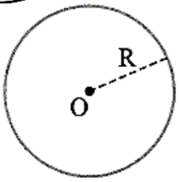
نقاط متساوی الفاصله از یک نقطه: کتاب درسی اولین تعریفی که از هندسه داشته به دایره تعلق گرفته : تمام نقاطی که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به یک فاصله ثابت (شعاع دایره) هستند روی محیط یک دایره قرار دارند و یک دایره را می سازند .

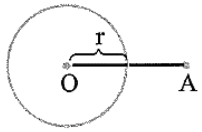
به سیاره زحل خیره شوید ... چه شباهتی با دایره دارد ؟! ...



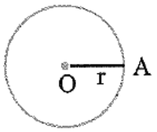
نقطهٔ ثابت O را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم نقاطی از صفحه را بیابیم که فاصلهٔ آن‌ها از O برابر R باشد، باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم کنیم.

※ بنابراین هر زمان شنیدیم ((از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت)) یاد دایره میوفتیم ...

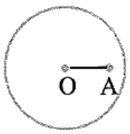
بطور کلی برای بررسی وضعیت یک نقطه و یک دایره فاصله آن نقطه تا مرکز دایره (d) را با شعاع دایره مقایسه می کنیم : اگر d با شعاع دایره برابر باشد نقطه روی دایره قرار دارد ، اگر d بزرگتر از شعاع دایره باشد نقطه خارج از دایره قرار دارد ، و اگر d کوچکتر از شعاع باشد نقطه داخل دایره قرار دارد.



$A \Rightarrow OA > r$ خارج دایره واقع است.



$A \Rightarrow OA = r$ روی دایره قرار دارد.



$A \Rightarrow OA < r$ درون دایره قرار دارد.

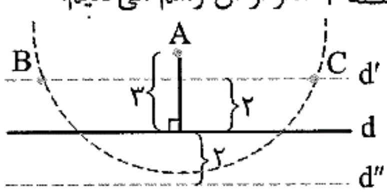
نقاط متساوی الفاصله از یک خط : می دانیم که فاصله ی بین دو خط موازی همواره برابر و مقدار ثابتی است ، بنابراین اگر قرار باشد نقطه ای از یک خط به فاصله ثابت باشد باید روی خطی موازی با آن خط قرار داشته باشد ، بنابراین :

اگر دنبال نقاطی باشیم که از خط L به فاصلهٔ معلوم a باشند، این نقاط روی دو خط موازی L هستند که در طرفین L قرار دارند و باید آن‌ها را رسم کنیم.

نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ متری از خط d در یک صفحه قرار دارد. چند نقطه به فاصلهٔ ۴ متری از A و ۲ متری از خـط d در ایـن صـفحه وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

به مرکز A و به شعاع ۴ متر دایره‌ای رسم می‌کنیم. هم‌چنین دو خط به موازات d و بـه فاصلـهٔ ۲ متر از آن رسم می‌کنیم:

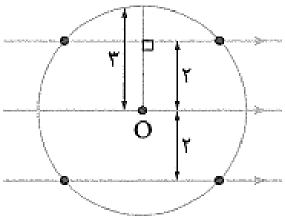


دایره خط d' را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند (دایره خط d'' را قطـع نمی‌کنـد، زیـرا فاصلـهٔ نقطـهٔ A تـا خط d'' برابر ۵ است ولی اندازهٔ شعاع دایره برابر ۴ می‌باشد).

پـس دو نقطـهٔ مطلـوب وجـود دارد و در نتیجـه گزینهٔ (۳) صحیح است.

نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ و از خط L به فاصلهٔ ۲ باشند؟

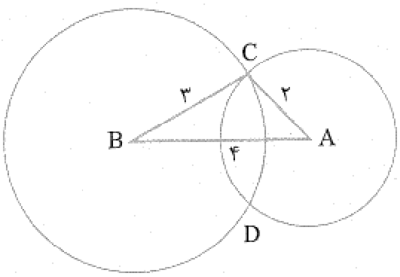
۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



خُب نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است و نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی خط L خواهند بود. نقاط تلاقی این دو خط و دایره، هر دو ویژگی موردنظر را دارند. پس چهار نقطه با این ویژگی‌ها وجود دارد.

دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم هستند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

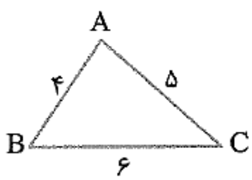


ابتدا دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ رسم می‌کنیم، چرا که تمام نقاطی که از B به فاصلهٔ ۳ هستند روی این دایره قرار دارند. همین‌طور دایره‌ای هم به مرکز A و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. همین‌طور که می‌بینید، این دو دایره یکدیگر را در نقاط C و D قطع می‌کنند. این دو نقطه هر دو ویژگی موردنظر را دارند. دقت کنید که چون $۲+۳>۴$ است، دوتا نقطه با این ویژگی داشتیم یعنی دو دایره توانستند یکدیگر را قطع کنند.

اگر مجموع شعاع دایره‌ها برابر با ۴ می‌شد، دایره‌ها بر هم مماس می‌شدند و یک نقطه به وجود می‌آمد و اگر مجموع شعاع دایره‌ها از ۴ کم‌تر بود، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کردند و نقطه‌ای با این ویژگی پیدا نمی‌شد.

قبول دارید که در این تست در واقع مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ رسم کردیم؟!

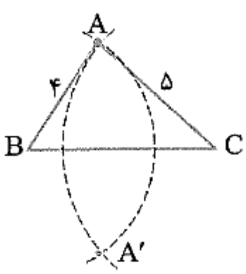
رسم مثلثی که طول سه ضلع آن معلوم باشد.



مثال: مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴، ۵ و ۶ باشد.

فرض کنیم شکل مثلث با اندازه‌های داده‌شده به‌صورت مقابل باشد:

ابتدا پاره‌خط BC را به طول ۶ رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ A را به فاصلهٔ ۴ از B و به فاصلهٔ ۵ از C مشخص کنیم، آن‌گاه مثلث ABC با طول اضلاع ۴، ۵ و ۶ رسم می‌شود. برای پیدا کردن نقطهٔ A، به مرکز B و شعاع ۴ و همچنین به مرکز C و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دو دایره همدیگر را در نقطهٔ A قطع می‌کنند:



با توجه به شکل، نقطه‌ای مانند A′ نیز پیدا شده است که اگر آن را به B و C وصل کنیم، جواب مسئله است ولی چون دو مثلث ABC و A′BC یکسان هستند، پس مسئله یک جواب دارد.

اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند، آیا مثلثی وجود دارد که طول اضلاع آن a، b و c باشد؟ اگر رسم مثال قبل را در نظر بگیریم، شرط داشتن جواب آن است که دو کمان همدیگر را قطع کنند و این هنگامی امکان‌پذیر است که مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگ‌تر باشد: $a<b+c$ ، $b<a+c$ ، $c<a+b$

سه پاره‌خط به طول‌های $4x-4$ ، $x+7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند. تمام مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{11}{9}<x<3$ ۲) $\frac{5}{3}<x<3$ ۳) $2<x<3$ ۴) $\frac{11}{9}<x<4$

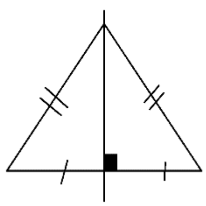
برای آن‌که سه عدد، طول اضلاع یک مثلث باشند، باید مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگ‌تر باشد. پس:

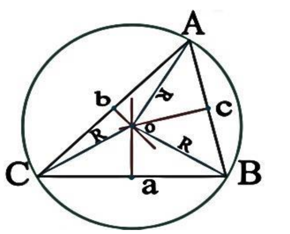
$$\begin{cases}4x-4<(x+7)+6x\\ ,\\ x+7<(4x-4)+6x\\ ,\\ 6x<(4x-4)+(x+7)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4-7<7x-4x\\ ,\\ 7+4<10x-x\\ ,\\ 6x-5x<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x>-11\\ ,\\ 9x>11\\ ,\\ x<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{11}{3}\\ ,\\ x>\frac{11}{9}\\ ,\\ x<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{11}{9}\\ ,\\ x<3\end{cases}\Rightarrow\frac{11}{9}<x<3\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱)

عمودمنصف و خواص و ترسیم آن : همانطور که از نامش مشخص است خطی است که در وسط پاره خط بر آن عمود است. حال به ویژگی هایش توجه کنید :

1. هر نقطه روی عمود منصف از دوسر پاره خط به یک فاصله است و بلعکس
2. عمود منصف های هر مثلث هم‌رأسند، یعنی عمود منصف‌های ضلع‌های مثلث در یک نقطه مشترکند.
3. محل برخورد عمودمنصف های اضلاع یک مثلث مرکز دایره محیطی آن مثلث است
4. با توجه به شکل نکته قبلی براحتی می توان متوجه شد که فاصله ی محل برخورد عمود منصف ها تا سه راس مثلث یکسان است و برابر است با شعاع دایره محیطی.

بنابراین هرکجا شنیدیم ((فاصله از دو نقطه A , B برابر است)) مکان هندسی می شود عمود منصف پاره خط AB





طریقه رسم عمودمنصف که در سال های گذشته به شما آموزش داده شده برای یادآوری هم میتوانید به صفحه ۲۶ کتاب درسی مراجعه کنید ...

حال برویم سراغ کاربرد های رسم عمودمنصف در حل دیگر مسائل ...

- **رسم عمودمنصف بر یک خط از یک نقطه روی آن** :

میخواهیم روی نقطه M واقع بر خط d عمود منصف را رسم کنیم . ابتدا از نقطه M روی خط به شعاع دلخواه کمانی رسم می کنیم که خط را در نقاط A , B قطع کندسپس عمود منصف AB را رسم می کنیم

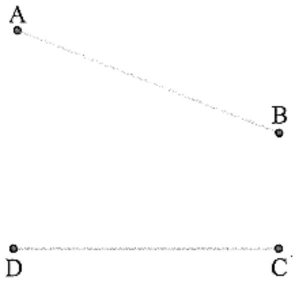
- **رسم عمود بر یک خط از نقطه ای بیرون از آن** :

فرض کنید از نقطه N بیرون از خط d میخواهیم عمودی بر این خط رسم کنیم . به مرکز N یک کمان طوری رسم می کنیم که خط d را در دو نقطه A , B قطع کند ، عمودمصف AB رارسم میکنیم

- **ترسیم خطی موازی با یک خط از نقطه ای بیرون آن**

:فرض کنید از نقطه p بیرون خط d میخواهیم خطی موازی با d رسم کنیم . ابتدا به روش ۲ خطی عمود بر خط d رسم میکنیم (d_1) و سپس به روش ۱ از نقطه p واقع بر خط d_1 خطی عمود بر آن رسم می کنیم (d_2) حال d_2 و d موازی اند.

سوال : نقاط متمایز A , B , C روی یک خط قرار دارند چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این سه نقطه به یک فاصله هستند؟



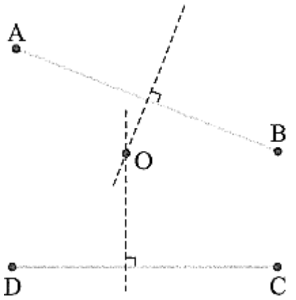
دو پاره‌خط AB و DC مطابق شکل در نظر گرفته شده‌اند. چند نقطه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله و از نقاط C و D هم به یک فاصله باشد؟

۱) صفر

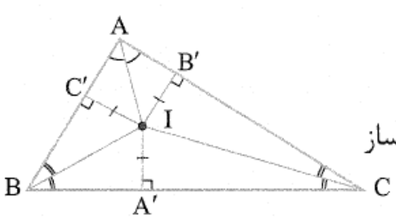
۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳



نقاطی که از دو سر پاره‌خط AB فاصله‌های مساوی دارند، همگی روی عمودمنصف این پاره‌خط قرار دارند و نقاطی هم که از دو سر پاره‌خط DC به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف پاره‌خط DC قرار دارند؛ پس نقطه‌ای را می‌خواهیم که هم روی عمودمنصف AB باشد، هم روی عمودمنصف DC باشد.
تنها نقطهٔ این‌جوری، محل برخورد عمودمنصف‌هاست! پس فقط یک نقطه با این ویژگی وجود دارد.



چند نقطه درون مثلث وجود دارد که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد؟
نیمسازهای مثلث همیشه در یک نقطه به هم می‌رسند! این نقطه چون روی نیمساز زاویهٔ A است، پس فاصله‌اش از اضلاع این زاویه مساوی است؛ یعنی: $IB'=IC'$ و چون روی نیمساز زاویهٔ B است، پس $IC'=IA'$، پس این نقطه فاصله‌اش از سه ضلع مثلث برابر است.

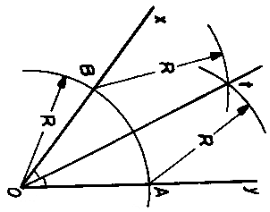
عمودمنصف‌های مثلث قائم‌الزاویه، همدیگر را در وسط وتر قطع می‌کنند. بنابراین طول شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه برابر $R=\frac{a}{۲}$ است که a طول وتر مثلث می‌باشد.

طول شعاع دایرهٔ محیطی مثلث با اضلاع ۲، ۴ و $۲\sqrt{۵}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

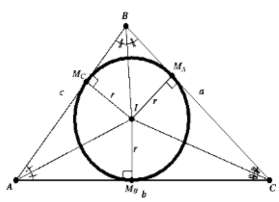
اعداد ۲، ۴ و $۲\sqrt{۵}$، اعداد فیثاغورسی هستند، یعنی در تساوی $a^۲=b^۲+c^۲$ صدق می‌کنند ($(۲\sqrt{۵})^۲=۴^۲+۲^۲$)، پس مثلث قائم‌الزاویه است و در نتیجه طول شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر $\sqrt{۵}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۲}=\frac{a}{۲}$ است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

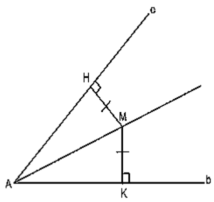
نیمساز ، خواص و ترسیم آن : پاره خطی است که یک زاویه را به دوقسمت مساوی تقسیم می کند و همواره بین دو ضلع زاویه قرار دارد.



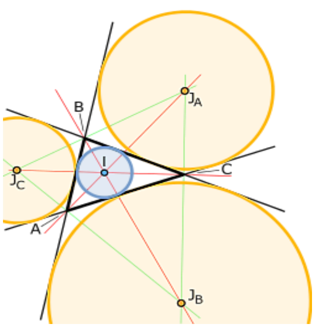
مهمترین ویژگی نیمساز عبارتند از :

1. هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بلعکس
2. محل برخورد نیمساز های داخلی یک مثلث مرکز دایه محاطی آن مثلث می باشد
3. با توجه به نکته بالا براحتی می توان فهمید که نقطه برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است





بنابراین هرکجا شنیدیم ((فاصله از دو ضلع زاویه برابر است)) مکان هندسی می شود نیمساز زاویه بین آن دو ضلع



سوال : به نظر شما در صفحه یک مثلث چند نقطه وجود دارد که از سه ضلع یا امتداد سه ضلع مثل به یک فاصله باشد؟!
به شکل زیر توجه کنید

سوال : در مثلث ABC طول دو ضلع AB , AC بترتیب ۶ و ۴ سانتی متر و مساحت آن ۱۰ سانتی متر مربع میباشد اگر نیمساز داخلی زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع کند فاصله نقطه D از ضلع AB کدام است؟

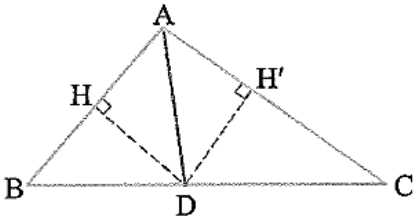
راهنمایی : ابتدا شکل را رسم کنید و بعد از رسم نیمساز مربوطه مساحت های دو مثلث جدید ساخته شده را مقایسه کنید ، آیا از این مقایسه می توان نتیجه گرفت که فاصله نقطه D از دو ضلع دیگر برابر است؟

سوال : خط موربی دو خط موازی D و 'D را بترتیب در نقاط B و C قطع می کند اگر نقطه O از هر سه خط به یک فاصله باشد زاویه BOC چند درجه است؟

راهنمایی : طبق معمول ابتدا شکل را بدرستی رسم می کنیم سپس از عکس قضیه نیمساز ها و قضیه خطوط موازی و مورب استفاده می کنیم

در مثلث ABC، $AB = ۴$ و $AC = ۵$ می‌باشد. نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در D قطع می‌کند. مساحت مثلث ABD، چند برابر مساحت مثلث ACD است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$



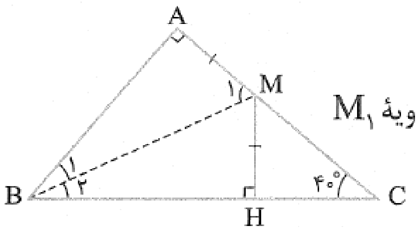
از نقطهٔ D، دو عمود DH و DH' را به ترتیب بر AB و AC رسم می‌کنیم:

چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس فاصلهٔ D از AB و AC یکسان است.

گزینهٔ (۲) صحیح است. $\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{DH} \times AB}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{DH'} \times AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۵} \Leftarrow DH = DH' \Leftarrow D$ روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ , \hat{C} = ۴۰^\circ)$، نقطهٔ M روی ضلع AC قرار دارد. از M عمودی بر BC رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. اگر $MH = AM$ باشد، زاویهٔ AMB چند درجه است؟

۱) ۶۵ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۱۵ ۴) ۷۰



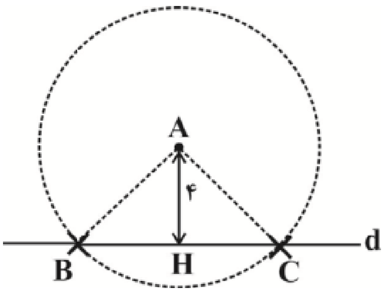
در واقع فاصلهٔ نقطهٔ M از ضلع‌های AB و BC برابر است، پس M روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد، بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{۵۰}{۲} = ۲۵^\circ$، پس زاویهٔ M_1 برابر است با:

$\overset{\Delta}{ABM} : \hat{M}_1 = ۹۰^\circ - ۲۵^\circ = ۶۵^\circ$

در مبحث هندسه مهمترین بخش یادگیری دیدن تست های متفاوت و آشنا شدن با کاربرد مفاهیم گفته شده در درسنامه در خلال حل تست های متعدد است ، از این رو برای رسیدن به تسلط بالا در این مبحث ضرورت دارد که تست های پیش رو را تمرین کنید ....

نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر از خط d قرار دارد. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ را طوری رسم کنیم که مساحت آن ۱۲ سانتیمتر مربع باشد و دو رأس آن روی خط d باشد. برای یافتن دو رأس مثلث، دایره‌ای به مرکز A و به چه شعاعی بزنیم؟

۱) $۴/۵\,cm$ ۲) $۵\,cm$ ۳) $۶\,cm$ ۴) $۴\sqrt{۲}\,cm$



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}BC.AH \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۲}(BC)(۴)$$

$$\Rightarrow ۱۲ = ۲BC \Rightarrow BC = ۶\,cm \quad \Rightarrow BH = HC = ۳\,cm$$

$$\overset{\Delta}{AHC} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC^۲ = AH^۲ + HC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴^۲ + (۳)^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۲۵ \quad \Rightarrow AC = ۵\,cm$$

مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. اگر O محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع AB و BC باشد، به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای می‌زنیم. این دایره کدام ویژگی را دارد؟

۱) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در چهار نقطه دیگر قطع می‌کند.

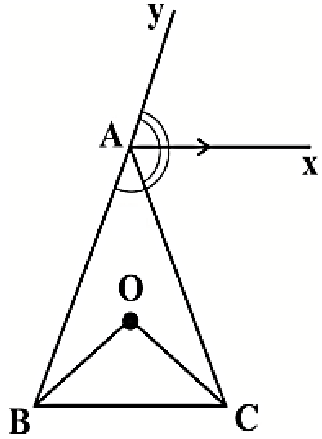
۲) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در نقطه دیگری قطع نمی‌کند.

۳) در این دایره مرکز O همواره در خارج از مثلث قرار می‌گیرد.

۴) این دایره از هر سه رأس مثلث یعنی A ، B و C عبور می‌کند.

چون محل برخورد عمودمنصف‌ها یکتاست، بنابراین نقطه‌ی O محل برخورد هر سه عمودمنصف است. همچنین اگر O روی عمود منصف AB باشد $OA = OB$ است و نیز O روی عمود منصف BC است پس $OB = OC$ است و همینطور O روی عمود منصف AC است پس $OA = OC$ خواهد بود. بنابراین $OA = OB = OC = r$ می‌باشد، یعنی اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OA = r$ بزنیم از سه رأس A، B و C عبور می‌کند که اصطلاحاً می‌گوئیم این دایره محیط بر مثلث است. در ضمن اگر مثلث یک زاویهٔ بیشتر از ۹۰ درجه داشته باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها خارج مثلث است و اگر یک زاویهٔ ۹۰° داشته باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها روی وتر است و اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها داخل مثلث است.
بنابراین گزینه‌ی «۳» نیز غلط است و فقط گزینه‌ی «۴» صحیح می‌باشد.

شکل زیر Ax نیم‌ساز زاویهٔ $C\hat{A}y$ و $BC \| Ax$ است. اگر BO و CO نیم‌ساز زوایای B و C باشند و $\hat{B} = ۷۵^\circ$، اندازهٔ $B\hat{O}C$ چند درجه است؟ (Ay در امتداد BA است.)



۱) ۹۵°

۲) ۱۰۰°

۳) ۱۰۵°

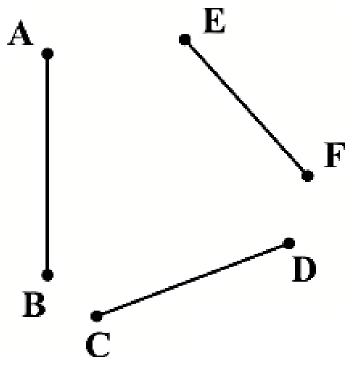
۴) ۱۱۰°

$C\hat{A}y$ نیم‌ساز $Ax \Rightarrow y\hat{A}x = x\hat{A}C$

از طرفی زاویه‌ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش، پس:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = y\hat{A}C = ۲x\hat{A}C \\ Ax \| BC, AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{C} = x\hat{A}C \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{O} = ۱۸۰^\circ - (\frac{B}{۲} + \frac{C}{۲}) = ۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$

در شکل زیر نقطه‌ای وجود دارد که فاصلهٔ آن از A و B یکسان، از C و D یکسان و از E و F نیز یکسان است. چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟



الف) محل برخورد عمودمنصف‌های AB و EF روی عمودمنصف CD قرار دارد.

ب) محل برخورد عمودمنصف‌های سه پاره خط AB، CD و EF از شش نقطهٔ A، B، C، D، E و F به یک فاصله است.

پ) از امتداد سه پاره‌خط AB، CD و EF مثلثی به دست می‌آید که عمودمنصف‌های آن مثلث همان عمودمنصف‌های سه پاره‌خط داده شده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

چون نقطه‌ای وجود دارد که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله و از دو سر پاره خط EF به یک فاصله است پس روی عمودمنصف‌های AB و EF قرار دارد هم‌چنین از دو سر پاره خط CD به یک فاصله است، پس روی عمود منصف CD قرار دارد. پس مورد (الف) درست است. اما لزوماً موارد (ب) و (پ) درست نیست.

- نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است و روی AB قرار ندارد. آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

۱) وسط پاره‌خط AB روی نیمساز زاویهٔ $A\hat{C}B$ قرار دارد.

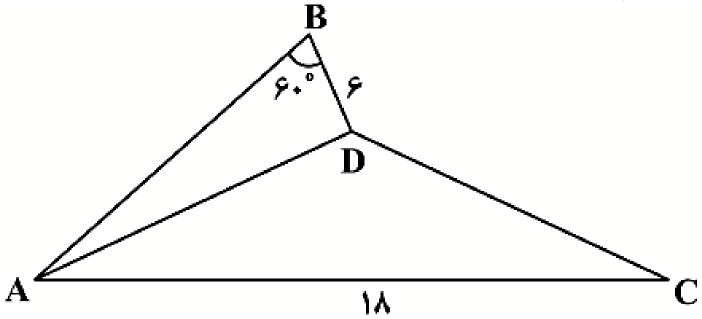
۲) وسط پاره‌خط AC از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است.

۳) C روی عمود منصف AB قرار دارد.

۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نقطه‌ی C از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، پس باید روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.از طرفی چون $AC = BC$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.نیم‌ساز زاویهٔ رأس (C) و عمودمنصف بر هم منطبق‌اند.
پس تنها گزینه‌ی «۲» می‌تواند نادرست باشد.

- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A است. مساحت مثلث ACD کدام است؟



۱) $۹\sqrt{۳}$

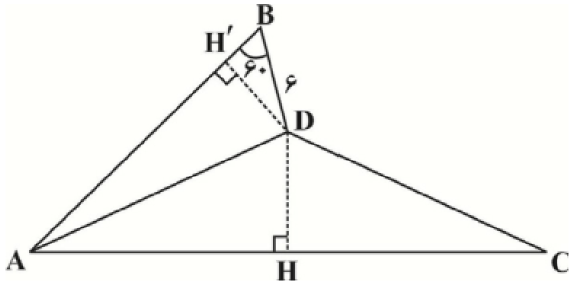
۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۲۷\sqrt{۳}$

۴) $۶\sqrt{۳}$

چون D روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یکسان است. از D به هر دو ضلع عمود رسم می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{BDH'} : \sin ۶۰° = \frac{DH'}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{DH'}{۶} \Rightarrow DH' = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow DH = ۳\sqrt{۳}$$

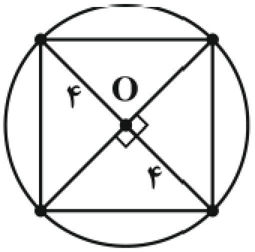


بنابراین مساحت مثلث ACD برابر می‌شود با:

$$S_{\overset{\Delta}{ACD}} = \frac{DH \times AC}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}(۱۸)}{۲} = ۲۷\sqrt{۳}$$

محل برخورد قطرهای یک مربع، مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ است. اگر طول قطر مربع ۸ واحد باشد، دایره و مربع در چند نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟

۱) ۸　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) صفر



می‌دانیم در مربع، قطرها عمودمنصف یکدیگرند. حال با توجه به اینکه شعاع دایره دقیقاً برابر نصف قطر مربع است $(\frac{۸}{۲}=۴)$ ، لذا دایرهٔ مذکور، مربع را در رأس‌هایش، یعنی در ۴ نقطه قطع می‌کند.

اگر فاصلهٔ دو خط موازی d و d' برابر ۶ باشد، در این صورت کدام گزینه نشانگر همهٔ نقاطی است که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر ۲ باشد؟

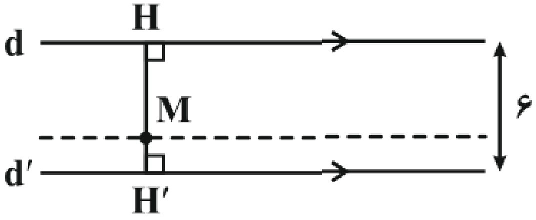
۱) یک خط موازی با d و d' و بین این دو

۲) دو خط موازی با d و d' و بین این دو

۳) دو خط موازی با d و d' و خارج این دو

۴) چهار خط موازی d و d'

با فرض اینکه نقطهٔ M بین دو خط و نزدیک به خط d' باشد، داریم:



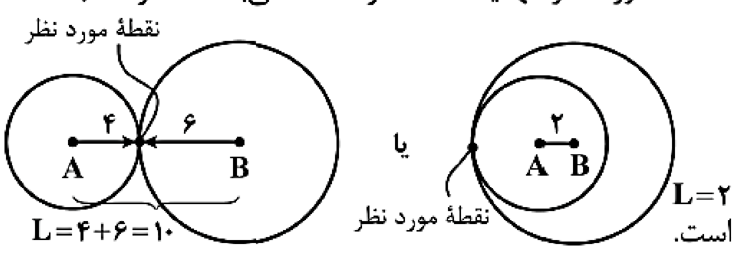
$$\begin{cases} MH+MH'=۶ \\ MH-MH'=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH=۴ \\ MH'=۲ \end{cases}$$

بنابراین نقاطی که روی خطی موازی دوخط d و d' و به فاصلهٔ ۲ از خط d' باشند، ویژگی‌های مسئله را دارا می‌باشند. مشابه همین حالت برای زمانی رخ می‌دهد که نقطه M بین دو خط و این بار نزدیک خط d باشد.

پاره‌خط AB به طول L مفروض است. اگر با توجه به مقدار L، فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصلهٔ ۴ و از B به فاصلهٔ ۶ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای L کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

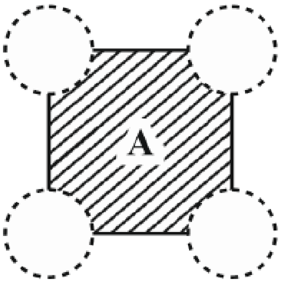
در صورتی که L یکی از دو مقدار ۲ یا ۱۰ را داشته باشد، نقطهٔ مورد نظر تنها یک نقطه در صفحه می‌باشد که از A به فاصلهٔ ۴ و از B به فاصلهٔ ۶ است.



پس ۲ یا $L=۱۰$ بوده که جمع آن‌ها $۱۰+۲=۱۲$ است.

مربعی به ضلع ۴ مفروض است. اگر A، ناحیه‌ای درون مربع باشد که هر نقطهٔ درون آن ناحیه، فاصله‌اش از تمام رأس‌های مربع بیشتر از یک باشد، بیشترین مساحت ناحیهٔ A کدام است؟

۱) $۱۶-\pi$ ۲) $۱۶-۲\pi$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۴}$

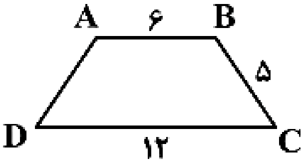


۴ دایره به مرکز رئوس مربع و به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. ناحیهٔ A، ناحیه هاشورخورده مطابق شکل است که برای محاسبهٔ مساحت آن کافی است از مساحت مربع، ۴ تا مساحت ربع دایره (یا مساحت ۱ دایرهٔ کامل) را حذف کنیم:

$$\text{مساحت ناحیهٔ } A = \text{مساحت مربع} - (\text{مساحت ربع دایره} \times ۴)$$

$$= ۱۶ - ۴ \times \frac{\pi \times ۱^۲}{۴} = ۱۶ - \pi$$

در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر، نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. فاصلهٔ O از ضلع BC کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۲/۵

-اگر در یک مثلث، مجموع دو زاویه برابر با زاویه سوم باشد، آنگاه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟

۱) درون مثلث
۲) روی رأس بزرگ‌ترین زاویه
۳) بیرون مثلث
۴) روی بزرگ‌ترین ضلع

۰داخل مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر هر سه ضلع آن مماس باشد. اگر O مرکز این دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) قطر دایره برابر ضلع کوچکتر مثلث است.

۲) نقطه‌ی O محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.

۳) قطر دایره برابر ضلع بزرگ‌تر مثلث است.

۴) نقطه‌ی O محل برخورد سه عمودمنصف اضلاع مثلث است.

درس دوم : نسبت و تناسب

تعریف: $\frac{a}{b}$ را یک نسبت و به تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ یک تناسب می گوییم .

بچه ها نسبت ها نه تنها در ریاضیات بلکه در اکثر علوم دیگر یکی از پر کاربردترین ابزارها محسوب می شوند . لذا برای استفاده درست از این ابزار پر کاربرد به فنون زیر نیازمندیم:

۱	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	b و d $\neq ۰$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	a و b و c و d $\neq ۰$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	a و b و c و d $\neq ۰$	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	b و d $\neq ۰$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Rightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	b و d $\neq ۰$	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	b و d $\neq ۰$	

انواع استدلال : ۱- استدلال استقرایی   ۲- استدلال استنتاجی

استدلال استقرایی : نتیجه گیری کلی ای که بر اساس مجموعه محدودی از مشاهدات بدست می آید.

استدلال استقرایی همواره نتیجه درست به همراه ندارد ، گاهی اوقات می توان با یک مثال این نتیجه گیری کلی را رد کرد ، که به آن مثال نقض می گوییم. پر واضح است که در این روش ما از جزء به کل می رسیم

استدلال استنتاجی : نتیجه گیری کلی که بر اساس حکم های پذیرفته شده از قبل بدست می آید .

استدلال استنتاجی همواره درست است و به آن **قضیه** می گوییم . هر قضیه از دو قسمت فرض P و حکم Q تشکیل شده است که آن را بصورت شرطی می توان بیان کرد : (اگر P آنگاه Q)

عکس قضیه : اگر جای فرض و حکم را در قضیه عوض کنیم ، عکس قضیه ساخته می شود که اگر عکس قضیه هم درست باشد آن قضیه را **قضیه دو شرطی** می گوییم و آن را بصورت (**P**اگر و تنها اگر **Q**) می نویسیم.

قضیه : در مثلث همواره مجموع زوایای داخلی ۱۸۰ درجه می باشد

شکل شرطی قضیه : اگر یک چند ضلعی مثلث باشد آنگاه مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰ درجه است

عکس قضیه : اگر مجموع زوایای یک چند ضلعی ۱۸۰ درجه باشد آن چند ضلعی مثلث است

شکل دوشرطی قضیه : یک چند ضلعی مثلث است اگر و تنها اگر مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰ درجه باشد

مثال نقضی برای گزاره ی زیر بنویسید ، این گزاره از کدام استدلال نتیجه گیری شده؟

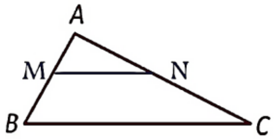
گزاره : حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.

برهان خلف (اثبات غیر مستقیم) : گاهی اوقات اثبات خود مسئله به صورت مستقیم بسیار سخت یا امکان پذیر نمی باشد. در این موارد از روش غیر مستقیم استفاده می کنیم که شامل مراحل زیر می باشد:

- فرض می کنیم حکم درست نباشد
- نشان می دهیم که درست نبودن حکم با حقایق بدیهی و پذیرفته شده از قبل تناقض دارد
- با اثبات اینکه حکم نمیتواند نادرست باشد نتیجه می گیریم که حکم درست است

قضیه تالس : هرگاه در یک مثلث خطی موازی یک ضلع دو ضلع دیگر را قطع کند نسبت پاره خط های متناظر ایجاد شده روی آن دو ضلع برابرند ، توجه کنید :

نسبت جزء به جزء $\quad \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \quad \leftarrow \quad MN||BC$



* **نتیجه بسیار مهم** : بکمک ترکیب در مخرج و اضافه کردن پاره خطی موازی AB از N به ضلع BC ثابت می شود :

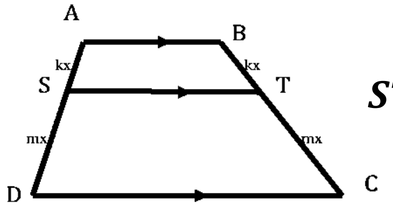
$$MN||BC \quad \rightarrow \quad \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

توجه داشته باشید که عکس قضیه تالس نیز برقرار است .

نکته مهم : قضیه تالس در ذوزنقه : در ذوزنقه زیر اگر ST موازی با قاعده باشد داریم $\frac{BT}{TC}=\frac{AS}{SD}$ همچنین

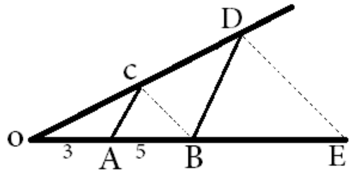
درصورتی که پاره خط ST وسط های دو ساق را به هم وصل کند اندازه اش برابر میانگین اندازه دو قاعده می باشد.

$$ST=\frac{mAB+kDC}{m+k}$$



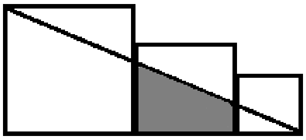
تمرین۱ : در شکل زیر دو جفت پاره خط موازی اند ، اندازه BE کدام است؟

راهنمایی : برای هر دو جفت خطوط موازی قضیه تالس را بنویسید ... آیا طرفین اولشان برابر نیستند؟!



جواب انتهایی : $\frac{16}{7}$

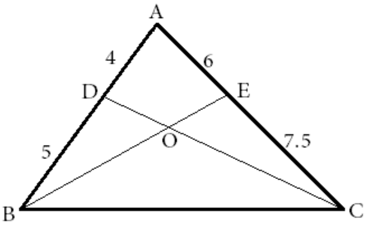
تمرین۲ :در شکل زیر سه مربع به طول اضلاع ۱ و ۲ و ۴ واحد کنار هم قرار گرفته اند ، مساحت ذوزنقه ی سایه زده شده کدام است؟



راهنمایی : بکمک قضیه تالس در مثلث بزرگ و با موازی قرار دادن اضلاع مربع وسط با قاعده مثلث بزرگ آآیا قاعده های ذوزنقه بدست نمی آید؟!...

جواب انتهایی : $\frac{16}{7}$

تمرین۳ : در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟

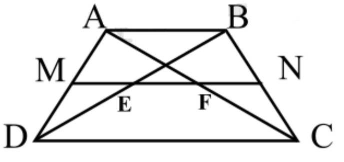


راهنمایی : نسبت قسمت های جدا شده روی مثلث شما را یاد چه قضیه ای می اندازد؟!...

جواب انتهایی : 1

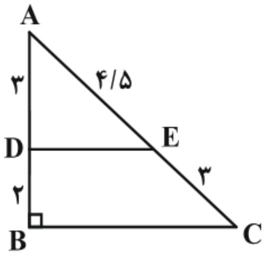
تمرین۴ : در ذوزنقه شکل زیر AM=MD , BN=NC اگر CD = 3AB باشد اندازه EF را بر حسب DC محاسبه کنید.

راهنمایی : با کم کردن اندازه ME , FN از MN مقدار مورد نظر مسئله بدست می آید ... از قضیه تالس در مثلث های DAB , CAB مقادیر ME , FN بدست می آید ...



جواب انتهایی : $EF = \frac{DC}{3}$

در این مبحث نیز همچون مبحث قبل مهمترین بخش یادگیری دیدن تست های متفاوت و آشنا شدن با کاربرد مفاهیم گفته شده در درسنامه در خلال حل تست های متعدد است ، از این رو برای رسیدن به تسلط بالا در این مبحث ضرورت دارد که تست های پیش رو را تمرین کنید ....



در شکل مقابل، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. طول پاره‌خط DE کدام است؟

۱) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۴}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$

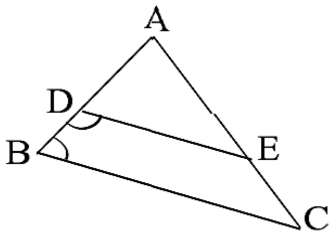
۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۷}$

$\frac{۳}{۲}=\frac{۴/۵}{۳}$ پس $DE \parallel BC$ است.

$$AB^۲+BC^۲=AC^۲ \Rightarrow ۵^۲+BC^۲=۷/۵^۲ \Rightarrow BC^۲=(\frac{۱۵}{۲})^۲-۵^۲=\frac{۲۲۵}{۴}-۲۵=\frac{۱۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{\frac{۱۲۵}{۴}}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{DE}{\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}} \Rightarrow DE=\frac{\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}\times ۳}{۵}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

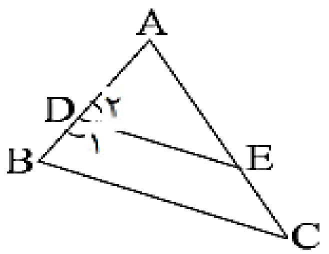


در شکل مقابل دو زاویه B و D از چهار ضلعی مکمل هم‌اند و $BC=\frac{۳}{۲}DE$ و $AB=۱۲$، اندازه BD کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۴/۵ ۴) ۵

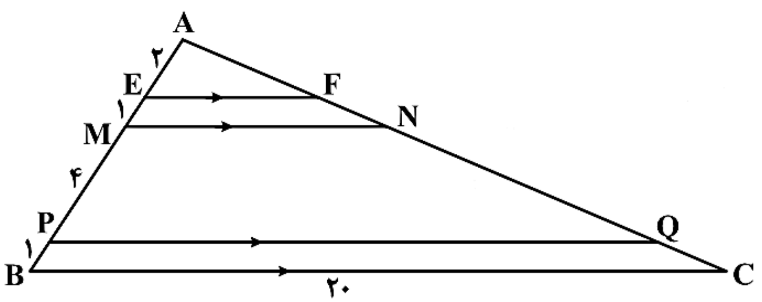
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left.\begin{matrix}\hat{B}+\hat{D}_۱=۱۸۰\\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{D}_۲ \Rightarrow DE \parallel BC$$

طبق رابطه تالس: $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow AD=\frac{۲}{۳}AB=۸$

$$\Rightarrow BD=AB-AD=۱۲-۸=۴$$



در شکل مقابل، حاصل $EF+MN+PQ$ کدام است؟

۱) ۲۸

۲) ۳۰

۳) ۳۲

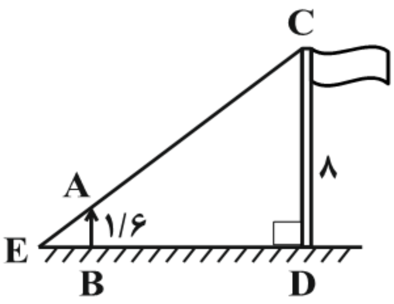
۴) $\frac{۶۱}{۲}$

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۸} = \frac{EF}{۲۰} \Rightarrow EF = ۵$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۳}{۸} = \frac{MN}{۲۰} \Rightarrow MN = \frac{۱۵}{۲} \qquad EF + MN + PQ = ۵ + \frac{۱۵}{۲} + \frac{۳۵}{۲} = ۳۰$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{۷}{۸} = \frac{PQ}{۲۰} \Rightarrow PQ = \frac{۳۵}{۲}$$

در شکل زیر پاره‌خط AB شخصی است که در فاصله‌ی ۴ متری از پای پرچمی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. اگر اندازهٔ قد شخص ۱/۶ متر باشد، طول کابل EC چند متر است؟



۱) $\sqrt{۹۱}$

۲) $\sqrt{۸۹}$

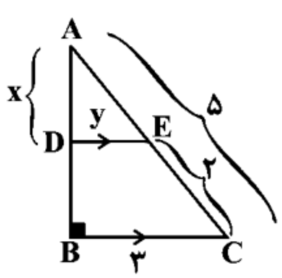
۳) ۱۱

۴) ۹

مردی به طول قد ۱۸۰cm به تیر چراغ برقی به طول ۶m در حال نزدیک شدن است. در لحظه‌ای که فاصلهٔ این مرد تا تیر چراغ برق برابر ۳m است. طول سایهٔ این فرد چند متر است؟

۱) $\frac{۹}{۷}$ ۲) $\frac{۹}{۱۰}$ ۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۱۰}{۹}$

- در شکل زیر، $x + y$ کدام است؟



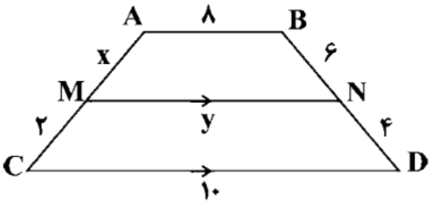
۱) ۴/۱

۲) ۴/۲

۳) ۵/۲

۴) ۵/۴

در ذوزنقهٔ زیر، اندازهٔ $x+y$ کدام است؟ $(AB \parallel MN \parallel CD)$



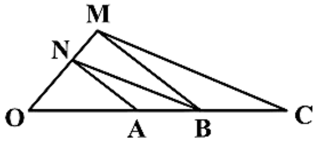
۱) ۹

۲) ۱۲/۲

۳) ۶/۲

۴) ۹/۲

در شکل زیر، $MB \parallel NA$ و $MC \parallel NB$ می‌باشد. اگر $OA = ۲x - ۸$ و $OB = x$ و $OC = x + ۳$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط AB چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

در مربع $ABCD$ ضلع CD را از طرف C به اندازه‌ی ضلع مربع تا نقطه‌ی E امتداد می‌دهیم، به طوری که AE ضلع BC را در F قطع کند. مساحت چهار ضلعی $AFCD$ چند برابر مساحت مربع است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

نقاط M , N , P وسطهای سه ضلع مثلث ABC را به هم وصل می‌کنیم. اگر پیرامون مثلث MNP برابر ۶ باشد، آنگاه پیرامون مثلث ABC کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

اوساط یک چهارضلعی محیطی را به هم وصل کردیم حاصل الزاماً کدام چهارضلعی است؟

۱) لوزی
۲) مستطیل
۳) یک چهار ضلعی محیطی
۴) متوازی الاضلاع

در مربعی به ضلع ۴ واحد فاصله وسط یک ضلع از قطر مربع کدامست؟

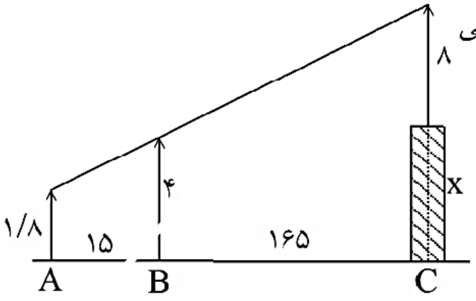
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

اوساط اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کرده‌ایم، حاصل، یک مستطیل شده است. این چهارضلعی الزاماً کدام است؟

۱) ذوزنقه متساوی‌الساقین ۲) لوزی ۳) مستطیل ۴) متوازی‌الاضلاع

اندازه دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی محدب برابرند. اوساط دو قطر و اوساط دو ضلع مقابل دیگر آن همواره رأسهای کدام چهار ضلعی است؟

۱) ذوزنقه متساوی‌الساقین ۲) چهارضلعی محاطی ۳) لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع



در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر ، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است، بلندی برج چند متر است؟

۱) ۱۹/۸ ۲) ۲۰/۲ ۳) ۲۰/۸ ۴) ۲۱/۲

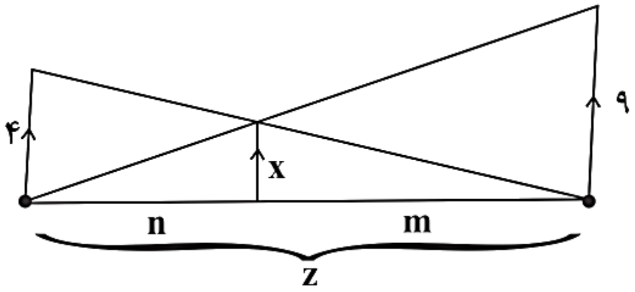
دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس خارج‌اند، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی مماس مشترک خارجی و خط المرکزین آن‌ها از مرکز دایره‌ی بزرگتر چند واحد است؟

۱) $11\frac{1}{3}$ ۲) $11\frac{2}{3}$ ۳) $12\frac{1}{3}$ ۴) $12\frac{2}{3}$

اواسط اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم یکی از زوایای چهارضلعی حاصل ۶۰ درجه است، نسبت قطر مستطیل به ضلع بزرگ مستطیل چقدر است؟

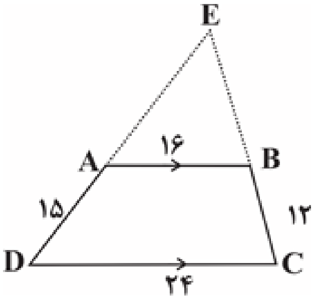
۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

در شکل زیر مقدار x کدام است؟



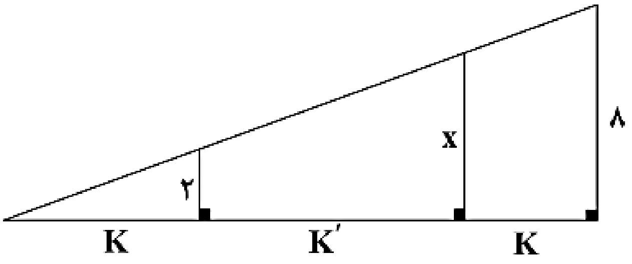
۱) $\frac{13}{18}$ ۲) $\frac{13}{36}$ ۳) $\frac{36}{13}$ ۴) $\frac{18}{13}$

در شکل مقابل، محیط مثلث CDE کدام است؟



۱) ۷۰ ۲) ۷۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۵

در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، مقدار x کدام است؟



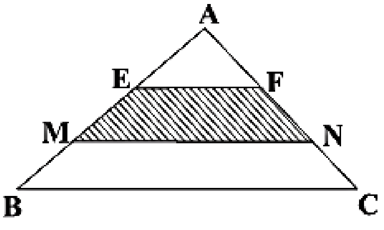
۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

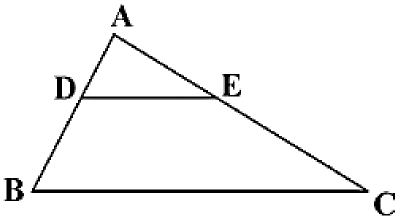
۴) ۷

در شکل زیر، اگر $\frac{AE}{BE}=\frac{BM}{AM}=\frac{CN}{AN}=\frac{AF}{CF}=\frac{۱}{۳}$ باشد، مساحت چهارضلعی هاشورخورده چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

- در شکل زیر $\frac{۱}{۲} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$، $BC = ۴$ و $AB + AC = ۵$ است. محیط ذوزنقهٔ DECB چند برابر محیط مثلث ADE است؟



۱) $\frac{۷}{۳}$

۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) $\frac{۲۵}{۹}$

۴) $\frac{۲۶}{۹}$

درس سوم : تشابه

دو مثلث زمانی متشابه هستند که زاویه های نظیر در آن دو با هم برابر بوده و اضلاع نظیر متناسب باشند که در آن نسبت اضلاع نظیر را نسبت تشابه می گویند

توجه داشته باشید در مثلث های متشابه :

1. نسبت تشابه با نسبت اضلاع نظیر ، ارتفاع های نظیر ، نیمسازهای نظیر ، میانه های نظیر و نسبت محیط ها برابر است . یعنی در دو مثلث متشابه A'B'C' , ABC داریم :
2. نسبت مساحت های دوشکل برابر است با مجذور نسبت تشابه .

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{h_a}{h_{a'}}=\frac{h_b}{h_{b'}}=\frac{h_c}{h_{c'}}=\frac{m_a}{m_{a'}}=\frac{m_b}{m_{b'}}=\frac{m_c}{m_{c'}}=\frac{d_a}{d_{a'}}=\frac{d_b}{d_{b'}}=\frac{d_c}{d_{c'}}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{2p}{2p'}=k$$

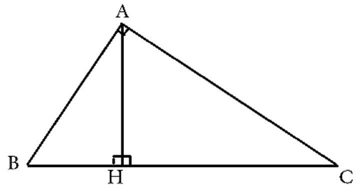
$$\frac{S}{S'}=k^2$$

m :میانه d :نیمساز h :ارتفاع R :شعاع دایره محیطی r :شعاع دایره محاطی k :نسبت تشابه

حالت های تشابه دو مثلث:

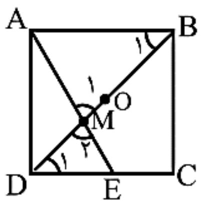
1. **(زز)** : دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند
2. **(ض ز ض)** : دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه های بین آنها برابر
3. **(ض ض ض)** : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر دوبه دو متناسب باشند

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه : بکمک تشابه در مثلث قائم الزاویه زیر روابط مهم زیر استخراج می شود



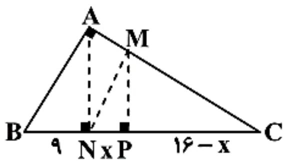
$$\begin{cases} AH^2 = BH \times HC \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \\ AB \times AC = AH \times BC \end{cases}$$

تمرین ۱ : در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$ پاره خطی که راس A را به به نقطه E وسط ضلع CD وصل می کند قطر مربع را در M قطع می کند ، فاصله نقطه M از وسط مربع کدام است



$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_1=\hat{M}_2 \\ AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta DME \Rightarrow \quad MD = \qquad\qquad MO = DO - MD =$$

تمرین۲ : در مثلث شکل مقابل ارتفاع هر سه مثلث قائم الزاویه رسم شده است ، اندازه X را بیابید؟



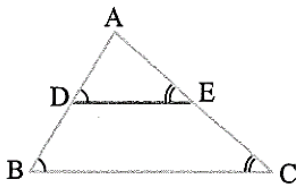
از آن‌جا که MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند، با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel AB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA}=\frac{CN}{NB}=\frac{16}{9}$$

$$\overset{\Delta}{ACN}: MP \parallel AN \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA}=\frac{CP}{PN}=\frac{16-x}{x}$$

چون نسبت $\frac{CM}{MA}$ در هر دو تناسب وجود دارد به راحتی نتیجه می‌گیریم که $\frac{CN}{NB}=\frac{CP}{PN}$ است، یعنی: x = ۵/۷۶

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی که به‌وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

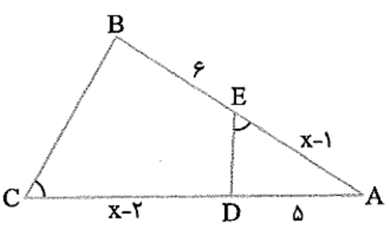
تمرین۳ : طول اضلاع یک مثلث ۲۰ و ۲۴ و ۳۰ است و محیط مثلث متشابه با آن ۱۸.۵ اختلاف بزرگترین و کوچکترین ضلع مثلث دوم کدام است؟ **راهنمایی** : ابتدا نسبت تشابه محاسبه شود .... سپس اضلاع مثلث دوم ....

تمرین۴ : در مثلث قائم الزاویه ای به طول اضلاع قائمه ی ۱ و ۲ عمودمنصف وتر سطح مثلث را با چه نسبتی تقسیم می کند؟ **راهنمایی** : با رسم عمود منصف وتر آیا دو مثلث متشابه نخواهیم داشت؟!! ... کدام دو مثلث متشابه اند؟! نسبت تشابه چقدر است؟ ...

تمرین۵ : اگر محیط یک مثلث متساوی الساقین ۱۸ واحد و ارتفاع وارد بر قاعده ۳ واحد باشد مساحت مثلث چند واحد مربع است؟

راهنمایی : با رسم ارتفاع وارد بر قاعده و مساوی قرار دادن دو ساق و کمک گرفتن از قضیه فیثاغوریس ....

در شکل مقابل $\hat{E}=\hat{C}$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۸
۲) ۷
۳) ۶
۴) ۵

دو مثلث AED و ABC بنابر حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند، زیرا:

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}\\ \hat{E}=\hat{C}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AED} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

با حذف $\frac{DE}{BC}$ از این تناسب و قرار دادن مقادیر از روی داده‌ها، داریم:

$$\frac{5}{6+(x-1)}=\frac{x-1}{(x-2)+5} \Rightarrow \frac{5}{5+x}=\frac{x-1}{3+x} \Rightarrow 5(3+x)=(5+x)(x-1) \Rightarrow 15+\cancel{5x}=\cancel{5x}-5+x^2-x$$

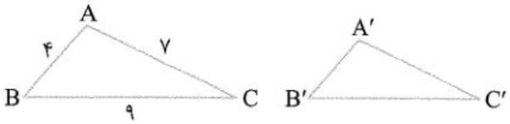
$$\Rightarrow x^2-x-20=0 \Rightarrow (x-5)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases}x-5=0\\ x+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\ x=-4\end{cases}$$

چون طول عددی مثبت است، پس $x=-4$ غیرقابل قبول است و در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح است.

مثلث ABC با طول اضلاع ۴، ۷ و ۹ با مثلث $A'B'C'$ با محیط ۱۵ متشابه است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

نسبت تشابه دو مثلث برابر

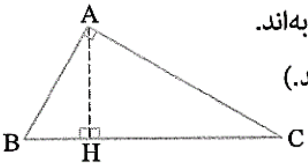


$$k=\frac{AB}{A'B'}=\frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}=\frac{۴+۷+۹}{۱۵}=\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۴}{۳}$$

است، پس نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر $k^۲=\frac{۱۶}{۹}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{S}{S'}=k^۲=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow S=\frac{۱۶}{۹}S'\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$، اگر ارتفاع AH را رسم کنید، روابط طولی بین برخی از پاره‌خط‌ها به‌وجود می‌آید که در تست‌ها کاربرد فراوان دارند. این روابط را حفظ کنید.



آ) مثلث‌های ABH و AHC با هم متشابه‌اند و هم‌چنین این دو مثلث با مثلث اصلی، یعنی مثلث ABC متشابه‌اند.

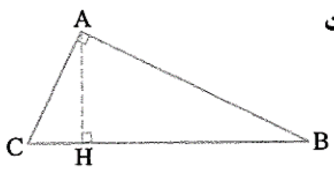
(اگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، آن‌گاه سه مثلث قائم‌الزاویه، دوبه‌دو با هم متشابه‌اند.)

ب) $AH^۲=BH.CH$ (ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعهٔ ایجادشده روی وتر است.)

پ) $AB^۲=BH.BC$ و $AC^۲=CH.BC$ (BH و CH به ترتیب تصویر قائم اضلاع AB و AC روی وتر BC هستند.)

نکته: از رابطهٔ $AH.BC=AB.AC$ می‌توان برای به‌دست آوردن طول ارتفاع وارد بر وتر استفاده کرد.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$، طول ارتفاع AH برابر ۸ و $CH=۴$ می‌باشد. مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۵۰ ۲) ۴۰
۳) ۸۰ ۴) ۶۰

با توجه به شکل، داریم:

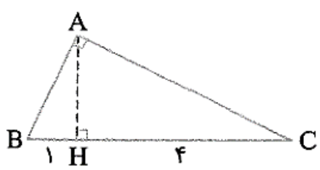
$$AH^۲=CH.BH\Rightarrow ۸^۲=۴\times BH\Rightarrow BH=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}\times(۴+۱۶)}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۴\times۲۰=۸۰\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، ارتفاع وارد بر وتر دو قطعه به طول‌های ۱ و ۴ روی وتر ایجاد می‌کند. طول میانهٔ متوسط این مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}$

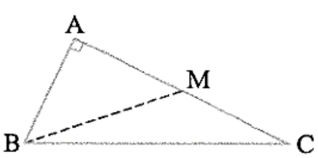
با توجه به شکل مقابل، ابتدا طول دو ضلع AB و AC را به‌دست می‌آوریم:



$$AB^۲=BH.BC=۱\times۵\Rightarrow AB=\sqrt{۵}$$

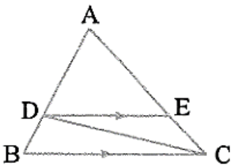
$$AC^۲=CH.CB=۴\times۵=۲۰\Rightarrow AC=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

میانهٔ وارد بر ضلع AC (ضلع متوسط)، میانهٔ متوسط مثلث است:



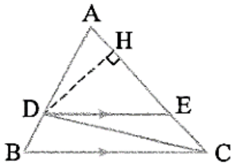
$$AM=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۵}=\sqrt{۵}\ ,\ AB=\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow BM^۲=AB^۲+AM^۲=۵+۵=۱۰\Rightarrow BM=\sqrt{۱۰}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.



در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

۱) ۱/۳۶ ۲) ۱/۴۴ ۳) ۱/۵۶ ۴) ۱/۶۴



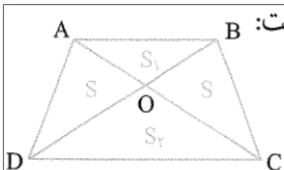
بنابر فرض $\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۳}{۵}$ می‌باشد. با رسم عمود DH بر AC، داریم:

$$\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{CE}{AE}\Rightarrow\frac{CE}{AE}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\begin{cases}CE=۳m\\AE=۵m\end{cases}$$

بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، داریم:

$$\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AE}{AC}\right)^۲=\left(\frac{۵m}{۳m+۵m}\right)^۲=\frac{۲۵}{۶۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}-S_{ADE}}=\frac{۲۵}{۶۴-۲۵}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{BCED}}=\frac{۲۵}{۳۹}\Rightarrow\frac{S_{BCED}}{S_{ADE}}=\frac{۳۹}{۲۵}=\frac{۳۹\times۴}{۲۵\times۴}=\frac{۱۵۶}{۱۰۰}=۱/۵۶\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.



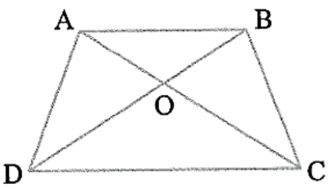
اگر در ذوزنقه، قطرها را رسم کنیم، مثلث‌هایی ایجاد می‌شود که بین مساحت‌های آن‌ها روابطی به‌صورت زیر برقرار است:

۱) دو مثلث OAB و OCD بنابر حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند و داریم: $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}=\left(\frac{AB}{CD}\right)^۲$

۲) مساحت دو مثلث کناری با هم برابرند، یعنی: $S_{AOD}=S_{BOC}$

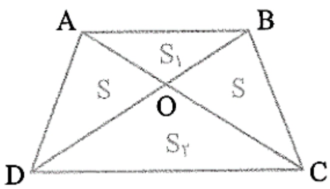
۳) با نام‌گذاری مساحت‌ها در شکل روبه‌رو، داریم: $S_{AOB}\times S_{COD}=S_{AOD}\times S_{BOC}$

در ذوزنقهٔ شکل روبه‌رو، اگر CD دو برابر AB باشد، مساحت مثلث OCD چه کسری از مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

با توجه به نام‌گذاری زیر، داریم:



$$\frac{S_۲}{S_۱}=\left(\frac{CD}{AB}\right)^۲=\left(\frac{۲\cancel{AB}}{\cancel{AB}}\right)^۲=۴\Rightarrow S_۲=۴S_۱\qquad(۱)$$

از طرفی داریم:

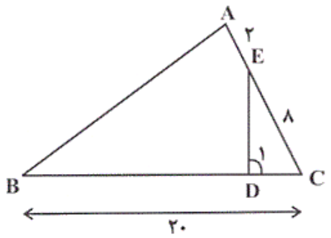
$$S_۱S_۲=S^۲\xrightarrow{(۱)}S_۱(۴S_۱)=S^۲\Rightarrow S^۲=۴S_۱{}^۲\Rightarrow S=۲S_۱\qquad(۲)$$

مساحت ذوزنقه را بر حسب $S_۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت ذوزنقه}=۲S+S_۱+S_۲\overset{(۲),(۱)}{=\!=}۲(۲S_۱)+S_۱+۴S_۱=۹S_۱\qquad(۳)$$

$$(۱),(۳)\Rightarrow\frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{S_۲}=\frac{۹S_۱}{۴S_۱}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

در شکل مقابل، $\widehat{A}=\widehat{D}_1$ است. طول BD چند واحد است؟



۱) ۱۲

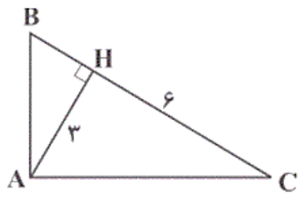
۲) ۱۴

۳) ۱۵

۴) ۱۶

$$\begin{cases}\widehat{A}=\widehat{D}_1\\ \widehat{C}=\widehat{C}\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{DCE}\sim\overset{\Delta}{ACB}\Rightarrow\frac{EC}{BC}=\frac{DC}{AC}\Rightarrow\frac{۸}{۲۰}=\frac{DC}{۱۰}\Rightarrow DC=۴\Rightarrow BD=BC-DC=۲۰-۴=۱۶$$

در شکل زیر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC چقدر است؟



۱) ۱۲/۲۵

۲) ۱۱/۲۵

۳) ۱۱/۵

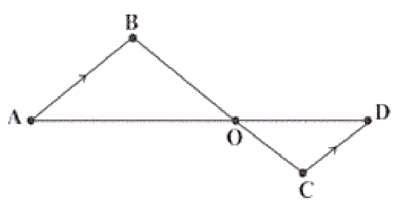
۴) ۱۱

از تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{AHC}$ و نوشتن تناسب اضلاع داریم:

$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow ۹=۶\times BH\Rightarrow BH=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}=۱/۵\qquad BC=BH+CH=۱/۵+۶=۷/۵$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۷/۵=\frac{۲۲/۵}{۲}=۱۱/۲۵$$

-نسبت مساحت مثلث AOB به COD، برابر $\frac{۹}{۴}$ است. اگر $AD=۱۵$ باشد، OD چه‌قدر است؟



۱) ۳

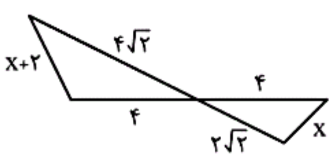
۲) ۶

۳) ۹

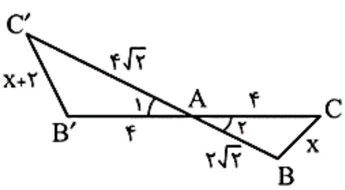
۴) ۱۲

$$AB\parallel CD\Rightarrow\widehat{A}=\widehat{D},\widehat{B}=\widehat{C}\Rightarrow\overset{\Delta}{AOB}\sim\overset{\Delta}{COD}\Rightarrow\frac{AO}{OD}=\sqrt{\frac{S_{AOB}}{S_{COD}}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{AO}{OD}=\frac{۳}{۲}\qquad AO+OD=۱۵\Rightarrow OD=۶$$

با توجه به شکل زیر، x کدام است؟



۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $۲(\sqrt{۲}+۱)$

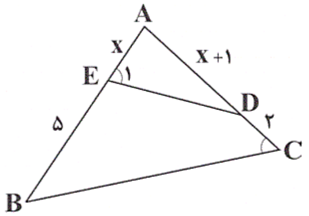


دو مثلث ABC و $AB'C'$ بنا به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین آن‌ها با هم متشابه‌اند، زیرا:

$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_۲\ (\text{متقابل به رأس})\\ \dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{AB}{AB'}\ ,\ \left(\dfrac{۴}{۴\sqrt{۲}}=\dfrac{۲\sqrt{۲}}{۴}=\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}\ :\text{زیرا}\right)\end{cases}$$

پس نسبت $\frac{BC}{B'C'}$ نیز برابر نسبت تشابه است و داریم:

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{x}{x+۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\sqrt{۲}x=x+۲\Rightarrow\sqrt{۲}x-x=۲\Rightarrow x(\sqrt{۲}-۱)=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=۲(\sqrt{۲}+۱)$$



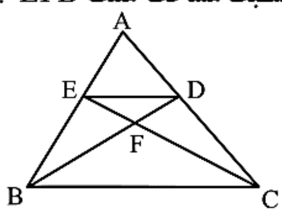
اگر در شکل زیر $\hat{E}_۱ = \hat{C}$ باشد، مساحت چهارضلعی EDCB چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکـی از مثلهای همنهشت است؟

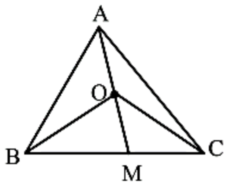
۱) $\frac{۳}{}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

در مثلث ABC شکل زیر به فرض آنکه پاره‌خطهای BD و CE میانه‌هـای اضـلاع مثلـث باشندنسـبت مساحت مثلث EFD به مساحت مثلث ABC کدام است؟



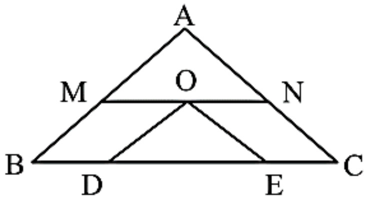
۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

در شکل مقابل ، مساحت مثلثهای OBC,ABC را به ترتیب S و S' می نامیم. نسبت $\frac{OM}{AM}$ کدام است؟



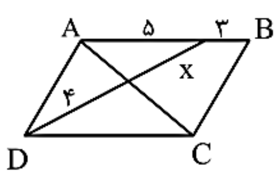
۱) $\sqrt{\frac{S'}{S}}$ ۲) $\left(\frac{S'}{S}\right)^۲$ ۳) $\frac{S-S'}{S}$ ۴) $\frac{S'}{S}$

در شـکل مقابـل $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۵۴$ ونقـاط M و N و O بـه ترتیـب وسـط AB و AC و MN هسـتند اگـر OD||AB و OE||AC باشد. آنگاه مساحت مثلث ODE کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲}$

در متوازی‌الاضلاع ABCD اندازه‌ی x کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۱/۵
۳) ۲ ۴) ۲/۵