



# آزمون غیر حضوری

## دروس اختصاصی دوازدهم ریاضی

۱۵ فروردین ۹۹

(مباحث ۲۹ فروردین ۹۹)

گروه فنی و تولید:

|  |                              |
|--|------------------------------|
| محمد اکبری   | مدیر تولید آزمون غیر حضوری   |
| عادل حسینی   | مسئول دفترچه آزمون غیر حضوری |
| مدیر گروه: فاطمه رسولی نسب<br>مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری | گروه مستندسازی               |
| میلاذ سیاوشی   | حروف نگار و صفحه آرا         |
| سوران نعیمی  | ناظر چاپ                     |

بنیاد علمی آموزشی قلم چی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام داراییها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»



**حسابان ۲**

کاربردهای مشتق  
صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۲۶

**حسابان ۲**

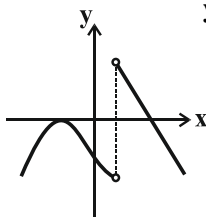
۱- تابع  $f(x) = |x^2 - x|$  چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲- در کدام تابع زیر  $x=1$  مینیمم نسبی نیست؟ [ ]، [ ]، [ ] (نماد جزء صحیح است).

- (۱)  $y = \cos \pi [x]$  (۲)  $y = (x-1)^2 [x]$  (۳)  $y = \sqrt{x - [x]}$  (۴)  $y = x[-x]$

۳- شکل مقابل نمودار مشتق تابع  $f$  را نشان می‌دهد ( $D_f = \mathbb{R}$ ). نمودار تابع  $f$  دارای:



- (۱) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.  
(۲) یک مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.  
(۳) یک مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.  
(۴) دو مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

۴- اگر مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع  $f(x) = x(x^2 - 3) + k$  در بازه  $[0, 3]$  قرینه هم باشند، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۱۰ (۴) -۱۰

۵- اگر نقطه  $A(-1, \frac{1}{4})$  نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+3}$  باشد، طول و نوع نقطه اکسترمم نسبی دیگر  $f$  کدام است؟

- (۱) ۱، ماکزیمم (۲) ۱، مینیمم (۳) ۳، ماکزیمم (۴) ۳، مینیمم

۶- وضعیت یکنوایی تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x + \cos^2 x$  در بازه  $[0, \frac{\pi}{4}]$  چگونه است؟

- (۱) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی و سپس صعودی  
(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی و سپس صعودی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی و سپس نزولی

۷- یک شیرینی‌فروشی می‌خواهد با بریدن مربع‌های همنهشت از چهارگوشه‌ی مقوایی مربع شکل به طول ضلع واحد و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌ای در باز بسازد. بیش‌ترین حجم ممکن برای جعبه چند واحد مکعب است؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{2}{27}$  (۳)  $\frac{7}{15}$  (۴)  $\frac{9}{31}$

۸- نمودار تابع  $f(x) = \frac{mx^3}{3} + \frac{(m+1)x^2}{2} + mx + m$  اکیداً صعودی است. حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - (-\frac{1}{3}, 1)$  (۲)  $[-\frac{1}{3}, 1]$  (۳)  $[1, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, 1)$

۹- مقدار ماکزیمم مطلق تابع  $y = \frac{1 + \cos 2x}{\sin x - 1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{\sqrt{3}+2}$  (۲)  $\frac{3}{\sqrt{3}-2}$  (۳) ۱ (۴) صفر

۱۰- مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که درون نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{2}$



**ریاضی پایه**

ریاضی ۱

صفحه‌های ۱ تا ۲۷.

۴۷ تا ۶۸ و ۹۴ تا ۱۱۷

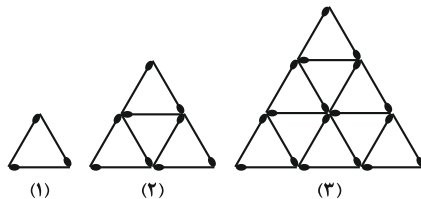
حسابان ۱

صفحه‌های ۱ تا ۳۷، ۶ تا ۹۰

**ریاضی پایه**

۱۱- با توجه به الگوی زیر، اختلاف تعداد چوب کبریتها و تعداد مثلثها (کوچکترین مثلث ممکن) در

مرحله هشتم کدام است؟



۴۴ (۱)

۴۰ (۲)

۳۶ (۳)

۳۲ (۴)

۱۲- مقدار  $x$  در تساوی  $\frac{\sqrt[3]{4} \times 8^{\frac{x}{4}}}{\sqrt{2} \sqrt[3]{2} \times 2^x} = \sqrt{1}$  کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)

۱۳- اگر  $a = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$  باشد، حاصل  $a^2 - 3a$  کدام است؟

$8\sqrt{3}$  (۴)

۸ (۳)

$4\sqrt{2}$  (۲)

۶ (۱)

۱۴- تابع  $f$  همانی، تابع  $g$  ثابت و تابع  $h$  خطی است. اگر داشته باشیم:  $2f(-2) = g(2)$ ،  $2f(-2) = g(2)$  و  $h(-2) = g(0) + 1$

$h(2) = f(2) + g(3) + 1$ ، مجموعه جواب نامعادله  $h(x) \geq 0$  کدام است؟ (دامنه هر سه تابع،  $\mathbb{R}$  است.)

$(-\infty, 0]$  (۴)

$[4, +\infty)$  (۳)

$[0, +\infty)$  (۲)

$(-\infty, -2]$  (۱)

۱۵- کدام خط، تابع  $f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x < 0 \\ |x-1|+1 & ; 0 \leq x < 3 \\ 7-x & ; x \geq 3 \end{cases}$  را در تعداد نقاط بیشتری قطع می‌کند؟

$y = 3$  (۴)

$y = 2$  (۳)

$y = 1$  (۲)

$y = 0$  (۱)

۱۶- اگر  $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 1 - 3x$  باشد، ضابطه تابع  $g \circ f^{-1}$  کدام است؟

$4x^2 - 6x + 3$  (۴)

$-2x^2 - 5x + 10$  (۳)

$x^2 - 6x + 8$  (۲)

$-3x^2 + 12x - 14$  (۱)

۱۷- اگر  $f(x) = a^{1-x} + \frac{2}{ab}$ ،  $f(1) = 1/2$  و  $f(\frac{1}{2}) = 3/2$  باشد، حاصل  $2a - 9b$  کدام است؟

۸ (۴)

۱۸ (۳)

-۸ (۲)

۹ (۱)

۱۸- اگر  $5^{(\log x)^{-1}} = 3^{(\log x)^{-1}} - 3^{(\log x)^{-1} + 1} - 5^{(\log x)^{-1}}$  باشد، حاصل  $\log_{\sqrt{3}}(x-1)$  کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

۱۹- مجموعه طول نقاط مشترک نمودار توابع  $f(x) = \sqrt[3]{4-x^3}$  و  $f^{-1}(x)$ ، چند عضو دارد؟

(۴) این مجموعه نامتناهی است.

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۰- کسر  $\frac{1}{\sqrt[5]{-2\sqrt[3]{4}}}$  را در چه عددی ضرب کنیم تا حاصل برابر  $-2$  گردد؟

$\sqrt[3]{4}$  (۴)

$\sqrt[3]{16}$  (۳)

$2\sqrt[3]{4}$  (۲)

$\sqrt[3]{2}$  (۱)

۲۱- مجموع مقادیر  $m$  که به ازای آنها نقطه  $A = (1, m-1, 1)$  از دو صفحه  $xz$  و  $xy$  به یک فاصله باشد، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۲۲- اگر تصویر قائم نقطه  $A = (x, y, z)$  بر روی محور  $x$  ها نقطه  $(2, 0, 0)$  و قرینه  $A$  نسبت به صفحه  $xy$ ، نقطه  $(x, 3, 4)$  باشد، قرینه  $A$  نسبت به مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱)  $(-2, -3, -4)$  (۲)  $(-2, -3, 4)$  (۳)  $(-2, 3, -4)$  (۴)  $(2, 3, -4)$

۲۳- اگر  $A = (1, -1, 2)$ ،  $B = (2, 2, 4)$  و  $C = (-2, 0, 1)$  سه رأس از متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  باشند، آنگاه طول قطر  $BD$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲)  $5\sqrt{2}$  (۳)  $5\sqrt{3}$  (۴) ۱۰

۲۴- تصاویر بردار  $\vec{a}$  روی محورهای  $Ox$ ،  $Oy$  و  $Oz$  به ترتیب بردارهای  $(2, 0, 0)$ ،  $(0, -1, 0)$  و  $(0, 0, -2)$  هستند. طول بردار  $\vec{a}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۲ (۴) ۳

۲۵- در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ، حاصل  $\vec{AC} - \vec{BD}$  کدام است؟

- (۱)  $\vec{O}$  (۲)  $2\vec{AB}$  (۳)  $2\vec{CD}$  (۴)  $2\vec{BC}$

۲۶- دو نقطه  $M$  و  $N$  روی پاره خط  $AB$  به گونه‌ای قرار دارند که  $\vec{AN} = 3\vec{NB}$  و  $\vec{BM} = 2\vec{MA}$  است. اگر  $\vec{MN} = k\vec{AB}$  باشد، آنگاه مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{12}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{7}{12}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۷- اگر نقطه  $A = (a, b, c)$  را روی صفحه  $xy$  و روی محور  $z$  ها تصویر کنیم، به ترتیب نقاط  $B$  و  $C$  به دست می‌آید. بین طول

پاره‌خطهای  $OA$  و  $BC$  کدام رابطه همواره برقرار است؟ ( $O$  مبدأ مختصات است.)

(۱)  $|BC| = 2|OA|$  (۲)  $|OA| = 2|BC|$

(۳)  $|OA| + |BC| = 2$  (۴)  $|OA| = |BC|$

۲۸- نقطه  $M = (m+1, m, 1)$  به فاصله ۱ واحد از صفحه  $xz$  قرار دارد، فاصله  $M$  از محور  $y$  ها کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳) ۲ (۴)  $\sqrt{10}$

۲۹- اگر نقطه  $A$  تصویر قائم نقطه  $M = (m-1, 1, -1)$  روی صفحه  $yz$  و  $B$  قرینه نقطه  $M$  نسبت به محور  $y$  ها باشد، کم‌ترین فاصله

دو نقطه  $A$  و  $B$  از هم کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{2}$

۳۰- نقاط  $A = (m+1, 1, -2)$  و  $B = (m, -1, 1)$ ، مفروض‌اند. اگر  $|OB| > |OA| > |AB|$ ، آنگاه حدود تغییرات  $m$  به کدام صورت

است؟ ( $O$  مبدأ مختصات است.)

- (۱)  $m < -2, m > 2$  (۲)  $-4 < m < 2$  (۳)  $-2 < m < 2$  (۴)  $m < -4, m > 2$



**ریاضیات گسسته**

**ریاضیات گسسته**

ترکیبات (شمارش)  
صفحه‌های ۶۲ تا ۷۳

۳۱- اگر  $A$  یک مربع لاتین  $3 \times 3$  باشد، آنگاه چند مربع لاتین  $3 \times 3$  وجود دارد که با  $A$  متعامد

بوده و از تعویض جای حداقل دو سطر مربع  $A$  حاصل شده باشند؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۲- مربع لاتین چرخشی  $4 \times 4$  مفروض است. اگر  $a_i$  مجموع اعداد باقی‌مانده در این مربع بعد از حذف سطر  $i$ ام و ستون  $i$ ام باشد، آنگاه کدام یک از مقادیر زیر بزرگ‌تر است؟

- (۱)  $a_1$  (۲)  $a_2$  (۳)  $a_3$  (۴) هر سه مقدار یکسان است.

۳۳- خانه‌های مربع مقابل را به چند طریق می‌توان با اعداد ۱ تا ۴ پر کرد به طوری که یک مربع لاتین تشکیل شود؟

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ |   |   |   |
|   | ۲ |   |   |
|   |   | ۲ |   |
|   |   |   | ۱ |

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۳۴- مجموع درایه‌های یک مربع لاتین از مرتبه  $n$  کدام است؟

(۱)  $\frac{n^2(n+1)}{2}$  (۲)  $\frac{n(n+1)^2}{2}$   
(۳)  $\frac{n^2(n^2+1)}{4}$  (۴)  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

۳۵- اگر مربع لاتین  $A$  تحت جایگشت  $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$  به مربع لاتین  $B$  تبدیل شود، آنگاه حاصل  $a+b+c$  کدام است؟

$A = \begin{matrix} & & 2 & & \\ & & & & \\ 3 & & & 1 & \\ & & & & \\ & & & 3 & \end{matrix}$        $B = \begin{matrix} & & & & \\ & & a & & b \\ & & & & \\ c & & & & \end{matrix}$

- (۱) ۶  
(۲) ۷  
(۳) ۸  
(۴) ۹

**هندسه ۱**

**هندسه ۱**

کل کتاب

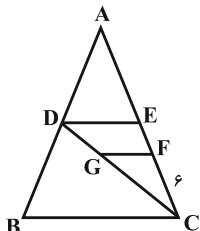
صفحه‌های ۹ تا ۹۶

۳۶- در مثلث  $ABC$ ، زاویه  $A$  حاده است. اگر عمود منصف‌های دو ضلع  $AC$  و  $AB$  یکدیگر را در

نقطه  $O$  قطع کنند در این صورت زاویه  $\hat{B}OC$  همواره برابر کدام است؟

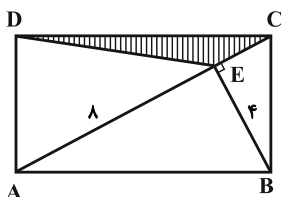
- (۱)  $90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A}$  (۲)  $\hat{B} + \hat{C}$  (۳)  $\frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$  (۴)  $2\hat{A}$

۳۷- در شکل زیر  $DE \parallel FG \parallel BC$  و  $FC = 6$  است. اگر  $G$  محل هم‌مرسی میانه‌های مثلث  $ABC$  باشد، طول  $AC$  کدام است؟



- (۱) ۱۲  
(۲) ۱۵  
(۳) ۱۸  
(۴) ۲۱

۳۸- در شکل زیر  $ABCD$  مستطیل و  $E$  روی قطر  $AC$  است. مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟ ( $AE = ۸$ ,  $BE = ۴$ )



۳ (۱)

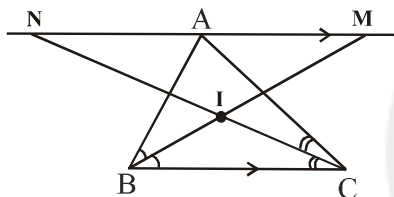
۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۳۹- در شکل زیر، محیط مثلث  $ABC$  برابر ۲۴ و  $BC = ۹$  می‌باشد. نیمسازهای زاویه‌های داخلی  $B$  و  $C$ ، خطی که از

رأس  $A$  موازی ضلع  $BC$  رسم شده است را به ترتیب در نقاط  $M$  و  $N$  قطع می‌کنند. اگر  $I$  محل تقاطع این دو نیمساز باشد،



آنگاه فاصله  $I$  از پاره خط  $MN$ ، چند برابر فاصله  $I$  از ضلع  $BC$  است؟

$\frac{۷}{۳}$  (۲)

۲ (۱)

$\frac{۴}{۳}$  (۴)

$\frac{۵}{۳}$  (۳)

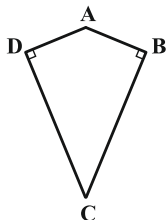
۴۰- کدام یک از چهارضلعی‌های زیر، الزاماً دوزنقه متساوی الساقین است؟

(۱) چهارضلعی‌ای که قطرهای آن برابر یکدیگر و نیمساز زاویه‌ها هستند.

(۲) چهارضلعی‌ای که دو ضلع مقابل برابر و دو قطر برابر دارد.

(۳) چهارضلعی‌ای که زاویه‌های مقابل آن مکمل یکدیگرند و دو قطر برابر دارد.

(۴) چهارضلعی‌ای که فقط دو ضلع مقابل موازی دارد و قطرهای آن برابر یکدیگرند.



۴۱- در چهارضلعی شکل مقابل  $AB = AD = ۳$  و  $BC = CD = ۶$  است. محیط چهارضلعی حاصل از وصل

کردن متوالی وسط‌های اضلاع چهارضلعی  $ABCD$  کدام است؟

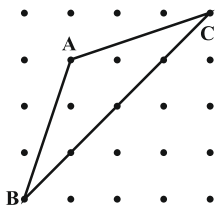
$\frac{۳۲\sqrt{۵}}{۵}$  (۴)

$۶\sqrt{۵}$  (۳)

$\frac{۲۷\sqrt{۵}}{۵}$  (۲)

$۵\sqrt{۵}$  (۱)

۴۲- در شکل زیر مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی پاره خط BC از دو پاره خط AB و AC کدام است؟ (فاصله بین هر دو نقطه



متوالی افقی یا عمودی یک واحد است).

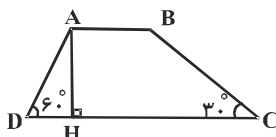
(۲)  $\frac{2}{5}\sqrt{10}$

(۱)  $\frac{4}{5}\sqrt{10}$

(۴)  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

(۳)  $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

۴۳- در دوزنقه شکل زیر، زوایای مجاور قاعده بزرگ برابر  $30^\circ$  و  $60^\circ$  هستند. اگر  $AB = 5$  و  $CD = 13$



قاعده‌های دوزنقه باشند، اندازه ارتفاع AH کدام است؟

(۲)  $2\sqrt{3}$

(۱)  $4\sqrt{3}$

(۴)  $2\sqrt{2}$

(۳)  $4\sqrt{2}$

۴۴- دو صفحه P و Q بر هم عمودند. چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) هر خط عمود بر یکی از این دو صفحه، با دیگری موازی است.

(ب) هر صفحه عمود بر یکی از این دو صفحه، با دیگری موازی است.

(پ) هر خط موازی با یکی از این دو صفحه، بر دیگری عمود است.

(ت) هر صفحه موازی با یکی از این دو صفحه، بر دیگری عمود است.

(۴) ۴

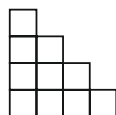
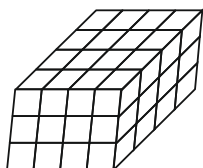
(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۴۵- از مکعب مستطیل مفروض می‌خواهیم تعدادی مکعب کوچک حذف کنیم تا نمای بالای آن به صورت شکل زیر درآید، اگر حداقل

و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که لازم است حذف شوند به ترتیب برابر m و M باشند، حاصل  $M - m$  کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۳۸

(۳) ۱۸

(۴) ۲۰



**آمار و احتمال**

**آمار و احتمال**

آشنایی با مبانی ریاضیات و

احتمال

صفحه‌های ۱ تا ۷۲

ریاضی ۱:

آمار و احتمال

صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۵۱

۴۶- گزاره  $[(q \Rightarrow p) \Rightarrow q] \wedge [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$  هم‌ارز منطقی با کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

(۱)  $T$  (۲)  $p$

(۳)  $q$  (۴)  $p \wedge q$

۴۷- فرض کنید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $A$ ،  $۸$  برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $B$  باشد.

اگر به اعضای  $A$  دو عضو جدید و متمایز و به اعضای  $B$  سه عضو جدید و متمایز اضافه کنیم،

اختلاف تعداد زیرمجموعه‌های این دو مجموعه برابر با ۱۹۲ می‌شود. مجموعه  $A$  (قبل از افزودن

دو عضو جدید) دارای چند زیرمجموعه ۳ عضوی می‌باشد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۵ (۴) ۵۶

۴۸- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی باشند، حاصل عبارت  $(A' - B') \cup (A - B) \cup [(A \cup B') \cap B]$  همواره کدام است؟

(۱)  $A$  (۲)  $B$  (۳)  $A \cup B$  (۴)  $A \cup B'$

۴۹- دو مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + ax + 1 = 0\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$  مفروض‌اند. به ازای کدام مجموعه زیر، رابطه

$A \times B = B \times A$  برقرار است؟

(۱)  $\{a \in \mathbb{R} \mid a > 2\}$  (۲)  $\{a \in \mathbb{R} \mid -2 < a < 2\}$  (۳)  $\{a \in \mathbb{R} \mid a < -2\}$  (۴) هیچ مقداری برای  $a$  وجود ندارد.

۵۰- حسن و حسین به همراه ۴ نفر دیگر در یک صف پشت سر هم ایستاده‌اند. با چه احتمالی بین حسن و حسین فقط یک نفر قرار دارد؟

(۱)  $\frac{1}{15}$  (۲)  $\frac{2}{15}$  (۳)  $\frac{8}{15}$  (۴)  $\frac{4}{15}$

۵۱- از میان ۴ کارمند مرد و ۳ کارمند زن می‌خواهیم ۵ نفر را برای انجام یک کار گروهی انتخاب کنیم. احتمال آنکه اختلاف تعداد

مردان و زنان انتخابی در این گروه حداکثر ۱ نفر باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{6}{7}$  (۲)  $\frac{5}{7}$  (۳)  $\frac{16}{21}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۵۲- تاسی داریم که احتمال آمدن هر عدد، متناسب با مربع آن عدد است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد رو شده زوج

است، با کدام احتمال عدد ۴ رو شده است؟

(۱)  $\frac{1}{14}$  (۲)  $\frac{1}{7}$  (۳)  $\frac{3}{14}$  (۴)  $\frac{2}{7}$

۵۳- علی و رضا دو دوست هستند. می‌دانیم احتمال به سفر رفتن علی در صورتی که رضا به سفر رفته باشد، با احتمال به سفر رفتن

رضا در صورتی که علی به سفر نرفته باشد، برابر است. اگر احتمال به سفر رفتن رضا در صورتی که علی به سفر رفته باشد،

$\frac{۷۵}{۱۰۰}$  و احتمال به سفر رفتن رضا  $\frac{۴}{۱۰۰}$  باشد، احتمال اینکه علی و رضا هر دو به سفر بروند، کدام است؟

(۱)  $\frac{۴}{۱۰۰}$  (۲)  $\frac{۳}{۱۰۰}$  (۳)  $\frac{۲۵}{۱۰۰}$  (۴)  $\frac{۱}{۱۰۰}$

۵۴- محصولات یک کارخانه توسط سه ماشین  $A$ ،  $B$  و  $C$  تولید می‌شود که به ترتیب ۲۰، ۵۰ و ۳۰ درصد محصولات را تولید

می‌کنند. می‌دانیم ۳ درصد از محصولات  $A$  و ۳ درصد از محصولات  $C$  معیوب هستند و اگر یکی از محصولات این کارخانه را

به تصادف انتخاب کنیم با احتمال ۵ درصد معیوب می‌باشد، چند درصد از محصولات تولیدی ماشین  $B$  معیوب است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۵۵- جعبه‌ای محتوی ۲ مهره زرد، ۲ مهره قرمز و یک مهره آبی است. دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری از این جعبه خارج می‌کنیم.

احتمال اینکه حداکثر یک مهره زرد رنگ باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{۸۴}{۱۰۰}$  (۲)  $\frac{۹}{۱۰۰}$  (۳)  $\frac{۷۲}{۱۰۰}$  (۴)  $\frac{۷۸}{۱۰۰}$





**فیزیک ۳**

**فیزیک ۳**

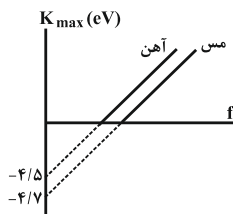
آشنایی با فیزیک اتمی  
صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۳۶

۵۶- اگر فرض کنیم شدت تابشی خورشید در نقطه‌ای روی سطح زمین برابر با  $310 \frac{W}{m^2}$  باشد، یک پنل خورشیدی به ابعاد  $100cm \times 200cm$  و بازدهی ۲۰ درصد، در هر دقیقه انرژی چند فوتون را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند؟ (طول موج متوسط فوتون‌ها را  $600nm$  فرض کنید،

$hc = 1240 eV \cdot nm$  و  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$

- (۱)  $4/5 \times 10^{21}$  (۲)  $4/5 \times 10^{22}$  (۳)  $2/25 \times 10^{21}$  (۴)  $2/25 \times 10^{22}$

۵۷- در یک آزمایش فوتوالکتریک، نمودار بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بر حسب بسامد نور فرودی برای دو فلز آهن و مس رسم شده است. اگر نوری با طول موج  $272/5 nm$  به سطح هر دو فلز بتابانیم، در کدام فلز گسیل فوتوالکتریک صورت می‌گیرد؟ ( $hc = 1240 eV \cdot nm$ )



(۱) آهن

(۲) مس

(۳) در هر دو، گسیل فوتوالکتریک صورت می‌گیرد.

(۴) در هیچ کدام گسیل فوتوالکتریک صورت نمی‌گیرد.

۵۸- در یک آزمایش فوتوالکتریک، اگر به سطح فلزی با تابع کار  $2eV$ ، نوری با بسامد  $10^{15} Hz$  بتابانیم، بیشینه تندی فوتوالکتریک‌های گسیلی  $v_{max}$  می‌شود. اگر بخواهیم بیشینه تندی فوتوالکتریک‌های گسیلی  $2v_{max}$  گردد، بسامد نور فرودی را چند هرتز باید افزایش دهیم؟ ( $h = 4 \times 10^{-15} eV \cdot s$ )

- (۱)  $2/5 \times 10^{15}$  (۲)  $1/5 \times 10^{15}$  (۳)  $3 \times 10^{15}$  (۴)  $5 \times 10^{15}$

۵۹- به سطح فلزی با تابع کار  $\frac{E_R}{13}$  به ترتیب پراثری‌ترین فوتون رشته بالمر ( $n' = 2$ ) و پراثری‌ترین فوتون رشته پاشن ( $n' = 3$ ) را می‌تابانیم. بیشینه سرعت آزاد شدن الکترون از سطح فلز در حالت اول چند برابر حالت دوم است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{81}{16}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $\frac{16}{81}$

۶۰- در یک اتم هیدروژن الکترون در تراز  $n$  قرار دارد. اگر تمام جهش‌های ممکن برای رفتن به حالت پایین‌تر در نظر گرفته شود، هر ۶ طول موج گسیلی متمایز آن در ناحیه فرورسرخ قرار خواهند گرفت.  $n$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳



۶۱- در طیف اتم هیدروژن، کمینه بسامد خطوط در رشته بالمر ( $n' = 2$ )، چند برابر بیشینه بسامد خطوط در رشته پاشن

( $n' = 3$ ) است؟

(۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{4}{5}$  (۳)  $\frac{36}{7}$  (۴)  $\frac{7}{36}$

۶۲- کدام یک از عبارتهای زیر نادرست است؟

(۱) در گسیل خودبه خود، فوتون در جهتی کاتوره‌ای گسیل می‌شود.

(۲) در گسیل القایی، تعداد فوتون‌های خروجی عددی زوج است.

(۳) در گسیل القایی، فوتون ورودی باعث تحریک الکترون از حالت پایه شده و سپس با بازگشت این الکترون به تراز پایین‌تر، یک فوتون

مشابه فوتون اولیه گسیل خواهد شد.

(۴) الکترون‌های برانگیخته در ترازهای شبه پایدار، مدت زمان طولانی‌تری نسبت به حالت برانگیخته معمولی باقی می‌مانند.

۶۳- در کدام الگوی اتمی، اتم به صورت توزیع کروی یکنواختی از جرم و بار مثبت در نظر گرفته شد که الکترون‌ها درون آن قرار

داشتند؟

(۱) تامسون (۲) بالمر

(۳) رادرفورد (۴) بور

۶۴- بلندترین طول موج رشته بالمر ( $n' = 2$ ) مربوط به اتم هیدروژن تقریباً چند نانومتر است؟ ( $E_R = 13.6 \text{ eV}$ )

$$(c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s})$$

(۱) ۳۶۷ (۲) ۶۳۵

(۳) ۷۴۵ (۴) ۱۲۰

۶۵- کدام یک از عبارتهای زیر نادرست است؟

(۱) در گسیل خود به خود، فوتون در جهتی کاتوره‌ای گسیل می‌شود.

(۲) فوتون‌های باریکه لیزر همگی هم‌جهت، هم‌فاز و هم‌انرژی هستند.

(۳) در وارونی جمعیت الکترون‌ها، تعداد الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار نسبت به تراز پایین، بسیار کمتر است.

(۴) بعد از هر مرحله گسیل القایی، تعداد فوتون‌ها دو برابر می‌شود.

فیزیک ۱

فیزیک

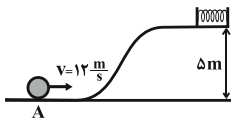
کل کتاب

صفحه‌های ۱ تا ۱۷۲

۶۶- مکعبی به حجم  $400 \text{ cm}^3$  که درون آن حفره‌ای وجود دارد، از آلومینیم به چگالی  $2/7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  ساخته شده است. اگر تمام حفره را با آب به چگالی  $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  پر کرده باشیم و جرم کل مجموعه ۹۱۰ گرم باشد، حجم حفره آب چند درصد از کل حجم مکعب را شامل می‌شود؟

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۷۵ (۴)

۶۷- مطابق شکل زیر، گلوله‌ای به جرم  $2 \text{ kg}$  از نقطه A با تندی  $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به سمت سطح شیب‌داری پرتاب می‌شود. بیشترین انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر در اثر برخورد گلوله به آن  $22 \text{ J}$  است. اگر گلوله در مسیر برگشت، در نقطه A به گلوله ساکن دیگری که ۲ برابر آن جرم دارد، برخورد کند و ۳۲ درصد از انرژی مکانیکی خود را به گلوله دوم بدهد، گلوله دوم با چه سرعتی بر حسب  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  شروع به حرکت می‌کند؟ ( $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  و سطح زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر گرفته شود.)



- ۱۰ (۱)  $\sqrt{32}$  (۲)  
۴ (۳) ۸ (۴)

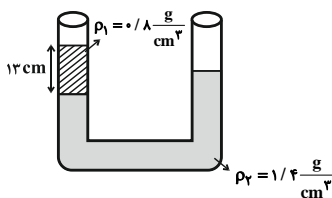
۶۸- در یک موتور الکتریکی، توان خروجی از موتور سه برابر توان اتلافی در آن است. اگر انرژی الکتریکی ورودی به موتور در هر دقیقه معادل  $120 \text{ kJ}$  باشد، توان تلف شده موتور در این مدت معادل چند وات است؟

- ۳۰ (۱) ۵۰۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۵۰۰ (۴)

۶۹- دو لوله شیشه‌ای استوانه‌ای شکل A و B در اختیار داریم. سطح مقطع لوله A برابر با  $12 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$  و سطح مقطع لوله B برابر با  $27 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$  است. اگر هر دو لوله را درون ظرفی شامل جیوه قرار دهیم و فاصله سطح آزاد جیوه در ظرف از کف ظرف برابر با  $h_1$  و نیز فاصله سطح جیوه درون لوله از کف ظرف برابر با  $h_2$  باشد، در لوله ..... اثر موینگی مشهودتر بوده و رابطه بین  $h_2$  و  $h_1$  به صورت ..... است. ( $\pi = 3$  و دو لوله در ابتدا خالی هستند.)

- (۱)  $h_2 > h_1, A$  (۲)  $h_2 > h_1, B$  (۳)  $h_2 < h_1, A$  (۴)  $h_2 < h_1, B$

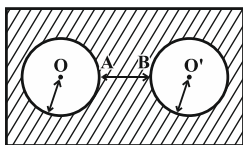
۷۰- در شکل زیر، دو مایع در لوله U شکل در حال تعادل هستند. اگر مقداری مایع به چگالی  $1/2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  به شاخه سمت راست اضافه کنیم، به طوری که بعد از ایجاد تعادل، سطح آزاد مایع‌ها در دو شاخه در یک تراز افقی قرار گیرد، ارتفاع مایع سوم در لوله سمت راست چند سانتی‌متر خواهد بود؟



- ۷/۵ (۱) ۱۳ (۲) ۲۶ (۳) ۳۹ (۴)



۷۱- ضریب انبساط سطحی صفحه نشان داده شده در شکل زیر  $\frac{1}{K} \times 10^{-4}$  است. اگر دما را  $72^\circ F$  افزایش دهیم، با کدام رویداد



مواجه خواهیم شد؟

- (۱) فاصله بین مراکز دو دایره تغییری نمی کند.
- (۲) مساحت دایره ها،  $0/8$  درصد افزایش می یابد.
- (۳) فاصله بین دو نقطه A و B،  $0/2$  درصد افزایش می یابد.
- (۴) مساحت کل صفحه  $0/36$  درصد افزایش می یابد.

۷۲- ظرفی را به طور کامل از مایعی به ضریب انبساط حجمی  $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$  پر می کنیم. اگر دمای ظرف و مایع را  $20^\circ C$  افزایش

دهیم،  $3 \text{ cm}^3$  مایع از ظرف بیرون می ریزد. اگر در همان دمای اولیه ظرف را به طور کامل از مایعی دیگر به ضریب انبساط

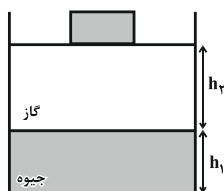
حجمی  $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$  پر کنیم و دما را به همان اندازه افزایش دهیم،  $2 \text{ cm}^3$  مایع از ظرف بیرون می ریزد. ضریب انبساط

طولی ظرف چند واحد SI است؟

- (۱)  $3 \times 10^{-5}$
- (۲)  $1 \times 10^{-5}$
- (۳)  $1/5 \times 10^{-5}$
- (۴)  $0/5 \times 10^{-5}$

۷۳- مطابق شکل زیر در ظرفی حاوی جیوه مقداری گاز کامل توسط پیستونی با جرم ناچیز محبوس شده است به طوری که  $h_2 = h_1$

است. روی پیستون وزنه ای قرار داده می شود و در نتیجه فشار کف ظرف  $19 \text{ cmHg}$  افزایش می یابد. در این حالت  $\frac{h_2}{h_1}$  چند



خواهد شد؟ ( $P_0 = 76 \text{ cmHg}$  و فرایند در دمای ثابت انجام می گیرد).

- (۱)  $1/8$
- (۲)  $0/8$
- (۳)  $0/6$
- (۴)  $0/75$

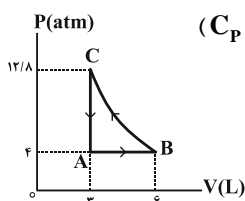
۷۴- در حجم ثابت، دمای چند مول گاز کامل تک اتمی را  $8^\circ C$  کاهش دهیم تا انرژی درونی آن  $2400 \text{ J}$  کم

شود؟ ( $C_V = 12 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ )

- (۱)  $1/25$
- (۲)  $1/75$
- (۳)  $2/5$
- (۴)  $2$

۷۵- نمودار  $P-V$  چرخه ای که مقدار معینی گاز کامل تک اتمی داخل یخچالی فرضی طی می کند، مطابق شکل زیر است. اگر

فرایند آرمانی BC بی دررو باشد، ضریب عملکرد این یخچال کدام است؟ ( $C_P = \frac{5}{2} R$  و  $C_V = \frac{3}{2} R$ )



- (۱)  $3/125$
- (۲)  $4/125$
- (۳)  $2/5$
- (۴)  $3/5$



شیمی ۳  
شیمی، راهی به سوی آینده‌ای  
روشن‌تر  
صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸

## شیمی ۳

۷۶- تعادل گازی  $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$  در یک سامانه با دما و حجم ثابت قرار دارد. اگر

مقداری گاز هیدروژن به سامانه در حال تعادل افزوده شود، همه اتفاقاتی که زیر رخ می‌دهند،

به جز ....

(۱) تغییر غلظت آمونیاک دو برابر نیتروژن خواهد بود.

(۲) غلظت تعادلی گاز هیدروژن همانند گاز آمونیاک نسبت به تعادل اولیه افزایش می‌یابد.

(۳) جهت پیشرفت واکنش همانند جهت پیشرفت واکنش در حالتی است که حجم سامانه را افزایش دهیم.

(۴) مقدار ثابت تعادل تغییری نخواهد کرد.

۷۷- مقدار  $0.8$  مول گاز A را در ظرف سربسته ۲ لیتری گرم نموده‌ایم. هرگاه پس از مصرف ۸۰ درصد از این گاز، تعادل گازی

$2A \rightleftharpoons B + 2C$  برقرار شده باشد، ثابت تعادل در دمای آزمایش بر حسب  $\text{mol.L}^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $5/12$  (۲)  $1/28$  (۳)  $2/56$  (۴)  $0/64$

۷۸- تعادل  $2A(g) \rightarrow B(g) + C(g)$  با  $K = 25$  در ظرف یک لیتری برقرار است. اگر ۱ مول A

را به مخلوط تعادلی اضافه کنیم، غلظت نهایی C کدام است؟

(۱)  $4/1$  (۲)  $4/55$  (۳)  $5/9$  (۴)  $5/45$

۷۹- کدام یک از تغییرات اعمال شده و اثر ایجاد شده با توجه به اصل لوشاتلیه نادرست است؟

(۱)  $A(g) + B(g) \rightleftharpoons C(g)$  ← افزایش فشار

(۲)  $N_2(g) + H_2(g) \rightleftharpoons NH_3(g)$  ← افزایش دما

(۳)  $CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2(g)$  ← افزودن  $CO_2$  کاهش جرم CaO

(۴)  $2A(g) \rightleftharpoons B(g) + 3C(g)$  ← افزودن A کاهش غلظت تعادلی

۸۰- تعادل  $CaCO_3(s) \rightarrow CaO(s) + CO_2(g)$  در ظرفی در بسته برقرار است. اگر  $26/4$  گرم گاز  $CO_2$  را به ظرف

اضافه کنیم، باید حجم ظرف را چند برابر کنیم تا جرم مواد جامد تغییری نکند؟ (حجم ظرف یک لیتر است.)

(۱)  $0/5$  (۲)  $1$  (۳)  $1/5$  (۴)  $2$



## شیمی ۲

۸۱- عبارت کدام گزینه درست است؟

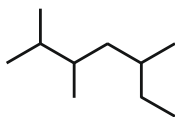
شیمی ۲  
ترکیبات کربن دار شیمی  
صفحه‌های ۲۸ تا ۴۸، ۴۸ تا ۶۸  
۱۱۹ تا ۹۷ و ۸۹، ۸۸، ۸۲، ۷۰

(۱) بنزوئیک اسید و لیکوپن عملکرد مشابهی در حفاظت از مواد غذایی دارند.

(۲) در ساختار تمام گروه‌های عاملی، پیوند دوگانه کربن - اکسیژن وجود دارد.

(۳) از اتصال یک گروه عاملی کربوکسیل به یک حلقه بنزن، ساختار ماده‌ای که طعم و بوی بادام به‌طور عمده مربوط به آن است، به‌دست می‌آید.

(۴) الکل‌های سازنده استر موجود در سیب و انگور به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.

۸۲- پاسخ صحیح هر سه پرسش زیر در کدام گزینه آمده است؟ ( $C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$ )

(الف) نام ترکیب روبه‌رو چیست؟

(ب) تفاوت جرم مولی پنجمین آلکین با سیکلوهگزان چند گرم بر مول است؟

(پ) پلیمری که در برابر حرارت و واکنش با مواد شیمیایی مقاوم می‌باشد چه نام دارد؟

(۱) ۵- اتیل-۲، ۳- دی‌متیل هگزان، ۲، پلی‌اتیلن

(۳) ۲، ۳، ۴- تری‌متیل هپتان، ۲، تفلون

۸۳- کدام گزینه درباره آلکانی که در دمای اتاق در بین آلکان‌های مایع کمترین نقطه جوش را دارد، نادرست است؟

( $H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g.mol^{-1}$ )

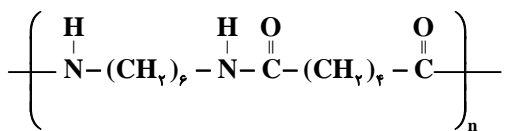
(۱) برای سوختن کامل هر مول از این آلکان مقدار ۸ مول اکسیژن لازم است.

(۲) فرمول مولکولی آن با فرمول مولکولی دی‌متیل پروپان یکسان است.

(۳) شمار ایزومرهای ساختاری آن برابر با ۳ می‌باشد.

(۴) تفاوت جرم مولی آن با دی‌متیل اتر برابر با ۱۴ گرم بر مول می‌باشد.

۸۴- نایلون یک پلیمر پرکاربرد با ساختار تکرار شونده به‌صورت روبه‌رو است. با توجه به این ساختار، کدام موارد از مطالب زیر درست

هستند؟ ( $H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g.mol^{-1}$ )

(الف) با کولار در یک خانواده از پلیمرها قرار دارد.

(ب) تعداد کربن دی‌اسید و دی‌آمین سازنده آن برابر است.

(پ) تفاوت جرم مولی اسید و آمین سازنده آن ۴۰ گرم بر مول است.

(ت) در اثر واکنش یک مول دی‌اسید و یک مول دی‌آمین سازنده آن، علاوه بر یک مول استر، یک مول آب نیز تولید می‌شود.

(۴) ب و ت

(۳) الف و ب

(۲) پ و ت

(۱) الف، ب و پ

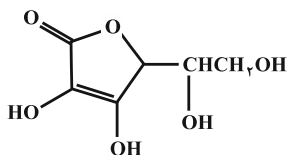


۸۵- چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح هستند؟ ( $C = 12, O = 16, H = 1: g.mol^{-1}$ )

- \* پروپن و پروپانویک اسید در تعداد اتم‌های هیدروژن با هم مشابه هستند.
- \* بیش از ۵۰ درصد جرم اتانویک اسید را اکسیژن تشکیل داده است.
- \* نیروی بین مولکولی و نقطه جوش اتانویک اسید از هگزانویک اسید بیشتر است.
- \* تعداد پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار کربوکسیلیک اسیدها و الکل‌های هم‌کربن برابر است.

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۸۶- کدام گزینه در مورد ترکیب مقابل نادرست است؟ ( $C = 12, O = 16, H = 1: g.mol^{-1}$ )



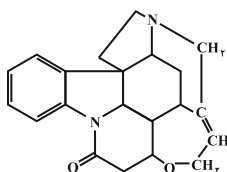
- (۱) نسبت درصد جرمی اکسیژن به کربن در آن تقریباً برابر ۱/۳ است.
  - (۲) از ویتامین‌های محلول در آب می‌باشد.
  - (۳) مصرف بیش از اندازه آن برای بدن مشکل خاصی ایجاد نمی‌کند.
  - (۴) در ساختار آن ۱۰ جفت الکترون ناپیوندی در لایه ظرفیت اتم‌ها وجود دارد.
- ۸۷- اسید سازنده استر موجود در ..... الکل سازنده استر موجود در .....

- (۱) موز- همانند - آناناس - ۸ جفت الکترون پیوندی دارد.
- (۲) سیب - همانند - موز - ۷ پیوند C-H دارد.
- (۳) آناناس - برخلاف - سیب - به هر نسبتی در آب حل می‌شود.
- (۴) موز - برخلاف - آناناس - دارای ۲ اتم کربن است.

۸۸- همه عبارت‌های زیر درست هستند، به جز ...

- (۱) وازلین از گریس چسبنده‌تر و هگزان از دکان فرارتر است.
- (۲) دو ترکیب ۲- هگزن و سیکلوهگزان ایزومرند و هر دو، محلول قرمز رنگ برم را بی‌رنگ می‌کنند.
- (۳) گروه عاملی، آرایش منظمی از اتم‌ها است که به مولکول آلی دارای آن، خواص فیزیکی و شیمیایی منحصر به فردی می‌بخشد.
- (۴) ۲- متیل هگزان و ۳- متیل هگزان دو مورد از ایزومرهای هپتان هستند.

۸۹- با توجه به ساختار مقابل، چند مورد از عبارت‌های زیر درست هستند؟



- (الف) دو گروه آمینی در ساختار آن وجود دارد.
- (ب) ترکیبی آروماتیک بوده و در آن ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
- (پ) با اضافه کردن ۸ مول اتم هیدروژن به یک مول از آن، همه پیوندهای دوگانه کربن - کربن به پیوند یگانه تبدیل می‌شوند.
- (ت) یکی از گروه‌های عاملی موجود در این ساختار، در ساختار مولکولی که به طور عمده علت طعم و بوی گشنیز می‌باشد، وجود دارد.

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

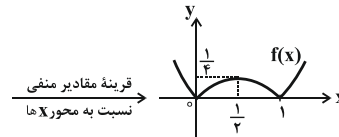
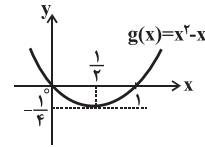
۹۰- اگر به نحوی به جای یکی از اتم‌های هیدروژن در بوتان یک اتم کلر قرار بگیرد، چند ایزومر غیر تکراری می‌توان برای ترکیب به وجود آمده در نظر گرفت؟

(۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

حسابان ۲

۱- گزینه «۴»

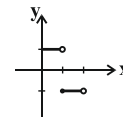
با توجه به رسم نمودار تابع  $f(x) = |x^2 - x|$  داریم:



با توجه به نمودار بالا، نمودار تابع  $f$  سه نقطه بحرانی دارد. دو نقطه گوشه‌ای  $x=0$  و  $x=1$  و نقطه  $x=1/2$  که مشتق در آن برابر صفر است.

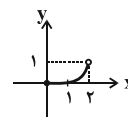
۲- گزینه «۴»

$$y = \cos \pi [x] \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \cos \pi = -1 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$



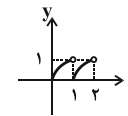
$x=1$  مینیمم نسبی است.

$$y = (x-1)^2 [x] \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



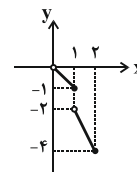
$x=1$  مینیمم نسبی است.

$$y = \sqrt{x - [x]} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = \sqrt{x} \end{cases}$$



$x=1$  مینیمم نسبی است.

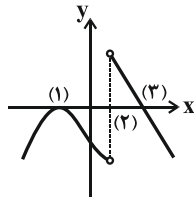
$$y = x[-x] \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x < -1 \Rightarrow y = -2x \\ 0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow y = -x \end{cases}$$



$x=1$  مینیمم نسبی تابع نیست.

بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

۳- گزینه «۲»



در نقطه (۱) مشتق تابع صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد، پس اکسترمم نیست.

در نقطه (۲) مشتق به یک باره از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه مینیمم نسبی و همین‌طور گوشه‌ای است.

در نقطه (۳) مشتق تابع از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.

۴- گزینه «۲»

ابتدا طول نقاط بحرانی تابع  $f$  را در بازه  $[0, 3]$  پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x + k \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\frac{f'(x)=0}{\rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1}$$

فقط  $x=1$  در این بازه قرار دارد.

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه حساب می‌کنیم:

$$f(0) = k \text{ و } f(1) = k - 2, f(3) = 18 + k$$

پس ماکزیمم و مینیمم مطلق  $f$  در این بازه به ترتیب  $k+18$  و  $k-2$  هستند.

$$\frac{\text{قرینه همدیگرند}}{\rightarrow k - 2 + k + 18 = 0 \Rightarrow k = -8}$$

۵- گزینه «۴»

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 3) - 2x(ax + b)}{(x^2 + 3)^2}$$

چون  $x=-1$  طول نقطه اکسترمم نسبی  $f$  است، پس  $f'$  در این نقطه صفر است.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 4a - 2a + 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-a+b}{1+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow -a+b = 2 \quad (2)$$

$$\frac{(1),(2)}{\rightarrow b = 1, a = -1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2 + 3 - 2x(-x+1)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

$f'$  را تعیین علامت می‌کنیم:

|      |   |          |   |          |   |
|------|---|----------|---|----------|---|
| $x$  |   | -1       |   | 3        |   |
| $f'$ | + | 0        | - | 0        | + |
| $f$  | ↗ | max نسبی | ↘ | min نسبی | ↗ |

پس طول نقطه اکسترمم نسبی دیگر  $f$ ،  $x=3$  و نوع آن مینیمم است.



گزینه ۳ - ۶

برای اینکه نامساوی فوق همواره صحیح باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} m > 0 & (1) \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4m^2 \leq 0 \Rightarrow -2m^2 + 2m + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-1)(2m+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} m \in [1, +\infty)$$

گزینه ۴ - ۹

راه حل اول:

چون  $1 + \cos 2x \geq 0$  و  $\sin x - 1 \leq 0$  است، مقدار کسر همواره غیر مثبت

است. در نتیجه  $y = \frac{1 + \cos 2x}{\sin x - 1} \leq 0$  است و ماکزیمم آن یعنی صفر زمانی رخ

می دهد که  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$  باشد.

دقت کنید که دامنه تابع  $\mathbb{R} - \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  است.

راه حل دوم:

با ساده سازی ضابطه تابع داریم:

$$y = \frac{1 + \cos 2x}{\sin x - 1} = \frac{2 \cos^2 x}{\sin x - 1} = \frac{2(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\sin x - 1}$$

$$= -2(1 + \sin x)$$

$$\Rightarrow y = -2 - 2 \sin x$$

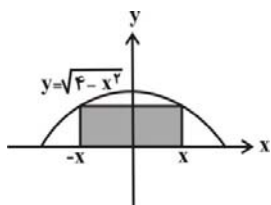
می دانیم مقدار ماکزیمم این تابع صفر است.

گزینه ۲ - ۱۰

فرض می کنیم محور  $y$ ، محور تقارن نیم دایره باشد. معادله نیم دایره به

صورت  $y = \sqrt{4 - x^2}$  می تواند باشد. برای تعیین بیشترین مقدار مساحت

مستطیل به صورت زیر عمل می کنیم:



$$S_{\text{مستطیل}} = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

$$S' = 2\sqrt{4 - x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}}(2x) = \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} - \sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

با تعیین علامت  $f'$  در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  داریم:

|                                 |            |                  |                   |                 |
|---------------------------------|------------|------------------|-------------------|-----------------|
| $x$                             | $0$        | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin 2x$ | $\nearrow$ | $0$              | $\searrow$        | $0$             |
|                                 |            | $\nearrow$       |                   | $\nearrow$      |

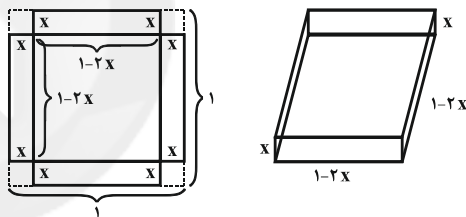
بنابراین گزینه «۳» صحیح است.

تذکر: برای تعیین علامت توابع پیوسته، می توانیم از روش عدد گذاری استفاده کنیم، به این ترتیب که در هر بازه عددی را در ضابطه تابع جای گذاری می کنیم و علامت آن، علامت عبارت مورد نظر در آن بازه است. مثلاً در این سؤال،

$$f'(0), f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ و } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ به خوبی علامت بازه ها را نشان می دهند.}$$

گزینه ۲ - ۷

اشکال زیر به خوبی مراحل کار را نشان می دهند:



حجم جعبه ساخته شده به صورت زیر به دست می آید:

$$v(x) = (1 - 2x)(1 - 2x)x = x(1 - 2x)^2$$

توجه داشته باشید که  $0 < x < \frac{1}{2}$  می باشد. حال باید مقادیر اکسترمم های

مطلق تابع  $v(x)$  را در بازه  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  به دست بیاوریم. داریم:

$$v'(x) = (1 - 2x)^2 - 4x(1 - 2x) = (1 - 2x)(1 - 6x)$$

$$v'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \text{ یا } x = \frac{1}{2}$$

حال چون  $v(0) = v\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  است، به ازای  $x = \frac{1}{6}$  حجم ماکزیمم به دست

می آید:

$$v_{\max} = v\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{27}$$

گزینه ۳ - ۸

تابع پیوسته و مشتق پذیر  $f(x)$  اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر  $f'(x) \geq 0$  باشد، به شرط آنکه نقاطی که در آن  $f'$  صفر است، تشکیل

پاره خط ندهند.

$$f'(x) = mx^2 + (m+1)x + m \geq 0$$



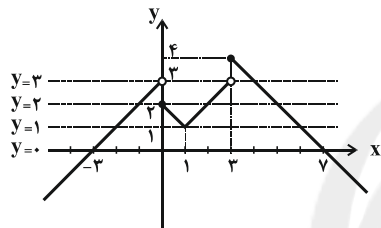
$$\begin{cases} h(-2) = -2a + b = -3 \\ h(2) = 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\frac{h(x) \geq 0}{\frac{1}{2}x - 2 \geq 0} \Rightarrow x \geq 4$$

گزینه «۳» - ۱۵

ابتدا نمودار تابع چندضابطه‌ای f را رسم می‌کنیم:



خطوط  $y=0, y=1, y=2, y=3$  و به ترتیب نمودار f را در  $0, 2, 3, 4$  و  
 ۱ نقطه قطع می‌کنند، پس از بین خطوط داده شده، خط  $y=2$  در تعداد نقاط  
 بیشتری تابع f را قطع می‌کند.

گزینه «۱» - ۱۶

راه حل اول:

$$y = f(x) = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \text{gof}^{-1}(x) = \text{g}(f^{-1}(x)) = 1 - 3((x-2)^2 + 1)$$

$$= -3x^2 + 12x - 14$$

راه حل دوم: از عددگذاری استفاده می‌کنیم:

$$f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

$$\Rightarrow 8 - 2x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\max(S) = 2(\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 4$$

ریاضی پایه

گزینه «۱» - ۱۱

تعداد مثلث‌ها:  $1, 4, 9, \dots, n^2$

تعداد چوب‌کبریت‌ها:  $(1) \times 3, (1+2) \times 3, (1+2+3) \times 3, \dots, \frac{n(n+1)}{2} \times 3$

$$\xrightarrow{n=8} \begin{cases} \text{تعداد مثلث‌ها: } 64 \\ \text{تعداد چوب‌کبریت‌ها: } \frac{8(9)}{2} \times 3 = 108 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 44$$

گزینه «۱» - ۱۲

$$\frac{\frac{2}{2^3} \times \frac{3x}{2^4}}{\sqrt{\frac{4}{2^3} \times 2^x}} = \sqrt{2^{-3}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{2^3} \times \frac{3x}{2^4}}{\frac{2}{2^3} \times 2^x} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{x}{4}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{-x}{4} = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = 6$$

گزینه «۱» - ۱۳

طبق اتحاد  $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$  داریم:

$$a^3 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 3(\sqrt{2} + 2\sqrt{2})\sqrt{3-2\sqrt{2}}(a)$$

$$\Rightarrow a^3 = 6 + 3a \Rightarrow a^3 - 3a = 6$$

گزینه «۳» - ۱۴

$$\text{تابع همانی: } f(x) = x \Rightarrow f(-2) = -2, f(2) = 2$$

$$\text{تابع ثابت: } g(x) = c$$

$$\begin{cases} g(x) = c \\ 2f(-2) = g(2) \end{cases} \Rightarrow -4 = c$$

$$\text{تابع خطی: } h(x) = ax + b$$

$$\frac{1}{-\sqrt[3]{2^3 \times 2^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2^3 \times 2^2 \times 2^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2^7}} = \frac{-1}{1\sqrt[3]{2^5}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$$

اگر عدد مطلوب را  $a$  فرض کنیم، داریم:

$$\frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \times a = -2 \Rightarrow a = 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} \times 2 = \sqrt[3]{16}$$

پس باید کسر را در  $\sqrt[3]{16}$  ضرب کنیم.

### هندسه ۳

۲۱- گزینه «۴»

فاصله نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  از صفحات  $xy$  و  $xz$  به ترتیب برابر  $|y_0|$  و  $|z_0|$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|m-1|: \text{فاصله } (1, m-1, 1) \text{ از صفحه } xz$$

$$1: \text{فاصله } (1, m-1, 1) \text{ از صفحه } xy$$

$$\Rightarrow |m-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 1 \Rightarrow m = 2 \\ m-1 = -1 \Rightarrow m = 0 \end{cases}$$

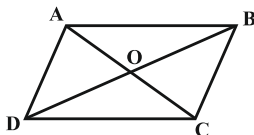
۲۲- گزینه «۲»

تصویر قائم نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  بر روی محور  $x$  ها نقطه  $(x_0, 0, 0)$  است. پس طبق فرض  $x_0 = 2$ .

قرینه نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  نسبت به صفحه  $xy$ ، نقطه  $(x_0, y_0, -z_0)$  است. پس طبق فرض  $y_0 = 3$  و  $z_0 = -4$ .

پس مختصات  $A$  به صورت  $(2, 3, -4)$  است که قرینه آن نسبت به مبدأ مختصات نقطه  $(-2, -3, 4)$  است.

۲۳- گزینه «۳»



قطرها در متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند. بنابراین داریم:

$$O = \frac{A+C}{2} = \frac{(1, -1, 2) + (-2, 0, 1)}{2} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g(f^{-1}(y)) = g(1) = -2$$

با جای‌گذاری  $x = 2$ ، فقط در گزینه «۱» مقدار  $-2$  حاصل می‌شود.

۱۷- گزینه «۴»

$$f(1) = a^2 + \frac{2}{ab} = 1 + \frac{2}{ab} = 1/2 \Rightarrow \frac{2}{ab} = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow ab = 10 \quad (*)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{ab} = \sqrt{a} + \frac{2}{10} = 3/2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9 \xrightarrow{(*)} b = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow 2a - 9b = 18 - 10 = 8$$

۱۸- گزینه «۳»

$$\Delta \log x + \Delta (\log x)^{-1} = \Delta (\log x)^{+1} + \Delta (\log x)^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta \log x \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right) = \Delta \log x \left(\Delta + \frac{1}{\Delta}\right) \Rightarrow \left(\frac{\Delta}{\Delta}\right)^{\log x} = \frac{10}{\frac{6}{\Delta}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta}{\Delta}\right)^{\log x} = \frac{2\Delta}{9} \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

$$\Rightarrow \log \frac{(x-1)^{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = \log \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \log \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \Delta \log \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = 8$$

۱۹- گزینه «۴»

ابتدا توجه کنید که:

$$y = \sqrt[3]{4-x^3} \Rightarrow y^3 = 4-x^3 \Rightarrow x^3 = 4-y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4-y^3}$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4-x^3}$  و در نتیجه  $f^{-1}(x) = f(x)$ ، بنابراین نمودار

توابع  $f$  و  $f^{-1}$  بر هم منطبق هستند. در نتیجه مجموعه طول نقاط مشترک این نمودارها نامتناهی است.

۲۰- گزینه «۳»

۲۷- گزینه «۴»

$$A = (a, b, c) \xrightarrow{\text{تصویر روی صفحه } xy} B = (a, b, 0)$$

$$A = (a, b, c) \xrightarrow{\text{تصویر روی محور } z} C = (0, 0, c)$$

$$|BC| = \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

از طرفی  $|OA| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  است، پس  $|OA| = |BC|$  می‌باشد.

۲۸- گزینه «۲»

فاصله نقطه  $A = (x_0, y_0, z_0)$  از صفحه  $xz$  و محور  $y$  ها به ترتیب برابر است

$$|y_0| \text{ و } \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$$

پس با توجه به فرض داریم:

$$|m| = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow M_1 = (2, 1, 1) \\ m = -1 \Rightarrow M_2 = (0, -1, 1) \end{cases}$$

فاصله نقاط  $M_1$  و  $M_2$  از محور  $y$  ها به ترتیب برابر است

$$\text{با: } \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \text{ و } \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

۲۹- گزینه «۲»

$$M = (m-1, 1, -1) \xrightarrow{\text{تصویر قائم روی صفحه } yz} A = (0, 1, -1)$$

$$M = (m-1, 1, -1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} B = (1-m, 1, 1)$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(1-m)^2 + 0 + 4} \Rightarrow \min |AB| = \sqrt{4} = 2$$

۳۰- گزینه «۳»

$$|OA| = \sqrt{(m+1)^2 + 1 + 4} = \sqrt{(m+1)^2 + 5}$$

$$|OB| = \sqrt{m^2 + 1 + 1} = \sqrt{m^2 + 2}$$

$$OB = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow DB = 2OB = 2 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

۲۴- گزینه «۴»

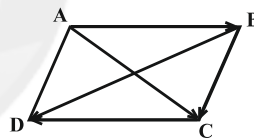
تصویر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  بر روی محورهای  $Ox$ ،  $Oy$  و  $Oz$  به ترتیب

به صورت  $(a_1, 0, 0)$ ،  $(0, a_2, 0)$  و  $(0, 0, a_3)$  است، بنابراین بردار  $\vec{a}$  به صورت

$$\vec{a} = (2, -1, -2) \text{ است و داریم:}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

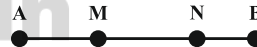
۲۵- گزینه «۲»



مطابق شکل داریم:

$$\begin{aligned} \vec{AC} - \vec{BD} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) - (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BC} - \vec{BC} - \vec{CD} \\ &= \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{AB} = 2\vec{AB} \end{aligned}$$

۲۶- گزینه «۱»



$$\vec{AN} + \vec{NB} = \vec{AB} \Rightarrow 2\vec{NB} + \vec{NB} = \vec{AB} \Rightarrow 3\vec{NB} = \vec{AB}$$

$$\vec{BM} = 2\vec{MA} \Rightarrow \vec{MB} = 2\vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{MB}$$

$$\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{MB} + \vec{MB} = \vec{AB} \Rightarrow \frac{3}{2}\vec{MB} = \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{MB} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{MN} = \vec{MB} - \vec{NB} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AB} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{12}$$



۳۳- گزینه «۴»

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ |   |   | ۲ |
|   | ۲ | ۱ |   |
|   | ۱ | ۲ |   |
| ۲ |   |   | ۱ |

ابتدا جای ۲ها و ۱های باقی‌مانده را پیدا می‌کنیم.

سطرهای اول و دوم به چهار طریق با ۳ و ۴ پر می‌شوند و سطرهای سوم و چهارم به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌شوند.

۳۴- گزینه «۱»

در هر سطر یا ستون یک مربع لاتین از مرتبه  $n$ ، هر یک از اعداد ۱ تا  $n$  دقیقاً یک بار وجود دارد. بنابراین مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون برابر است با:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های یک مربع لاتین از مرتبه  $n$  (مجموع درایه‌های  $n$  سطر یا  $n$  ستون) برابر است با:

$$S = n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

۳۵- گزینه «۳»

با اطلاعات داده شده مربع لاتین  $A$  به‌صورت منحصر به فرد زیر پر می‌شود:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۴ |

با اعمال جایگشت داده شده، مربع لاتین  $B$  به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

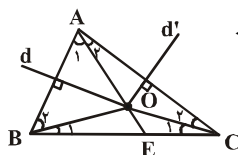
|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۴ |
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |

در نتیجه  $a=1$ ،  $b=4$  و  $c=3$  است و داریم:

$$a+b+c=1+4+3=8$$

هندسه ۱

۳۶- گزینه «۴»



هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$AB \text{ ضلع } d \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$AC \text{ ضلع } d' \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

اگر مطابق شکل، امتداد پاره‌خط  $OA$ ، ضلع  $BC$  را در نقطه  $E$  قطع کند، آنگاه:

$$|AB| = \sqrt{(m-m-1)^2 + (-1-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{14}$$

$$|AB|^2 > |OA|^2 \Rightarrow 14 > (m+1)^2 + 5 \Rightarrow (m+1)^2 < 9$$

$$\Rightarrow -4 < m < 2$$

$$|OA|^2 > |OB|^2 \Rightarrow (m+1)^2 + 5 > m^2 + 2 \Rightarrow m > -2$$

از اشتراک نامعادلات فوق، حدود تغییرات  $m$  به‌صورت  $-2 < m < 2$  به‌دست می‌آید.

ریاضیات گسسته

۳۱- گزینه «۴»

مربع لاتین  $3 \times 3$  با مربعی که از تعویض سطرهای آن حاصل می‌شود، متعامد خواهد بود هرگاه یکی از سطرها ثابت مانده و جای دو سطر دیگر با هم عوض شود. بنابراین ۳ مربع لاتین متعامد با مربع لاتین  $A$  و با شرایط گفته شده وجود دارد.

به عنوان مثال داریم:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{تعویض سطر دوم و سوم}} B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

از ترکیب این دو مربع، مربع زیر حاصل می‌شود که در آن هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد، پس  $A$  و  $B$  متعامد هستند.

|    |    |    |
|----|----|----|
| ۳۳ | ۱۱ | ۲۲ |
| ۱۲ | ۲۳ | ۳۱ |
| ۲۱ | ۳۲ | ۱۳ |

۳۲- گزینه «۴»

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۴ | ۱ |

مربع لاتین چرخشی  $4 \times 4$  به‌صورت مقابل است:

هر سطر یا هر ستون از یک مربع لاتین  $4 \times 4$  شامل تمامی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ است. با توجه به این که درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع لاتین چرخشی همواره برابر ۱ هستند، پس با حذف سطر  $A_1$  و ستون  $A_1$  همواره یک عدد ۱، دو عدد ۲، دو عدد ۳ و دو عدد ۴ از مربع حذف می‌شود و در نتیجه مجموع اعداد باقی‌مانده در جدول همواره یکسان خواهد بود.



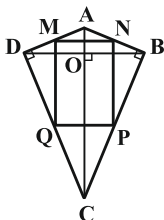
دو مثلث  $IMN$  و  $IBC$  به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند، پس نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر است با نسبت تشابه این دو مثلث، در نتیجه:

$$\frac{IH}{IK} = \frac{MN}{BC} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

۴۰- گزینه «۴»

چهارضلعی‌ای که فقط دو ضلع مقابل موازی دارد، لزوماً دوزنقه است و در صورتی که قطرها آن برابر یکدیگر باشند، قطعاً دوزنقه متساوی‌الساقین است. چهارضلعی گزینه «۱» مربع است و در گزینه‌های «۲» و «۳»، مستطیل نیز از ویژگی‌های مشابه برخوردار است.

۴۱- گزینه «۲»



محیط چهارضلعی حاصل از وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع چهارضلعی  $ABCD$ ، برابر مجموع طول قطرها این چهارضلعی است (طول اضلاع  $MN$  و  $PQ$  هر کدام نصف قطر  $BD$  و طول اضلاع  $MQ$  و  $NP$  هر کدام نصف طول قطر  $AC$  است). بنابراین کافی است طول قطرها  $AC$  و  $BD$  را به دست آوریم.

با توجه به این‌که در کایت  $ABCD$ ، قطرها بر هم عمود هستند، داریم:

$$\Delta ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$$

$$\Delta ABC: AB \times BC = BO \times AC$$

$$\Rightarrow 3 \times 6 = BO \times 3\sqrt{5} \Rightarrow BO = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

قطر  $AC$  عمود منصف قطر  $BD$  است، پس  $BD = \frac{12\sqrt{5}}{5}$  و داریم:

$$(MNPQ) \text{ محیط} = AC + BD = 3\sqrt{5} + \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{27\sqrt{5}}{5}$$

۴۲- گزینه «۱»

مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است، بنابراین مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده  $BC$  از دو ساق مثلث، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است. چندضلعی شبکه‌ای  $ABC$  دارای ۶ نقطه مرزی و ۲ نقطه درونی است، بنابراین طبق فرمول بیگ داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{6}{2} + 2 - 1 = 4$$

$$\widehat{B\hat{O}C} = \widehat{B\hat{O}E} + \widehat{C\hat{O}E} = (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) + (\hat{A}_2 + \hat{C}_2)$$

$$\Rightarrow \widehat{B\hat{O}C} = 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 2\hat{A}$$

توجه کنید که چون  $\hat{A}$  حاده است، نقطه  $O$  درون مثلث می‌افتد. اگر  $\hat{A}$  منفرجه باشد آنگاه نقطه  $O$  خارج مثلث قرار دارد که در آن صورت داریم:

$$\widehat{B\hat{O}C} = 360^\circ - 2\hat{A}$$

۳۷- گزینه «۳»

نقطه  $G$  محل هم‌مرسی میانه‌های مثلث است، پس  $\frac{CG}{GD} = 2$  و داریم:

$$\Delta DEC: GF \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CF}{EF} = \frac{CG}{GD} \Rightarrow \frac{6}{EF} = 2$$

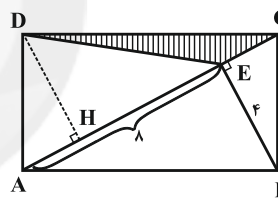
$$\Rightarrow EF = 3 \Rightarrow EC = 9$$

$$\Delta ABC: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow 1 = \frac{AE}{9}$$

$$\Rightarrow AE = 9$$

$$\text{و در نتیجه: } AC = AE + EC = 9 + 9 = 18$$

۳۸- گزینه «۲»

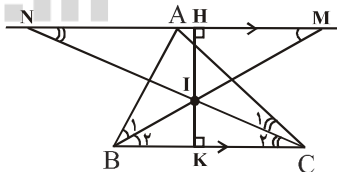


بنا به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  داریم:

$$BE^2 = AE \cdot EC \Rightarrow 16 = 8 \cdot EC \Rightarrow EC = 2$$

$$S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} DH \cdot EC \xrightarrow{DH=BE=4} S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

۳۹- گزینه «۳»

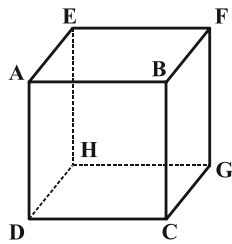


چون  $MN \parallel BC$ ، بنا به قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 \Rightarrow AM = AB \\ \hat{N} = \hat{C}_1 = \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{N} = \hat{C}_1 \Rightarrow AN = AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow MN = AM + AN = AB + AC$$

$$= (AB + AC + BC) - BC = 24 - 9 = 15$$



گزاره «ب» نادرست است، زیرا مثلاً خط GH با صفحه ABCD موازی است و بر صفحه ABFE عمود نیست (خط GH موازی صفحه ABFE است).

گزاره‌های «الف» و «ت» همواره صحیح هستند.

۴۵ - گزینه «۴»

اگر وجه بالایی مکعب مستطیل را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم، واضح است که همه مکعب‌های خانه‌های b و مکعب‌های زیر آنها یعنی  $6 \times 3 = 18$  مکعب باید حذف شوند. بنابراین کم‌ترین مقدار برابر  $m = 18$  است.

|       |       |       |          |
|-------|-------|-------|----------|
| $a_1$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$    |
| $a_2$ | $a_3$ | $b_4$ | $b_5$    |
| $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $b_6$    |
| $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |

از طرفی حداقل تعداد مکعب‌های لازم در شکل برابر ۱۰ است (تعداد خانه‌های a در نمای بالا)، بنابراین حداکثر می‌توان  $M = 48 - 10 = 38$  مکعب را از شکل حذف نمود. در نتیجه  $M - m = 38 - 18 = 20$  است.

آمار و احتمال

۴۶ - گزینه «۳»

طبق جدول ارزش گزاره‌ها، اگر  $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \equiv r$  و  $[(q \Rightarrow p) \Rightarrow q] \equiv s$  باشند، آنگاه داریم:

| p | q | $q \Rightarrow p$ | r | s | $r \wedge s$ |
|---|---|-------------------|---|---|--------------|
| د | د | د                 | د | د | د            |
| د | ن | د                 | د | ن | ن            |
| ن | د | ن                 | د | د | د            |
| ن | ن | د                 | د | ن | ن            |

همان‌طور که مشاهده می‌شود، گزاره مورد نظر هم‌ارز منطقی با گزاره q است.

از طرفی با توجه به این که فاصله هر دو نقطه عمودی یا افقی در شبکه برابر ۱ است، پس طول ضلع AB (ساق مثلث) برابر است با:

$$AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

اگر طول ارتفاع وارد بر ساق را با h نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times h \times AB \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} h \times \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow h = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

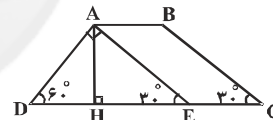
۴۳ - گزینه «۲»

مطابق شکل زیر، از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در نقطه E قطع کند، داریم:

$$\begin{cases} AE \parallel BC \Rightarrow \hat{AED} = \hat{C} = 30^\circ \\ \triangle ABCE \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow AB = CE = 5 \Rightarrow DE = CD - CE = 8 \end{cases}$$

می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$  نصف وتر و

ضلع روبه‌رو به زاویه  $60^\circ$  وتر است، پس:



$$\begin{aligned} \triangle ADE: \hat{A} &= 90^\circ \\ \Rightarrow AE &= \frac{\sqrt{3}}{2} DE = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\triangle AHE: \hat{E} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AE}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

۴۴ - گزینه «۲»

دو صفحه عمود بر هم ABCD و ABFE را در نظر بگیرید. گزاره «ب» نادرست است، زیرا مثلاً صفحه BFGC بر صفحه ABCD عمود است و با صفحه ABFE موازی نیست (صفحه BFGC بر صفحه ABFE عمود است).



گزینه ۲ - ۴۷

فرض کنید مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} 2^m &= 8 \times 2^n \Rightarrow 2^m = 2^{n+3} \Rightarrow m = n + 3 \\ 2^{m+2} - 2^{n+3} &= 192 \Rightarrow 2^{m+2} - 2^m = 192 \\ \Rightarrow 2^m(4 - 1) &= 192 \Rightarrow 2^m = 64 \Rightarrow m = 6 \end{aligned}$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه A برابر است با:

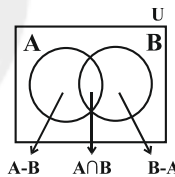
$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

گزینه ۳ - ۴۸

$$\begin{aligned} A' - B' &= A' \cap B = B \cap A' = B - A \\ (A \cup B') \cap B &= (A \cap B) \cup (B' \cap B) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (A' - B') \cup (A - B) \cup [(A \cup B') \cap B] \\ = (B - A) \cup (A - B) \cup (A \cap B) = A \cup B \end{aligned}$$



گزینه ۲ - ۴۹

اگر  $A \times B = B \times A$  باشد، آنگاه  $A = \emptyset$  یا  $B = \emptyset$  یا  $A = B$  است.

با توجه به این که  $B = \{1, 2, 3\}$  است، پس حالت  $B = \emptyset$  امکان پذیر نیست.

از طرفی معادله  $x^2 + ax + 1 = 0$ ، حداکثر دارای دو جواب است، یعنی

حداکثر تعداد اعضای مجموعه A، برابر ۲ است و در نتیجه حالت  $A = B$

نیز امکان پذیر نمی‌باشد. بنابراین قطعاً  $A = \emptyset$  است. داریم:

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4 < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$$

گزینه ۴ - ۵۰

تعداد حالت‌های فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = 6!$$



حالت ۴

اگر حسن و حسین و فرد بین آنها را یک نفر در نظر بگیریم با سه نفر دیگر

به ۴! طریق می‌توانند جای خود را عوض کنند و از طرفی حسن و حسین

نیز ۲! طریق جایگشت دارند. پس داریم:

$$n(A) = 4 \times 4! \times 2!$$

$$P(A) = \frac{4 \times 4! \times 2!}{6!} = \frac{4}{15}$$

(پژمان خرهاوران)

گزینه ۱ - ۵۱

یعنی یا تعداد مردها و زن‌ها برابر باشد که ممکن نیست (چون ۵ عددی فرد

است) یا ۳ مرد و ۲ زن و یا ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{3}{2} + \binom{4}{3} \binom{2}{2}}{\binom{7}{5}} = \frac{(6 \times 1) + (4 \times 1)}{21} = \frac{10}{21} = \frac{10}{21}$$

گزینه ۴ - ۵۲

$$P(1) = a, P(2) = 2a, \dots, P(6) = 36a$$

اگر پیشامدهای A و B به ترتیب «رو شدن عدد ۴» و «رو شدن عدد زوج»

باشند، آنگاه داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(4)}{P(2) + P(4) + P(6)}$$

$$= \frac{16a}{4a + 16a + 36a} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$$

توجه کنید که برای حل این سؤال، نیازی به محاسبه مقدار a وجود ندارد.



$$\Rightarrow 0/05 = 0/015 + 0/5x$$

$$\Rightarrow 0/5x = 0/025 \Rightarrow x = 0/05$$

گزینه «۱» - ۵۵

روش اول: چون مهره‌ها با جای گذاری انتخاب می‌شوند، پس شرط استقلال

پیشامدها برقرار است و احتمال زرد رنگ بودن مهره ثابت و برابر  $\frac{2}{5}$  یا  $0/4$

است. حداکثر یک مهره زرد یعنی یا یکی زرد باشد و یکی غیر زرد یا هیچکدام زرد نباشند. پس داریم:

$P$  (هیچ کدام زرد نباشند) +  $P$  (یکی زرد باشد) =  $P$  (حداکثر یکی زرد باشد)

$$= \binom{2}{1} (0/4)^1 (0/6)^1 + \binom{2}{0} (0/4)^0 (0/6)^2$$

$$= 2 \times 0/4 \times 0/6 + 0/36 = 0/84$$

روش دوم: با استفاده از متمم «حداکثر یکی زرد باشد» داریم:

$P$  (هر دو مهره زرد باشند) =  $1 - P$  (حداکثر یکی زرد باشد)

$$= 1 - (0/4)^2 = 1 - 0/16 = 0/84$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

فیزیک ۳

گزینه «۴» - ۵۶

به کمک رابطه شدت تابشی، انرژی جذب شده توسط پنل خورشیدی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$I = \frac{E}{A.t} \Rightarrow 310 = \frac{E}{2 \times 60} \Rightarrow E = (2 \times 60 \times 310) J$$

با توجه به این که بازده این پنل در تبدیل انرژی فوتون‌ها به انرژی الکتریکی برابر با ۲۰ درصد است، بنابراین برای تعیین تعداد فوتون‌هایی که انرژی آن‌ها به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود، داریم:

$$\frac{20}{100} E = n \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{2}{10} \times 2 \times 60 \times 310 = n \frac{1240 \times 1/6 \times 10^{-19}}{600}$$

$$\Rightarrow n = 2/25 \times 10^{22} \text{ فوتون}$$

گزینه «۱» - ۵۷

گزینه «۲» - ۵۳

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A: سفر رفتن علی

B: سفر رفتن رضا

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$P(A|B) = P(B|A') \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \quad (1)$$

$$P(B|A) = 0/75 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0/75$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/75 P(A) \quad (2)$$

$$P(B') = 0/4 \Rightarrow 1 - P(B) = 0/4 \Rightarrow P(B) = 0/6 \quad (3)$$

با قرار دادن (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$\frac{0/75 P(A)}{0/6} = \frac{0/6 - 0/75 P(A)}{1 - P(A)}$$

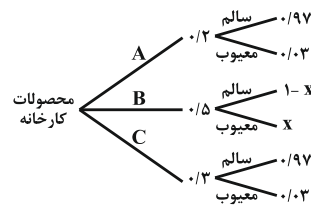
$$\Rightarrow 5P(A) - 5(P(A))^2 - 2/4 + 2P(A) = 0$$

$$\Rightarrow 5(P(A))^2 - 8P(A) + 2/4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0/4 \\ P(A) = 1/2 \end{cases} \text{ غ.ق.}$$

$$\xrightarrow{(2)} P(A \cap B) = 0/4 \times 0/75 = 0/3$$

گزینه «۳» - ۵۴

ابتدا نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{معیوب بودن}) = 0/2 \times 0/03 + 0/5 \times X + 0/3 \times 0/03$$



$$۴ \rightarrow ۳,۵ \rightarrow ۳,۶ \rightarrow ۳$$

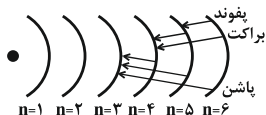
۲ جهش در رشته پراکت ( $n' = 4$ ):

$$۵ \rightarrow ۴,۶ \rightarrow ۴$$

۱ جهش در رشته پفوند ( $n' = 5$ ):

$$۶ \rightarrow ۵$$

پس الکترون در تراز  $n = 6$  قرار دارد.



۶۱- گزینه «۱»

می‌دانیم  $f = \frac{c}{\lambda}$  است، پس برای بیشینه بسامد باید کمینه طول موج را به دست آورد و بالعکس.

بالین ( $\lambda_{min}$ ) در جابه‌جایی الکترون از  $n = \infty$  به  $n' = 2$  اتفاق می‌افتد و بالمر ( $\lambda_{max}$ ) در جابه‌جایی از  $n = 3$  به  $n' = 2$  اتفاق می‌افتد. با استفاده از معادله ریذبرگ داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow f = Rc \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{f_{min}}{f_{max}} = \frac{\left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)}{\left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)} = \frac{5}{4}$$

۶۲- گزینه «۳»

در گسیل القایی، یک فوتون ورودی، الکترون برانگیخته را تحریک می‌کند تا تراز انرژی خود را تغییر دهد و به تراز پایین‌تر برود. برای تحریک اولیه الکترون از یک چشمه خارجی مناسب استفاده می‌شود.

۶۳- گزینه «۱»

نخستین الگوی اتمی توسط تامسون ارائه شد که در این الگو، اتم به صورت توزیع کروی یکنواختی از جرم و بار مثبت در نظر گرفته شده است که الکترون‌ها (بارهای منفی) مانند کشمش‌های درون یک کیک کشمش، درون آن قرار دارند.

۶۴- گزینه «۲»

بلندترین طول موج (کمترین بسامد) رشته بالمر ( $n' = 2$ ) زمانی ساطع می‌شود که الکترون از مدار  $n = 3$  به مدار  $n' = 2$  برود. داریم:

$$E = \frac{-E_R}{n^2} \Rightarrow \Delta E = E_R \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{\Delta E = h \frac{c}{\lambda}}{\lambda} \Rightarrow h \frac{c}{\lambda} = E_R \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{4 \times 10^{-15} \times 2 \times 10^8}{\lambda} = 13/6 \times \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1.08 \times 10^{-7}}{17} \text{ m} = 63 \text{ nm}$$

با توجه به نمودار تابع کار آهن  $W_0 = 4/5 \text{ eV}$  و تابع کار مس  $W_0 = 4/7 \text{ eV}$  است. به کمک رابطه  $W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$  می‌توانیم طول موج آستانه هر فلز را به دست آوریم.

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \begin{cases} \text{آهن} (\lambda_0) = 275 / 5 \text{ nm} \\ \text{مس} (\lambda_0) = 263 / 7 \text{ nm} \end{cases}$$

با توجه به این که گسیل فوتوالکترون در طول موج‌های کمتر از  $\lambda_0$  رخ می‌دهد، پس در فلز آهن گسیل فوتوالکترون صورت می‌گیرد.

۵۸- گزینه «۲»

طبق رابطه انرژی جنبشی بیشینه،  $K_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$ ، برای دو برابر شدن  $v_{max}$ ، باید انرژی جنبشی ۴ برابر شود، پس:

$$(v_{max})_2 = 2(v_{max})_1$$

$$\Rightarrow (K_{max})_2 = 4(K_{max})_1 \Rightarrow hf_2 - W_0 = 4(hf_1 - W_0)$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^{-15} f_2 - 2 = 4 \times (4 \times 10^{-15} \times 1.5 - 2)$$

$$\Rightarrow f_2 = 2/5 \times 10^{15} \text{ Hz} \Rightarrow \Delta f = 1/5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

۵۹- گزینه «۳»

پرانرژی‌ترین فوتون هر رشته متناظر با کوتاه‌ترین طول موج آن رشته (یعنی  $n = \infty$ ) است. انرژی پرانرژی‌ترین فوتون رشته بالمر ( $n' = 2$ ) برابر با

$$\frac{E_R}{2^2} \text{ و انرژی پرانرژی‌ترین فوتون رشته پاشن } (n' = 3) \text{ برابر با } \frac{E_R}{3^2} \text{ است.}$$

در رابطه  $K_{max} = hf - W_0$  به جای انرژی فوتون ( $hf$ ) از  $\frac{E_R}{9}$  و  $\frac{E_R}{4}$  استفاده می‌کنیم.

$$K_{max} = hf - W_0$$

$$(K_{max})_1 = \frac{E_R}{4} - \frac{E_R}{13} \Rightarrow (K_{max})_1 = \frac{9E_R}{13 \times 4}$$

$$(K_{max})_2 = \frac{E_R}{9} - \frac{E_R}{13} \Rightarrow (K_{max})_2 = \frac{4E_R}{13 \times 9}$$

در نتیجه:

$$\frac{(K_{max})_1}{(K_{max})_2} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{9E_R}{13 \times 4} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{81}{16} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{9}{4}$$

۶۰- گزینه «۱»

چون طول موج‌ها در ناحیه فرورسرخ هستند، پس جهش‌های الکترون به ترازهای  $n' = 2$  (بالمر) و  $n' = 1$  (لیمان) غیرممکن است. چون ۶ طول موج مشخص و متمایز در این گسیل‌ها وجود دارند پس ۶ جهش متمایز به صورت‌های زیر وجود دارند:

۳ جهش در رشته پاشن ( $n' = 3$ ):



۶۵- گزینه «۳»

در گسیل خودبه‌خود، فوتون در جهتی کاتوره‌ای گسیل می‌شود. در گسیل القایی، فوتون‌هایی که گسیل می‌شوند، همگی هم‌جهت، هم‌فاز و هم‌انرژی هستند. (مانند باریکه لیزر) بعد از هر مرحله گسیل القایی، تعداد فوتون‌ها دو برابر می‌شود. در وارونی جمعیت الکترون‌ها، تعداد الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار نسبت به ترازهای پایین، بسیار بیشتر است.

فیزیک ۱

۶۶- گزینه «۱»

اگر حجم واقعی مکعب را با  $(V_{واقعی})$  و حجم حفره را با  $(V_{حفره})$  نمایش دهیم، داریم:

$$V_{واقعی} + V_{حفره} = 400 \quad (1)$$

$$m_{حفره} + m_{واقعی} = 910$$

$$\rho_{آب} V_{حفره} + \rho_{آل} V_{واقعی} = 910$$

$$1 \times V_{حفره} + 2/7 V_{واقعی} = 910 \quad (2)$$

با حل هم‌زمان معادله‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$1/7 V_{واقعی} = 510 - V_{واقعی} \Rightarrow V_{واقعی} = 300 \text{ cm}^3$$

$$V_{حفره} = 400 - 300 = 100 \text{ cm}^3$$

$$\frac{V_{حفره}}{V_{کل}} \times 100 = 25\%$$

۶۷- گزینه «۳»

انرژی مکانیکی گلوله در نقطه A برابر است با:

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m v^2 + 0 \Rightarrow E_1 = 144 \text{ J}$$

انرژی مکانیکی گلوله در حالتی که فتر بیشترین فشردگی را دارد برابر است با:

$$E_2 = mgh + U_e = 2 \times 10 \times 5 + 22 = 122 \text{ J}$$

به کمک قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$W_f = E_2 - E_1 = -22 \text{ J}$$

در مسیر بازگشت نیز اصطکاک باعث کاهش ۲۲J دیگر از انرژی گلوله می‌شود، پس انرژی گلوله اول در برگشت در نقطه A برابر است با:

$$144 - 2W_f = 100 \text{ J}$$

گلوله اول ۳۲ درصد از انرژی خود را به گلوله دوم می‌دهد. پس داریم:

$$0.32 \times 100 = \frac{1}{2} (2m) v_2^2 \Rightarrow 32 = 2v_2^2 \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۶۸- گزینه «۲»

طبق صورت سؤال داریم:

$$P_{اتلافی} = 3P_{خروجی} \quad (*)$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$P_{اتلافی} + P_{اتلافی} = 3P_{اتلافی} \xrightarrow{(*)} P_{کل} = 3P_{اتلافی} + P_{خروجی}$$

$$\Rightarrow P_{کل} = 4P_{اتلافی}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{کل}}{t} = 4P_{اتلافی} \Rightarrow \frac{120 \times 10^3}{60} = 4P_{اتلافی} \Rightarrow P_{اتلافی} = 500 \text{ W}$$

۶۹- گزینه «۳»

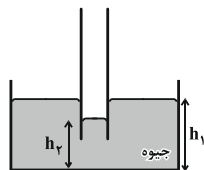
شعاع هر لوله را محاسبه می‌کنیم:

$$A_A = \pi r_A^2 \Rightarrow 12 \times 10^{-4} = \pi r_A^2 \Rightarrow r_A = 2 \times 10^{-2} \text{ cm} = 0.2 \text{ mm}$$

$$A_B = \pi r_B^2 \Rightarrow 27 \times 10^{-8} = \pi r_B^2 \Rightarrow r_B = 3 \times 10^{-4} \text{ m}$$

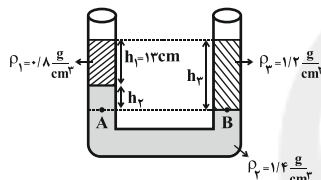
$$= 3 \times 10^{-4} \times 10^2 \times 10^3 \text{ mm} = 30 \text{ mm}$$

لوله‌های موئین قطری از مرتبه ۰/۱mm دارند. بنابراین اثر موئینگی در لوله A مشهودتر خواهد بود. از طرفی اگر لوله A را درون ظرف شامل جیوه فرو ببریم، شکلی مانند شکل زیر حاصل می‌شود:



طبق شکل واضح است که  $h_2 < h_1$  است.

۷۰- گزینه «۴»



چون چگالی مایع سوم از  $\rho_1$  بیش‌تر است، بنابراین برای این‌که بعد از تعادل سطح آزاد مایع‌ها در یک تراز افقی قرار گیرد، باید ارتفاع مایع سوم با چگالی  $\rho_3$  در شاخه سمت راست بیش‌تر از ارتفاع مایع با چگالی  $\rho_1$  باشد. با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، داریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_3 g h_3 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_1 h_1 + \rho_3 h_3 = \rho_2 h_2$$

$$\Rightarrow 0.125 \times 13 + 0.25 h_3 = 0.5 h_2$$

$$\Rightarrow h_2 = 39 \text{ cm}$$

۷۱- گزینه «۳»

چون دما افزایش یافته است، تمام ابعاد صفحه منبسط خواهد شد. ابتدا باید تغییرات دما را بر حسب کلون به‌دست آوریم:

$$F = \frac{9}{5} \theta + 32 \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow 72 = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = 40^\circ \text{C}$$

$$\Rightarrow \Delta T = 40 \text{ K}$$

حال با استفاده از رابطه انبساط طولی و سطحی داریم:

$$2\alpha = 10^{-4} \frac{1}{\text{K}} \Rightarrow \alpha = 5 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$$

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_0} \times 100 = 100 \alpha \Delta T = 100 \times 5 \times 10^{-5} \times 40$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{L_0} \times 100 = 0.2\%$$

$$\Delta A = 2\alpha A_0 \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta A}{A_0} \times 100 = 100 (2\alpha) \Delta T = 100 \times 10^{-4} \times 40$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{A_0} \times 100 = 0.4\%$$



$$\Rightarrow Q_L = \frac{5}{\gamma} P_{AB} (V_B - V_A) = \frac{5}{\gamma} \times 4 \times 10^5 \times (6 - 3) \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow Q_L = 3000 \text{ J}$$

$$Q_H = Q_{CA} = n C_V (T_A - T_C) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} n R (T_A - T_C)$$

$$\Rightarrow Q_H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} V_{CA} (P_A - P_C) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \times 3 \times 10^{-3} \times (4 - 12/8) \times 10^5$$

$$\Rightarrow Q_H = -3960 \text{ J}$$

حال با استفاده از قانون اول ترمودینامیک در چرخه یک یخچال، داریم:

$$|Q_H| = W + Q_L \Rightarrow 3960 = W + 3000 \Rightarrow W = 960 \text{ J}$$

ضریب عملکرد این یخچال برابر است با:

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{3000}{960} \Rightarrow K = 3/128$$

### شیمی ۳

#### ۷۶- گزینه «۳»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: با توجه به اینکه ضریب استوکیومتری آمونیاک دو برابر نیتروژن است، این عبارت صحیح می‌باشد.

گزینه «۲»: با جابه‌جایی واکنش در جهت رفت، غلظت آمونیاک افزایش می‌یابد. همچنین چون تعادل نمی‌تواند اثر افزایش غلظت هیدروژن را به‌طور کامل جبران کند، غلظت تعادلی گاز هیدروژن نیز افزایش می‌یابد.

گزینه «۳»: با افزایش حجم سامانه، واکنش در جهت برگشت جابه‌جا خواهد شد.

گزینه ۴: در دمای ثابت، مقدار ثابت تعادل تغییری نمی‌کند.

#### ۷۷- گزینه «۳»

چون تعادل پس از مصرف ۸۰٪ از گاز A برقرار شده است، داریم:

$$\text{مقدار مول A} \begin{cases} \text{مصرفی} = 0/64 \text{ mol} \\ \text{باقی‌مانده} = 0/16 \text{ mol} \end{cases}$$



|            |      |      |      |
|------------|------|------|------|
| مول اولیه  | 0/8  | 0    | 0    |
| تغییر مول  | -2x  | +x   | +2x  |
| مول تعادلی | 0/16 | 0/22 | 0/64 |

$$K = \frac{0/22 \times (0/64)^2}{(0/16)^2} \Rightarrow K = 2/56 \text{ mol.L}^{-1}$$

#### ۷۸- گزینه «۴»

ابتدا غلظت اولیه A را به‌دست می‌آوریم:



$$K = \frac{[B][C]}{[A]^2} \Rightarrow 25 = \frac{5 \times 5}{[A]^2} \Rightarrow [A] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

با اضافه کردن ۱ مول A تغییرات به‌صورت زیر است:

بنابراین تمام فاصله‌ها ۰/۲ درصد و مساحت تمام سطح‌ها ۰/۴ درصد افزایش خواهد یافت.

#### ۷۲- گزینه «۲»

مقدار مایع سرریز شده برای حالتی که طرف پر از مایع است، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta V = V_1 (\beta_{\text{مایع}} - \beta) \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{\beta_{\text{مایع}} - \beta}{\beta'_{\text{مایع}} - \beta} \Rightarrow \frac{0/3}{0/2} = \frac{51 \times 10^{-5} - \beta}{25 \times 10^{-5} - \beta}$$

$$\Rightarrow \beta_{\text{مایع}} - \beta = 52/5 \times 10^{-5} - 1/5 \beta$$

$$\Rightarrow \beta_{\text{ظرف}} = \frac{1/5 \times 10^{-5}}{0/5} = 3 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\gamma} = 1 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$$

#### ۷۳- گزینه «۲»

قبل از قرار دادن وزنه روی پیستون، چون جرم پیستون ناچیز است، فشار گاز محبوس با فشار هوای بیرون برابر خواهد بود.

$$P_1 = P_0 = 76 \text{ cmHg}$$

پس از قرار دادن وزنه روی پیستون، فشار گاز محبوس افزایش می‌یابد و این افزایش فشار عیناً به تمام نقاط مایع اضافه می‌شود. پس در واقع فشار گاز محبوس ۱۹ cmHg افزایش یافته است.

$$P_2 = P_0 + 19 = 76 + 19 = 95 \text{ cmHg}$$

با توجه به رابطه گازهای کامل در حالتی که دما و جرم ثابت است، داریم:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow 76 \times Ah_1 = 95 \times Ah_2$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{76}{95} = 0/8 \Rightarrow \frac{h_2 = h_1}{h_2' = h_1} \rightarrow \frac{h_2'}{h_1} = 0/8$$

#### ۷۴- گزینه «۳»

می‌دانیم در فرایند هم‌حجم،  $W = 0$  است. بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک می‌توان نوشت:

$$\Delta U_{\text{هم‌حجم}} = Q_{\text{هم‌حجم}} + W_{\text{هم‌حجم}}$$

$$\Delta U_{\text{هم‌حجم}} = -240 \text{ J}, W_{\text{هم‌حجم}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{هم‌حجم}} = -240 \text{ J}$$

$$\Rightarrow Q_{\text{هم‌حجم}} = -240 \text{ J}$$

از طرف دیگر برای گرمای مبادله شده در فرایند هم‌حجم داریم:

$$Q_{\text{هم‌حجم}} = n C_V \Delta T \quad \Delta T = -80 \text{ K}, C_V = 12 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$$

$$-240 = n \times 12 \times (-80) \Rightarrow n = 2/5 \text{ mol}$$

#### ۷۵- گزینه «۱»

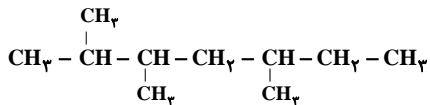
فرایند آرمانی BC، فرایندی بی‌دررو است و طی آن گرمایی مبادله نمی‌شود. طی فرایند آرمانی AB، از داخل یخچال گرما گرفته می‌شود و طی فرایند آرمانی CA گرما به محیط بیرون داده می‌شود. داریم:

$$Q_L = Q_{AB} = n C_P (T_B - T_A) = \frac{5}{\gamma} n R (T_B - T_A)$$



۸۲- گزینه «۳»

الف) نام ترکیب زیر به صورت ۲، ۳، ۵- تری متیل هپتان می باشد.



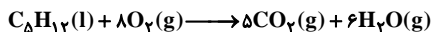
ب) فرمول مولکولی پنجمین آلکین به صورت « $\text{C}_m\text{H}_n$ » و فرمول مولکولی سیکلوهگزان به صورت « $\text{C}_6\text{H}_{12}$ » می باشد؛ بنابراین تفاوت جرم مولی آنها ۲ گرم بر مول می باشد.  
 پ) تفلون پلیمری است که در برابر حرارت و واکنش با مواد شیمیایی مقاوم می باشد.

۸۳- گزینه «۴»

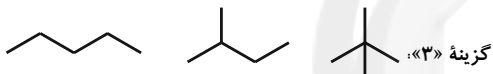
آلکان مورد نظر بنتان ( $\text{C}_{12}\text{H}_{26}$ ) می باشد.

بررسی گزینه ها:

گزینه «۱»:



گزینه «۲»: فرمول مولکولی دی متیل پروپان (۲، ۲- دی متیل پروپان)  $\text{C}_5\text{H}_{12}$  می باشد.

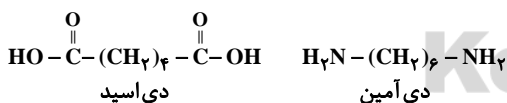


گزینه «۴»: با توجه به فرمول مولکولی دی متیل اتر ( $\text{CH}_3 - \text{O} - \text{CH}_3$ )، جرم مولی آن برابر ۴۶ گرم بر مول و جرم مولی بنتان برابر ۷۲ گرم بر مول می باشد.

۸۴- گزینه «۳»

بررسی عبارت ها:

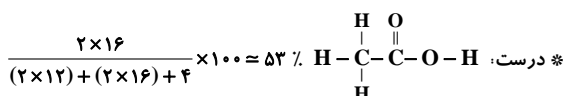
الف) ساختار داده شده یک پلی آمید است که کولار نیز جزو این خانواده از پلیمرها است.  
 ب) دی اسید و دی آمین سازنده این پلی آمید به صورت زیر است که هر دو در ساختار خود ۶ اتم کربن دارند.



پ) جرم مولی دی اسید و دی آمین سازنده آن به ترتیب ۱۴۶ و ۱۱۶ گرم بر مول می باشد.  
 ت) از واکنش دی اسید و دی آمین، آمید به دست می آید نه استر.

۸۵- گزینه «۳»

\* درست: فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسیدها به صورت  $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$  است و فرمول مولکولی آلکنها به صورت  $\text{C}_n\text{H}_{2n}$  می باشد.



\* نادرست: نیروی بین مولکولی و نقطه جوش هگزانوئیک اسید بیشتر است.  
 \* درست: در هر دو ترکیب با n اتم کربن، به تعداد 2n + 2 پیوند اشتراکی داریم.

|              |       |     |     |
|--------------|-------|-----|-----|
| تعداد اولیه  | A     | B   | C   |
|              | ۱     | ۵   | ۵   |
| تغییرات      | +۱-۲x | +x  | +x  |
| تعداد ثانویه | ۲-۲x  | ۵+x | ۵+x |

$$25 = \frac{(5+x)^2}{(2-2x)^2} \Rightarrow 5 = \frac{5+x}{2+2x} \Rightarrow 10-10x = 5+x \Rightarrow 5 = 11x \Rightarrow x = 0/45$$

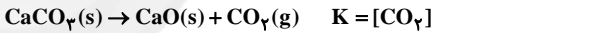
$$[C] = 5 + 0/45 = 5/45$$

۷۹- گزینه «۴»

با افزودن مقداری A به واکنش چهارم غلظت تعادلی تمام گونه ها افزایش می یابد. دقت کنید که با افزودن A مقداری از آن مصرف می شود ولی تعادل نمی تواند اثر تغییر اعمال شده را به طور کامل جبران کند.

۸۰- گزینه «۳»

ثابت تعادل به شکل زیر است:



$$1/2 = \frac{\text{mol CO}_2}{1} = \text{mol CO}_2 = 1/2$$

۲۶/۴ گرم گاز برابر ۰/۶ مول  $\text{CO}_2$  است، با افزودن ۰/۶ مول  $\text{CO}_2$ ، مول  $\text{CO}_2$  برابر  $1/5$  (۱/۵) می شود. برای این که تعادل تغییر نکند، حجم نیز باید ۱/۵ برابر شود.

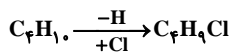
شیمی ۲

۸۱- گزینه «۴»

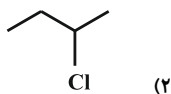
بررسی گزینه ها:

گزینه «۱»: بنزوئیک اسید یک نگهدارنده است که سرعت فساد مواد غذایی را کاهش می دهد، در حالی که لیکوپن یک بازدارنده است و فعالیت رادیکال های آزاد را کاهش می دهد.  
 گزینه «۲»: مثال نقض این گزینه گروه عاملی اتری (-O-) است که در آن پیوند دوگانه «کربن-اکسیژن» وجود ندارد.  
 گزینه «۳»: از اتصال COOH به حلقه بنزن، بنزوئیک اسید به دست می آید در حالی که در ساختار بادام، بنز آلدهید وجود دارد.  
 گزینه «۴»: الکل های سازنده استر موجود در سیب و انگور به ترتیب متانول و اتانول هستند که به هر نسبتی در آب حل می شوند.

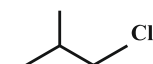
ت) در ساختار مولکولی که به طور عمده عامل طعم و بوی گشنیز است، گروه عاملی الکلی (هیدروکسیل) وجود دارد که در این ترکیب، این گروه عاملی وجود ندارد.



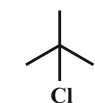
(۱)



(۲)



(۳)



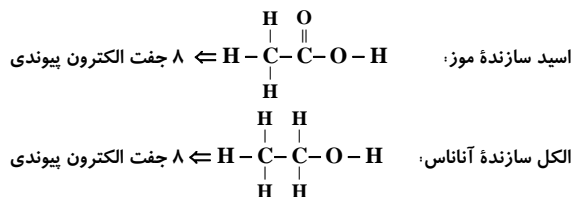
(۴)

۸۶- گزینه «۴»

شکل داده شده ساختار ویتامین «ث» است و فرمول مولکولی آن به صورت  $C_6H_8O_6$  می باشد.

نسبت درصد جرمی اکسیژن به کربن در این ترکیب برابر  $\frac{16}{12} \approx 1/3$  است و به ازای هر اتم اکسیژن ۲ جفت الکترون ناپیوندی (در مجموع ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی) در ساختار آن وجود دارد.

۸۷- گزینه «۱»



۸۸- گزینه «۲»

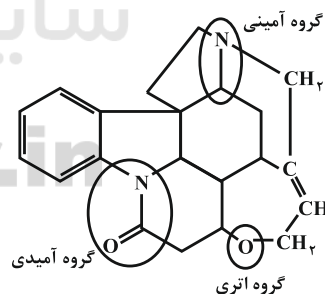
گزینه «۱»: گریس ( $C_{18}H_{38}$ ) تعداد کربن کمتری نسبت به وازلین ( $C_{28}H_{58}$ ) دارد؛ بنابراین چسبندگی آن کمتر است اما هگزان نسبت به دکان، به علت تعداد اتم‌های کربن کمتر، فرارتر است.

گزینه «۲»: این دو ترکیب ایزومرنند ولی تنها ۲-هگزن دارای پیوند دوگانه است و با محلول برم واکنش می دهد در حالی که سیکلوهگزان پیوند دوگانه ندارد.

گزینه «۳»: با توجه به متن کتاب درسی درست است.

گزینه «۴»: به موادی که فرمول مولکولی یکسان اما ساختار متفاوتی دارند، ایزومر می گویند.

۸۹- گزینه «۲»



بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به ساختار داده شده یک گروه آمینی و یک گروه آمیدی در آن وجود دارد.

ب) به دلیل وجود حلقه بنزن، ترکیبی آروماتیک محسوب می شود و در آن ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

پ) در ساختار داده شده ۴ پیوند دوگانه  $C=C$  دیده می شود، پس با اضافه کردن ۸ مول هیدروژن که معادل ۴ مول  $H_2$  است، همه پیوندهای دوگانه کربن - کربن به صورت یگانه در می آیند.