک

ایستایی تأمین می شود. بنابراین برای حداکثر تندی دوران صفحه، داریم:

$$f_{s,\text{max}} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu_s mg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s r g}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{0.5 \times 0.5 \times 10} \Rightarrow v = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

-۵۸ گزینه «۳»

انرژی مکانیکی یک نوسانگر هماهنگ ساده با مجذور دامنه آن متناسب است،

بنابراین داریم:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2$$

$$\frac{A_1 = 2 \text{ cm}, E_1 = 9 \text{ J}}{A_2 = A_1 + 1 = 3 \text{ cm}} \rightarrow \frac{E_2}{9} = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \Rightarrow E_2 = 16 \text{ J}$$

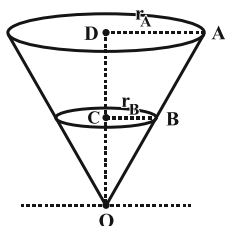
$$\Delta E = E_2 - E_1 = 16 - 9 \Rightarrow \Delta E = 7 \text{ J}$$

-۵۹ گزینه «۱»

چون دوره چرخش نقطه های A و B با هم برابرند، با محاسبه شعاع چرخش

نقطه های A و B و استفاده از رابطه $v = \frac{2\pi r}{T}$ ، نسبت تندی آن ها را به دست

می آوریم.





$$q''_A = q''_C = \frac{q'_A + q'_C}{2} = \frac{10 + 30}{2} = 20 \mu\text{C}$$

$$\frac{q''_A}{q_B} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \quad \text{گام چهارم: نسبت } \frac{q''_A}{q_B} \text{ را پیدا می‌کنیم:}$$

۶۲- گزینه «۲»

در راستای افقی به هر یک از گلوله‌ها دو نیرو وارد می‌شود، نیروی دافعه کولنی و نیروی فنر. چون گلوله‌ها در حال تعادل‌اند، اندازه این دو نیرو با هم برابر است. اندازه نیرویی که از طرف فنر فشرده به هر گلوله وارد می‌شود، برابر است با:

$$x = \frac{30 - 10}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$F_{\text{فنر}} = kx = 100 \times 0.1 \Rightarrow F_{\text{فنر}} = 10 \text{ N}$$

حال با استفاده از قانون کولن، می‌توان نوشت:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow 10 = 9 \times 10^9 \times \frac{q^2}{(3 \times 10^{-1})^2}$$

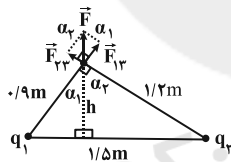
$$\Rightarrow q^2 = 10^{-10} \Rightarrow |q| = 10 \mu\text{C}$$

۶۳- گزینه «۴»

با توجه به شکل، طول ضلع سوم مثلث را به دست می‌آوریم:

$$r_{23} = \sqrt{(1/5)^2 - (0/9)^2} = 1/2 \text{ m}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{h}{0/9} \\ \cos \alpha_2 = \frac{h}{1/2} \end{cases}, \begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{F_{12}}{F} \\ \cos \alpha_2 = \frac{F_{23}}{F} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{h}{0/9} = \frac{F_{12}}{F} \Rightarrow \frac{1/2}{0/9} = \frac{F_{12}}{F} \Rightarrow \frac{F_{12}}{F_{23}} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{12}}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow F_{12} = 16 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{(F_{12})^2 + (F_{23})^2} = \sqrt{(16)^2 + (12)^2} = 20 \text{ N}$$

۶۴- گزینه «۲»

ابتدا نیروهای وارد بر گلوله A را رسم و اندازه هر یک را محاسبه می‌کنیم. بر گلوله A نیروی دافعه الکتریکی رو به بالا و نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود.

$$F = k \frac{|q_A||q_B|}{r^2} \quad \frac{|q_A|=|q_B|=2 \times 10^{-6} \text{ C}}{r=30 \text{ cm}=3 \times 10^{-1} \text{ m}}$$

$$F = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-2}} \Rightarrow F = 0.4 \text{ N}$$

چون مثلث‌های OAD و OBC با هم متشابه‌اند، با استفاده از نسبت تشابه آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OC} \quad \frac{OD=20 \text{ cm}, OC=20-15=5 \text{ cm}}{AD=r_A, BC=r_B} \rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{20}{5} = 4$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad T_A = T_B \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 4$$

۶۰- گزینه «۱»

نیروی مرکزگری لازم برای آن که سکه روی صفحه گردان ساکن بماند و با آن دوران کند، نیروی اصطکاک ایستایی بین سکه و صفحه است. چون شتاب مرکزگری دوران بیشینه است، بنابراین سکه در آستانه لغزش روی صفحه گردان قرار دارد.

$$F_{\text{net}} = f_{s, \text{max}} \Rightarrow ma = \mu_s mg \Rightarrow a = \mu_s g$$

$$\Rightarrow 3 = \mu_s \times 10 \Rightarrow \mu_s = 0.3$$

فیزیک ۲

۶۱- گزینه «۳»

چون کره‌ها رسانا و مشابه‌اند، بعد از هر اتصال، بار دو کره‌ای که به هم متصل می‌شوند هم‌اندازه، هم نوع و برابر با میانگین بارهایی است که قبل از تماس با هم داشته‌اند. یعنی $q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$ علامت جایگذاری می‌کنیم.

گام اول: وقتی کلید k_1 را می‌بندیم، کره A را با کره B تماس می‌دهیم. در این حالت داریم:

$$q'_A = q'_B = \frac{q_A + q_B}{2} \quad \frac{q_A = -4 \mu\text{C}}{q_B = 24 \mu\text{C}}$$

$$q'_A = q'_B = \frac{-4 + 24}{2} = +10 \mu\text{C}$$

گام دوم: با باز کردن کلید k_1 و بستن کلید k_2 ، کره C را با کره B که اکنون بار آن $q'_B = +10 \mu\text{C}$ است، تماس می‌دهیم. در این حالت داریم:

$$q''_C = q''_B = \frac{q_C + q'_B}{2} \quad \frac{q_C = +50 \mu\text{C}}{q'_B = +10 \mu\text{C}}$$

$$q''_C = q''_B = \frac{50 + 10}{2} = +30 \mu\text{C}$$

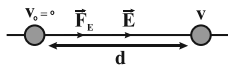
گام سوم: با باز کردن کلید k_2 و بستن کلید k_3 ، کره‌های A و C را که اکنون بارهای آن‌ها $q'_A = +10 \mu\text{C}$ و $q''_C = +30 \mu\text{C}$ است، تماس می‌دهیم. در این حالت داریم:



گزینه ۲ - ۶۷

با استفاده از قانون دوم نیوتون و در نظر گرفتن این نکته که فقط نیروی الکتریکی به پروتون و پوزیترون وارد می‌شود، داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{F_{net} = |q|E}{m} \Rightarrow a = \frac{E|q|}{m}$$



از طرفی با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 = 2\left(\frac{E|q|}{m}\right)d$$

هر دو ذره در یک میدان الکتریکی هستند (E برابر)، هر دو یک مسافت طی می‌کنند (d برابر) و هر دو دارای یک بار الکتریکی یکسان هستند (|q| برابر) اما جرم پوزیترون (که هم جرم الکترون هست) کمتر از جرم پروتون است، پس:

$$m_{pos} < m_{pro} \xrightarrow{v^2 \propto \frac{1}{m}} v_{pos} > v_{pro}$$

گزینه ۴ - ۶۸

دقت کنید چون بار الکتریکی از پایانه مثبت تا پایانه منفی باتری جابه‌جا شده است، خواهیم داشت:

$$\Delta V = V_- - V_+ = -12V$$

بنابراین داریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow -12 = \frac{\Delta U}{1/5} \Rightarrow \Delta U = -18J$$

گزینه ۲ - ۶۹

از قضیه کار-انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. دقت کنید فاصله نقطه A تا صفحه منفی ($10\text{cm} = 0.1\text{m}$) را باید در رابطه زیر جایگذاری کنیم، داریم:

$$W_t = K_f - K_i \xrightarrow{W_t = W_E} W_E = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow |q|Ed \cos\theta = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow 1/6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^3 \times 0.1 = \frac{1}{2} \times 1/6 \times 10^{-27} \times (9 \times 10^1 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow (9 \times 10^1 - v_0^2) = 4 \times 10^1$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 5 \times 10^1 \Rightarrow v_0 = \sqrt{5} \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون به صورت زیر جرم گلوله A را حساب می‌کنیم.

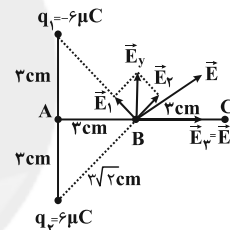
$$F_{net} = ma \Rightarrow F - mg = ma \xrightarrow{\begin{matrix} F=0.4N \\ a=30\text{m/s}^2 \end{matrix}} 0.4 - m \times 10 = m \times 30 \Rightarrow 0.4 = 40m$$

$$\Rightarrow m = \frac{0.4}{40} = 0.01\text{kg} = 10\text{g}$$



گزینه ۴ - ۶۵

در شکل، مؤلفه‌های میدان الکتریکی برایند رسم شده است. اگر فرض کنیم بار q_3 در نقطه A قرار داشته باشد، با توجه به محل قرارگیری سه بار و هم چنین با توجه به اینکه بردار برایند همواره بین دو بردار قرار دارد، می‌توان نتیجه گرفت مؤلفه E_y ناشی از برایند میدان‌های \vec{E}_1 و \vec{E}_2 و مؤلفه E_x ناشی از میدان \vec{E}_3 بوده است. چون E_y باید بین \vec{E}_1 و \vec{E}_2 باشد، جهت این دو میدان به صورت نمایش داده شده در شکل خواهد بود. در نتیجه بار q_1 منفی و بار q_2 مثبت و این دو بار ناهم‌نام بوده‌اند.



$$E_1 = E_2 = \frac{k|q_1|}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6}}{(3\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = 3 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_{1,2} = E_y = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(3 \times 10^7)^2 + (3 \times 10^7)^2} = 3\sqrt{2} \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_t = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \Rightarrow 5\sqrt{2} \times 10^7 = \sqrt{E_x^2 + (3\sqrt{2} \times 10^7)^2}$$

$$\Rightarrow E_x = 4\sqrt{2} \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_x = E_3 = \frac{k|q_3|}{r^2} \Rightarrow 4\sqrt{2} \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_3|}{(3 \times 10^{-2})^2}$$

$$\Rightarrow |q_3| = 4\sqrt{2} \times 10^{-6} \text{C} = 4\sqrt{2} \mu\text{C}$$

دقت کنید اگر بار q_3 در مکان C نیز قرار داشت، فقط علامت آن عوض می‌شد.

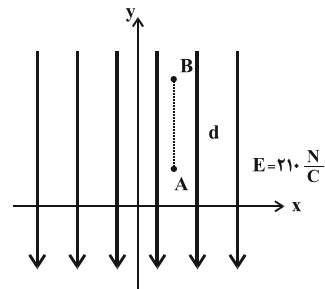
گزینه ۱ - ۶۶

می‌دانیم خطوط میدان الکتریکی همواره از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند، بنابراین بار الکتریکی q_1 مثبت و بار الکتریکی q_2 منفی خواهد بود.

از طرفی تراکم خطوط میدان الکتریکی در هر ناحیه از فضا بیانگر بزرگی میدان الکتریکی است. با توجه به شکل، چون تراکم در اطراف بار الکتریکی q_1 بیشتر است، بنابراین $|q_1| > |q_2|$.



۷۰- گزینه «۴»



در میدان الکتریکی یکنواخت، داریم:

$$|\Delta V| = Ed$$

دقت کنید اگر جابه‌جایی در جهت خط‌های میدان الکتریکی باشد، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد و برعکس.

$$\Delta V = -210 \times (50 - 20) \times 10^{-2} = -63V$$

فیزیک ۱

۷۱- گزینه «۱»

ابتدا یکای هر واحد را بر حسب واحدهای SI می‌نویسیم.

$$1\mu g = 10^{-6} g = 10^{-9} kg$$

$$1Hz^2 = 1\left(\frac{1}{s}\right)^2 = 1\frac{1}{s^2}$$

$$1cm^2 = 10^{-4} m^2$$

$$1ms = 10^{-3} s$$

بنابراین:

$$4 \times 10^{11} \frac{\mu g \cdot Hz^2 \cdot cm^2}{ms} = 4 \times 10^{11} \times \frac{10^{-9} kg \times \left(\frac{1}{s^2}\right) \times 10^{-4} m^2}{10^{-3} s}$$

$$= 4 \times 10^1 \frac{kgm^2}{s^3} = 4 \times 10^1 W$$

۷۲- گزینه «۴»

هر تن معادل ۱۰۰۰kg و هر کیلوگرم معادل ۱۰۰۰g است. داریم:

$$0/0000282ton = 0/0000282ton \times \frac{10^3 kg}{1ton} \times \frac{10^3 g}{1kg} = 28/2g$$

در نمادگذاری علمی، هر عدد را به صورت حاصل ضرب عددی بین ۱ و ده و توان صحیحی از عدد ده می‌نویسیم. داریم:

$$28/2g = 2/82 \times 10^1 g$$

۷۳- گزینه «۳»

نتیجه اندازه‌گیری برابر با میانگین اندازه‌گیری‌ها به وسیله این خط‌کش است. دقت کنید چون نتیجه اندازه‌گیری ۲۸/۲mm اختلاف زیادی با بقیه اندازه‌گیری‌ها دارد، آن‌را در محاسبه میانگین در نظر نمی‌گیریم.

$$\text{نتیجه اندازه‌گیری} = \frac{22/6 + 20/3 + 21/9}{3} = 21/6mm$$

۷۴- گزینه «۳»

ابتدا ابعاد استخر را بر حسب متر می‌نویسیم. داریم:

$$80inch \times \frac{2/5cm}{1inch} = 200cm = 2m$$

$$20ft \times \frac{12inch}{1ft} \times \frac{2/5cm}{1inch} = 600cm = 6m$$

$$20yard \times \frac{3ft}{1yard} \times \frac{12inch}{1ft} \times \frac{2/5cm}{1inch} = 1800cm = 18m$$

بنابراین حجم استخر برابر است با:

$$V = 2 \times 6 \times 18 = 216m^3$$

آهنگ ورود آب به استخر برابر با $0/2 \frac{m^3}{min}$ و آهنگ خروج آب از استخر

برابر با $0/5 \frac{m^3}{min}$ است، بنابراین در هر دقیقه $0/3m^3$ آب از استخر خارج می‌شود. در نتیجه مدت زمانی که طول می‌کشد تا $216m^3$ آب

استخر خالی شود برابر است با:

$$t = \frac{216}{0/3} = 720min = 12h$$

۷۵- گزینه «۲»

هنگامی که از دماسنج مدرج A عدد دما را $(28/73 \pm 0/05)^\circ C$ گزارش کرده‌ایم، رقم ۳، رقم حدسی بوده است و به این ترتیب کوچکترین درجه‌بندی وسیله برابر با $0/1^\circ C$ بوده است. پس دقت دماسنج A معادل با $0/1^\circ C$ می‌باشد. از آنجا که دقت اندازه‌گیری دو دماسنج برابر است، بنابراین دقت اندازه‌گیری دماسنج رقمی B نیز معادل با $0/1^\circ C$ خواهد بود و در نتیجه عددی که این دماسنج گزارش می‌کند باید به گونه‌ای باشد که رقم سمت راست، هم مرتبه با دقت باشد. پس عدد گزارش شده توسط این دماسنج به صورت $(28/7 \pm 0/1)^\circ C$ خواهد بود.

۷۶- گزینه «۱»

ابتدا تخمین مرتبه بزرگی تعداد صفحات کتاب و نیز مساحت هر صفحه را به دست می‌آوریم:

$$\text{صفحه} = 10^2 = 1 \times 10^2 \sim 1 \times 10^2 / 4 \times 10^2 = 140 = \text{تعداد صفحات}$$

چون هر صفحه از هر طرف ۱cm حاشیه خالی دارد، پس ابعاد قسمتی از هر صفحه که شامل کلمات است، معادل $20cm \times 27cm$ می‌شود و می‌توان نوشت:

$$20cm \times 27cm = 540cm^2 = \text{مساحت قسمت مفید صفحه}$$

$$= 5/4 \times 10^2 \sim 10^1 \times 10^2 = 10^3 cm^2$$



$$m = \rho V \rightarrow (\rho V)_{\text{طلا}} + (\rho V)_{\text{ناخالصی}} = 92g$$

$$\Rightarrow 19V_{\text{طلا}} + 7V_{\text{ناخالصی}} = 92g \quad (2)$$

با حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول می توان حجم طلا را به دست آورد:

$$\begin{cases} V_{\text{طلا}} + V_{\text{ناخالصی}} = 8cm^3 \\ 19V_{\text{طلا}} + 7V_{\text{ناخالصی}} = 92g \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12V_{\text{طلا}} = 36 \Rightarrow V_{\text{طلا}} = 3cm^3$$

$$m_{\text{طلا}} = \rho_{\text{طلا}} \cdot V_{\text{طلا}} = 19 \times 3 = 57g$$

۷۹ - گزینه «۴»

ابتدا حجم الکل بیرون ریخته شده از ظرف را محاسبه می کنیم.

$$\rho_{\text{الکل}} = \frac{m_{\text{الکل}}}{V_{\text{الکل}}} \Rightarrow 0.8 = \frac{80}{V_{\text{الکل}}} \Rightarrow V_{\text{الکل}} = \frac{80}{0.8} = 100cm^3$$

حجم الکل بیرون ریخته شده همان حجم جسم فلزی است.

از طرفی حجم فلز به کار رفته در جسم فلزی برابر است با:

$$V_{\text{فلز}} = \frac{m_{\text{فلز}}}{\rho_{\text{فلز}}} \Rightarrow V_{\text{فلز}} = \frac{800}{8} = 100 / 8cm^3$$

$$\text{حجم حفره} : V' = V_{\text{الکل}} - V_{\text{فلز}}$$

$$\Rightarrow V' = 100 - 100 / 8 = 12 / 8cm^3$$

۸۰ - گزینه «۳»

با استفاده از تعریف چگالی داریم:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{100}{10} = 10cm^3 \\ V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{50}{5} = 10cm^3 \end{cases} \Rightarrow V_{\text{کل}} = 10 + 10 = 20cm^3$$

حال با استفاده از تعریف چگالی مخلوط داریم:

$$V_{\text{آلیاژ}} = \frac{m_{\text{آلیاژ}}}{\rho_{\text{آلیاژ}}} = \frac{100 + 50}{8} = 18 / 8cm^3$$

$$V_{\text{آلیاژ}} - V_{\text{کل}} = 18 / 8 - 20 = -1 / 8cm^3$$

بنابراین حجم آلیاژ ۱/۲۵ سانتی متر مکعب کاهش یافته است.

هم چنین تخمین مرتبه بزرگی مساحت متوسط هر کلمه چنین می شود:

$$1cm^2 = 10^{-1} \times 10^{-1} \sim 10^{-1}cm^2 = 5 \times 10^{-1}cm^2 = 5 / 5cm^2 = مساحت هر کلمه$$

اکنون تعداد کلمات این کتاب را به صورت زیر تخمین می زنیم:

$$\text{کلمه} = 10^5 = \frac{10^3cm^2}{1cm^2} \times \frac{10^2 \text{ صفحه}}{\text{صفحه}}$$

۷۷ - گزینه «۲»

چون جرم دو کره یکسان است و چگالی کره B بیشتر است، طبق

$$\text{رابطه } \rho = \frac{m}{V}, \text{ حجم واقعی کره B کمتر می باشد. یعنی درون کره B حفره ای}$$

وجود دارد و کره A توپر است و در نتیجه حجم واقعی و حجم ظاهری آن

یکسان می باشد. ابتدا حجم ظاهری کره ها را حساب می کنیم.

$$V'_A = V'_B = \frac{4}{3}\pi r^3 \xrightarrow{r=2cm} V'_A = V'_B = \frac{4}{3} \times 2^3 \times \pi = 32cm^3$$

حجم واقعی کره B را به دست می آوریم. دقت کنید حجم واقعی را از

$$\text{رابطه } \rho = \frac{m}{V} \text{ به دست می آوریم.}$$

$$m_A = m_B \xrightarrow{m=\rho V} \rho_A V_A = \rho_B V_B$$

$$\frac{V_A = V'_A = 32cm^3}{\rho_A = 3 \frac{g}{cm^3}, \rho_B = 8 \frac{g}{cm^3}} \rightarrow 3 \times 32 = 8 \times V_B \Rightarrow V_B = 12cm^3$$

می بینیم حجم واقعی کره B برابر با ۱۲cm^۳ و حجم ظاهری آن ۳۲cm^۳

است. بنابراین اختلاف این دو حجم برابر با حجم حفره می باشد.

$$\Delta V'_B = V'_B - V_B = 32 - 12 \Rightarrow \Delta V'_B = 20cm^3$$

۷۸ - گزینه «۴»

اگر رابطه چگالی را برای این آلیاژ بنویسیم، داریم:

$$\rho_{\text{آلیاژ}} = \frac{m_{\text{آلیاژ}}}{V_{\text{آلیاژ}}}$$

$$\Rightarrow 11 / 5 = \frac{92}{V_{\text{آلیاژ}}} \Rightarrow V_{\text{آلیاژ}} = 8cm^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{طلا}} + V_{\text{ناخالصی}} = 8cm^3 \quad (1)$$

از طرفی با استفاده از اصل پایداری جرم داریم:

$$m_{\text{آلیاژ}} = m_{\text{ناخالصی}} + m_{\text{طلا}}$$



شیمی ۲

۸۱- گزینه «۳»

تمام مواد خروجی و ورودی در سلول سوختی هیدروژن گاز هستند. در سلول دانه از آند گاز Cl_2 خارج می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: در سلول گالوانی قطب‌های مثبت و منفی به ترتیب کاتد و آند هستند.

در سلول گالوانی قطب‌های مثبت و منفی به ترتیب آند و کاتد هستند.

گزینه «۲»: در سلول گالوانی توسط تیغه متخلخل دو الکترولیت جدامی شود اما در سلول الکترولیتی تنها یک الکترولیت وجود دارد.

گزینه «۴»: در سلول الکترولیتی واکنش در خلاف جهت طبیعی رخ می‌دهد.

۸۲- گزینه «۴»

گوگرد در Na_2S عدد اکسایش -۲ دارد. در SO_3 عدد اکسایش +۶ دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: واکنش در باتری دکمه‌های واکنش $Zn + Ag_2O \rightarrow ZnO + 2Ag$ رخ می‌دهد و در تولید Al واکنش

$2Al_2O_3 + 3C \rightarrow 4Al + 3CO_2$ رخ می‌دهد. کربن از صفر به +۴ و Ag از +۱ به صفر رسیده است.

گزینه «۲»: عدد اکسایش یک کربن -۳ و دیگری +۳ است.

گزینه «۳»: به طور مثال در واکنش مذکور در باتری دکمه‌های روی - نقره، عدد اکسایش Ag یک واحد و Zn دو واحد تغییر می‌کند.

۸۳- گزینه «۴»

در غشای مبادله کننده پروتون، H^+ یا پروتون از آند به کاتد حرکت می‌کند و جهت حرکت آن هم جهت با حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی است.

۸۴- گزینه «۴»

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: تیغه‌ای که به قطب منفی باتری متصل می‌شود، تیغه کاتد است.

گزینه «۲»: اطراف قطب مثبت سلول (آند)، گاز کلر آزاد می‌شود.

گزینه «۳»: در برقکافت $NaCl(aq)$ ، یون Na^+ کاهش نمی‌یابد.

۸۵- گزینه «۳»

آلومینیم برخلاف نقره پتانسیل کاهش کوچکی از صفر (مربوط به SHE) دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: نیم سلول است نه سلول؛ (SHE، نیم سلول استاندارد هیدروژن)

گزینه «۲»: نیم سلول تنها حاوی آند یا کاتد نیست؛ این اجزا مربوط به سلول‌اند که بسته به نیم‌سلول‌ها، هر یک آند یا کاتد نام‌گذاری می‌شوند.

گزینه «۴»: در نیم‌سلول تنها واکنش رخ نمی‌دهد بلکه در سلول واکنش $2H^+ + 2e \rightarrow H_2$ یا عکس آن رخ می‌دهد.

۸۶- گزینه «۲»

در بین فلزات کم‌ترین E° را لیتیم دارد. یعنی قوی‌ترین کاهنده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: در بین فلزات کمترین چگالی را دارد نه در بین همه مواد.

گزینه «۳»: در ساخت باتری‌های دکمه‌ای نیز کاربرد دارد.

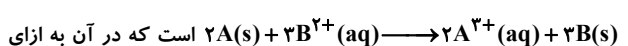
گزینه «۴»: افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیومی، سبب شد این فلز جایگاه ممتازی در تأمین انرژی جهان پیدا کند.

۸۷- گزینه «۳»

گزینه «۱»: چون غلظت A^{3+} زیاد شده است می‌توان نتیجه گرفت A الکترون از دست داده است و قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به B دارد و باعث کاهش یونهای B^{2+} می‌شود.

گزینه «۲»: در واکنش‌های اکسایش و کاهش علاوه بر داد و ستد الکترون، انرژی نیز آزاد می‌شود. این فرایند گرماده است و A^{3+} تولید شده سطح انرژی پایین‌تری نسبت به اتم A دارد پس پایدارتر است.

گزینه «۳»: واکنش کلی موازنه شده در این سلول به صورت



مصرف ۲ مول A ، ۶ مول الکترون بین آند و کاتد مبادله می‌شود.

گزینه «۴»: در نیم سلول B ، غلظت یون B^{2+} با ادامه کار دستگاه، کاهش

می‌یابد. بنابراین غلظت آنیون نسبت به کاتیون افزایش می‌یابد. برای توازن بار الکتریکی بین دو نیم سلول، آنیون‌های نیم سلول B از دیواره متخلخل به سمت

نیم‌سلول A حرکت می‌کنند.



۸۸ - گزینه «۱»

در سلول گالوانی، آند شامل فلز کاهنده تر (E° کم تر) و کاتد شامل فلز اکسنده تر (E° بیش تر) است. بنابراین فلز روی نقش تیغه آندی و فلز مس نقش تیغه کاتدی را ایفا می کند و معادله واکنش کلی به صورت زیر می باشد:



$\frac{1}{2} \text{mol Zn} \times \frac{1 \text{mol Zn}}{65 \text{g Zn}} \times \frac{1 \text{mol Cu}}{1 \text{mol Zn}}$ تغییرات جرم Cu در هر ثانیه

$$\times \frac{64 \text{g Cu}}{1 \text{mol Cu}} \times \frac{1}{100} = 1.024 \text{g Cu}$$

$$\longrightarrow 1.024 \frac{\text{g}}{\text{s}} \times (25 \times 60) \text{s} = 1536 \text{g}$$

۸۹ - گزینه «۲»

الف: نادرست است.

آند E° - کاتد $E^\circ = E^\circ$ سلول $\Rightarrow \text{Cu} \rightarrow \text{قطب منفی}$ سلول الکترولیتی
 $\text{Ag} \rightarrow \text{قطب مثبت}$

$$= 0.34 - 0.8 = -0.46 \text{V}$$

آند E° - کاتد $E^\circ = E^\circ$ سلول $\Rightarrow \text{Fe} \rightarrow \text{آند}$ سلول گالوانی
 $\text{Mn} \rightarrow \text{کاتد}$

$$= -1.18 + 0.44 < 0$$

چنین سلول گالوانی تشکیل نمی شود.

ب: نادرست است.

سلول الکترولیتی $\text{Fe} \rightarrow \text{قطب منفی}$
 $\text{Mn} \rightarrow \text{قطب مثبت}$

$$\Rightarrow E^\circ \text{ سلول} = -0.44 + 1.18 > 0$$

چنین سلولی، سلول الکترولیتی نیست.

پ: درست است.

سلول الکترولیتی $\text{Fe} \rightarrow \text{قطب منفی}$
 $\text{Cu} \rightarrow \text{قطب مثبت}$

$$\Rightarrow E^\circ \text{ سلول} = -0.44 - 0.34 = -0.78 \text{V}$$

سلول گالوانی $\text{Mn} \rightarrow \text{آند}$
 $\text{Ag} \rightarrow \text{کاتد}$ $\Rightarrow E^\circ \text{ سلول} = 0.8 + 1.18 = 1.98 \text{V}$

این سلول گالوانی می تواند انرژی مورد نیاز سلول الکترولیتی را تأمین نماید.

ت: نادرست است.

سلول الکترولیتی $\text{Mn} \rightarrow \text{قطب منفی}$
 $\text{Ag} \rightarrow \text{قطب مثبت}$

$$\Rightarrow E^\circ \text{ سلول} = -1.18 - 0.8 = -1.98 \text{V}$$

سلول گالوانی $\text{Fe} \rightarrow \text{آند}$
 $\text{Cu} \rightarrow \text{کاتد}$ $\Rightarrow E^\circ \text{ سلول} = 0.34 + 0.44 = 0.78 \text{V}$

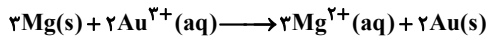
این سلول گالوانی نمی تواند انرژی مورد نیاز برای سلول الکترولیتی را تأمین نماید.

۹۰ - گزینه «۱»

در این واکنش منیزیم آند (کاهنده) و طلا کاتد (اکسنده) است.

$$\text{emf} = E^\circ - E^\circ \text{ کاتد}$$

$$\text{emf} = 1/5 - (-2/37) = 3/87 \text{ (V)}$$



مجموع ضرایب واکنش دهنده ها برابر مجموع ضرایب فرآورده ها است.

طبق واکنش، تعداد الکترون های مبادله شده برابر ۶ می باشد.

شیمی ۱

۹۱ - گزینه «۴»

گزینه «۱»: ایزوتوپها عدد اتمی (Z) یکسان و عدد جرمی (A) متفاوت دارند.

گزینه «۲»: خواص شیمیایی اتم های هر عنصر به عدد اتمی (Z) آن وابسته است، از

این رو ایزوتوپ های منیزیم همگی خواص شیمیایی یکسانی دارند.

گزینه «۳»: ایزوتوپها در جدول دوره ای تنها یک مکان را اشغال می کنند.

گزینه «۴»: ایزوتوپها در برخی خواص فیزیکی وابسته به جرم مانند چگالی تفاوت دارند.

۹۲ - گزینه «۲»

تنها مورد آخر نادرست است. از اتم ^{59}Fe برای تصویربرداری از دستگاه

گردش خون استفاده می کنند.

۹۳ - گزینه «۳»

بررسی موارد:

$$\text{الف) } ? \text{gNH}_3 = \frac{3}{0.1} \times 10^{23} \text{ atom H} \times \frac{1 \text{mol H}}{6.02 \times 10^{23} \text{ atom H}}$$

$$\times \frac{1 \text{mol NH}_3}{3 \text{mol H}} \times \frac{17 \text{g NH}_3}{1 \text{mol NH}_3} = 2/87 \text{g NH}_3$$

$$\text{ب) } ? \text{gCO} = 0.6 \text{mol CO} \times \frac{28 \text{g CO}}{1 \text{mol CO}} = 16/87 \text{g CO}$$

$$\text{پ) } ? \text{gAl} = 6.02 \times 10^{23} \text{ atom Al} \times \frac{1 \text{mol Al}}{6.02 \times 10^{23} \text{ atom Al}}$$

$$\times \frac{27 \text{g Al}}{1 \text{mol Al}} = 27 \text{g Al}$$

$$\text{ت) } ? \text{gSO}_3 = 0.3 \text{mol SO}_3 \times \frac{80 \text{g SO}_3}{1 \text{mol SO}_3} = 24 \text{g SO}_3$$

شیمی ۲

۹۴ - گزینه ۳

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۱: اختلاف عدد اتمی عنصر D (اکسیژن) و عنصر I (گالیم)، ۲۳ است.

گزینه ۲: عنصرهای G (فسفر) و H (گوگرد) می‌توانند به ترتیب یون‌هایی

با بار ۳- و ۲- تولید کنند.

گزینه ۴: سبک‌ترین عنصر دوره دوم جدول دوره‌ای لیتیم می‌باشد.

۹۵ - گزینه ۳

ابتدا باید جرم مولی ترکیب را به دست آوریم. جرم مولی به جرم یک مول یا

 $6/02 \times 10^{23}$ مولکول از ترکیب می‌گویند.

$$?g = 6/02 \times 10^{23} \text{ مولکول} \times \frac{7/1g}{1/505 \times 10^{23} \text{ مولکول}}$$

$$= 284g$$

$$m_{P_2O_5} = 284g \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow 4(31) + 16y = 284 \Rightarrow y = 10$$

$$?gO = 212gP_2O_5 \times \frac{1 \text{ mol } P_2O_5}{284gP_2O_5} \times \frac{10 \text{ mol } O}{1 \text{ mol } P_2O_5} \times \frac{16gO}{1 \text{ mol } O}$$

$$= 120gO$$

۹۶ - گزینه ۲

موارد «آ» و «ت» نادرست است.

تعداد الکترون‌های اتم‌های خنثای M و N با هم برابر نیست، پس پروتون‌های

برابر هم ندارند و نمی‌توانند ایزوتوپ یک عنصر باشند. تعداد پروتون‌های اتم

M، به اندازه بار آنیون N از پروتون‌های N بیش‌تر است.

چون عدد جرمی که مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها است، در هر دو برابر

است، پس باید تعداد نوترون‌های M به اندازه بار آنیون N از نوترون‌های N

کم‌تر باشد.

مجموع تعداد تمام ذرات موجود در اتم M با مجموع تعداد تمام ذرات موجود

در آنیون عنصر N برابرند.

۹۷ - گزینه ۴

گزینه ۱: در هر گروه از بالا به پایین تعداد لایه‌های الکترونی افزایش می‌یابد.

گزینه ۲: در هر تناوب از راست به چپ، شعاع اتمی افزایش می‌یابد زیرا با

ثابت ماندن تعداد لایه‌های الکترونی، قدرت جاذبه هسته کاهش می‌یابد.

گزینه ۳: در هر گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی افزایش می‌یابد زیرا تعداد

لایه‌های الکترونی افزایش می‌یابد.

۹۸ - گزینه ۴

عناصر موجود در جدول به صورت زیر می‌باشند:

A	B	C	D	F	G	H
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Na	Ca	Al	Ga	P	As	S

خصلت فلزی: B > D > C

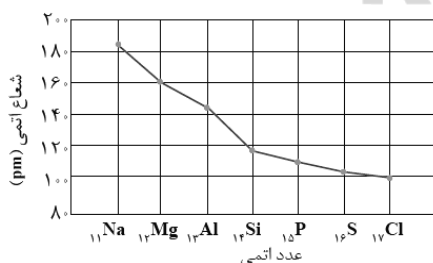
شعاع اتمی: A > C > F > H

عنصر A همان سدیم است.

خصلت نافلزی: H > F > G

۹۹ - گزینه ۲

طبق نمودار زیر اختلاف شعاع اتمی کاهش می‌یابد.



۱۰۰ - گزینه ۴

به آنیون یک بار منفی هالوژن‌ها، یون هالید می‌گویند.