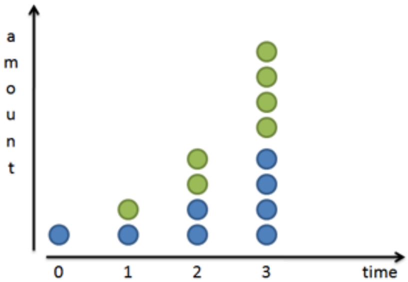
اگر در ضابطه ی یک تابع ، متغیر در توان باشد به آن تابع، تابع نمایی می گویند. البته پایه نیز باید عدد ثابت مثبت و مخالف یک باشد ، تابع a^x را که در آن $a\in R^+$ یعنی (a>0) و a≠1 و x یک متغیر می‌باشد را یک تابع نمایی می‌گویند.

درک رشد نمایی: توضیح خود را با یک سیستم مبنا آغاز می‌کنم که پس از مقدار معینی از زمان دو برابر می‌شود. برای نمونه:



باکتری‌ها می‌توانند هر ۲۴ ساعت یک بار دو برابر شوند.
زمانی که رشته‌های نودل را می‌بریم، دو برابر قبل رشته خواهیم داشت.
اگر نرخ سود سالانه ۱۰۰٪ روی سرمایه خود داشته باشید، هر سال سرمایه شما دو برابر خواهد شد.
این وضعیت چیزی شبیه تصویر زیر است:
افزاز به دو یا دو برابر کردن، یک فرایند پیشروی متداول است بدیهی است که می‌توانیم وضعیت‌های سه برابری یا چهار برابری را نیز در نظر بگیریم؛ اما وضعیت دو برابری راحت تر است و از این رو برای توضیح دادن از آن استفاده کردم
از نظر ریاضی اگر ما x افراز داشته باشیم، در این صورت 2^x آیتم خواهیم داشت. با ۱ افراز ما ۲ آیتم داریم. با ۴ افراز ما ۲ به توان ۴ یعنی ۱۶ آیتم خواهیم داشت. به طور کلی به عنوان یک فرمول عمومی:

رشد = 2^x

- **دیگر باید با تابع نمایی آشنا شده باشید ... وقت آن رسیده که وارد کتاب درسی شویم ...!**

تابع نمایی: هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک می‌باشد، تابع نمایی می‌گوییم.

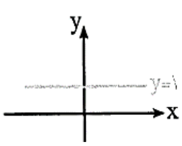
$y=a^x \Leftrightarrow a\in \mathbb{R}$ ، $a>0$ ، $a\neq 1$ تابع نمایی است.

به عنوان مثال، همگی توابع $y=3^x$ ، $y=(\sqrt{5})^x$ ، $y=2^{-x}=(2^{-1})^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ در دستهٔ توابع نمایی قرار دارند، ولی $y=(-\sqrt{2})^x$ و $y=1^x$ به خاطر آن‌که در اولی $a=-\sqrt{2}<0$ و در دومی $a=1$ می‌باشد، در دستهٔ توابع نمایی قرار نمی‌گیرند.

تذکر: در تابع نمایی $y=a^x$ ، عدد ثابت a پایه و توان متغیر است، امّا در تابع $y=x^a$ ، پایه متغیر و توان عدد ثابت است.

به عنوان مثال، تابع $y=3^x$ یک تابع نمایی با پایهٔ ۳ و توان x و تابع $y=x^3$ یک تابع یک‌جمله‌ای از درجهٔ ۳ با پایهٔ x و توان ۳ می‌باشد.

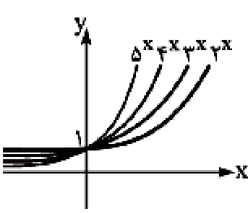
نکته: در تابع $y=a^x$ ، اگر $a=1$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=1^x=1$ درمی‌آید که ضابطهٔ تابع ثابت می‌باشد و نمودار آن به‌صورت مقابل است:



- **تحلیل نمودار $y = a^x$ در حالت a>0**

۱) دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.

۲) نمودار تابع به‌صورت مقابل است:



$1<a$

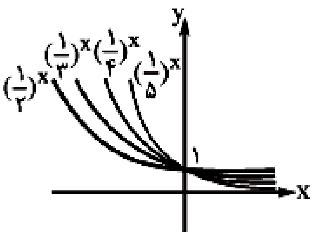
۳) نمودار تابع، محور yها را در نقطهٔ $(0,1)$ قطع می‌کند.

۴) نمودار تابع، محور xها را قطع نمی‌کند.

۵) تابع در دامنهٔ آن یک‌به‌یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۶) به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه x و y ، اگر $x>y$ ، آن‌گاه $a^x>a^y$ و برعکس. در واقع تابع اکیداً صعودی است.

▪ تحلیل نمودار $y = a^x$ در حالت $0<a<1$



$0<a<1$

۱) دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.

۲) نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است:

۳) نمودار تابع، محور y ها را در نقطهٔ $(0,1)$ قطع می‌کند.

۴) نمودار تابع، محور x ها را قطع نمی‌کند.

۵) تابع در دامنهٔ آن یک‌به‌یک است، زیرا تمام خطوط موازی با محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.

۶) به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه x و y، اگر $x>y$ آن‌گاه $a^x<a^y$ و برعکس. در واقع تابع اکیداً نزولی است.

اگر تابع $f(x)=\left(\frac{2a-1}{3}\right)^{-x}$ یک تابع نمایی باشد. حدود a را به دست آورید.

شرط اول نمایی بودن، آن است که قاعده مثبت باشد: (1) $\frac{2a-1}{3}>0 \Rightarrow a>\frac{1}{2}$

شرط دوم نمایی بودن آن است که قاعده عدد یک نباشد: (2) $\frac{2a-1}{3}\neq 1 \Rightarrow a\neq 2$

$$(1)\bigcap(2)\Rightarrow a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)-\{2\}$$

اگر تابع $f(x)=(a^2-2a)^{2x}$ یک تابع نمایی باشد، a در کدام انتروال قرار دارد؟

شرط اول نمایی بودن، آن است که قاعده مثبت باشد: $a^2-2a>0\Rightarrow a>2$ یا $a<0$

شرط دوم نمایی بودن آن است که قاعده عدد یک نباشد: $a^2-2a\neq 1\Rightarrow a\neq 1\pm\sqrt{2}$

$$\boxed{(1)\bigcap(2)\Rightarrow a\in(-\infty,0)\bigcup(2,+\infty)-\{1\pm\sqrt{2}\}}$$

---

a کدام باشد تا ، تابع $f(x)=(2a-1)^x$ یک تابع نمایی باشد ؟

1) $(\frac{1}{2},+\infty)$ 2) $(\frac{1}{2},+\infty)-\{1\}$ 3) $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 4) R

کافی است $(2a-1)$ عددی، مثبت و مخالف یک باشد.

$$\begin{cases}2a-1\neq 1\Rightarrow 2a\neq 2\Rightarrow a\neq 1\\ 2a-1>0\Rightarrow 2a>1\Rightarrow a>\frac{1}{2}\Rightarrow a\in(\frac{1}{2},+\infty)\end{cases}\xrightarrow{a\neq 1} a\in(\frac{1}{2},+\infty)-\{1\}$$

اگر $f(x)=3^x$ باشد، مقدار $f(x+2)-2f(x+1)$ را محاسبه کنید؟

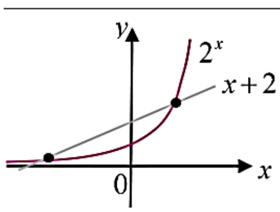
$$f(x+2)-2f(x+1)=3^{x+2}-2\left(3^{x+1}\right)=3^x\times 3^2-2\left(3^x\times 3^1\right)=9\left(3^x\right)-6\left(3^x\right)=3^x(9-6)=3^x\times 3=3f(x)=3^{x+1}$$

به کدام قیمت a تابع نمایی $f(x)=(2a-a^2)^x$ ، صعودی است؟

شرط صعودی (متزاید) بودن تابع نمایی آن است که قاعده بزرگ تر از عددیک باشد $(a>1)$:

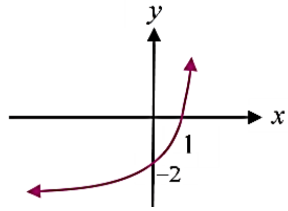
$2a-a^2>1\Rightarrow a^2-2a+1<0\Rightarrow(a-1)^2<0$ نشدنی و فاقد جواب

تعداد نقاط تلاقی خط $y=x+2$ و گراف تابع $f(x)=2^x$ را تعیین کنید؟



تعداد نقاط تلاقی خط $y=x+2$ و تابع $f(x)=2^x$ همان تعداد جذر های معادله $2^x=x+2$ بوده که بهترین راه حل به شیوه رسم گراف (هندسی) است. که با توجه به شکل دارای 2 نقطه تلاقی است.

تابع زیر دارای ضابطه $f(x)=a\times 2^{x+1}+b$ است. $a+b$ را محاسبه کنید؟



$$f(1)=0\Rightarrow a\times 2^2+b=0\Rightarrow 4a=-b \qquad (1)$$
$$f(0)=-2\Rightarrow a\times 2^1+b=-2\Rightarrow 2a=-b-2 \qquad (2)$$
$$\xrightarrow{(1),(2)} a=1, b=-4\Rightarrow a+b=-3$$

اگر نمودار تابع $f(x)=a(b^x)+c$ از نقطه‌های $(۱,۲)$ و $(۲,۵)$ گذشته و $f(۰)=۰/۵$ باشد، مقدار $ab-c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قرار شد مختصات نقاط را در معادلهٔ منحنی قرار دهیم:

$$f(x)=ab^x+c\Rightarrow\begin{cases} f(۰)=۰/۵\Rightarrow ab^۰+c=۰/۵\Rightarrow a+c=\frac{۱}{۲}\\ f(۱)=۲\Rightarrow ab+c=۲\\ f(۲)=۵\Rightarrow ab^۲+c=۵\end{cases}$$

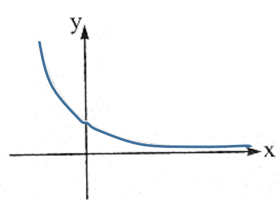
هر معادله را منهای قبلی‌اش کنیم تا cها بروند:

$$\left.\begin{array}{l} ab-a=۲-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a(b-۱)=\frac{۳}{۲}\\ ab^۲-ab=۵-۲\Rightarrow ab(b-۱)=۳\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقسیم}} b=\frac{۳}{\frac{۳}{۲}}=۲\xrightarrow{\text{در بالایی قرار دهیم}} a=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a+c=\frac{۱}{۲}} c=-۱$$

پس داریم:

$$ab-c=\frac{۳}{۲}\times ۲+۱=۴$$

به ازای چند مقدار طبیعی a نمودار تابع $y=(\frac{۱+۲a}{۵})^x$ می‌تواند به صورت مقابل باشد؟



۱) هیچ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

این نمودار از نوع تابع نمایی کاهشی است پس باید $\frac{۱+۲a}{۵}$ بین ۰ و ۱ قرار گیرد:

$$۰<\frac{۱+۲a}{۵}<۱\xrightarrow[\times ۵]{}۰<۱+۲a<۵\xrightarrow[-۱]{}-۱<۲a<۴\xrightarrow[\div ۲]{}-\frac{۱}{۲}<a<۲$$

تنها مقدار طبیعی a، $a=۱$ است و فقط یک مقدار طبیعی a داریم.

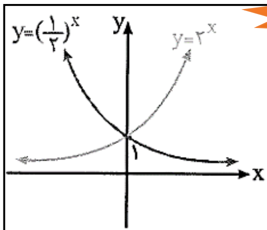
تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{۲m-۱}{۳})^x$، اکیداً نزولی است. حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $m<\frac{۱}{۲}$ ۳) $m>\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}<m<۲$

در تابع نمایی $f(x)=a^x$، اگر $۰<a<۱$ باشد، آن‌گاه تابع اکیداً نزولی است.

$$f(x)=(\frac{۲m-۱}{۳})^x\Rightarrow ۰<\frac{۲m-۱}{۳}<۱\xrightarrow{\times ۳}۰<۲m-۱<۳\xrightarrow{+۱}۱<۲m<۴\xrightarrow{\div ۲}\frac{۱}{۲}<m<۲\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴)

نکته



نمودار توابع نمایی $f(x)=b^x$ و $g(x)=(\frac{1}{b})^x$ نسبت به محور y ها قرینهٔ یکدیگر هستند.

نمودار توابع $y=f(x)=2^x$ و $y=g(x)=(\frac{1}{2})^x$ نسبت به محور y ها قرینهٔ یکدیگرند. اگر در ضابطهٔ f به جای x، $-x$ قرار دهیم، داریم:

$$f(-x)=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x=g(x)$$

و همین‌طور اگر در ضابطهٔ تابع g به جای x، عبارت $-x$ را قرار دهیم، داریم:

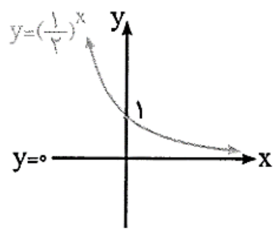
$$g(-x)=(\frac{1}{2})^{-x}=(2^{-1})^{-x}=2^x=f(x)$$

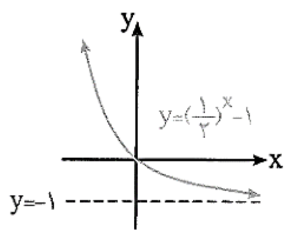
توابعی با ضابطهٔ $f(x)=b\times a^x+c$ رفتار توابع نمایی را دارند که رسم این توابع به کمک انتقال و قرینه انجام‌پذیر است.

توجه خیلی مهم در رسم این توابع آن است که باید خط $y=0$ به اندازهٔ c واحد به سمت بالا $(c>0)$ یا به سمت پایین $(c<0)$ انتقال پیدا کند و نمودار به خط $y=c$ نزدیک شود.

به عنوان مثال، برای رسم نمودار $y=(\frac{1}{2})^x-1$ باید نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم. در این انتقال خط $y=0$ نیز به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال داده می‌شود و نمودار به خط $y=-1$ نزدیک می‌شود.

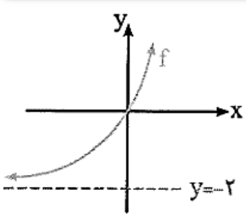
نکته





توجه کنید که اگر نقطهٔ (۰،۱) را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، به نقطهٔ (۰،۰) می‌رسد. بنابراین نمودار از مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ (۰،۰) می‌گذرد.

نمودار تابع $f(x)=2^{x+a}+b$ به‌صورت مقابل است. $a\times b$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) −۲
۴) −۴

در رسم نمودار تابع به کمک انتقال، نمودار تابع $y=2^x$، دو واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است، لذا ضابطهٔ آن به‌صورت $y=2^{x+a}-2$ درمی‌آید و در نتیجه $b=-2$ می‌باشد. از طرفی نمودار تابع از مبدأ مختصات گذشته است، لذا مختصات آن در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$y=2^{x+a}-2\Rightarrow 0=2^a-2\Rightarrow 2^a=2\Rightarrow a=1\Rightarrow ab=-2\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

■ **نمایش تابع نمایی به کمک جدول**

اگر تابع با جدول، نمایش داده شده باشد و بخواهیم تشخیص دهیم که ضابطهٔ این تابع می‌تواند $f(x)=b\times a^x+c$ باشد یا نه، می‌توان در صورت امکان از نکتهٔ زیر استفاده کرد:

اگر x ها جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند و تفاضل مقادیر (y ها) متوالی، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، آن‌گاه نقاط داده‌شده، نقاط روی نمودار $f(x)=b\times a^x+c$ می‌باشند و برای به‌دست آوردن ضابطه، کافی است مختصات دو نقطهٔ داده‌شده را در ضابطهٔ تابع f قرار دهیم و مجهولات b و c را به‌دست آوریم. (قدرنسبت دنبالهٔ هندسی a می‌باشد.)

پس جدول‌های مقابل تابع نمایی نیستند:

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۲	۴	۶	۸	۱۰

(yها دنبالهٔ حسابی ساخته‌اند نه هندسی)

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

(در y ها علامت منفی می‌بینیم)

اما این جدول مربوط به یک تابع نمایی است:

x	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۳}{۲}$	۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۴}{۹}$

اگر دوست دارید یاد بگیرید که: وقتی در جدول مقادیر x و y، اعداد سطر اول دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و اعداد سطر دوم دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q بسازند، رابطهٔ $q = a^d$ برقرار است. یعنی: $\text{قدرنسبت yها} = (\text{پایهٔ تابع})^{\text{قدرنسبت xها}}$

مثلاً جدول روبه‌رو را ببینید:

x	-۱	۱	۳	۵
y	۳	۹	۲۷	۸۱

قدرنسبت xها برابر است با $d = ۲$ و قدرنسبت yها برابر است با $q = ۳$، پس داریم: $۳ = a^۲$

یعنی این جدول مربوط به یک تابع نمایی با پایهٔ $a = \sqrt{۳}$ است. (راستش را بخواهید $y = (\sqrt{۳})^{x+۳}$ است.)

جدول روبه‌رو یک تابع نمایی $y = a^x$ است. مقدار b کدام است؟

x	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰
y	۸۰۰	...	۳۲۰۰	b

۱) ۱۲۸۰۰ ۲) ۶۴۰۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۵۶۰۰

وقتی xها دنبالهٔ حسابی می‌سازند باید yها دنبالهٔ هندسی بسازند:

x	۱۱ $\xrightarrow{+۳}$	۱۴ $\xrightarrow{+۳}$	۱۷ $\xrightarrow{+۳}$	۲۰
y	۸۰۰ $\xrightarrow{\times q}$	... $\xrightarrow{\times q}$	۳۲۰۰ $\xrightarrow{\times q}$	b

پس: $۸۰۰ \times q \times q = ۳۲۰۰$. بنابراین $q^۲ = ۴$ و در نتیجه $q = ۲$. پس داریم: $b = ۳۲۰۰ \times ۲ = ۶۴۰۰$.

آیا جدول

x	۰	۱	۲	۳
y	-۳	۱	۱۳	۴۹

، نقاط روی نمودار $f(x) = b \times a^x + c$ می‌باشد؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، ضابطهٔ f را نیز مشخص کنید.

x ها جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت یک هستند. تفاضل y های متوالی را به‌دست می‌آوریم:

$$۱-(-۳)=۴ \,،\, ۱۳-۱=۱۲ \,،\, ۴۹-۱۳=۳۶ \Rightarrow \frac{۱۲}{۴}=\frac{۳۶}{۱۲}=r$$

بنابراین این جدول یک تابع با ضابطهٔ $f(x) = b \times a^x + c$ را مشخص می‌کند. داریم:

$$a = r = ۳ \Rightarrow f(x) = b \times ۳^x + c$$

$$f(۰) = -۳ \Rightarrow b \times ۳^۰ + c = -۳ \Rightarrow b + c = -۳ \Rightarrow c = -۳ - b \qquad (*)$$

$$f(۱) = b \times ۳^۱ + c = ۳b + c = ۱ \xrightarrow{(*)} ۳b - ۳ - b = ۱ \Rightarrow ۳b - b = ۴ \Rightarrow ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲$$

$$\xrightarrow{(*)} c = -۳ - ۲ = -۵ \Rightarrow f(x) = ۲ \times ۳^x - ۵$$

- **معادلات نمایی :**

هر معادله‌ای که در آن مجهول در توان قرار گرفته باشد را معادله توانی یا نمایی می‌گویند.

حل معادله توانی با پایه‌های برابر :

همان‌طور که از عنوان مشخص است، در اینجا پایه‌ی عبارت سمت راست معادله با پایه عبارت سمت چپ معادله برابر است.

هر گاه در یک معادله نمایی، پایه‌های دو طرف برابر باشند، آنگاه باید توانها هم برابر باشند. $\boxed{a^x = a^y \to x = y \quad a \neq 0}$

در زمان حل معادلات نمایی باید تا حد ممکن طرفین را ساده کنیم تا یک عبارت توانی در سمت راست و یک عبارت توانی در سمت چپ وجود داشته باشد.

مثال : معادلات نمایی زیر را حل کنید

$$3^{x-1} = 81 \to 3^{x-1} = 3^4 \to x - 1 = 4 \to x = 5$$

$$0.25^x = 4^{3x-2} \to (\tfrac{1}{4})^x = 4^{3x-2} \to 4^{-x} = 4^{3x-2} \to -x = 3x - 2 \to x = \tfrac{1}{2}$$

$$4^{3x} = 8^{x-1} \to (2^2)^{3x} = (2^3)^{x-1} \to 2^{6x} = 2^{3x-3} \to 6x = 3x - 3 \to x = -1$$

$$9^{\sqrt{x}+1} + 3^{1-2\sqrt{x}} = 28 \to (3^2)^{\sqrt{x}+1} + 3^{1-2\sqrt{x}} = 28 \to 3^{2\sqrt{x}+2} + 3^{1-2\sqrt{x}} = 28$$
$$\to 9 \times 3^{2\sqrt{x}} + 3 \times 3^{-2\sqrt{x}} = 28$$

در اینجا طرفین را در $3^{2\sqrt{x}}$ ضرب می‌کنیم تا توان منفی از بین برود و داریم :

$$9 \times 3^{4\sqrt{x}} + 3 = 28 \times 3^{2\sqrt{x}}$$

حال تغییر متغیر می‌دهیم. $3^{2\sqrt{x}} = t$ قرار می‌دهیم تا یک معادله درجه دوم به دست بیاید .

$$9t^2 - 28t + 3 = 0 \to t = \tfrac{1}{9} \quad t = 3$$

$3^{2\sqrt{x}} = \frac{1}{9}$ غیر قابل قبول است. زیرا برای کسری شدن باید توان منفی باشد و رادیکال هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. پس داریم :

$$3^{2\sqrt{x}} = 3 \to 2\sqrt{x} = 1 \to x = \tfrac{1}{4}$$

از معادلهٔ $4^{x-1} = \sqrt{2} \times 8^{2x+1}$ مقدار x کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{11}{8}$ ۳) $-\frac{5}{8}$ ۴) -2

ابتدا همه را برحسب پایهٔ ۲ می‌نویسیم:

$$4^{x-1} = \sqrt{2} \times 8^{2x+1} \Rightarrow (2^2)^{x-1} = 2^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{2x+1}$$

$$\Rightarrow 2^{2x-2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{6x+3} = 2^{6x+\frac{7}{2}} \xrightarrow{\text{پایه‌های مساوی}} 2x - 2 = 6x + \frac{7}{2} \Rightarrow 4x = \frac{-11}{2} \Rightarrow x = -\frac{11}{8}$$

مقدار x از معادلهٔ $2^{3x-1} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = (\sqrt[3]{2})^x$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

دو طرف تساوی را به‌صورت اعداد توان‌دار با پایهٔ ۲ می‌نویسیم:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = (2^{-3})^{2x-1} = 2^{-6x+3} \Rightarrow 2^{3x-1} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 2^{3x-1} \times 2^{-6x+3} = 2^{-3x+2} \qquad (1)$$

$$(\sqrt[3]{2})^x = (2^{\frac{1}{3}})^x = 2^{\frac{1}{3}x} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 2^{-3x+2} = 2^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow -3x + 2 = \frac{1}{3}x \xrightarrow{\times 3} -9x + 6 = x \Rightarrow 10x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

از معادلهٔ $20 = 2^{x-1} + 2^{x+1}$ مقدار $\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) بین ۱ و ۲ ۲) بین ۲ و ۳ ۳) بین ۳ و ۴ ۴) بین ۴ و ۵

سعی می‌کنیم در طرف چپ، دوتا عبارت نمایی را یکی کنیم:

$$2^{x-1}+2^{x+1}=2^x\times2^{-1}+2^x\times2^1=(\frac{1}{2}+2)2^x=\frac{5}{2}\times2^x=20 \Rightarrow 2^x=\frac{20}{\frac{5}{2}}=8=2^3 \Rightarrow x=3 \Rightarrow 1<\sqrt{x}<2$$

اگر $12 = 2^{2x} - 2^x$ باشد، حاصل $2^{x-1} + (\sqrt{2})^x$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

عبارت 2^{2x} را به‌صورت $(2^x)^2$ می‌نویسیم. داریم: $2^{2x}-2^x=12 \Rightarrow (2^x)^2-2^x=12$

با تغییر متغیر $A=2^x$، معادله را بر حسب A می‌نویسیم و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$A^2-A=12 \Rightarrow A^2-A-12=0 \Rightarrow (A-4)(A+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ A=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x=4=2^2 \Rightarrow x=2 \Rightarrow 2^{x-1}+(\sqrt{2})^x=2^1+(\sqrt{2})^2=2+2=4 \Rightarrow \text{گزینهٔ (۱) صحیح است.} \\ 2^x=-3 \Rightarrow \text{حاصل } 2^x \text{ هیچ‌وقت عدد منفی نمی‌شود. پس معادلهٔ } 2^x=-3 \text{ جواب ندارد.} \end{cases}$$

حل معادله نمایی با پایه‌های نابرابر :

زمانی که پایه‌ها نابرابر باشند، دو راه وجود دارد. ابتدا می‌توان فرض کرد که توان هر دو طرف برابر صفر است. زیرا هر عدد به توان صفر برابر یک است. اگر توان هر دو طرف صفر باشد، آنگاه طرفین هر دو برابر یک می‌شوند.

$4^{x-2}=5^{x^2-2x}$ جواب $x=2$

مسأله اینجاست که باید به یک جواب مشترک برای هر دو طرف برسیم. یعنی یک عدد که توان هر دو طرف را صفر کند. حال اگر چنین نشد، چه؟ آیا معادله جواب ندارد؟

پاسخ اینست که روش بالا یک راه‌حل کلی برای معادلات توانی با پایه‌های نابرابر نیست. برای حل معادلات نمایی با پایه‌های نابرابر، باید از طرفین لگاریتم بگیریم تا معادله تبدیل به معادله خطی شود. (که در درس بعد با آن آشنا خواهیم شد ...)

- **نامعادلات نمایی** :

برای حل نامعادلات نمایی نیز مانند معادلات نمایی ابتدا پایه ها را یکسان می کنیم ، با این تفاوت که اگر پایه عددی بین صفر و یک باشد جهت نامعادله عوض می شود . دقت کنید :

$$a^{u(x)}>a^{V(x)} \begin{cases} \xrightarrow{a>1} u(x)>V(x) \\ \xrightarrow{0<a<1} u(x)<V(x) \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادلهٔ $5^x\times(\sqrt{5})^{2x}\le(\frac{1}{5})^{3x-1}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{5}]$ ۲) $(-\infty,5]$ ۳) $[5,+\infty)$ ۴) $[\frac{1}{5},+\infty)$

$$5^x\times(\sqrt{5})^{2x}=5^x\times(5^{\frac{1}{2}})^{2x}=5^x\times5^x=5^{2x} \quad , \quad (\frac{1}{5})^{3x-1}=(5^{-1})^{3x-1}=5^{-3x+1}$$

$$5^{2x}\le5^{-3x+1} \xrightarrow{\text{پایه بزرگ‌تر از یک است.}} 2x\le-3x+1 \Rightarrow 5x\le1 \Rightarrow x\le\frac{1}{5} \Rightarrow \text{گزینهٔ (۱) صحیح است.}$$

اگر تابع $f(x)=(\frac{a-۳}{۴-a})^x$، ضابطهٔ یک تابع نمایی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۳,۴)-\{\frac{۷}{۲}\}$ ۳) $a>۴$ ۴) $a<۳$

نکته: در تابع نمایی $y=a^x$، پایه (a) عددی مثبت و مخالف یک است.

شرط آن‌که تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{a-۳}{۴-a})^x$ یک تابع نمایی باشد، آن است که: ۱) $\frac{a-۳}{۴-a}>۰$ ۲) $\frac{a-۳}{۴-a}\neq ۱$

$$\frac{a-۳}{۴-a}>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت به روش سریع}} ۳<a<۴ \qquad (۱)$$

$$\frac{a-۳}{۴-a}\neq ۱ \Rightarrow a-۳\neq ۴-a \Rightarrow ۲a\neq ۷ \Rightarrow a\neq \frac{۷}{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱)\bigcap(۲)\Rightarrow a\in(۳,۴)-\{\frac{۷}{۲}\}$$

نمودار توابع $f(x)=۴^x$ و $g(x)=(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^x$ همدیگر را در نقطهٔ A قطع می‌کنند. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $(-۲,-۱)$ کدام است؟

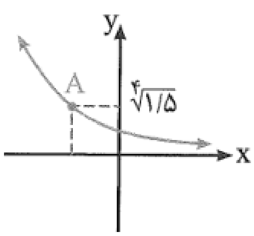
۱) ۲ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

نکته: نمودار تمام توابع نمایی از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرند. پس تمام توابع نمایی همدیگر را در نقطهٔ $A(۰,۱)$ قطع می‌کنند.

اگر $B(-۲,-۱)$ باشد، آن‌گاه:

$$AB=\sqrt{(-۲-۰)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

شکل مقابل، نمودار $y=(\frac{۲}{۳})^x$ است. طول نقطهٔ A کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۶}$

با توجه به نمودار، عرض نقطهٔ A برابر $\sqrt[۴]{۱/۵}$ است. با حل معادلهٔ $f(x)=\sqrt[۴]{۱/۵}$، مقدار x به‌دست می‌آید:

$$f(x)=y=\sqrt[۴]{۱/۵}=\sqrt[۴]{\frac{۳}{۲}}=(\frac{۳}{۲})^{\frac{۱}{۴}}=((\frac{۲}{۳})^{-۱})^{\frac{۱}{۴}}=(\frac{۲}{۳})^{-\frac{۱}{۴}}=(\frac{۲}{۳})^x \Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

مقدار تابع $y=(۰/۵)^x$ به ازای $x=-۰/۱۵$ در کدام بازهٔ زیر قرار دارد؟

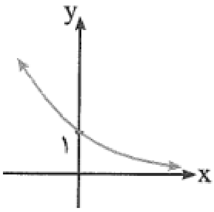
۱) $(۱,۲)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-۱,۰)$

نکته: تابع نمایی $y=a^x$ با شرط $a>۱$، تابعی اکیداً صعودی است.

ابتدا مقدار $(۰/۵)^{-۰/۱۵}$ را به‌صورت یک عدد توان‌دار با پایهٔ یک عدد طبیعی می‌نویسیم:

$$x=-۰/۱۵\Rightarrow y=(۰/۵)^x=(\frac{۱}{۲})^{-۰/۱۵}=((\frac{۱}{۲})^{-۱})^{\frac{۱۵}{۱۰۰}}=۲^{\frac{۳}{۲۰}} \Rightarrow \quad ۰<\frac{۳}{۲۰}<۱\Rightarrow ۲^۰<۲^{\frac{۳}{۲۰}}<۲^۱\Rightarrow ۲^{\frac{۳}{۲۰}}\in(۱,۲)$$

نمودار تابع نمایی $f(x)=۳^{(a+۱)x}+(a^۲+۲a)x$ به‌صورت روبه‌رو است. a کدام است؟



۱) -۲
۲) -۳
۳) صفر
۴) ۱

در تابع نمایی، یک‌جمله‌ای بر حسب x وجود ندارد، پس ضریب x باید برابر صفر باشد، داریم:

$$a^۲+۲a=۰\Rightarrow a(a+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\Rightarrow f(x)=۳^x\\ a=-۲\Rightarrow f(x)=۳^{-x}=(\frac{۱}{۳})^x\end{cases}$$

با توجه به نمودار داده‌شده، پایهٔ تابع نمایی باید عددی بین صفر و یک باشد، پس $a=-۲$ قابل قبول است.

اگر $A=(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^{-۶}$ ، $B=(\sqrt{۳})^{\sqrt{۳۲}}$ و $C=(\frac{۱}{۳})^{-\sqrt{۱۸}}$ باشند، کدام نامساوی زیر صحیح است؟

۱) $A>C>B$ ۲) $C>A>B$ ۳) $A>B>C$ ۴) $B=C<A$

$$A=(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^{-۶}=(\frac{۱}{۳^{\frac{۱}{۲}}})^{-۶}=(۳^{-\frac{۱}{۲}})^{-۶}=۳^۳$$

$$B=(\sqrt{۳})^{\sqrt{۳۲}}=(۳^{\frac{۱}{۲}})^{\sqrt{۳۲}}=۳^{\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲}}=۳^{\frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۲})}=۳^{۲\sqrt{۲}}$$

$$\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}\Rightarrow C=(\frac{۱}{۳})^{-\sqrt{۱۸}}=(۳^{-۱})^{-\sqrt{۱۸}}=۳^{۳\sqrt{۲}}$$

تابع $y=۳^x$ تابعی اکیداً صعودی است، بنابراین:

$$۳\sqrt{۲}>۳>۲\sqrt{۲}\Rightarrow ۳^{۳\sqrt{۲}}>۳^۳>۳^{۲\sqrt{۲}}\Rightarrow C>A>B$$

کدام تابع زیر، اکیداً صعودی است؟

۱) $y=(\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱})^x$ ۲) $y=(\frac{۴}{\pi})^x$ ۳) $y=(\frac{۴}{۳})^{-x}$ ۴) $y=-\sqrt{x}$

> نکته: اگر $۰<b<۱$، آن‌گاه $y=b^x$ تابع اکیداً نزولی است.

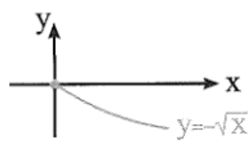
پایهٔ هر یک از گزینه‌ها را بر حسب این‌که عددی بزرگ‌تر از یک هست یا عددی بین صفر و یک، مشخص می‌کنیم:

$$\pi\simeq ۳/۱۴\Rightarrow \frac{۴}{\pi}>۱ \qquad \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt{۲}-۱\simeq ۰/۴<۱$$

$$y=(\frac{۴}{۳})^{-x}=(\frac{۳}{۴})^x\ ,\ ۰<\frac{۳}{۴}<۱$$

پس فقط تابع $y=(\frac{۴}{\pi})^x$ ، تابعی اکیداً صعودی است.

$y=-\sqrt{x}$ تابعی نمایی نیست، ولی نمودار آن به‌صورت مقابل می‌باشد. این تابع اکیداً نزولی است.



اگر $f(x)=۲^x$ باشد، مقدار $f(x+۴)-۵f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $-f(x)$ ۲) $f(x)$ ۳) $۶f(x)$ ۴) $۱۱f(x)$

ضابطهٔ هر یک از تابع‌های $f(x+1)$ و $f(x+4)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=2^x \Rightarrow f(x+1)=2^{x+1}=2^x\times 2^1=2\times 2^x \qquad (1)$$

$$f(x+4)=2^{x+4}=2^x\times 2^4=16\times 2^x \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow f(x+4)-5f(x+1)=16\times 2^x-5(2\times 2^x)=16\times 2^x-10\times 2^x=6\times 2^x=6f(x)$$

مقدار x از معادلهٔ $(\frac{1}{8})^{3x}=32^{x+1}$، برابر کدام است؟

۱) $-\frac{14}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{5}{14}$

> نکته: برای حل معادلات نمایی، معادله را به‌صورت $b^u=b^v$ می‌نویسیم و سپس با حل معادلهٔ $u=v$، مقدار متغیر را به‌دست می‌آوریم.

پایه‌های دو طرف تساوی را تبدیل به ۲ می‌کنیم:

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}, 32=2^5$$

$$(\frac{1}{8})^{3x}=32^{x+1}\Rightarrow (2^{-3})^{3x}=(2^5)^{x+1}\Rightarrow 2^{-9x}=2^{5x+5}\Rightarrow -9x=5x+5\Rightarrow -14x=5\Rightarrow x=-\frac{5}{14}$$

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $2^{5x+1}=8^{x^2+1}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{3}$

پایه‌های دو طرف تساوی را یکی می‌کنیم:

$$8^{x^2+1}=(2^3)^{x^2+1}=2^{3x^2+3}$$

$$2^{5x+1}=8^{x^2+1}\Rightarrow 2^{5x+1}=2^{3x^2+3}\Rightarrow 3x^2+3=5x+1\Rightarrow 3x^2-5x+2=0\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$$

ریشهٔ معادلهٔ $(\frac{1}{9})^{2x}=\frac{3^{-x}\times(\sqrt[3]{3})^{x+1}}{81}$ کدام است؟

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

دو طرف معادله را به‌صورت اعداد نمایی با پایهٔ ۳ می‌نویسیم:

$$\frac{3^{-x}\times(\sqrt[3]{3})^{x+1}}{81}=\frac{3^{-x}\times(3^{\frac{1}{3}})^{x+1}}{3^4}=\frac{3^{-x}\times 3^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}}{3^4}=\frac{3^{-x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}}{3^4}=3^{-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}-4}=3^{-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}} \qquad (1)$$

$$(\frac{1}{9})^{2x}=((\frac{1}{3})^2)^{2x}=(3^{-2})^{2x}=3^{-4x} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow 3^{-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}}=3^{-4x}\Rightarrow -\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}=-4x\Rightarrow 4x-\frac{2}{3}x=\frac{11}{3}\Rightarrow \frac{10}{3}x=\frac{11}{3}\Rightarrow 10x=11\Rightarrow x=\frac{11}{10}=1/1$$

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $3^{2x}-10\times 3^x+9=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

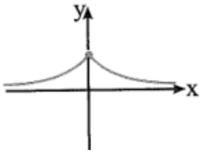
مجموعه جواب نامعادلهٔ $۹^{-x+۶} \leq ۳^{۲x-۸}$ بازهٔ $(-\infty, a]$ است. a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱-

اگر $f(x) = ۱ - (\frac{۱}{۲})^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{xf(x)}$، کدام بازه است؟

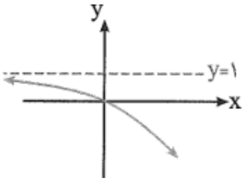
۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty, ۰)$ ۳) $(-\infty, +\infty)$ ۴) $(۰, +\infty)$

شکل مقابل، نمودار کدام تابع است؟ (سراسری ریاضی)



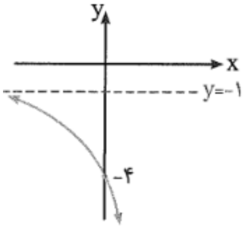
۱) $y = |۲^x|$ ۲) $y = ۲^{-|x|}$
۳) $y = ۲^{|x|}$ ۴) $y = |۲^{-x}|$

ضابطهٔ تابع با نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y = -(\frac{۱}{۲})^x - ۱$ ۲) $y = (\frac{۱}{۲})^x + ۱$
۳) $y = ۱ - (\frac{۱}{۲})^{-x}$ ۴) $y = -۱ + (\frac{۱}{۲})^{-x}$

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = a \times ۲^x + b$ به‌صورت مقابل است. $a - b$ کدام است؟



۱) ۲-
۲) ۴-
۳) ۲
۴) ۴

نمودارهای دو تابع $y = (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}$ و $y = ۳^x + \frac{۸}{۳}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ (۱،۱-) کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

نمودار تابع $f(x) = ۲^{x+۲} - ۸$، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو منحنی به معادلات $y = ۲^x$ و $y = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴$، از نقطهٔ $A(۰,۴)$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

در تابع با ضابطهٔ $b > ۰$; $f(x) = a.b^x$ داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$. مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

- مفهوم لگاریتم:

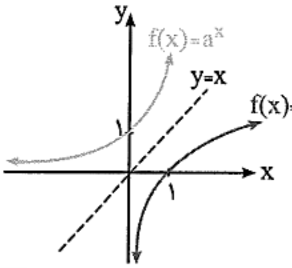
قبلا با مفهوم رادیکال آشنا شده‌اید. می‌دانید که رادیکال به نوعی عکس عمل توان است.
$\sqrt[n]{x}$ برابر است با عددی که وقتی به توان n برسد، برابر با x شود.
اما در مورد توان، سؤال دیگری هم می‌توان پرسید: چه عددی هست که اگر n به توان آن برسد، برابر با x می‌شود.
یعنی اگر داشته باشیم، $a^y = x$ ، چگونه می‌توان با داشتن a وx ، مقدار y را حساب کرد؟
تلاش برای جواب به این سؤال موجب شد که ریاضی‌دانان مفهومی را به نام لگاریتم ابداع کنند.
لگاریتم را با نماد $\log_a x$ نمایش می‌دهند.
aرا پایه لگاریتم می‌نامند. پایه لگاریتم همواره باید بزرگتر از صفر و نامساوی با یک باشد.
xرا عدد جلوی لگاریتم می‌نامند x .باید همواره بزرگتر از صفر (مثبت) باشد.
همه جملات بالا را می‌توان به زبان ریاضی به صورت زیر خلاصه کرد:

$$a^y = x \leftrightarrow y = log_a x \quad \begin{cases} a > 0 a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

- **ویژگی های تابع لگاریتمی $f(x) = \log_a x$ با شرط $a > 1$:**

۱) نمودار تابع $f(x)=\log_a x$ با توجه به نمودار $f(x)=a^x$ و این‌که دو نمودار نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌باشند، به‌صورت زیر است:



۲) دامنه و برد تابع $f(x)=\log_a x$ با توجه به نمودار به‌صورت مقابل می‌باشد: $D_f=(0,+\infty)$ ، $R_f=\mathbb{R}$

$D_f=(0,+\infty)$ به این معنی است که لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود. (لگاریتم برای اعداد منفی و صفر، بی‌معنی است.)

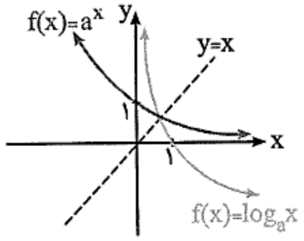
۳) با افزایش x، مقدار $\log_a x$ افزایش پیدا می‌کند. (تابع $y=\log_a x$ در حالتی که $a>1$ باشد، اکیداً صعودی است.)

۴) نمودار توابع $f(x)=a^x$ و $f(x)=\log_a x$ همدیگر را قطع نمی‌کنند. به عبارت دیگر در حالتی که $a>1$ باشد، معادلهٔ $a^x=\log_a x$ جواب ندارد.

۵) نمودار تابع، محور xها را در نقطهٔ (۱،۰) قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

- **ویژگی های تابع لگاریتمی $f(x) = \log_a x$ با شرط $0 < a < 1$:**

۱) نمودار تابع $f(x)=\log_a x$، با توجه به نمودار $f(x)=a^x$ به‌صورت زیر می‌باشد:



۲) دامنه و برد تابع $f(x)=\log_a x$ با توجه به نمودار به‌صورت مقابل می‌باشد: $D_f=(0,+\infty)$ ، $R_f=\mathbb{R}$

۳) با افزایش x، مقدار $\log_a x$ کاهش پیدا می‌کند. (تابع $y=\log_a x$ در حالتی که $0<a<1$، اکیداً نزولی است.)

۴) نمودار توابع $f(x)=a^x$ و $f(x)=\log_a x$ همدیگر را در یک نقطه روی خط $y=x$ قطع می‌کنند.(معادلهٔ $a^x=\log_a x$ حداقل یک جواب دارد.)

۵) نمودار تابع $f(x)=\log_a x$، محور xها را در نقطهٔ (۱،۰) قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود. به عنوان مثال، به جای $\log_{۱۰} ۷$ می‌نویسیم $\log ۷$

حاصل کدام از بقیه بیشتر است؟

۱) $\log_{\frac{۱}{۵}} ۱۲۵$ ۲) $\log_{۴} \frac{۱}{۶۴}$ ۳) $\log_{\frac{۱}{۴}} ۱۶$ ۴) $\log_{۲} \frac{۱}{۸}$

۱) $\log_{\frac{۱}{۵}} ۱۲۵$ می‌پرسد $\frac{۱}{۵}$ به توانِ چند می‌شود ۱۲۵؟ چون ۱۲۵ همان $۵^{۳}$ است. جواب ۳− خواهد بود. ببینید: $(\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵$

۲) $\log_{۴} \frac{۱}{۶۴}$ یعنی ۴ به توان چند می‌شود $\frac{۱}{۶۴}$ ؟ خُب $(\frac{۱}{۴})^{۳}$ می‌شود $\frac{۱}{۶۴}$. پس جواب ما ۳− است. ببینید: $(\frac{۱}{۴})^{-۳} = ۶۴$

۳) حاصل $\log_{۲} \frac{۱}{۸}$ هم می‌شود ۳−. جواب ۲ به توان چند $\frac{۱}{۸}$ است؟ خُب $۲^{۳}$ می‌شود ۸ و $۲^{-۳}$ می‌شود $\frac{۱}{۲^{۳}}$ یعنی $\frac{۱}{۸}$.

۴) اما $\log_{\frac{۱}{۴}} ۱۶$ می‌شود ۲− و از بقیه بیشتر است: $(\frac{۱}{۴})^{-۲} = ۱۶ \Leftrightarrow \log_{\frac{۱}{۴}} ۱۶ = -۲$

در تابع نمایی $f(x) = a^{x}$ می‌دانیم $f(\frac{۳}{۲}) = ۸$؛ مقدار $f^{-۱}(۱۶)$ چه‌قدر کم‌تر از $f(۲)$ است؟

۱) ۳   ۲) ۷   ۳) ۱۴   ۴) ۱۲

اول a را پیدا کنیم:

$$f(x) = a^{x} \xrightarrow{f(\frac{۳}{۲}) = ۸} a^{\frac{۳}{۲}} = ۸ \Rightarrow a^{\frac{۳}{۲}} = ۲^{۳} \xrightarrow{\text{به توان } \frac{۲}{۳}} (a^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۲}{۳}} = (۲^{۳})^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow a = ۲^{۲} = ۴$$

پس داریم: $f^{-۱}(x) = \log_{۴} x \quad , \quad f(x) = ۴^{x}$

بنابراین $f(۲) = ۴^{۲} = ۱۶$ و $f^{-۱}(۱۶) = \log_{۴} ۱۶ = ۲$ که اختلافشان ۱۴ است.

نمودار تابع $y = \log(x + ۲)$ را ابتدا سه واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار تابع حاصل، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۱۱   ۴) ۱۲

با انتقال سه واحد به سمت راست، ضابطهٔ تابع $y = \log(x + ۲)$ به‌صورت $y = \log((x + ۲) - ۳) = \log(x - ۱)$ درمی‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع حاصل به‌صورت $y = -۱ + \log(x - ۱)$ درمی‌آید. محل تلاقی نمودار $y = -۱ + \log(x - ۱)$ با محور x ها از حل معادلهٔ $y = ۰$ به‌دست می‌آید:

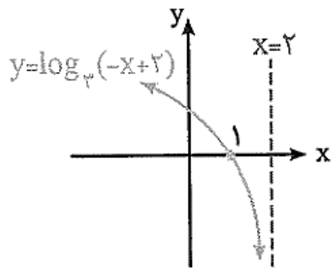
$$y = ۰ \Rightarrow -۱ + \log(x - ۱) = ۰ \Rightarrow \log(x - ۱) = ۱ = \log ۱۰ \Rightarrow x - ۱ = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۱ \Rightarrow$$

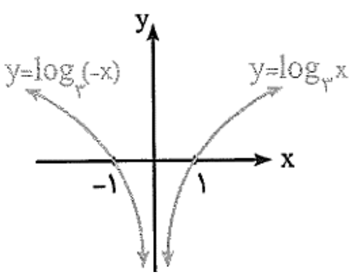
گزینهٔ (۳) صحیح است.

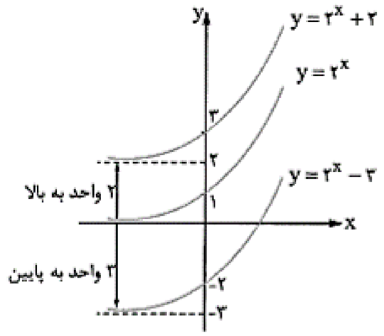
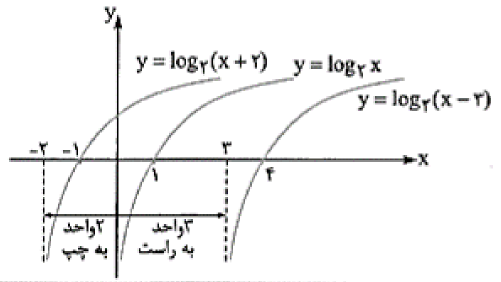
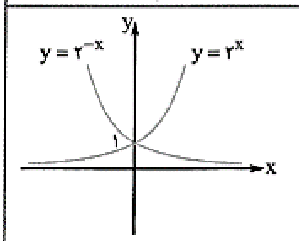
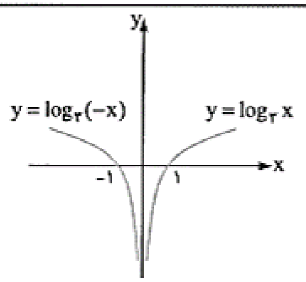
نکته: توابع $y = \log_{a} x$ و $y = \log_{a}(-x)$ نسبت به محور y ها قرینهٔ همدیگر هستند.

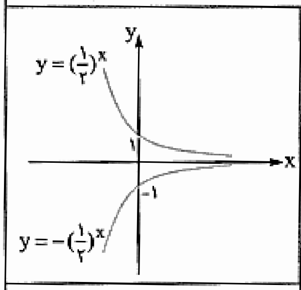
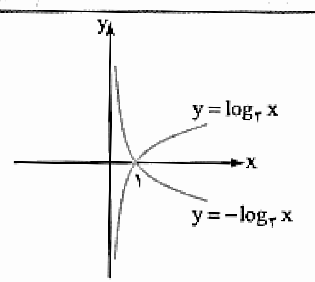
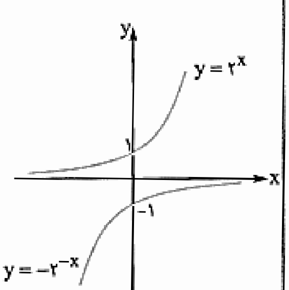
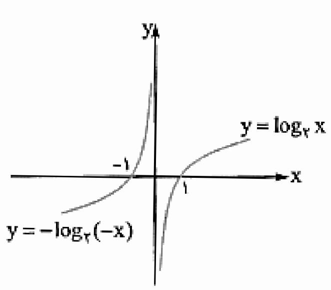
به کمک انتقال و قرینه نسبت به محور y ها می‌توان نمودار توابع به فرم $y = f(-x \pm k)$ را رسم کرد. به عنوان مثال، برای رسم نمودار تابع $y = \log_{۳}(-x + ۲)$، داریم: $y = \log_{۳}(-x + ۲) = \log_{۳}(-(x - ۲))$

اگر ابتدا نمودار $y = \log_{۳} x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، نمودار $y = \log_{۳}(-x)$ به‌دست می‌آید و سپس با انتقال ۲ واحد نمودار $y = \log_{۳}(-x)$ به سمت راست، نمودار $y = \log_{۳}(-(x - ۲))$ به‌دست می‌آید (توجه کنید که در انتقال ۲ واحد به سمت راست، خط $x = ۰$ نیز باید ۲ واحد به سمت راست انتقال پیدا کند).

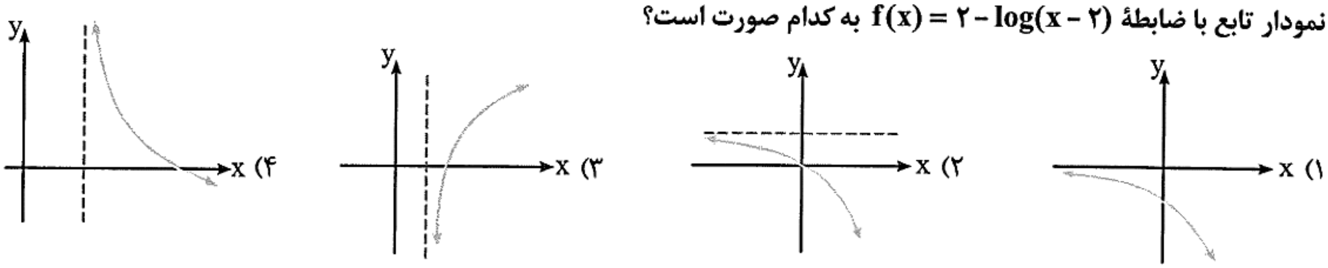


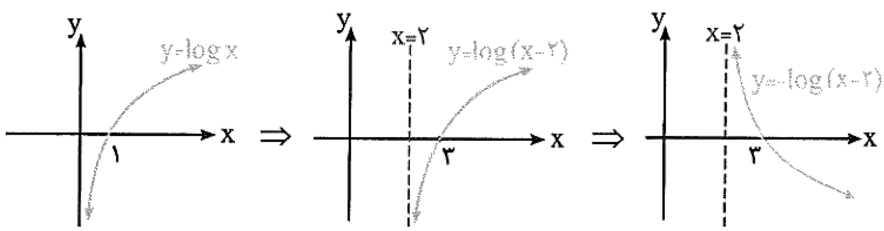


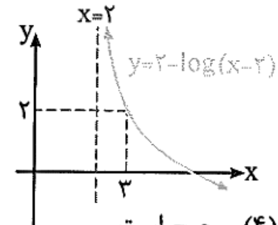
نام عمل	ضابطه	روش کار	مثال
انتقال عرضی	$y=f(x)+b$	نمودار f را b واحد به بالا می‌بریم. برای $b<0$ به پایین می‌بریم. به مقادیر برد b تا افزوده می‌شود. ● دامنه تغییر نمی‌کند.	
انتقال طولی	$y=f(x+a)$	نمودار f را a واحد به طرف چپ می‌بریم. وقتی a منفی باشد به طرف راست منتقل می‌شود. ● از اعداد موجود در دامنه a تا کم می‌شود و برد تغییر نمی‌کند.	
بازتاب نسبت به محور y	$y=f(-x)$	نمودار f نسبت به محورy‌ها قرینه می‌شود. ● اعضای دامنه قرینه می‌شوند و برد تغییر نمی‌کند.	

نام عمل	ضابطه	روش کار	مثال
بازتاب نسبت به محور x	$y=-f(x)$	نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود. ● اعضای برد قرینه می‌شوند و دامنه تغییر نمی‌کند.	
بازتاب نسبت به مبدأ	$y=-f(-x)$	نمودار f نسبت به مبدأ قرینه می‌شود یعنی 180° حول مبدأ می‌چرخد. می‌توان گفت که نسبت به محور x و سپس نسبت به y قرینه می‌شود. ● اعضای دامنه و برد، هر دو قرینه می‌شوند.	

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲ - \log(x - ۲)$ به کدام صورت است؟

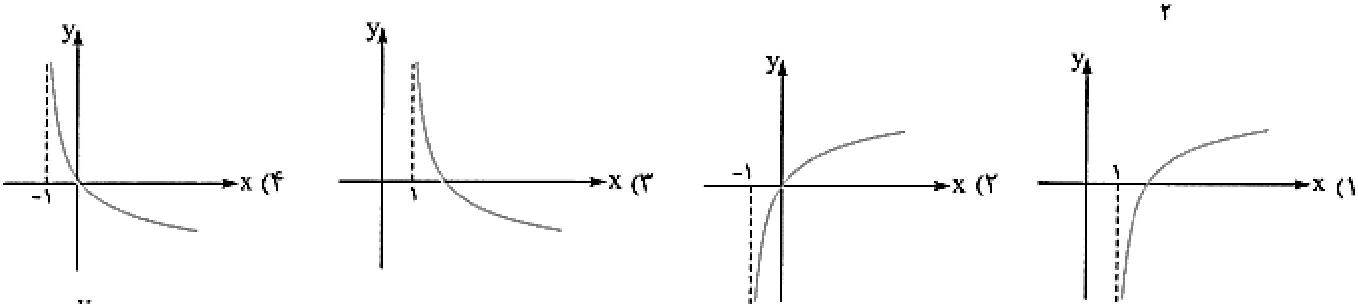




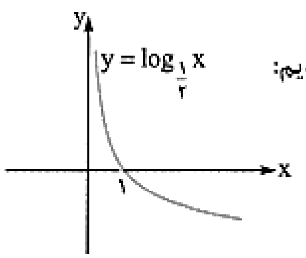


بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

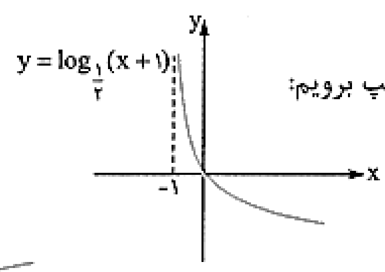
نمودار تابع $y = -\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)$ کدام است؟



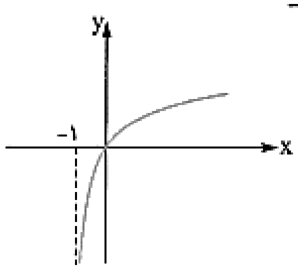
نمودار $\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را بلدیم:



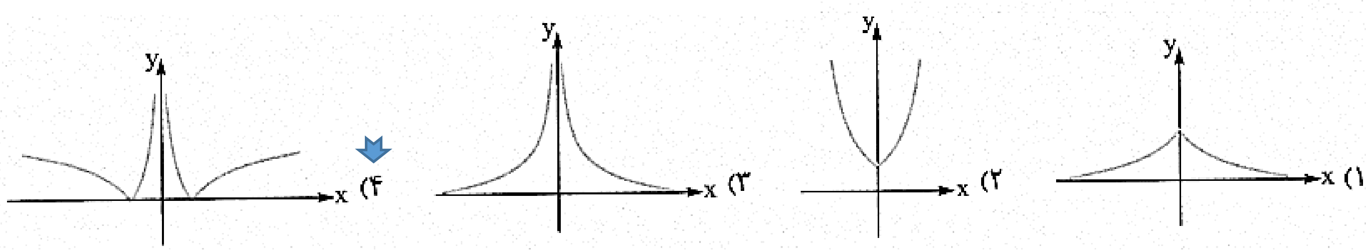
حالا چون x به $x+۱$ تبدیل شده است، باید یک واحد به چپ برویم:



و به خاطر علامت منفی باید نمودار را نسبت به محور x آینه کنیم:



نمودار تابع $y = |\log_{\frac{۱}{۲}} |x||$ به کدام شکل است؟



- **دامنه توابع لگاریتمی :**

فرم کلی توابع لگاریتمی به صورت روبرو است:

$$f(x) = log_{h(x)}^{g(x)}$$

طبق تعریف لگاریتم، عدد جلوی لگاریتم باید بزرگتر از صفر باشد. پایه لگاریتم هم باید بزرگتر از صفر و مخالف یک باشد.

$$\boxed{D_f = \{x \in D_h \cap D_g | g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}}$$

دامنهٔ تابع $y = \log_{x-۱} \frac{۳-x}{x+۲}$ چگونه است؟

۱) فقط یک بازه ۲) یک بازه و یک نقطه ۳) دو بازه ۴) تُهی

شرط‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{۳-x}{x+۲} > ۰ , x-۱ > ۰ , x-۱ \neq ۱$$

x	$-\infty$		-۲		۳		$+\infty$
$\frac{۳-x}{x+۲}$		$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	

$$\Rightarrow -۲ < x < ۳ \ , \ x > ۱ \ , \ x \neq ۲ \Rightarrow ۱ < x < ۳ \ , \ x \neq ۲$$

پس دامنه به صورت $(۱,۳) - \{۲\}$ یا $(۱,۲) \cup (۲,۳)$ است، یعنی شامل ۲ بازه است.

قسمتی از دامنهٔ تابع $f(x) = \log_۵ (۲ - \sqrt{x^۲ + ۳x})$ بازهٔ $[b,۱)$ می‌باشد. کم‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) صفر

مبنای لگاریتم عدد ۵ است و در نتیجه در هر دو شرط $a \neq ۱$ و $a > ۰$ صدق می‌کند. پس فقط با حل نامعادلهٔ $۲ - \sqrt{x^۲ + ۳x} > ۰$، دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم (دقت کنید عبارت زیر رادیکال نیز نباید منفی باشد):

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ + ۳x \geq ۰ , ۲ - \sqrt{x^۲ + ۳x} > ۰\}$$

$$x^۲ + ۳x \geq ۰ \Rightarrow x(x+۳) \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq -۳ \ \text{یا} \ x \geq ۰ \qquad (۱)$$

$$۲ - \sqrt{x^۲ + ۳x} > ۰ \Rightarrow ۲ > \sqrt{x^۲ + ۳x} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} ۴ > x^۲ + ۳x \Rightarrow x^۲ + ۳x - ۴ < ۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)(x-۱) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۴ < x < ۱ \qquad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow D_f = (-۴,-۳] \cup [۰,۱)$$

با توجه به فرض، $b = ۰$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

- **ویژگی های لگاریتم :**

قوانین لگاریتم

① $\log_a ۱ = ۰$

② $\log_a a = ۱$

③ $\log_c ab = \log_c a + \log_c b \quad (a,b,c \in \mathbb{R}^+ , c \neq ۱)$

④ $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \quad (a,b,c \in \mathbb{R}^+ , c \neq ۱)$

⑤ $\log_b a^n = n \log_b a$

⑥ $\log_{b^m} a = \frac{۱}{m} \log_b a$

⑦ $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$

⑧ $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

⑨ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

با فرض $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۴۷$، مقدار $\log ۱۲$ کدام است؟

۱) ۰/۸۷ ۲) ۰/۹۷ ۳) ۱/۰۷ ۴) ۱/۱۷

تجزیهٔ عدد ۱۲ به‌صورت $۱۲ = ۲^۲ \times ۳$ است، داریم:

$$\log ۱۲ = \log(۲^۲ \times ۳) = \log ۲^۲ + \log ۳ = ۲\log ۲ + \log ۳ = ۲(۰/۳) + ۰/۴۷ = ۰/۶ + ۰/۴۷ = ۱/۰۷ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

در مسائل لگاریتم و برای به‌دست آوردن حاصل عبارت، باید اعداد مرکب را تجزیه کنیم، اعداد اعشاری را به‌صورت کسر بنویسیم و اعداد رادیکالی را با استفاده از فرمول $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ به‌صورت عدد توان‌دار بنویسیم.

حاصل $\log_{\sqrt{۲}} ۰/۲۵ + \log_{\frac{۱}{۷}} \sqrt[۳]{۷}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $-\frac{۱۱}{۶}$ ۴) ۲

$$۰/۲۵ = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴} = ۲^{-۲} \ , \ \sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \log_{\sqrt{۲}} ۰/۲۵ = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} ۲^{-۲} = \frac{-۲}{\frac{۱}{۲}} \overset{۱}{\cancel{\log_۲ ۲}} = -۴ \qquad (۱)$$

$$\log_{\frac{۱}{۷}} \sqrt[۳]{۷} = \log_{۷^{-۱}} ۷^{\frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{-۱} \overset{۱}{\cancel{\log_۷ ۷}} = -\frac{۱}{۳} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \log_{\sqrt{۲}} ۰/۲۵ + \log_{\frac{۱}{۷}} \sqrt[۳]{۷} = -۴ - \frac{۱}{۳} = -\frac{۱۳}{۳} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

مقدار عبارت $\log\frac{۱}{۲} + \log\frac{۲}{۳} + \log\frac{۳}{۴} + \cdots + \log\frac{۹۹}{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $\log ۹۹$ ۲) $-\log ۹۹$ ۳) -۲ ۴) ۲

روش اول: با استفاده از قانون $\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$، داریم:

$$\log\frac{۱}{۲} + \log\frac{۲}{۳} + \log\frac{۳}{۴} + \cdots + \log\frac{۹۹}{۱۰۰} = (\log ۱ - \cancel{\log ۲}) + (\cancel{\log ۲} - \cancel{\log ۳}) + (\cancel{\log ۳} - \cancel{\log ۴}) + \cdots + (\cancel{\log ۹۹} - \log ۱۰۰)$$

$$= \overset{۰}{\cancel{\log ۱}} - \overset{۲}{\cancel{\log ۱۰۰}} = -۲ \ , \ (۱۰^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow \log ۱۰۰ = ۲) \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

روش دوم: با استفاده از قانون $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$، داریم:

$$\log\frac{۱}{۲} + \log\frac{۲}{۳} + \cdots + \log\frac{۹۹}{۱۰۰} = \log(\frac{۱}{\cancel{۲}} \times \frac{\cancel{۲}}{\cancel{۳}} \times \cdots \times \frac{\cancel{۹۹}}{۱۰۰}) = \log\frac{۱}{۱۰۰} = \log ۱۰^{-۲} = -۲ \overset{۱}{\cancel{\log ۱۰}} = -۲$$

با توجه به قانون $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ و تساوی $\log_{10} 10 = 1$، داریم:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \cancel{\log 10}^{1} - \log 2 \Rightarrow \quad \log 5 = 1 - \log 2 \quad , \quad \log 2 = 1 - \log 5$$

اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، $\log 45$ کدام است؟

۱) $2a + b - 1$ ۲) $a + b + 1$ ۳) $2b + 1 - a$ ۴) $b - a - 1$

$$\log 45 = \log(3^2 \times 5) = \log 3^2 + \log 5 \quad , \quad \log 5 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log 45 = 2\log 3 + (1 - \log 2) \xrightarrow[\log 3 = b]{\log 2 = a} 2b + 1 - a$$

اگر $\log 3 = a$، آن‌گاه مقدار $\log_{30} 100$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{a}$ ۲) $\frac{a+1}{2}$ ۳) $\frac{2}{a+1}$ ۴) $\frac{a}{2}$

قانون تغییر مبنا

$$\log_{30} 100 = \frac{\log 100}{\log 30} = \frac{\log 10^2}{\log(3 \times 10)} = \frac{2\cancel{\log 10}^{1}}{\log 3 + \cancel{\log 10}^{1}} \xrightarrow{\log 3 = a} \frac{2}{a+1} \Rightarrow$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

حاصل عبارت $5^{(2\log_5 2 + 3\log_5 3)}$ را به‌دست آورید.

عبارت $2\log_5 2 + 3\log_5 3$ را به‌صورت $\log_5 a$ می‌نویسیم:

$$2\log_5 2 + 3\log_5 3 = \log_5 2^2 + \log_5 3^3 = \log_5(2^2 \times 3^3) = \log_5 108 \Rightarrow 5^{(2\log_5 2 + 3\log_5 3)} = 5^{\log_5 108} = 108$$

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $25^{\log x} - 4x^{\log 5} = 5$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

داریم:

$$x^{\log 5} = 5^{\log x} \quad , \quad 25^{\log x} = (5^2)^{\log x} = 5^{2\log x} = (5^{\log x})^2 = (x^{\log 5})^2$$

$$25^{\log x} - 4x^{\log 5} = 5 \Rightarrow (x^{\log 5})^2 - 4(x^{\log 5}) - 5 = 0$$

قرار می‌دهیم $x^{\log 5} = A$، داریم:

$$A^2 - 4A - 5 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A - 5 = 0 \\ \text{یا} \\ A + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ \text{یا} \\ A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\log 5} = 5 \Rightarrow 5^{\log x} = 5 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ x^{\log 5} = -1 \Rightarrow 5^{\log x} = -1 \quad \text{غیرممکن} \end{cases}$$

معادله فقط یک جواب $x = 10$ دارد و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

برای تعیین تعداد ارقام اعداد طبیعی توان‌دار به‌صورت n^m، مقدار $\log n^m$ را به‌دست می‌آوریم، اگر $k \le \log n^m < k+1$ (توجه کنید که k و $k+1$ دو عدد طبیعی متوالی هستند)، آن‌گاه n^m دارای $k+1$ رقم است.

اگر $\log 2 = 0/301$ باشد، عدد 2^{50} چند رقمی است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

حاصل $\log 2^{50}$ را به‌دست می‌آوریم: $\log 2^{50} = 50 \log 2 = 50 \times 0/301 = 15/05 \Rightarrow 15 \le \log 2^{50} < 16 \Rightarrow$ 2^{50} دارای ۱۶ رقم است.

■ **معادلات لگاریتمی** : این معادلات به دو دسته زیر تقسیم می شوند :

۱) اگر $\log_b f(x)=a$، آن‌گاه $f(x)=b^a$ و با حل این معادله، جواب‌هایی را که در دامنهٔ تعریف قرار دارند، مشخص می‌کنیم.

۲) اگر $\log_b f(x)=\log_b g(x)$، آن‌گاه $f(x)=g(x)$ و با حل معادلهٔ اخیر، جواب‌هایی که در دامنهٔ تعریف قرار دارند را مشخص می‌کنیم.

مثلاً در معادلهٔ $\log_4(3x+1)=2$ داریم: $3x+1=4^2=16 \Rightarrow 3x=15$ و جواب معادله $x=5$ است.

در معادلهٔ $\log_{2x}(x^2+x-2)=1$ هم داریم: $x^2+x-2=(2x)^1=2x \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=2$ یا -1

حالا دقت کنید که $x=-1$، عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را منفی می‌کند پس قبول نیست و تنها جواب معادله $x=2$ است.

وقتی معادلهٔ لگاریتمی را حل کردیم باید جواب‌ها را کنترل کنیم که در هیچ لگاریتمی مشکل ایجاد نشود. یعنی جلوی تمام لگاریتم‌ها باید مثبت شود و مبناها مثبت باشند و حاصل مبناها ۱ نباشد.

از معادلهٔ $2\log_2(3x+1)=\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{9}$ جواب x کدام است؟

۱) $-0/3$ ۲) $-0/25$ ۳) $-0/2$ ۴) $-0/1$

اول طرف راست را حساب کنیم:
$$\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{9}=\log_{3^{\frac{1}{2}}}3^{-2}=\frac{-2}{\frac{1}{2}}\log_3 3=-4$$

پس داریم: $2\log_2(3x+1)=-4$ و در نتیجه:
$$\log_2(3x+1)=-2 \Rightarrow 3x+1=2^{-2}=\frac{1}{4} \Rightarrow 3x=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4} \Rightarrow x=-\frac{1}{4}=-0/25$$

اگر $\log_{x+1}(x+7)+\log_{x+1}(x-2)=2$ باشد، مقدار لگاریتم $x+4$ در مبنای $x-2$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

حدود x: $x+7>0$ ، $x-2>0$ ، $x+1>0$ ، $x+1\neq 1 \Rightarrow x>-7$ ، $x>2$ ، $x>-1$ ، $x\neq 0 \Rightarrow x>2$

$$\log_{x+1}(x+7)+\log_{x+1}(x-2)=\log_{x+1}(x+7)(x-2)=2 \Rightarrow (x+7)(x-2)=(x+1)^2$$
$$\Rightarrow x^2+5x-14=x^2+2x+1 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5 \Rightarrow \log_{x-2}(x+4)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\overset{1}{\cancel{\log_3 3}}=2$$

از معادلات $\log_3(2x+3)-\log_3(x-2)=2$ و $\log_5(y+1)+\log_5(2y-1)=1$ نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

اولی: $\log_3(2x+3)-\log_3(x-2)=\log_3\frac{(2x+3)}{(x-2)}=2 \Rightarrow \frac{2x+3}{x-2}=9 \Rightarrow 2x+3=9x-18$
$$\Rightarrow 7x=21 \Rightarrow x=3$$

دومی: $\log_5(y+1)+\log_5(2y-1)=\log_5(y+1)(2y-1)=\log_5(2y^2+y-1)=1 \Rightarrow 2y^2+y-1=5$
$$\Rightarrow 2y^2+y-6=0 \Rightarrow (2y-3)(y+2)=0 \Rightarrow y=-2 \text{ یا } \frac{3}{2}$$

$y=-2$ قبول نیست. چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند. پس فقط $y=\frac{3}{2}$ و نسبت $\frac{x}{y}$ می‌شود $\frac{3}{\frac{3}{2}}$ یعنی ۲.

جواب معادلهٔ $\log_{۲} ۳ + \log_{۲}(۴x - ۷) = ۲ - \log_{\frac{۱}{۲}}(x^{۲} - ۳)$ کدام است؟

۱) کم‌تر از ۲ است. ۲) بین ۲ و ۳ است. ۳) بین ۴ و ۳ است. ۴) جواب ندارد.

اول معادله را مرتب کنیم:

$$\log_{۲}(۳ \times (۴x - ۷)) = \log_{۲} ۴ - \log_{۲^{-۱}}(x^{۲} - ۳)$$

$$\log_{۲}(۱۲x - ۲۱) = \log_{۲} ۴ + \log_{۲}(x^{۲} - ۳) = \log_{۲}(۴x^{۲} - ۱۲)$$

$$\xrightarrow{\text{log ها را بزنیم}} ۱۲x - ۲۱ = ۴x^{۲} - ۱۲ \Rightarrow ۴x^{۲} - ۱۲x + ۹ = (۲x - ۳)^{۲} = ۰$$

پس تنها جواب $x = \frac{۳}{۲}$ است. اما با قراردادن $\frac{۳}{۲}$ به جای x، مقدار $x^{۲} - ۳$ منفی است و معادله جوابی ندارد.

از معادلهٔ $x^{\log x} = ۱۰۰۰۰$ کدام مقادیر برای x به دست می‌آیند؟

۱) $۱۰۰, ۱۰$ ۲) $-۱۰^{۲}, ۱۰^{۲}$ ۳) $۱۰^{-۲}, ۱۰^{۲}$ ۴) $۱۰^{۲}, ۱۰^{\frac{۱}{۲}}$

قرار شد از دو طرف log بگیریم تا logx از بالا به پایین بیاید:

$$\log(x^{\log x}) = \log ۱۰۰۰۰ \Rightarrow \log x \log x = \underbrace{\log ۱۰۰۰۰}_{\text{این می‌شود ۴}} \Rightarrow (\log x)^{۲} = ۴ \Rightarrow \log x = \pm ۲ \Rightarrow x = ۱۰^{۲} \text{ یا } ۱۰^{-۲}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(۲x)^{\log_{۲} x} = ۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۴

از دو طرف تساوی در مبنای ۲، لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{۲}(۲x)^{\log_{۲} x} = \log_{۲} ۴ \Rightarrow \log_{۲} x(\log_{۲} ۲x) = (\log_{۲} ۲^{۲}) = ۲ \Rightarrow \log_{۲} x(\overset{۱}{\cancel{\log_{۲} ۲}} + \log_{۲} x) = ۲ \xrightarrow{A = \log_{۲} x} A(۱ + A) = ۲$$

$$\Rightarrow A^{۲} + A - ۲ = ۰ \Rightarrow (A + ۲)(A - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = \log_{۲} x = -۲ \Rightarrow x = ۲^{-۲} = \frac{۱}{۴} \\ A = \log_{۲} x = ۱ \Rightarrow x = ۲^{۱} = ۲ \end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{۱}{۲} = ۲ \times \frac{۱}{۴}$ می‌باشد

یکی از جواب‌های معادلهٔ $(\log_{۲} x)^{۲} - ۹\log_{۸} x = ۴$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲۷

مبنای هر دو لگاریتم را یکی می‌کنیم:

$$\log_{۸} x = \log_{۲^{۳}} x = \frac{۱}{۳}\log_{۲} x$$

با انتخاب $\log_{۲} x = A$، معادله به‌صورت $A^{۲} - ۳A = ۴$ درمی‌آید:

$$A^{۲} - ۳A - ۴ = ۰ \Rightarrow (A - ۴)(A + ۱) = ۰ \Rightarrow A = ۴ \ , \ A = -۱ \Rightarrow \begin{cases} A = \log_{۲} x = ۴ \Rightarrow x = ۲^{۴} = ۱۶ \\ A = \log_{۲} x = -۱ \Rightarrow x = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

گزینهٔ (۳) صحیح است. $\Leftarrow$

اگر $\begin{cases} \log_3 x - \log_9 y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ باشد، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

از معادلهٔ $\log_3 x - \log_9 y = 0$، رابطه‌ای بر حسب x و y به‌دست می‌آوریم:

$$\log_3 x - \log_9 y = 0 \Rightarrow \log_3 x = \log_9 y = \log_{3^2} y = \frac{1}{2}\log_3 y = \log_3 \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{y} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 = y \qquad (*)$$

$$2x - y = 1 \xrightarrow{(*)} 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{(*)} y = 1$$

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_3(3x+b)$، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض یک قطع می‌کند. اگر نمودار f از نقطهٔ $(\frac{8}{9}, 3)$ بگذرد، حاصل $a \times b$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

مختصات نقطهٔ $(0,1)$ در ضابطهٔ f صدق می‌کند، پس:

$$f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = a + \log_3 b = 1 \qquad (1)$$

نمودار f از نقطهٔ $(\frac{8}{9}, 3)$ می‌گذرد، پس:

$$f(\frac{8}{9}) = 3 \Rightarrow f(\frac{8}{9}) = a + \log_3(\frac{8}{3} + b) = 3 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a + \log_3 b = 1 \\ a + \log_3(\frac{8}{3} + b) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-a} - \log_3 b = -1 \\ \cancel{a} + \log_3(\frac{8}{3} + b) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_3(\frac{8}{3} + b) - \log_3 b = 2 \Rightarrow \log_3 \frac{\frac{8}{3} + b}{b} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{8}{3} + b}{b} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{8}{3} + b = 9b \Rightarrow 8b = \frac{8}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{(1)} a + \log_3 \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a + \log_3 3^{-1} = 1 \Rightarrow a - \overset{1}{\cancel{\log_3 3}} = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a \times b = \frac{2}{3}$$

■ حل نامعادلات لگاریتمی :

از ویژگی (۳) تابع $y = \log_a x$ در هر دو حالت برای حل نامعادلات لگاریتمی استفاده می‌کنیم:

۱) $a > 1$ ، $\log_a u > \log_a v \Rightarrow u > v$

پس در حالتی که $a > 1$ باشد، با حذف $\log_a$، جهت نامساوی برای u و v تغییر نمی‌کند. به عنوان مثال، برای حل نامعادلهٔ $\log_2(3x-1) > \log_2 5$، داریم:

$$3x - 1 > 5 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2$$

توجه کنید که عبارت $3x - 1$ باید مثبت باشد، که اگر $x > \frac{1}{3}$ باشد،آن‌گاه $3x - 1 > 0$ می‌باشد و در نتیجه مجموعه جواب نامعادله، $(2, +\infty)$ می‌باشد.

۲) $0 < a < 1$ ، $\log_a u > \log_a v \Rightarrow u < v$

پس در حالتی که $0 < a < 1$ باشد، با حذف $\log_a$، جهت نامساوی برای u و v تغییر می‌کند.

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_{3}(\frac{x+1}{2})}$ کدام است؟

۱) $(-1,+\infty)$　　۲) $[1,+\infty)$　　۳) $(-1,1]$　　۴) $(0,1]$

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. هم‌چنین عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد. پس داریم:

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{x+1}{2}>0\,,\ \log_{3}(\frac{x+1}{2})\geq 0\right\}$$

$$\frac{x+1}{2}>0\xrightarrow{\times 2}x+1>0\Rightarrow x>-1 \qquad (1)$$

$$\log_{3}(\frac{x+1}{2})\geq 0=\log_{3}1\xrightarrow{a=3>1}\frac{x+1}{2}\geq 1\Rightarrow x+1\geq 2\Rightarrow x\geq 1 \quad (2)$$

$(1),(2)\Rightarrow D_f=[1,+\infty)\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

■ **کاربرد تابع لگاریتمی :**

زمین‌لرزه، لرزش زمین است که به علت آزاد شدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوستهٔ زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد. مقیاس ریشتر، برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشدهٔ آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$\log E=11/8+1/5M$$

اگر انرژی آزادشده در یک زلزله برابر $10^{21/4}$ اِرگ باشد، بزرگی این زمین‌لرزه را بر حسب ریشتر به‌دست آورید.

طبق فرض $E=10^{21/4}$ می‌باشد، داریم:

$$\log E=\log 10^{21/4}=21/4\,\cancel{\log 10}^{\,1}=21/4$$

$$\log E=11/8+1/5M\Rightarrow 11/8+1/5M=21/4\Rightarrow 1/5M=21/4-11/8=9/6\Rightarrow M=\frac{9/6}{1/5}=6/4$$

نمودار دو تابع $y=(\frac{۳}{۲})^x$ و $y=\log_{\frac{۳}{۲}} x$ نسبت به کدام خط زیر قرینه می‌باشد؟

۱) $y=-x$ ۲) $y=x$ ۳) محور x ها ۴) محور y ها

اگر $\log_۲ ۱۲=\alpha$ باشد، عدد $۴^{\alpha-۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

نمودار تابع نمایی $y=(\frac{a+۲}{۱-a})^x$، نمودار تابع معکوس خود را قطع می‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $۰<a<۲$ ۲) $-۱<a<۱$ ۳) $-۲<a<۱$ ۴) $-۲<a<-\frac{۱}{۲}$

فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محور y ها و نقطهٔ برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

کدام گزینه درست است؟

۱) $\log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۱۰۰} > \log_{\frac{۱}{۲}} ۱۰۰$ ۲) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۳ > \log_{\frac{۱}{۲}} ۲$

۳) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۳^{-۱} > \log_{\frac{۱}{۲}} ۵^{-۱}$ ۴) $\log_{\frac{۱}{۲}} (۲+\sqrt{۲}) > \log_{\frac{۱}{۲}} (۴-\sqrt{۲})$

نمودار دو تابع $f(x)=\log_۲ \frac{۱}{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) $f(x)$ بالاتر ۲) $g(x)$ بالاتر ۳) منطبق‌اند. ۴) فقط در یک نقطه متقاطع

نمودار تابع $y=\log_۲ x$ را ابتدا سه واحد به سمت راست و سپس دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. نمودار تابع جدید، نمودار تابع اولیه را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

نمودار تابع $y=\log_۲(۲x+۳)$ را ابتدا $\frac{۱}{۲}$ واحد به سمت چپ و سپس سه واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۴

نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(ax+b)$، محور x ها را در نقطه‌ای به طول -۱ و نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع کرده است. b کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

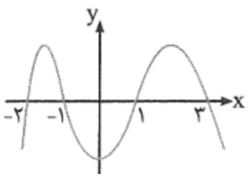
تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\log_۲(bx-۴)$، از دو نقطهٔ $(۲،۶)$ و $(۱۲،۱۰)$ می‌گذرد. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}+\log_{\frac{۱}{۳}} x$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $[۱,۲)$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

نمودار تابع f به‌صورت مقابل است، دامنهٔ تابع $y=\log_x f(x)$ کدام است؟



۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-\infty,-۲)\cup(۳,+\infty)$

۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-۲,-۱)\cup(۱,۳)$

حاصل عبارت $|\log_{\frac{1}{2}} 8| + \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{6}$ ۲) $\frac{17}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

حاصل عبارت $\log_{\sqrt[4]{2}} 2\sqrt{2} + \log_7 \frac{1}{49} + \log_{\sqrt{9}} 27\sqrt[3]{81}$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{5}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) $\frac{27}{2}$

حاصل $\frac{(\log 8)^2 - (\log 2)^2}{\log \sqrt{2} \log 4}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

اگر $x = y^3 = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حاصل $\sqrt{5}^{(\log_{25} 16 - \log_5 16)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

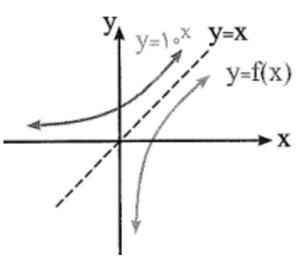
اگر $2\sqrt{2} = 4^{\alpha}$، آن‌گاه لگاریتم $(4\alpha + 1)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

مقدار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = 5 - \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(5x+1)$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

با توجه به نمودار مقابل، مقدار عددی $f(0/001)$ کدام است؟



۱) -1
۲) -2
۳) -3
۴) -4

اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(1 - \frac{1}{A})$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) -3 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

اگر $\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log(81)^k$، آن‌گاه لگاریتم $\frac{5}{k}$ در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

از معادلهٔ لگاریتمی $2\log x = 1 + \log(x + \frac{12}{5})$، مقدار $\log_5(2x+1)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

اگر $\log(3x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) = 2\log 2$ باشد، حاصل لگاریتم $x\sqrt{x}$ در مبنای ۳ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

از معادلهٔ $\log_x 3 + \log_x(2x+9) = 2$، مقدار $\log_9 x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

از تساوی $\log_x(x^2+4) = 1+\log_x 5$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

از معادلهٔ لگاریتمی $\log(x^2-x-6)-\log(x-3)=\log(2x-5)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

به ازای کدام مقدار x، اعداد $\log(3x-1)$، $\log(x+2)$ و $\log(x-4)$، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی می‌باشند؟

۱) ۸/۵ ۲) ۸ ۳) ۷/۵ ۴) ۷

اگر بزرگی زمین‌لرزه‌ای ۶/۸ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزادشده چند اِرگ است؟

۱) $10^{21.6}$ ۲) 10^{22} ۳) $10^{22.4}$ ۴) $10^{22.6}$