



# آزمون غیر حضوری

## دروس اختصاصی دوازدهم ریاضی

۲۹ فروردین ۹۹

(مباحث ۱۲ اردیبهشت ۹۹)

گروه فنی و تولید:

محمد اکبری	مسئول تولید آزمون غیر حضوری
عادل حسینی	مسئول دفترچه آزمون غیر حضوری
مدیر گروه: فاطمه رسولی نسب مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری	گروه مستندسازی
حسن خرمجو	حروف نگار و صفحه آرا
سوران نعیمی	ناظر چاپ

بنیاد علمی آموزشی قلمچی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۷۴۰۰

«تمام داراییها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلمچی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»

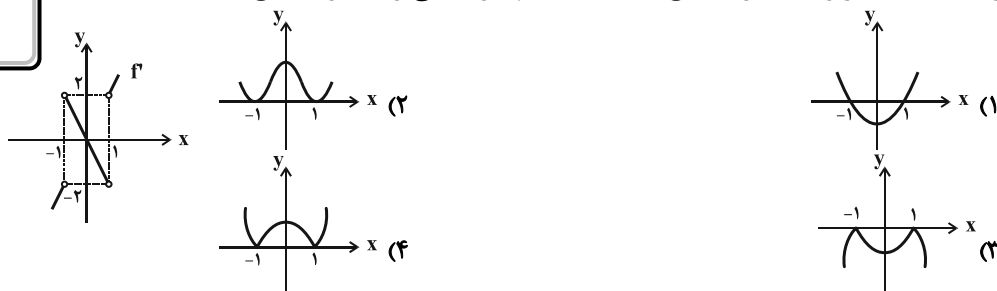


حسابان ۲

حسابان ۲

کاربردهای مشتق  
صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۴۴

۱- اگر شکل مقابل مربوط به نمودار تابع  $f'$  باشد، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع  $f$  باشد؟



۲- اگر تابع  $f(x) = ax + \cos x$  یک تابع اکیداً یکنوا روی  $\mathbb{R}$  باشد، مجموعه مقادیر  $a$  کدام است؟

- (۱)  $(-2, -1] \cup [1, 2)$  (۲)  $[-1, 1]$  (۳)  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

۳- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & ; x > 1 \\ m & ; x = 1 \\ x - 4 & ; x < 1 \end{cases}$  اکسترم نسبی نداشته باشد، مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-3 \leq m \leq 2$  (۲)  $-4 < m < 2$   
(۳)  $m \leq -3$  یا  $m \geq 2$  (۴)  $m > 2$  یا  $m < -3$

۴- اگر شیب خط گذرنده از نقاط اکسترم نسبی تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$  برابر ۶ باشد، مقدار ناصفر  $a$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$  (۲)  $\frac{1}{3\sqrt{2}}$  (۳)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  (۴)  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

۵- تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + kx} - k$  فقط یک نقطه بحرانی دارد.  $k$  چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶- به ازای کدام مقدار  $k$  ماکزیمم و مینیمم تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$  در بازه  $[1, 3]$  قرینه یکدیگرند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷- می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۴۸ واحد، یک مکعب مستطیل بسازیم. بیش‌ترین حجم این مکعب مستطیل، در صورتی که یکی از بعدها ۳ برابر بعد دیگر باشد، کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۸ (۳) ۶۰ (۴) ۶۴

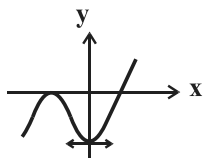
۸- نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 16\sqrt{x}$  در اطراف نقطه عطفش، شبیه کدام نمودار است؟



۹- خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 20$  در نقطه  $A(2, -26)$  روی آن، از نمودار عبور می‌کند. مقدار ماکزیمم نسبی نمودار  $f$  کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰

۱۰- نمودار تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$  در شکل مقابل نشان داده شده است.  $a$  کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۳



ریاضی پایه

۱۱- اگر در دو مثلث هم‌مساحت زیر داشته باشیم:  $\sin \alpha = \cot \beta$ ، حاصل  $\cos \alpha$  کدام است؟

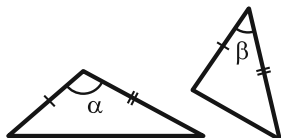
(۱)  $\alpha > \frac{\pi}{2}$

(۲)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(۳)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(۴)  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(۵)  $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$



۱۲- اگر  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$  باشد، حاصل  $\tan x + \cot x$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۳- به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، نمودار سهمی  $y = (m-1)x^2 - x + (3-m)$  از ناحیه سوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

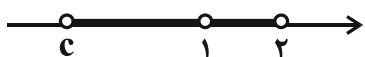
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۴- نمایش هندسی مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^2+x+a}{bx^2+2x+b} > 0$  به صورت زیر است. حاصل  $a+b+c$  کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۶

(۳) -۱۰

(۴) ۸

۱۵- اگر اعداد غیر صفر  $a$  و  $b$  جواب‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  باشند، کم‌ترین مقدار عبارت  $x^2 + ax + b$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{9}{4}$

(۳)  $-\frac{9}{4}$

(۴) ۱

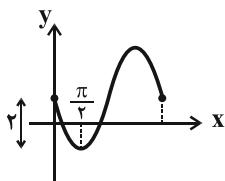
۱۶- معادله  $\sqrt{2x+1} + x = |x+2|$  چند جواب دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴



۱۷- شکل مقابل بخشی از نمودار تابع  $f(x) = 1 - b \sin x$  است. مقدار  $f\left(\frac{94\pi}{3}\right)$  کدام است؟

(۱)  $1 - \sqrt{3}$

(۲)  $2 - \sqrt{3}$

(۳)  $1 + \sqrt{3}$

(۴)  $2 + \sqrt{3}$

۱۸- مقدار عبارت  $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $\frac{1}{12}$

(۴)  $\frac{1}{16}$

۱۹- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+1}-3}{4-x^2} = b$  باشد، مقدار  $a - 18b$  کدام است؟ ( $b \in \mathbb{R}$ )

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۷

۲۰- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \left[x + \frac{3}{2}\right] + 3a & ; x > 0 \\ 2b & ; x = 0 \\ \sqrt{2 \sin 2x} & ; x < 0 \end{cases}$  پیوسته باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟ (، []، نماد جزء صحیح است.)

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴

هندسه ۳

۲۱- سه بردار  $\vec{a} = (1, 3, -1)$ ،  $\vec{b} = (2, m, 1)$  و  $\vec{c} = (1, m-1, 1)$  در یک صفحه قرار دارند.  $m$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) -۱

هندسه ۳

بردارها  
صفحه‌های ۶۱ تا ۸۴



۲۲- نقاط  $A = (2, 3, 4)$  و  $B = (-2, -5, 0)$  مفروض‌اند. اگر نقطه  $M$  بر روی پاره‌خط  $AB$  چنان قرار داشته باشد که  $\vec{MA} = -3\vec{MB}$ ، مختصات نقطه  $M$  کدام است؟

- (۱)  $(-1, -4, 1)$  (۲)  $(-2, -3, -1)$  (۳)  $(2, 3, 1)$  (۴)  $(-1, -3, 1)$

۲۳- مثلث  $ABC$ ، مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ است. حاصل عبارت  $(\vec{AC} \cdot \vec{CB})\vec{AB} - (\vec{AB} \cdot \vec{BC})\vec{AC}$  کدام است؟

- (۱)  $2\vec{CB}$  (۲)  $2\vec{BC}$  (۳)  $4\vec{CB}$  (۴)  $4\vec{BC}$

۲۴- طول تصویر قائم بردار  $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} - \vec{k})$  بر صفحه  $xy$ ، چند برابر طول تصویر قائم آن بر صفحه  $yz$  است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۲۵- اگر مبدأ مختصات ابتدای سه بردار غیر صفر و متمایز  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  و نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  (با همین ترتیب) انتهای سه بردار مذکور در فضای  $R^3$  باشند به طوری که  $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$ ، آنگاه  $\vec{a} \times \vec{b}$  کدام است؟

- (۱)  $\vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$  (۲)  $\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$  (۳)  $\vec{c} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{c}$  (۴)  $\vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c}$

۲۶- اگر  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$  و  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$  باشد، طول تصویر قائم  $\vec{a}$  بر راستای  $\vec{b}$ ، چند برابر  $|\vec{a}|$  است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۲۷- اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار و  $|\vec{a} + \vec{b}| = 8$  باشد، بیش‌ترین مقدار ضرب داخلی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۲۸- اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد حقیقی باشند، حداکثر مقدار عبارت  $\frac{(fa + b + c)^2}{4a^2 + b^2 + c^2}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۹- نقاط  $M = (1, 2, 3)$ ،  $N = (6, 5, 4)$  و  $P = (7, 8, 9)$  وسط‌های اضلاع مثلث  $ABC$  هستند. مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

- (۱)  $12\sqrt{6}$  (۲)  $24\sqrt{6}$  (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۳۰- بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  بردارهایی به‌طول واحد هستند و  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 9$  می‌باشد. اندازه بردار

- $5\vec{c} + 5\vec{b} + 2\vec{a}$  کدام است؟  
(۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

### ریاضیات گسسته

ترکیبیات (شمارش)  
صفحه‌های ۶۲ تا ۸۵

### ریاضیات گسسته

۳۱- چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که نه مربع کامل باشند و نه مکعب کامل؟

- (۱) ۷۰۶ (۲) ۷۴۲ (۳) ۸۳۶ (۴) ۸۷۴

۳۲- چند عدد طبیعی  $n$  به طوری که  $1 \leq n \leq 100$  وجود دارد که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴) ۴۸

۳۳- چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد به طوری که از بین اعداد ۲، ۳ و ۵، تنها بر ۲ بخش پذیر باشند؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

۳۴- چند تابع پوشا از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  به  $\{5, 6, 7\}$  وجود دارد که  $f(1) = 5$  باشد؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۳۵- با مجموعه رأس‌های  $\{a, b, c, d, e\}$  چند گراف ساخته می‌شود به طوری که هیچکدام از رأس‌های  $a$  و  $b$  تنها نباشند؟

- (۱) ۱۰۱۶ (۲) ۹۰۴ (۳) ۸۵۴ (۴) ۷۶۸

۳۶- درون مکعب مستطیلی به ابعاد ۲، ۳ و ۴، حداقل چند نقطه انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم فاصله حداقل دو نقطه از آنها کم‌تر از

- $\sqrt{3}$  است؟  
(۱) ۲۵ (۲) ۳۷ (۳) ۴۹ (۴) ۱۳



۳۷- از بین ۱۰ نفر در هر مرحله به تصادف ۴ نفر را انتخاب می‌کنیم و به هر یک از آن‌ها ۵۰ سکه می‌دهیم. این عمل باید حداقل چند بار انجام شود تا مطمئن شویم بین آن‌ها فردی وجود دارد که به او حداقل ۴۰۰ سکه رسیده است؟

- ۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۳۸- در دو کیسه، مهره‌هایی با رنگ‌های قرمز، آبی و سفید ریخته‌ایم. حداقل تعداد مهره‌ها چقدر باید باشد تا مطمئن باشیم حداقل در یکی از کیسه‌ها، دست کم ۳ مهره هم‌رنگ داریم؟

- ۱) ۹ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۹

۳۹- فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۵ و بخش پذیر بر ۳ باشد. اگر هر زیر مجموعه k عضوی از مجموعه A، دست کم دارای دو عضو با مجموع ۳۳ باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار k کدام است؟

- ۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۰- شهری دارای ۷ دبیرستان است که ۶ تای آنها دارای ۴ پایه درسی و یکی از آنها دارای ۳ پایه درسی است. اگر ۸۵ دانش‌آموز دبیرستانی از این شهر را به تصادف انتخاب کنیم، حداقل چند نفر از آن‌ها هم‌مدرسه‌ای و هم‌پایه هستند؟

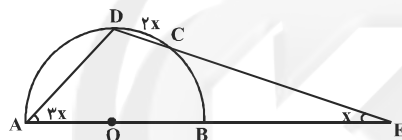
- ۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

هندسه ۲

هندسه ۲

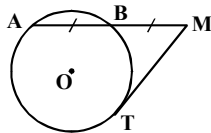
کل کتاب  
صفحه‌های ۹ تا ۷۶

۴۱- در شکل زیر، AB قطر یک نیم‌دایره است. اگر  $\widehat{DC} = 2x$ ،  $\widehat{E} = x$  و  $\widehat{A} = 3x$  باشد، x کدام است؟



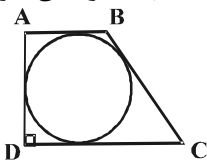
- ۱)  $30^\circ$   
۲)  $20^\circ$   
۳)  $15^\circ$   
۴)  $10^\circ$

۴۲- مطابق شکل در دایره  $C(O, 4)$ ، وتر AB را به اندازه خود تا نقطه M امتداد می‌دهیم. اگر طول مماس MT برابر  $6\sqrt{2}$  باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟



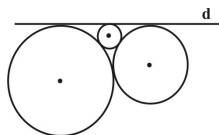
- ۱)  $\sqrt{5}$   
۲)  $\sqrt{7}$   
۳)  $\sqrt{10}$   
۴)  $2\sqrt{3}$

۴۳- مطابق شکل، دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD بر دایره‌ای محیط شده است. اگر دایره، ساق بزرگ‌تر را به دو پاره‌خط به اندازه‌های ۲ و ۸ تقسیم کند، طول بزرگ‌ترین قاعده دوزنقه کدام است؟



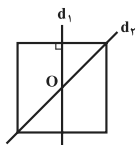
- ۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۴۴- مطابق شکل، سه دایره به شعاع‌های  $\frac{4}{3}$ ، ۳، R، دو به دو مماس خارج بوده و هر سه بر خط d مماس‌اند. اگر شعاع کوچک‌ترین دایره نباشد، مقدار آن کدام است؟



- ۱)  $\frac{25}{3}$  (۲) ۱۲ (۳)  $6\sqrt{2}$  (۴) ۸

۴۵- بازتاب مربع را ابتدا نسبت به خط  $d_1$  و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به خط  $d_2$  رسم می‌کنیم. تبدیلی که مربع اولیه را به آخرین شکل تصویر می‌کند، چند نقطه ثابت تبدیل دارد؟ (O مرکز مربع است)



- ۱) صفر (۲) بی‌شمار (۳) ۱ (۴) ۲

۴۶- اگر G مرکز ثقل مثلث ABC و مساحت محصور بین مثلث و تصویر آن تحت انتقال با بردار  $\vec{BG}$  برابر ۶ واحد مربع باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

- ۱) ۳۶ (۲) ۴۲ (۳) ۴۸ (۴) ۵۴



۴۷- مربعی را  $45^\circ$  حول نقطه تلاقی قطرهای آن دوران می‌دهیم. اگر مساحت سطح محصور بین مربع و تصویر آن برابر  $4 + 4\sqrt{2}$  باشد، طول ضلع مربع کدام است؟

- (۱)  $1 + \sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2} - 1$  (۳)  $2 + \sqrt{2}$  (۴)  $2(\sqrt{2} - 1)$

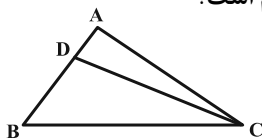
۴۸- در مثلث  $ABC$  به اضلاع  $AB = 4$ ،  $AC = 5$  و  $BC = 7$ ، نیمساز زاویه داخلی  $A$ ، میانه  $CM$  را در نقطه  $I$  قطع می‌کند. طول پاره خط  $MI$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{33}}{5}$  (۲)  $\frac{\sqrt{33}}{7}$  (۳)  $\frac{2\sqrt{33}}{5}$  (۴)  $\frac{2\sqrt{33}}{7}$

۴۹- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، نیمساز زاویه قائمه، وتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر مساحت این مثلث برابر ۹ باشد، طول نیمساز زاویه داخلی  $A$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲) ۳ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۴

۵۰- در شکل روبه‌رو اگر  $AD = 1$ ،  $BD = 3$ ،  $CD = 5$  و  $BC = 7$  باشد، آنگاه مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟



- (۱)  $5\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{21\sqrt{3}}{4}$  (۳)  $6\sqrt{3}$  (۴)  $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

### آمار و احتمال و ریاضی ۱

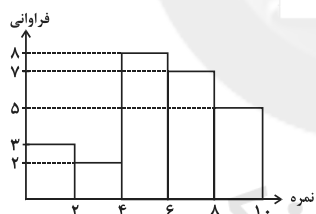
#### آمار و احتمال

آمار توصیفی و آمار استنباطی  
صفحه‌های ۷۳ تا ۱۲۷

#### ریاضی ۱

آمار و احتمال  
صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۷۰

۵۱- نمودار بافت نگاشت فراوانی نمره‌های آزمون عملی دانشجویان در شکل زیر داده شده است. اگر سه دانشجو که نمره‌های آنها به ترتیب  $7/5$ ، ۱ و ۳ است، از این کلاس حذف گردیده و به جای آنها ۲ دانشجو با نمره‌های  $2/5$  و ۹ به این کلاس اضافه شوند، زاویه مربوط به دسته ۸-۱۰ در نمودار دایره‌ای چند درجه تغییر می‌کند؟

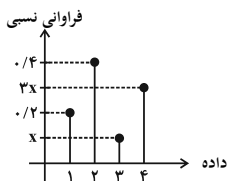


- (۱) صفر  
(۲) ۱۸  
(۳)  $10/8$   
(۴) ۹

۵۲- میانگین و میانه نمرات امتحانی ۶ درس دانش آموزی با هم مساوی و برابر ۱۴ است. اگر بالاترین نمرات این دانش آموز، ۱۶ و ۱۵ باشد، مجموع نمرات دو درسی که در آنها کمترین نمره را گرفته است، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴) ۲۸

۵۳- در داده‌های آماری ۱۵، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم کدام است؟



- (۱)  $10/5$  (۲) ۹ (۳)  $11/2$  (۴)  $9/4$

۵۴- با توجه به نمودار میله‌ای روبه‌رو برای داده‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، واریانس کدام است؟

- (۱)  $1/5$  (۲)  $1/25$  (۳)  $0/75$  (۴) ۱

۵۵- اگر ۱۵ داده آماری را سه برابر کرده و ۸ واحد از هر یک کم کنیم، ضریب تغییرات ۵۰ درصد افزایش می‌یابد. مجموع داده‌های جدید کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۶۰

۵۶- میانگین و انحراف معیار ۱۳ داده آماری به ترتیب برابر ۶ و ۲ است. اگر داده‌های ۵، ۸ و ۸ را از این داده‌ها حذف کنیم، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

- (۱)  $4/2$  (۲)  $4/4$  (۳)  $4/5$  (۴)  $4/6$



۵۷- کدام یک از موارد زیر در مورد نمونه‌گیری‌های خوشه‌ای و طبقه‌ای نادرست است؟

- (۱) نمونه‌گیری خوشه‌ای، هزینه و زمان را نسبت به نمونه‌گیری طبقه‌ای کاهش می‌دهد.
- (۲) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به‌عنوان نمونه در نظر می‌گیریم.
- (۳) در نمونه‌گیری خوشه‌ای بهتر است ویژگی مورد بررسی درون خوشه‌ها تفاوت بیشتری داشته باشد.
- (۴) همواره اندازه طبقات در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر یکدیگر است.

۵۸- کدام یک از متغیرهای تصادفی زیر کیفی ترتیبی است؟

- (۱) میزان دمای هوا
- (۲) میزان رضایت از شغل
- (۳) جنسیت فرد
- (۴) تعداد فرزندان یک خانواده

۵۹- در کدام یک از موضوعات زیر، از دادگان‌ها برای جمع‌آوری داده‌ها نمی‌توان استفاده کرد؟

- (۱) تیراژ روزنامه‌های کشور
- (۲) تعداد مجروحان در تصادفات رانندگی سال ۹۷ در کل کشور
- (۳) تعداد پروازهای خروجی فرودگاه مهرآباد در یک روز خاص
- (۴) تعداد عابرانی که در یک روز خاص از یک پل عابر استفاده می‌کنند.

۶۰- از جامعه  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$  یک نمونه ۶ تایی انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این نمونه، میانگین جامعه را دقیقاً درست برآورد می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{28}$
- (۲)  $\frac{3}{28}$
- (۳)  $\frac{1}{7}$
- (۴)  $\frac{1}{4}$

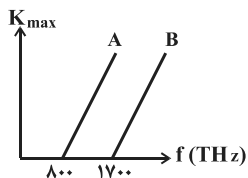
### فیزیک ۳

**فیزیک ۳**  
آشنایی با فیزیک اتمی  
آشنایی با فیزیک هسته‌ای  
صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۵۶

۶۱- تعداد فوتون‌هایی که در مدت ۱۸ ثانیه توسط یک لامپ تک‌رنگ نور زرد در خلأ گسیل می‌شود، برابر با  $6 \times 10^{21}$  می‌باشد. اگر طول‌موج نور زرد  $660 \text{ nm}$  باشد، توان لامپ برحسب وات کدام

است؟  $(h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}, c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})$

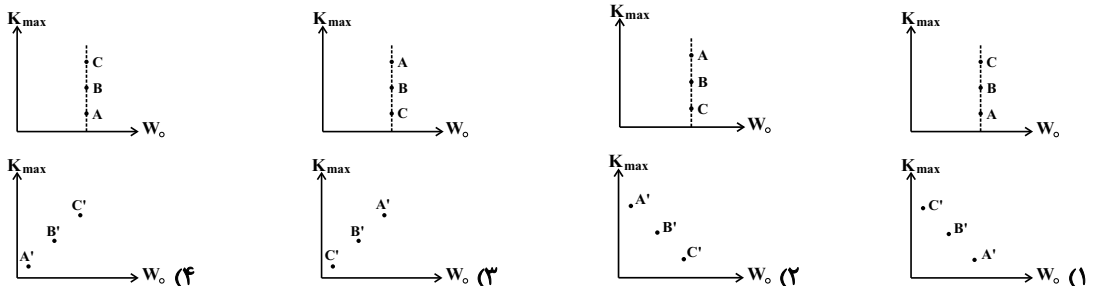
- (۱) ۴۰
- (۲) ۳۰۰
- (۳) ۲۵۰
- (۴) ۱۰۰



۶۲- در آزمایش فوتوالکتریک، نمودار انرژی جنبشی بیشینه فوتوالکترون‌ها بر حسب بسامد نور فرودی به سطح دو فلز A و B مطابق شکل مقابل است. اگر نوری با بسامد  $f$  به سطح هر دو فلز بتابد، بیشینه تندی فوتوالکترون‌ها هنگام کنده شدن از سطح فلز A دو برابر فلز B خواهد بود.  $f$  چند THz است؟  $(h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s})$

- (۱) ۱۰۰۰
- (۲) ۲۰۰۰
- (۳) ۴۰۰۰
- (۴) ۸۰۰۰

۶۳- در آزمایش فوتوالکتریک سه باریکه نور تکفام A، B و C ( $\lambda_A > \lambda_B > \lambda_C$ ) را به فلز  $A'$  می‌تابانیم و در آزمایش دیگری نور A را به سه سطح فلزی  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  ( $f_{A'} > f_{B'} > f_{C'}$ ) می‌تابانیم. کدام گزینه نمودار  $K_{max}$  بر حسب W را برای این دو آزمایش به صورت کیفی به درستی نشان می‌دهد؟ (پدیده فوتوالکتریک در تمام آزمایش‌ها رخ می‌دهد).



۶۴- در یک اتم هیدروژن، الکترون در مدار  $n = 3$  قرار دارد و با جذب پرتو نور تک‌رنگی با بسامد  $24 \text{ THz}$  به مدار برانگیخته بالاتر می‌رود. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این اتم به حالت پایه ( $n = 1$ ) برود، چند نوع فوتون با طول‌موج‌هایی

در محدوده فرسرخ می‌تواند تابش کند؟  $(E_R = 13.6 \text{ eV}, h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s})$

- (۱) ۱۰
- (۲) ۷
- (۳) ۳
- (۴) ۵



۶۵- در اتم هیدروژن الکترون با گذار از تراز  $n$  به تراز پایه، پرنرژی ترین فوتون خود با انرژی  $\frac{15}{16} E_R$  را گسیل می کند. انرژی لازم

برای این که الکترون از تراز  $n$  به تراز  $n+2$  برود، چند ریدبرگ است؟

(۱)  $\frac{15}{16} E_R$       (۲)  $\frac{30}{16} E_R$       (۳)  $\frac{5}{144} E_R$       (۴)  $\frac{15}{144} E_R$

۶۶- کدام گزینه در مورد پدیده گسیل فوتون ها صحیح نیست؟

(۱) در گسیل القایی، یک فوتون وارد و دو فوتون خارج می شود که این موجب افزایش تعداد فوتون ها می شود.

(۲) فوتون گسیل شده در گسیل القایی با فوتون ورودی هم فاز، هم جهت و هم بسامد است.

(۳) در ترازهای شبه پایدار الکترون ها مدت زمان بسیار طولانی تری در حالت برانگیخته باقی می ماندند و این موجب تقویت نور لیزر می شود.

(۴) در بعضی ترازها، در اثر گسیل کاتوره ای فوتون ها، الکترون های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته می شوند.

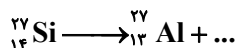
۶۷- وجود نوترون در هسته چه اثری دارد؟

(۱) در صورتی که تعداد آن ها کمتر از تعداد پروتون ها باشد، هیچ اثری ندارد.

(۲) با قرار گرفتن بین پروتون ها باعث ناپایداری هسته می شود.

(۳) با افزایش نیروی هسته ای قوی، بدون افزایش نیروی الکتریکی، باعث پایداری هسته می شود.

(۴) به دلیل خنثی بودن اثری ندارد.



۶۸- در معادله واپاشی مقابل، کدام ذره گسیل می شود؟

(۱) پروتون      (۲) آلفا      (۳) نوترون      (۴) پوزیترون

۶۹- نیمه عمر یک ماده پرتوزا برابر با ۱۴ روز است. اگر پس از گذشت ۸۴ روز فقط ۳g از آن ماده باقی مانده باشد، چند گرم ماده واپاشیده شده است؟

(۱) ۹۳      (۲) ۱۸۹      (۳) ۹۶      (۴) ۱۹۲

۷۰- از بین عبارات های زیر کدام یک از آن ها صحیح می باشند؟

(الف) نوترون های آزاد شده در شکافت هسته اورانیم دارای انرژی جنبشی هستند.

(ب) در بین پرتوهای آلفا، بتا و گاما، بیشترین سرعت مربوط به پرتوی گاما می باشد.

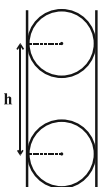
(پ) پرتوی گاما در میدان مغناطیسی منحرف می شود.

(ت) پرتوی  $\beta^-$  حامل بار الکتریکی مثبت می باشد.

(۱) الف و ب و ت      (۲) ب و پ و ت      (۳) الف و ب      (۴) ب و ت

**فیزیک ۲**

کل کتاب  
صفحه های ۱ تا ۱۳۰



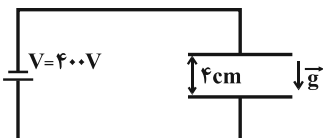
۷۱- کف لوله شیشه ای شکل زیر حداکثر می تواند نیرویی به بزرگی  $4N$  را تحمل کند. اگر دو گلوله کوچک یکسان با بارهای  $+3\mu C$  را به آرامی درون لوله قرار دهیم و بعد از ایجاد تعادل، کف لوله نشکنند، کمترین فاصله بین مراکز دو گلوله چند سانتی متر می تواند باشد؟  $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

از تمام اصطکاک ها صرف نظر شود.

(۱)  $3\sqrt{5}$       (۲)  $9\sqrt{5}$   
(۳)  $4/5\sqrt{10}$       (۴)  $9\sqrt{2}$

۷۲- مطابق شکل زیر، دو صفحه رسانای موازی به اختلاف پتانسیل الکتریکی  $400V$  متصل شده اند. اگر ذره ای به جرم  $2g$  و بار الکتریکی  $+12\mu C$  از مجاورت صفحه پایینی رها شود، تندی ذره هنگامی که به صفحه بالایی می رسد برابر با چند متر بر ثانیه

است؟  $(g = 10 \frac{N}{kg})$  صرف نظر شود.



(۱)  $0/4\sqrt{35}$       (۲) ۲  
(۳)  $4\sqrt{30}$       (۴)  $4\sqrt{5}$



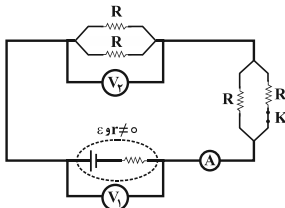


۷۳- اگر ۴۰ درصد از بار الکتریکی ذخیره شده روی صفحات یک خازن شارژ شده را تخلیه کنیم، ظرفیت خازن و انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) ۴۰ درصد کاهش می‌یابد، ۳۶ درصد کاهش می‌یابد. (۲) ۶۰ درصد کاهش می‌یابد، ۶۴ درصد کاهش می‌یابد.  
 (۳) ثابت می‌ماند، ۳۶ درصد کاهش می‌یابد. (۴) ثابت می‌ماند، ۶۴ درصد کاهش می‌یابد.

۷۴-  $n$  رسانای استوانه‌ای مشابه را که طول هر یک برابر با  $L$  است، به صورت موازی به یکدیگر متصل می‌کنیم و در این حالت مقاومت معادل مجموعه برابر با  $R$  است. اگر ۷۵ درصد از طول هر مقاومت کم کنیم و آن‌ها را به صورت متوالی به یکدیگر متصل کنیم، مقاومت معادل مجموعه در این حالت نیز برابر با  $R$  می‌شود.  $n$  کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۶

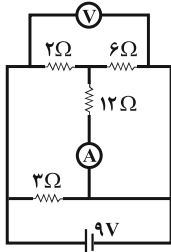


۷۵- در مدار شکل روبه‌رو، اگر کلید  $K$  را باز کنیم، اعدادی که آمپرسنج و ولت‌سنج‌های  $V_1$  و  $V_2$  نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟ (آمپرسنج و ولت‌سنج‌ها آرمانی هستند.)

- (۱) افزایش - افزایش - کاهش (۲) کاهش - ثابت - کاهش  
 (۳) کاهش - ثابت - افزایش (۴) کاهش - افزایش - کاهش

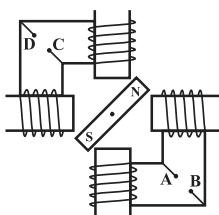
۷۶- در مدار شکل مقابل، اعدادی که ولت‌سنج و آمپرسنج نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ در  $SI$  کدام است؟ (ولت‌سنج و آمپرسنج آرمانی هستند.)

- (۱) ۶، ۵/۰ (۲) ۶، ۱  
 (۳) ۹، ۵/۰ (۴) ۹، ۱



۷۷- شکل روبه‌رو نمای ساده‌ای از یک موتور الکتریکی را نشان می‌دهد. می‌خواهیم دو باتری را، یکی بین نقاط  $A$  و  $B$  و دیگری بین نقاط  $C$  و  $D$  طوری قرار دهیم که آهنربای دائمی چرخنده در وسط موتور، ساعتگرد چرخیده و به صورت افقی قرار گیرد. مشخص کنید پایه مثبت باتری‌ها به کدام نقاط باید وصل باشد؟

- (۱)  $A$  و  $C$  (۲)  $A$  و  $D$  (۳)  $B$  و  $C$  (۴)  $B$  و  $D$

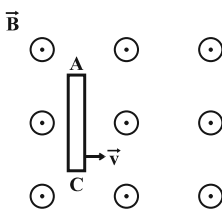


۷۸- در شکل روبه‌رو یک میله رسانا به طول  $8\text{cm}$  به وسیله دو نیروسنج به حالت افقی نگه داشته شده است و این مجموعه در میدان مغناطیسی یکنواخت  $\vec{B}$  که عمود بر صفحه است، واقع شده است. اگر جریان عبوری از میله برابر با  $1/5\text{A}$  و از  $A$  به  $C$  باشد، هر نیروسنج عدد  $0/6\text{N}$  و اگر جریان عبوری از میله برابر با  $4/5\text{A}$  و از  $C$  به  $A$  باشد، هر نیروسنج عدد  $1/2\text{N}$  را نشان خواهد داد. اندازه میدان مغناطیسی بر حسب تسلا کدام است؟

- (۱)  $1/8$  (۲)  $1/4$  (۳)  $1/2$  (۴)  $3/4$

۷۹- مطابق شکل زیر، میله رسانای  $AC$  به طول  $5\text{m}$  عمود بر خط‌های میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی  $4\text{G}$ ، در جهت نشان داده شده با تندی ثابت  $3\text{m/s}$  در حال حرکت است. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه  $A$  و  $C$  یعنی  $(V_A - V_C)$  برابر با چند میلی‌ولت است؟

- (۱)  $0/6$  (۲)  $-0/6$  (۳)  $0/3$  (۴)  $-0/3$



۸۰- از سیم‌لوله‌ای آرمانی به طول  $62/8\text{cm}$  و سطح مقطع  $1\text{cm}^2$ ، جریان  $10\text{A}$  عبور می‌کند. اگر انرژی ذخیره شده در آن برابر با

$$4\text{mJ}$$

باشد، تعداد حلقه‌های سیم‌لوله کدام است؟ ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T}\cdot\text{m/A}$  و  $\pi = 3/14$ )

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۴۰ (۳) ۲۰۰۰ (۴) ۴۰۰۰



## شیمی ۳

## شیمی ۳

شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر  
صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۲۱

۸۱- همهٔ موارد زیر صحیح می‌باشند، به جز ... ( $C = ۱۲, H = ۱, O = ۱۶ : g.mol^{-1}$ )

(۱) در واکنش تهیه متانول از گازهای  $H_2$  و  $CO$  به ازای مبادله ۱۶ مول الکترون، مقدار ۱۲۸ گرم متانول حاصل می‌شود.

(۲) مولکولی از PET که جرم مولی آن برابر با ۲۱۱۲۰ گرم بر مول است، دارای ۱۱۰ واحد تکرارشونده می‌باشد.

(۳) اگر واکنش تعادلی  $CO_2(g) + H_2O(g) \xrightleftharpoons{K=۱۶} CO(g) + H_2(g)$  را در ظرفی در بسته به حجم یک لیتر با ۱ مول از هر یک از واکنش‌دهنده‌ها آغاز کنیم، ۳۲/۵ گرم گاز  $CO_2$  در تعادل وجود خواهد داشت.

(۴) اگر تعادل گازی  $aA \rightleftharpoons bB$  با کاهش دما و افزایش فشار در جهت رفت پیش برود،  $a > b$  و  $\Delta H < 0$  می‌باشد.

۸۲- کدام مطلب صحیح می‌باشد؟ ( $N = ۱۴, H = ۱ : g.mol^{-1}$ )

(الف) با وجود گرماده بودن واکنش  $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$ ، این واکنش در دماهای پایین انجام نمی‌شود یا بسیار کند است.

(ب) مبدل‌های کاتالیستی سرامیک‌های توری شکل هستند که بر روی سطح آنها فلزهای  $Rh$ ،  $Pb$  و  $Pt$  نشانده شده است.

(پ) اگر در مبدل کاتالیستی در خودروهای دیزلی مقدار  $34g$  / گاز آمونیاک استفاده شود، مقدار  $1/5L$  گاز در شرایطی که حجم مولی گازها برابر با ۳۰ لیتر بر مول است، تولید می‌شود.

(ت) شرایط بهینه فرایند هابر شامل دمای  $200^\circ C$ ، فشار  $45 atm$  و کاتالیزگر  $Fe$  می‌باشد.

(۱) الف و پ (۲) ب و پ (۳) الف، ب و پ (۴) ب، پ و ت

۸۳- چند مورد از مطالب زیر نادرست‌اند؟

(الف) وجود مبدل‌های کاتالیستی در خودروها سبب تولید گازی گلخانه‌ای می‌شود.

(ب) به منظور تأمین نیتروژن مورد نیاز گیاهان می‌توان نوعی فراوردهٔ پتروشیمی را به صورت مایع به خاک تزریق کرد.

(پ) اندازهٔ تغییر عدد اکسایش منگنز در واکنش تهیهٔ ترفتالیک اسید از پارازایلن برابر عدد اکسایش کربن گروه کربوکسیل در ترفتالیک اسید است.

(ت) از یکی از فراورده‌های واکنش تهیهٔ PET می‌توان برای تهیهٔ نوعی ضدعفونی‌کننده از گاز اتن استفاده کرد.

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۸۴- کدام مطلب نادرست است؟

(۱) از کاربردهای کلرواتان و اتیل استات به ترتیب می‌توان به افشانهٔ بی‌حس‌کننده موضعی و حلال چسب اشاره کرد.

(۲) هر واکنشی که در آن ترکیب آلی اکسیژن‌دار از یک هیدروکربن تولید می‌شود، واکنش اکسایش - کاهش است.

(۳) متانول مایعی بی‌رنگ، بسیار سمی و ساده‌ترین عضو خانوادهٔ الکل‌ها است که می‌توان آن را از چوب تهیه کرد.

(۴) با این که گاز متان واکنش‌پذیری خوبی دارد، تبدیل آن به متانول فرایندی دشوار است.

۸۵- چه تعداد از موارد زیر نادرست است؟

(الف) سنتز یک فرایند شیمیایی است که با استفاده از مواد ساده، مواد ساده‌تر به دست می‌آید.

(ب) برای سنتز یک استر می‌توان از واکنش یک اسید آلی با الکل در شرایط مناسب بهره برد.

(پ) گاز اتن در واکنش با آب و در حضور کاتالیزگر، یک ضدعفونی‌کننده تولید می‌کند که خود می‌تواند در تولید حلال چسب استفاده شود.

(ت) از الکل‌ها می‌توان سه دسته مواد آلی آمین‌ها، کربوکسیلیک اسیدها و کتون‌ها را تولید کرد.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۶- کدام گزینه در مورد PET درست است؟

(۱) تعداد اتم‌های کربن در واحد سازنده آن ۲ برابر اتم‌های اکسیژن است.

(۲) این پلیمر در واقع یک پلی‌آمید است که از واکنش اتیلن گلیکول و ترفتالیک‌اسید به دست می‌آید.

(۳) اتیلن گلیکول و ترفتالیک‌اسید به ترتیب از اتن و بنزن موجود در نفت خام به دست می‌آیند.

(۴) جهت تولید ترفتالیک‌اسید از ماده اولیه مناسب، اتم کربن گروه عاملی ۷ درجه اکسید می‌شود.

۸۷- از واکنش ۹۹۶ گرم ترفتالیک‌اسید با مقدار کافی از اتیلن گلیکول، تقریباً چند گرم PET به دست می‌آید؟

( $O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$ )

(۱) ۱۱۵۲ (۲) ۲۳۰۴ (۳) ۱۱۲۸ (۴) ۲۲۵۶



۸۸- چه تعداد از مواد زیر در مورد بازیافت PET نادرست است؟

یکی از راه‌های بازیافت آن، شست و شوی مواد پلاستیکی و تبدیل آن به پرک است. برای بازیافت شیمیایی PET از الکی بی‌رنگ و بسیار سمی استفاده می‌شود. الکل لازم برای بازیافت PET از واکنش اتان و آب به دست می‌آید.

در بازیافت PET هر چه شمار بیشتری از اتم‌ها به فرآورده سودمند تبدیل شود، به صرفه‌تر است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۹- تعادل  $K = 1/2$  در  $\text{CaCO}_3(s) \rightarrow \text{CaO}(s) + \text{CO}_2(g)$  در ظرفی در بسته برقرار است. اگر  $26/4$  گرم گاز  $\text{CO}_2$  را به ظرف

اضافه کنیم، باید حجم ظرف را چند برابر کنیم تا جرم مواد جامد تغییری نکند؟ (حجم ظرف یک لیتر است).

- (۱) ۰/۵ (۲) ۱ (۳) ۱/۵ (۴) ۲

۹۰- چه تعداد از موارد زیر در مواد تولید ترفتالیک اسید و اتیلن گلیکول درست است؟

(الف) اکسند و واکنش تولید هر دو ماده یون پرمنگنات است.

(ب) اتیلن گلیکول از ساده‌ترین عضو خانواده آلکن‌ها به دست می‌آید که یک عمل آورنده نیز هست.

(پ) ترفتالیک اسید از ترکیبی به دست می‌آید که نسبت به آلکان هم کربن خود ۶ هیدروژن کمتر دارد.

(ت) ترفتالیک اسید و اتیلن گلیکول پس از تولید، در یک واکنش بسپارش، پلی استر PET را تولید می‌کنند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

### شیمی ۱ و ۲

۹۱- اتم X دارای دو ایزوتوپ  ${}^A X$  و  ${}^{A+2} X$  به ترتیب با درصد فراوانی ۳۰ و ۷۰ درصد است. اگر

اختلاف تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها در ایزوتوپ سنگین آن برابر ۳ باشد و یون  $X^{3+}$  آن دارای ۲۸

الکترون باشد، عدد جرمی ایزوتوپ سبک‌تر آن کدام است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۶۳ (۴) ۶۵

۹۲- اگر انرژی حاصل از واکنش هسته‌ای  ${}^{15}\text{O}^{-4}$  گرم از یک ماده پرتوزا بتواند مقدار  $500$  تن آهن را

ذوب کند، برای ذوب کردن هر مول از آهن به چند کیلوژول انرژی نیاز است؟ ( $\text{Fe} = 56 \text{g.mol}^{-1}$ )

- (۱) ۲۷ (۲) ۱۵/۱۲ (۳) ۲۲/۱۵ (۴) ۱۷

۹۳- در یک کارخانه برای تولید گرما از دو واکنشگاه زیر استفاده می‌کنند، در صورتی که  $360 \text{kg}$  گلوکز

وارد واکنشگاه ۱ که بازده آن ۸۰٪ است شود، و مقدار مول گاز  $\text{CO}_2$  خروجی از واکنشگاه ۲، نصف

واکنشگاه ۱ باشد، بازده درصدی واکنشگاه ۲ چند درصد است؟

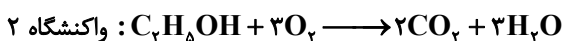
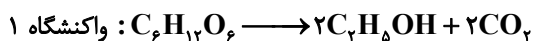
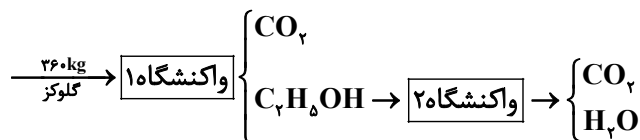
( $\text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1; \text{g.mol}^{-1}$ )

**آزمون محاسباتی شیمی**

**شیمی ۱**  
صفحه‌های ۴ تا ۶، ۱۳ تا ۱۹،  
۵۶ تا ۶۰، ۸۱ تا ۸۵ و ۱۰۲ تا  
۱۱۰

**شیمی ۲**  
صفحه‌های ۲۱ تا ۲۵، ۵۶ تا  
۵۸،  
۶۰ تا ۶۸، ۷۰ تا ۷۵، ۸۳ تا  
۸۸، ۹۰، ۹۱، ۹۴، ۹۵ و ۱۲۱ تا

**شیمی ۳**  
صفحه‌های ۱۸ تا ۲۸ و ۱۰۱ تا  
۱۰۳



- (۱) ۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

۹۴- از واکنش ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول HCl با مقدار کافی NaClO طی واکنش موازنه نشده زیر، ۲۵ لیتر گاز کلر با خلوص ۸۰٪

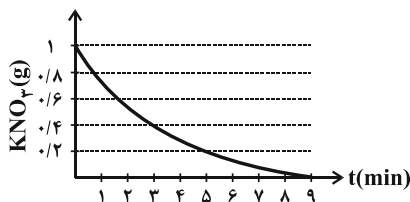
تولید می‌شود. اگر بازده درصدی واکنش برابر ۶۶٪ باشد، غلظت اولیه محلول اسید به تقریب کدام است؟ (چگالی گاز در شرایط

آزمایش برابر  $0.71 \text{g.L}^{-1}$  است و  $\text{Cl} = 35/5 \text{g.mol}^{-1}$ )  $\text{NaClO(aq)} + \text{HCl(aq)} \rightarrow \text{NaCl(aq)} + \text{Cl}_2(g) + \text{H}_2\text{O(l)}$

- (۱) ۰/۲۱ (۲) ۰/۳۳ (۳) ۱/۵۱ (۴) ۳/۰۳



۹۵- پتاسیم نیترات طی واکنش موازنه نشده:  $\text{KNO}_3(\text{s}) \longrightarrow \text{KNO}_2(\text{s}) + \text{O}_2(\text{g})$  تجزیه می‌شود. با توجه به نمودار زیر که مربوط به تجزیه  $\text{KNO}_3(\text{s})$  است، سرعت تولید گاز اکسیژن در ۵ دقیقه ابتدای واکنش در شرایط STP به تقریب چند  $\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$  است؟ ( $K = 39, O = 16, N = 14 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )



۰/۰۰۴ (۱)

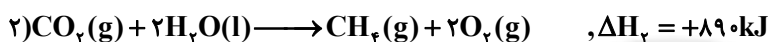
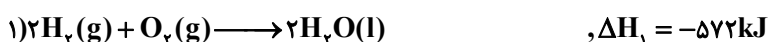
۰/۰۱۱ (۲)

۰/۰۱۸ (۳)

۰/۰۲۲ (۴)

۹۶- گرمای آزاد شده از سوختن ۴/۲ مول از ماده گرافیت، دمای ۱۰ کیلوگرم آب را چند درجه سلسیوس تغییر می‌دهد؟

$$(C_{\text{آب}} = 4/2 \text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1})$$



۴۲/۳ (۴)

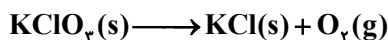
۳۷/۳۵ (۳)

۴۱/۵ (۲)

۳۹/۳۵ (۱)

۹۷- مقدار ۳۵ گرم پتاسیم کلرات طی واکنش موازنه نشده زیر تجزیه می‌شود. اگر درصد خلوص پتاسیم کلرات ۷۰٪ بوده و طی مدت ۵۰ ثانیه به طور کامل تجزیه شود، سرعت تولید گاز اکسیژن چند لیتر بر ثانیه است؟ (چگالی گاز اکسیژن در شرایط آزمایش

$$\text{برابر } 6/6 \text{ g/L} \text{ بوده و ناخالصی‌ها تجزیه نمی‌شوند.} (K = 39, Cl = 35/5, O = 16 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$$

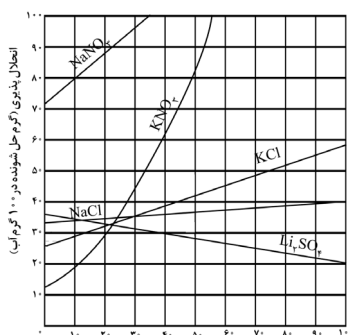


۰/۳۲ (۴)

۳/۲ (۳)

۰/۷۴ (۲)

۷/۴ (۱)



۹۸- ۴۵۰ گرم محلول سیر شده پتاسیم کلرید در دمای  $75^\circ\text{C}$  تهیه کرده‌ایم. دمای محلول را به تقریب به چند کلون برسانیم تا رسوب حاصل با ۱۴۴۰ گرم محلول نیم مولار نقره نیترات به طور کامل واکنش دهد؟ (چگالی محلول نقره نیترات را  $1/2 \text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$  در نظر بگیرد.) ( $Cl = 35/5, K = 39 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

۳۰ (۱)

۳۰۳ (۲)

۳۳۳ (۳)

۶۰ (۴)

۹۹- اگر pH دو محلول که شامل ۴۲g اسید HX و ۲۸g اسید HY که حجم محلول آن‌ها به ترتیب ۲۵۰ و ۵۰۰ میلی لیتر است، برابر باشد؛ درجه یونش HX چند برابر HY است؟ ( $Y = 41, X = 27, H = 1 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

۴/۹ (۴)

۹/۴ (۳)

۹/۲ (۲)

۲/۹ (۱)

۱۰۰- درصد یونش محلول ۰/۱ مولار HF برابر ۰/۱ است. غلظت یون هیدرونیوم این محلول چند برابر غلظت یون کلرید در محلول HCl با  $\text{pH} = 4$  است؟

۱ (۲)

۱۰ (۱)

۰/۰۱ (۴)

۰/۱ (۳)

	$-\infty$	$- a $	$ a $	$+\infty$
$f'$		-	+	-
$f$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{1}{\sqrt{2 a }}$	$\frac{1}{\sqrt{2 a }}$	
		min	max	

$$\Rightarrow \begin{cases} \max : \left( |a|, \frac{1}{\sqrt{2|a|}} \right) \\ \min : \left( -|a|, -\frac{1}{\sqrt{2|a|}} \right) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{\frac{1}{\sqrt{2|a|}} + \frac{1}{\sqrt{2|a|}}}{|a| + |a|} = \frac{1}{\sqrt{2}a} = 6$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$$

گزینه «۳» -۵

دامنه تابع  $f$ ،  $\mathbb{R}$  است.

$$f'(x) = \frac{2x+k}{\sqrt[3]{(x^2+kx-k)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{-k}{2}$$

برای این که  $x = \frac{-k}{2}$  تنها نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد، دو حالت می‌تواند اتفاق

بیفتد:

حالت اول: مخرج  $f'$  ریشه نداشته باشد:

$$\Rightarrow k^2 + 4k < 0 \Rightarrow -4 < k < 0 \quad (1)$$

حالت دوم: مخرج ریشه مضاعف  $-\frac{k}{2}$  داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k = 0, -4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} k \in [-4, 0]$$

پس  $k$  مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

گزینه «۲» -۶

ابتدا نقاط بحرانی  $f(x)$  را در بازه  $[1, 3]$  به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ.ق.ق} \\ x = 2 \end{cases}$$

$x$	۱	۲	۳
$f(x)$	$k-2$	$k-4$	$k$

باید  $k$  (ماکزیمم مطلق) و  $k-4$  (مینیمم مطلق) قرینه یکدیگر باشند:

$$\Rightarrow k-4 = -k \Rightarrow k = 2$$

حسابان ۲

گزینه «۴» -۱

با توجه به نمودار  $f'$ ، برای  $x < -1$ ،  $f'$  منفی است، بنابراین باید تابع  $f$  در این بازه نزولی باشد، پس گزینه «۳» نادرست است.

$f'$  در  $x=1$  و  $x=-1$  وجود ندارد، بنابراین باید تابع  $f$  در این دو نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، پس گزینه‌های «۱» و «۲» نیز نادرست هستند.

گزینه «۳» -۲

باید مشتق تابع روی  $\mathbb{R}$  نامنفی یا نامثبت باشد. پس:

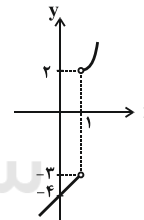
$$f'(x) = a - \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \Rightarrow a \geq 1 \\ f'(x) \leq 0 \Rightarrow a \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

گزینه «۱» -۳

نمودار تابع  $f$  بدون در نظر گرفتن نقطه  $(1, m)$  به صورت زیر است:



حال اگر نقطه  $(1, m)$  بالاتر از نقطه  $(1, 2)$  باشد، تابع ماکزیمم نسبی و اگر پایین‌تر از نقطه  $(1, -3)$  باشد، مینیمم نسبی دارد. اما اگر نقطه  $(1, m)$  بین این دو نقطه یا روی یکی از آنها باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$$\Rightarrow -3 \leq m \leq 2$$

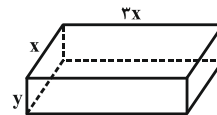
گزینه «۱» -۴

$$f'(x) = \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}$$



-۷ گزینه «۲»

قطعه سیم مورد نظر، یال‌های مکعب مستطیل را می‌سازد.

ابعاد مکعب مستطیل را مطابق شکل،  $x$ ،  $3x$  و  $y$  در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \text{مجموع طول یال‌ها} = 4x + 4(3x) + 4y = 48$$

$$\Rightarrow 4x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 4x$$

$$\Rightarrow V(x) = (3x)(x)(y) = 3x^2y = 3x^2(12 - 4x)$$

$$= 12(3x^2 - x^3)$$

$$V'(x) = 12(6x - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(2) = 12(12 - 8) = 48$$

-۸ گزینه «۴»

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 16\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{x\sqrt{x}}$$

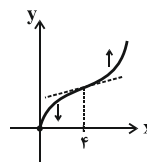
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$

کافی است مشتق دوم را تعیین علامت کنیم:

$x$	$0$	$4$	$+\infty$
$f''$		$-$	$+$
$f$		$\cap$	$\cup$

حال برای شیب خط مماس در نقطه عطف داریم:

$$m = f'(4) = \frac{1}{2}(4) + \frac{8}{\sqrt{4}} = 6$$

بنابراین نمودار آن در اطراف  $x = 4$ ، به صورت زیر خواهد بود:

-۹ گزینه «۳»

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6x + 2b$$

نقطه  $A$ ، نقطه عطف تابع  $f$  است، پس:

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 12 + 2b = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 2c + 20 = -26$$

$$\Rightarrow 8 - 24 + 2c + 20 = 0 \Rightarrow c = -15$$

پس ضابطه  $f'$  به صورت زیر در می‌آید:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5) = 3(x+1)(x-5)$$

 $f'$  را تعیین علامت می‌کنیم:

	$-1$	$5$	
$f'$	$+$	$-$	$+$
$f$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	$\max$	$\min$	

مقدار ماکزیمم نسبی  $f$  برابر است با:

$$f(-1) = 28$$

-۱۰ گزینه «۲»

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

خط مماس بر نمودار تابع در  $x = 0$ ، افقی است؛ یعنی  $f'(0) = 0$ .

$$\Rightarrow f'(0) = b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 - 4, f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

با توجه به نمودار، طول نقطه‌ای که نمودار بر محور  $x$  ها مماس است، باید

$$x = -\frac{2a}{3} \text{ باشد، بنابراین مقدار تابع در این نقطه نیز باید صفر باشد.}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{2a}{3}\right) = \left(-\frac{2a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 - 4 = \frac{2a^3}{27} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

ریاضی پایه

-۱۱ گزینه «۳»

از آن‌جا که دو مثلث هم‌مساحت هستند و اضلاع مجاور زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  با همبرابر هستند، باید  $\sin \alpha = \sin \beta$  باشد، پس با توجه به شکل رابطه

$$\alpha + \beta = 180^\circ \text{ باید برقرار باشد.}$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$\sin \alpha = \cot \beta \Rightarrow \sin \beta = \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \beta = \cos \beta \Rightarrow 1 - \cos^2 \beta = \cos \beta \Rightarrow \cos^2 \beta + \cos \beta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad |\cos \beta| \leq 1 \rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

مطابق شکل  $\alpha$  یک زاویه منفرجه و  $\cos \alpha < 0$  است. پس داریم:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

۱۲- گزینه «۴»

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

۱۳- گزینه «۳»

واضح است که دهانه سهمی باید روبه بالا باشد ( $m - 1 > 0$ ). در این حالت طول رأس برابر است با  $\frac{1}{2(m-1)}$  که با توجه به شرط قبلی، این مقدار نیز

مثبت است، یعنی رأس سهمی در سمت راست محور  $y$  ها قرار دارد. بنابراین برای اینکه سهمی از ربع سوم نگذرد، کافی است عرض از مبدأ سهمی نامنفی

باشد ( $3 - m \geq 0$ )؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ 3 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < m \leq 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 2 \text{ یا } 3$$

۱۴- گزینه «۴»

از آنجا که قبل و بعد  $x = 1$ ، جزء مجموعه جواب است، می توان گفت که در

$x = 1$  علامت عبارت  $\frac{x^2 + x + a}{bx^2 + 2x + b}$  تغییر نکرده است. پس  $x = 1$  ریشه

مضاعف صورت یا مخرج است. در صورتی که عبارت  $x^2 + x + a$  دارای

ریشه مضاعف باشد، این ریشه  $\frac{-1}{2}$  است، لذا  $x = 1$  ریشه مضاعف مخرج

کسر است.

$$\Rightarrow 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1$$

نامعادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{x^2 + x + a}{-(x-1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + a}{(x-1)^2} < 0$$

$x = 2$  ریشه صورت کسر است و داریم:

$$4 + 2 + a = 0 \Rightarrow a = -6$$

حال پاسخ نامعادله را به دست می آوریم:

$$\frac{x^2 + x - 6}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow \text{جواب} = (-3, 2) - \{1\}$$

پس  $c$  هم برابر  $-3$  است.

$$a + b + c = -6 - 1 - 3 = -10$$

۱۵- گزینه «۳»

می دانیم مجموع و حاصل ضرب جواب های معادله به ترتیب برابر  $-a$  و  $b$

هستند. پس داریم:

$$a + b = -a, ab = b$$

$$b \neq 0 \Rightarrow a = 1, b = -2$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \text{کمترین مقدار} = -\frac{9}{4}$$

۱۶- گزینه «۲»

با توجه به عبارت  $\sqrt{2x+1}$ ، باید  $2x+1 \geq 0$  باشد، یعنی  $x \geq -\frac{1}{2}$  است که

در این صورت عبارت  $x+2$  همواره مثبت خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} + x = |x+2| = x+2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} = 2 \Rightarrow 2x+1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله یک جواب دارد.



گزینه «۳» - ۱۷

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{ax+1} - 3) = 0 \Rightarrow \sqrt{2a+1} - 3 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{4-x^2} \times \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{\sqrt{4x+1} + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1-9}{(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow a - 18b = 4 - 18\left(-\frac{1}{6}\right) = 4 + 3 = 7$$

(یاسین سپهر)

گزینه «۲» - ۲۰

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \left[ x + \frac{3}{x} \right] + 3a \right) = 1 + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sqrt{x} \sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sqrt{x} \sin 2x}{\sqrt{2} \sin^2 x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{x} \sin x \cos x}{-\sqrt{2} \sin x} = -2$$

$$f(0) = 3b$$

$$\Rightarrow 1 + 3a = -2 = 3b$$

$$\Rightarrow a = b = -1 \Rightarrow a + b = -2$$

## هندسه ۳

گزینه «۲» - ۲۱

سه بردار غیر صفر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  در یک صفحه قرار دارند، اگر و فقط اگر ضرب مختلط این سه بردار برابر صفر باشد، یعنی:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{داریم:}$$

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس  $3 \times 3$  داریم:

$$\Rightarrow (m+3-2m+2) - (-m+m-1+6) = 0 \Rightarrow m = 0$$

گزینه «۴» - ۲۲

$$\vec{MA} = -3\vec{MB} \Rightarrow \vec{OA} - \vec{OM} = (-3)(\vec{OB} - \vec{OM})$$

$$f(x) = 1 - b \sin x \xrightarrow{x=0} y = f(0) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - b(1) = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \sin x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{94\pi}{3}\right) = 1 - 2 \sin\left(\frac{94\pi}{3}\right) = 1 - 2 \sin\left(\frac{92\pi + \pi}{3}\right)$$

$$= 1 - 2 \sin\left(31\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1 + 2 \sin \frac{\pi}{3} = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

گزینه «۲» - ۱۸

$$\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) = \cos \frac{7\pi}{14} = -\cos\left(\pi - \frac{7\pi}{14}\right)$$

$$= -\cos \frac{7\pi}{14}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{2\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{7\pi}{14} \cos \frac{7\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}$$

$$= -\cos \frac{7\pi}{14} \cos \frac{7\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}$$

با ضرب عبارت فوق در  $\sin \frac{\pi}{14}$  و تقسیم آن بر  $\sin \frac{\pi}{14}$  داریم:

$$\frac{-\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{7\pi}{14} \cos \frac{7\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}}{\sin \frac{\pi}{14}} = \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}}{\sin \frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{14} \cos \frac{4\pi}{14}}{\sin \frac{\pi}{14}} = \frac{-\frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{14}}{\sin \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{14}}{\sin \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}$$

گزینه «۴» - ۱۹

چون حد منفرجه کسر وقتی  $x \rightarrow 2$  برابر صفر است، حد صورت کسر هم باید

صفر باشد (تا حاصل حد متناهی باشد):





۲۶- گزینه «۲»

اگر  $\theta$  زاویه بین بردارهای  $a$  و  $b$  باشد، داریم:

$$\tan \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

اگر بردار  $\vec{a}'$  تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر راستای بردار  $\vec{b}$  باشد، داریم:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\theta=60^\circ} |\vec{a}'| = \frac{1}{2} |\vec{a}|$$

۲۷- گزینه «۴»

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) - (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= 4\vec{a} \cdot \vec{b} \xrightarrow{|\vec{a}-\vec{b}|^2 \geq 0} |\vec{a} + \vec{b}|^2 \geq 4\vec{a} \cdot \vec{b} \xrightarrow{|\vec{a}+\vec{b}|=8} 4\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 64$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 16$$

تذکر: حالت تساوی زمانی برقرار است که دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  هم راستا، هم جهت و هم اندازه ( $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ ) باشند.

۲۸- گزینه «۴»

دو بردار  $\vec{u} = (2a, b, c)$  و  $\vec{v} = (2, 1, 1)$  را در نظر بگیرید. طبق نامساوی کشی شوارتز داریم:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| \Rightarrow |4a + b + c| \leq \sqrt{4a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{4 + 1 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (4a + b + c)^2 \leq (4a^2 + b^2 + c^2) \times 6$$

$$\Rightarrow \frac{(4a + b + c)^2}{4a^2 + b^2 + c^2} \leq 6$$

۲۹- گزینه «۲»

ابتدا بردارهای  $\vec{MN}$  و  $\vec{NP}$  را تشکیل داده و مساحت مثلث  $MNP$  را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow 2\vec{OM} = \vec{OA} + 2\vec{OB} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + 2\vec{OB})$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{4}[(2, 2, 4) + (-6, -15, 0)] = (-1, -3, 1)$$

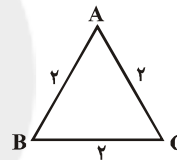
بنابراین مختصات نقطه  $M$  به صورت  $(-1, -3, 1)$  است.

۲۳- گزینه «۲»

با توجه به مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  داریم:

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \\ \vec{AC} \cdot \vec{CB} = |\vec{AC}| |\vec{CB}| \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\vec{AC} \cdot \vec{CB}) \vec{AB} - (\vec{AB} \cdot \vec{BC}) \vec{AC} &= -2\vec{AB} + 2\vec{AC} \\ &= 2(\vec{AC} - \vec{AB}) = 2\vec{BC} \end{aligned}$$



تذکر: دقت کنید که زاویه بین بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  و نیز  $\vec{AC}$  و  $\vec{CB}$ ، مکمل زاویه های  $B$  و  $C$  در مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  است، چون ابتدا یا انتهای هر جفت از این بردارها بر نقطه  $B$  یا  $C$  منطبق نیست.

۲۴- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (3\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} - \vec{k}) = 3\vec{i} \times \vec{j} - 3\vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{j} - \vec{j} \times \vec{k} \\ &= 3\vec{k} + 3\vec{j} + \vec{o} - \vec{i} = (-1, 3, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy \text{ صفحه } \vec{u}: \vec{u}_1 = (-1, 3, 0) \Rightarrow |\vec{u}_1| &= \sqrt{10} \Rightarrow \frac{|\vec{u}_1|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ yz \text{ صفحه } \vec{u}: \vec{u}_2 = (0, 3, 3) \Rightarrow |\vec{u}_2| &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

۲۵- گزینه «۱»

$$\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \parallel (\vec{c} - \vec{a}) \Rightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{o}$$

$$\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$$



۳۲ - گزینه «۴»

اگر  $A, B, C$  زیر مجموعه‌هایی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که اعضای آنها به ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر هستند، تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که بر ۲ بخش پذیر بوده ولی بر ۳ و ۵ بخش پذیر نباشند، برابر است با:

$$\begin{aligned} |A - (B \cup C)| &= |A| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

به طریق مشابه می‌توان تعداد اعدادی که فقط بر ۳ یا فقط بر ۵ بخش پذیر هستند را به دست آورد، بنابراین تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ بخش پذیرند، برابر است با:

$$|A| + |B| + |C| - 2(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + 3|A \cap B \cap C|$$

حال مقدار هر یک از عبارتها را به دست می‌آوریم:

$$|A| = \left[ \frac{100}{2} \right] = 50 \text{ و } |B| = \left[ \frac{100}{3} \right] = 33 \text{ و } |C| = \left[ \frac{100}{5} \right] = 20$$

$$|A \cap B| = \left[ \frac{100}{6} \right] = 16 \text{ و } |A \cap C| = \left[ \frac{100}{10} \right] = 10$$

$$|B \cap C| = \left[ \frac{100}{15} \right] = 6 \text{ و } |A \cap B \cap C| = \left[ \frac{100}{30} \right] = 3$$

در نتیجه تعداد اعضای مجموعه مورد نظر برابر است با:

$$(50 + 33 + 20) - 2(16 + 10 + 6) + 3 \times 3 = 103 - 64 + 9 = 48$$

۳۳ - گزینه «۳»

اگر  $A, B, C$  زیر مجموعه‌هایی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که به ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر هستند، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |A \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| - ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= \left[ \frac{100}{2} \right] - \left[ \frac{100}{6} \right] - \left[ \frac{100}{10} \right] + \left[ \frac{100}{30} \right] = 50 - 16 - 10 + 3 = 27 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{MN} &= (5, 3, 1) \\ \overline{NP} &= (1, 2, 5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{MN} \times \overline{NP} = (12, -24, 12)$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle MNP} &= \frac{1}{2} |\overline{MN} \times \overline{NP}| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + (-24)^2 + 12^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 4 \times 12^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \sqrt{6 \times 12^2} = 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

می‌دانیم مساحت مثلثی که از وصل کردن وسط‌های اضلاع یک مثلث پدید می‌آید،  $\frac{1}{4}$  مساحت آن مثلث است، بنابراین داریم:

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 24\sqrt{6}$$

۳۰ - گزینه «۳»

$$\begin{aligned} &|\bar{a} - \bar{b}|^2 + |\bar{b} - \bar{c}|^2 + |\bar{c} - \bar{a}|^2 \\ &= 2(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2) - 2(\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{c}) \\ &= 2(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2) - |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 \\ &\Rightarrow 9 = 3 \times 3 - |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 \Rightarrow |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = 0 \\ &\Rightarrow \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \vec{0} \Rightarrow \bar{b} + \bar{c} = -\bar{a} \\ &|\bar{2a} + \delta \bar{b} + \delta \bar{c}| = |\bar{2a} + \delta(\bar{b} + \bar{c})| = |\bar{2a} + \delta(-\bar{a})| \\ &= |-\delta \bar{a}| = \delta |\bar{a}| = 3 \end{aligned}$$

ریاضیات گسسته

۳۱ - گزینه «۴»

اعداد مکعب کامل ۳ رقمی  $B =$  و اعداد مربع کامل ۳ رقمی  $A =$

$$100 \leq k^2 \leq 999 \Rightarrow 10 \leq k \leq 31 \xrightarrow{\text{تعداد}} |A| = 22$$

$$100 \leq k^3 \leq 999 \Rightarrow 5 \leq k \leq 9 \xrightarrow{\text{تعداد}} |B| = 5$$

$$100 \leq k^6 \leq 999 \Rightarrow k = 3 \xrightarrow{\text{تعداد}} |A \cap B| = 1$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

$$= 900 - (22 + 5 - 1) = 874$$

کل اعداد ۳ رقمی



۳۴- گزینه «۳»

اگر A و B توابعی از  $\{۲,۳,۴\}$  به  $\{۵,۶,۷\}$  باشند که به ترتیب شامل ۶ و ۷ نیستند، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |\bar{A} \cap \bar{B}| &= |A \cup B| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= 3^3 - (2^3 + 2^3 - 1) = 27 - 15 = 12 \end{aligned}$$

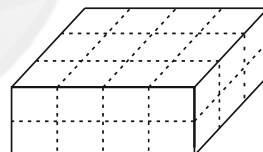
۳۵- گزینه «۲»

اگر A و B مجموعه گراف‌هایی با رئوس  $\{a, b, c, d, e\}$  باشند که به ترتیب رئوس a و b در آنها رأس تنها هستند، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |\bar{A} \cap \bar{B}| &= |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \\ &= \binom{5}{2} - \binom{4}{2} - \binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 10 - 6 - 6 + 3 = 1 \end{aligned}$$

۳۶- گزینه «۱»

باید این مکعب مستطیل را به مکعب‌های  $1 \times 1 \times 1$  تفکیک کرد.



در این شکل ۲۴ مکعب به ضلع ۱ داریم که بیش‌ترین فاصله نقطه‌ها در هر مکعب، برابر قطر آن یعنی  $\sqrt{3}$  است، بنابراین اگر ۲۵ نقطه درون این مکعب انتخاب کنیم، مطمئن هستیم که فاصله حداقل دو نقطه از میان آنها کم‌تر از  $\sqrt{3}$  است.

۳۷- گزینه «۲»

طبق اصل لانه کبوتری در بدترین حالت این امکان وجود دارد که هر ۱۰ نفر دارای دقیقاً ۳۵۰ سکه باشند که این حالت مستلزم آن است که هر نفر ۷ بار انتخاب شده باشد که روی هم می‌شود  $7 \times 10 = 70$  انتخاب. اما چون در هر مرحله ۴ نفر انتخاب می‌شوند، پس در بدترین حالت طبق اصل لانه کبوتری می‌توان ۱۷ بار این عمل را تکرار کرد. در هجدهمین دور انتخاب افراد  $(70 > 18 \times 4)$ ، حتماً فردی وجود خواهد داشت که برای بار هشتم انتخاب شده باشد و در نتیجه حداقل ۴۰۰ سکه به او رسیده است.

۳۸- گزینه «۲»

اگر در هر یک از کیسه‌ها ۶ مهره (۲ مهره از هر رنگ) داشته باشیم، هدف مسئله برآورده نشده است، اما با اضافه کردن مهره بعدی (مهره سیزدهم)، قطعاً در یکی از دو کیسه، حداقل ۳ مهره هم‌رنگ وجود خواهد داشت.

۳۹- گزینه «۳»

مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۳ که کوچک‌تر از ۳۵ هستند، برابر است با  $A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ۲۷, ۳۰, ۳۳\}$ . حال عدد ۳۳ را از A کنار می‌گذاریم، در این صورت مجموع جفت‌های  $\{۳, ۳۰\}$ ،  $\{۶, ۲۷\}$ ،  $\{۹, ۲۴\}$ ،  $\{۱۲, ۲۱\}$ ،  $\{۱۵, ۱۸\}$  برابر ۳۳ است. اکنون اگر از هر کدام از این جفت‌ها، فقط یکی را انتخاب کنیم و عدد ۳۳ را به آنها اضافه نماییم، آنگاه با انتخاب هر کدام از عضوهای باقی‌مانده در بین جفت‌ها مورد نظر، به‌طور حتم یکی از جفت‌ها با مجموع ۳۳ وجود خواهد داشت. پس کم‌ترین تعداد عضوهای زیر مجموعه‌های k عضوی باید برابر با  $7 = 6 + 1$  باشد.

۴۰- گزینه «۲»

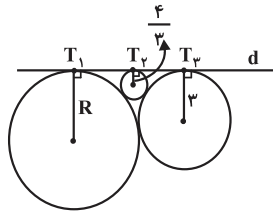
هر پایه در هر مدرسه به منزله یک لانه کبوتر است. در نتیجه تعداد لانه‌ها برابر است با:  $6 \times 4 + 1 \times 3 = 27$  خارج قسمت تقسیم ۸۵ بر ۲۷ برابر است با ۳، پس حداقل  $3 + 1 = 4$  دانش‌آموز وجود دارند که هم‌مدرسه و هم‌پایه باشند.

هندسه ۲

۴۱- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2x \quad (1) \\ \hat{A} &= \frac{\widehat{DC} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} + \widehat{BC} = 6x \xrightarrow{\widehat{DC} = 2x} \widehat{BC} = 4x \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow \widehat{AD} = 6x \\ \widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC} &= 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \\ \Rightarrow x &= 15^\circ \end{aligned}$$

۴۲ - گزینه «۲»



چون شعاع کوچک‌ترین دایره نیست، پس شعاع یکی از دو دایره کناری است. طبق نکته داریم:

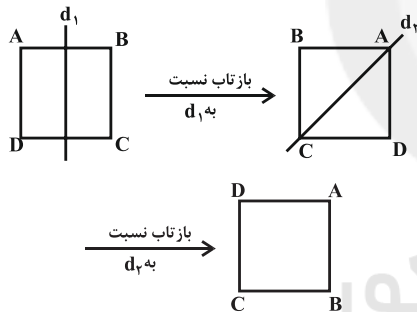
$$T_1T_2 = 2\sqrt{\frac{4R}{3}} = \frac{4\sqrt{3R}}{3}, T_2T_3 = 2\sqrt{3 \times \frac{4}{3}} = 4, T_1T_3 = 2\sqrt{3R}$$

$$T_1T_3 = T_1T_2 + T_2T_3 \Rightarrow 2\sqrt{3R} = \frac{4\sqrt{3R}}{3} + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{3R}\left(2 - \frac{4}{3}\right) = 4$$

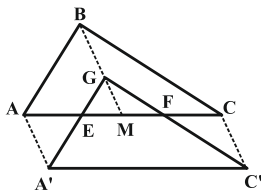
$$\Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{3R} = 4 \Rightarrow \sqrt{3R} = 6 \Rightarrow 3R = 36 \Rightarrow R = 12$$

۴۵ - گزینه «۳»

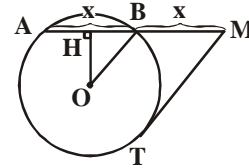


در واقع مربع نسبت به دو خط متقاطع بازتاب یافته است، پس مطابق شکل، مربع به اندازه دو برابر زاویه بین دو خط یعنی به اندازه  $90^\circ$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است. در نتیجه تنها نقطه ثابت تبدیل، مرکز دوران (محل برخورد خطوط  $d_1$  و  $d_2$  یعنی مرکز مربع) است.

۴۶ - گزینه «۴»



مثلث‌های ABC و EGF به حالت تساوی زاویه‌هایشان مشابه‌اند و داریم:



با توجه به فرض سؤال  $AB = BM = x$  و  $MT = 6\sqrt{2}$ ، در نتیجه طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$MB \cdot MA = MT^2 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow AB = x = 6$$

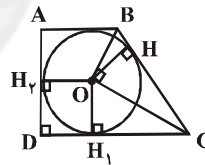
از مرکز دایره، عمود OH را بر وتر AB فرود می‌آوریم. داریم:

$$BH = \frac{AB}{2} = 3, OB = R = 4$$

$$\xrightarrow{\text{فیتاغورس}} OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

۴۳ - گزینه «۲»

نقطه O (مرکز دایره محاطی)، محل تلاقی نیم‌سازهای داخلی زوایای B و C است.



از آن‌جا که  $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ، نتیجه می‌شود که  $\hat{BOC} = 90^\circ$ ، اگر شعاع دایره محاطی دوزنقه باشد، آنگاه داریم:

$$R^2 = OH^2 = BH \cdot CH$$

$$\frac{BH=2}{CH=8} \rightarrow R^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow R = 4$$

چنان‌چه از عمودهای  $OH_1$  و  $OH_2$  را بر CD و AD وارد کنیم آنگاه

چون  $\hat{D} = 90^\circ$ ، پس  $H_1D = OH_2 = R = 4$ . از طرفی  $CH_1 = CH = 8$

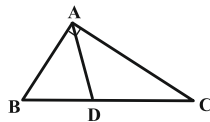
در نتیجه داریم:

$$CD = CH_1 + H_1D = 8 + 4 = 12$$

۴۴ - گزینه «۲»

تذکر: برای دو دایره مماس خارج  $C_1$  و  $C_2$  به شعاع‌های  $R_1$  و  $R_2$ ، طول مماس مشترک خارجی برابر است با  $TT' = 2\sqrt{R_1R_2}$ .

۴۹- گزینه «۱»



طبق قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی، نیمساز هر زاویه داخلی در یک مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، بنابراین داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2AB$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \Rightarrow 9 = \frac{1}{2} AB \times 2AB$$

$$\Rightarrow AB^2 = 9 \Rightarrow AB = 3 \Rightarrow AC = 6$$

$$\Delta ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 36 = 45$$

$$\Rightarrow BC = 3\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} BD = \sqrt{5} \\ DC = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

طبق رابطه طول نیمساز زاویه داخلی داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 3 \times 6 - \sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$$

$$= 18 - 10 = 8 \Rightarrow AD = 2\sqrt{2}$$

۵۰- گزینه «۱»

طبق قضیه هرون برای مثلث BDC داریم:

$$P = \frac{3+5+7}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_{\Delta BDC} = \sqrt{\frac{15}{2} \left( \frac{15}{2} - 3 \right) \left( \frac{15}{2} - 5 \right) \left( \frac{15}{2} - 7 \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

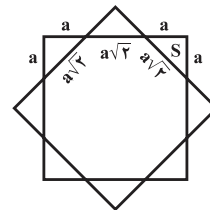
با توجه به این که ارتفاع رسم شده از رأس C در دو مثلث ABC و BDC یکسان است، پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آنها است. داریم:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{\frac{15\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{\Delta EGF}}{S_{\Delta ABC}} = \left( \frac{GM}{BM} \right)^2 \Rightarrow \frac{6}{S_{\Delta ABC}} = \left( \frac{1}{3} \right)^2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 54$$

۴۷- گزینه «۳»

با توجه به شکل زیر، شکل محصور بین مربع و تصویر آن یک هشت‌ضلعی منتظم است و داریم:



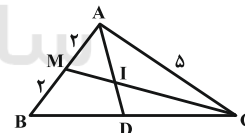
۴S - مساحت مربع = مساحت هشت ضلعی

$$= (2a + a\sqrt{2})^2 - 4 \times \left( \frac{1}{2} a^2 \right)$$

$$\Rightarrow 4(1 + \sqrt{2}) = 4a^2(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a = 1$$

$$\text{مربع ضلع} = 2a + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

۴۸- گزینه «۴»



طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 + BC^2 = 2CM^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow 25 + 49 = 2CM^2 + 8$$

$$2CM^2 = 66 \Rightarrow CM^2 = 33 \Rightarrow CM = \sqrt{33}$$

AI نیمساز زاویه داخلی A در مثلث AMC است، بنابراین طبق قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی داریم:

$$\frac{MI}{CI} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{5} \rightarrow \text{ترکیب نسبت در مخرج} \rightarrow \frac{MI}{CM} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow MI = \frac{2\sqrt{33}}{7}$$



## آمار و احتمال

## گزینه «۲»

پس از ایجاد تغییرات، تعداد اعضای دسته‌ها به این شکل خواهد بود:

دسته	[۰,۲)	[۲,۴)	[۴,۶)	[۶,۸)	[۸,۱۰)
تعداد اولیه	۳	۲	۸	۷	۵
تعداد فعلی	۲	۲	۸	۶	۶

اگر  $x'$  زاویه جدید و  $x$  زاویه قدیم دسته  $۱۰-۸$  در نمودار دایره‌ای باشند،

$$\frac{6}{24} = \frac{x'}{360} \Rightarrow x' = 90^\circ$$

آن‌گاه:

$$\frac{5}{25} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 72^\circ$$

$$|x' - x| = 18^\circ$$

بنابراین داریم:

## گزینه «۱»

چون شش داده داریم، پس میانه برابر است با:

$$\frac{\text{داده چهارم} + \text{داده سوم}}{2} = 14$$

بنابراین مجموع داده‌های سوم و چهارم برابر ۲۸ است. از طرفی میانگین نیز

برابر ۱۴ خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$\text{مجموع داده‌ها} = 14 \times 6 = 84$$

$$a + b + 28 + 15 + 16 = 84 \Rightarrow a + b = 84 - 59 = 25$$

تذکر: اگر دانش‌آموز دو نمره ۱۶ و یک نمره ۱۵ داشته باشد، مجموع نمرات دو درسی که در آن‌ها کمترین نمره را گرفته است، برابر ۲۴ بدست می‌آید که در گزینه‌ها نیست.

## گزینه «۳»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، چون تعداد کل داده‌ها برابر یازده

است، پس میانه پنج داده اول برابر چارک اول و میانه پنج داده آخر برابر

$$3, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 15, 23$$

چارک سوم است.

چارک سوم چارک اول

پس داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم، عبارتند از:

$$8, 9, 12, 13, 14 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{8+9+12+13+14}{5} = \frac{56}{5} = 11/2$$

## گزینه «۲»

مجموع فراوانی‌های نسبی باید برابر یک باشد، بنابراین داریم:

$$x + 0/2 + 3x + 0/4 = 1 \Rightarrow x = 0/1$$

$$\bar{x} = 1x \cdot 0/2 + 2x \cdot 0/4 + 3x \cdot 0/1 + 4x \cdot 0/3 = 2/5$$

$$\sigma^2 = (-1/5)^2 x \cdot 0/2 + (-0/5)^2 x \cdot 0/4 + (0/5)^2 x \cdot 0/1 + (1/5)^2 x \cdot 0/3$$

$$= 0/45 + 0/1 + 0/025 + 0/675 = 1/25$$

## گزینه «۲»

اگر میانگین و واریانس داده‌های اولیه را با  $\bar{x}_1$  و  $\sigma_1^2$  و میانگین و واریانس

داده‌های جدید را با  $\bar{x}_2$  و  $\sigma_2^2$  نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\bar{x}_2 = 3\bar{x}_1 - 8, \sigma_2^2 = 9\sigma_1^2 \Rightarrow \sigma_2 = 3\sigma_1$$

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}} \Rightarrow \frac{3\sigma_1}{3\bar{x}_1 - 8} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \Rightarrow \frac{3\bar{x}_1 - 8}{3\bar{x}_1 - 8} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 9\bar{x}_1 - 24 = 6\bar{x}_1 \Rightarrow 3\bar{x}_1 = 24 \Rightarrow \bar{x}_1 = 8 \Rightarrow \bar{x}_2 = 16$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 16 = \frac{\sum x_i}{15} \Rightarrow \sum x_i = 240$$

## گزینه «۴»

میانگین داده‌های ۵، ۵ و ۸، برابر ۶ است، پس با حذف این ۳ داده، میانگین ۱۰

داده باقی‌مانده تغییر نکرده و برابر ۶ خواهد بود. واریانس ۱۳ داده اولیه برابر ۴

است، پس داریم:

$$4 = \frac{\sum_{i=1}^{13} (x_i - 6)^2}{13} \Rightarrow \sum_{i=1}^{13} (x_i - 6)^2 = 52$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2 + 2(5-6)^2 + (8-6)^2 = 52 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2 = 46$$

در نتیجه واریانس داده‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2}{10} = \frac{46}{10} = 4/6$$

۵۷- گزینه «۴»

برابری اندازه طبقات از ویژگی‌های نمونه‌گیری سیستماتیک است. در نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعه صرفاً به زیرجامعه‌های مجزا تقسیم می‌شود و از هر طبقه، یک نمونه تصادفی ساده انتخاب می‌گردد.

۵۸- گزینه «۲»

میزان رضایت از شغل به صورت کم، متوسط و زیاد، دسته‌بندی می‌شود و متغیر کیفی ترتیبی است، تعداد فرزندان یک خانواده، متغیر کمی گسسته، جنسیت فرد، متغیر کیفی اسمی و میزان دمای هوا، متغیر کمی پیوسته است.

فیزیک ۳

۶۱- گزینه «۴»

می‌دانیم انرژی فوتون‌ها از رابطه  $E = nhf$  به دست می‌آید. انرژی فوتون‌ها از انرژی لامپ تأمین می‌شود. داریم:

$$E = nhf \Rightarrow P.t = nhf \Rightarrow P.t = n \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow P \times 18 = 6 \times 10^{21} \times \frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{660 \times 10^{-9}}$$

$$\Rightarrow P = 100W$$

۶۲- گزینه «۲»

با توجه به نسبت بیشینه تندی فوتوالکترون‌ها هنگام کنده شدن از سطح فلز داریم:

$$\frac{v_A}{v_B} = 2 \text{ و } \frac{(K_{max})_A}{(K_{max})_B} = \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{(K_{max})_A}{(K_{max})_B} = 4$$

$$\frac{K_{max} = hf - hf_0}{hf - hf_0} \rightarrow \frac{hf - hf_0A}{hf - hf_0B} = 4 \Rightarrow 4f - 4f_0B = f - f_0A$$

$$\Rightarrow 4f = 4 \times 1700 - 800 \Rightarrow f = 2000 \text{ THz}$$

۶۳- گزینه «۱»

آزمایش اول مربوط به آزمایش سه نور روی یک فلز است، بنابراین تابع کار  $W_0$  برای هر سه نور یکسان است.

$$W_{0A} = W_{0B} = W_{0C}$$

بنابراین نمودار اول خطی قائم موازی محور  $K_{max}$  است.

$$\lambda_A > \lambda_B > \lambda_C \xrightarrow{\lambda_A = \frac{c}{f}} f_A < f_B < f_C$$

$$\xrightarrow{K_{max} = hf - W_0} K_{maxA} < K_{maxB} < K_{maxC}$$

در آزمایش دوم، نور A را به سطح سه فلز می‌تابانیم. داریم:

$$f_{0A'} > f_{0B'} > f_{0C'} \xrightarrow{W_0 = hf} W_{0A'} > W_{0B'} > W_{0C'}$$

$$K_{max} = hf - W_0$$

$$\xrightarrow{W_{0A'} > W_{0B'} > W_{0C'}} K_{maxA'} < K_{maxB'} < K_{maxC'}$$

پس تنها گزینه «۱» می‌تواند صحیح باشد.

۵۹- گزینه «۴»

در مورد تعداد ابران پیاپی که در یک روز خاص از یک پل عابر استفاده می‌کنند، اطلاعات ثبتی در اختیار نیست و بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها در این مورد، مشاهده است.

۶۰- گزینه «۳»

(مرتضی فهیم‌علوی)

$$\bar{x} = \frac{1+2+\dots+8}{8} = 4.5$$

میانگین جامعه برابر است با:

بنابراین اگر یک نمونه ۶ تایی میانگین را دقیق برآورد کند، باید میانگین نمونه برابر ۴/۵ باشد، در این صورت مجموع اعضای این نمونه برابر است با:

$$6 \times 4.5 = 27$$

و با توجه به اینکه مجموع تمامی اعضای جامعه برابر با  $1+2+\dots+8 = 36$

است، می‌توان نتیجه گرفت که مجموع دو عضوی که در نمونه نمی‌باشند برابر با

۹ است. بنابراین این دو عضو حالات زیر را دارند:

$$\{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{4,5\}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = 28$$

تعداد کل نمونه‌های ۶ تایی برابر است با:

بنابراین احتمال اینکه یک نمونه ۶ تایی میانگین جامعه را دقیق برآورد کند،

$$P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

برابر است با:



۶۴- گزینه «۳»

باید ببینیم الکترون با دریافت فوتون  $240 \text{ THz}$  به کدام حالت برانگیخته می‌رود:

$$hf = E_U - E_L = E_R \left( \frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2} \right)$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^{-15} \times 240 \times 10^{12} = 13/5 \times \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_U^2} \right) \Rightarrow n_U = 5$$

گذار الکترون از مدارهای بالاتر به مدار  $n' = 3$  (پاشن) و بالاتر از آن باعث گسیل فوتونی در محدوده فرسرخ می‌شود:

$$\Delta E(5 \rightarrow 4)$$

$$\Delta E(5 \rightarrow 3)$$

$$\Delta E(4 \rightarrow 3)$$

۶۵- گزینه «۳»

برانرژی‌ترین فوتون وقتی گسیل می‌شود که الکترون از تراز مشخص  $n$  به تراز پایه گذار یابد. ابتدا مشخص می‌کنیم شماره تراز  $n$  چند است:

$$E_n - E_1 = \frac{15}{16} E_R \xrightarrow{E_n = \frac{-E_R}{n^2}} \frac{-E_R}{n^2} - \left( \frac{-E_R}{1^2} \right) = \frac{15}{16} E_R$$

$$\Rightarrow \frac{-1 + n^2}{n^2} = \frac{15}{16} \Rightarrow 15n^2 = 16n^2 - 16 \Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4$$

حال برای گذار از تراز  $n = 4$  به تراز  $n + 2 = 4 + 2 = 6$  الکترون باید فوتونی با انرژی  $E_6 - E_4$  جذب نماید:

$$\Delta E = hf = E_6 - E_4 = \frac{-E_R}{36} - \left( \frac{-E_R}{16} \right) = \frac{-4 + 9}{144} E_R = \frac{5}{144} E_R$$

۶۶- گزینه «۴»

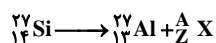
گسیل القایی نیاز به چشمه خارجی دارد و فقط در این حالت الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته می‌شوند و با وارونی جمعیت مواجه خواهیم شد.

۶۷- گزینه «۳»

وجود نوترون باعث می‌شود که نیروی قوی هسته‌ای افزایش یابد. چون نوترون بدون بار الکتریکی است، نیروی رانشی الکتریکی را افزایش نمی‌دهد. در نتیجه باعث پایداری هسته می‌شود.

۶۸- گزینه «۴»

برای پاسخ دادن به این سؤال، باید مجموع عددهای جرمی و مجموع عددهای اتمی دو طرف معادله واکنش را به‌طور جداگانه مساوی هم قرار دهیم. داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} 27 = 27 + A \Rightarrow A = 0 \\ 14 = 13 + Z \Rightarrow Z = 1 \end{cases}$$

با معلوم بودن  $A$  و  $Z$ ، معلوم است  ${}^1_1X = \beta^+$  می‌باشد.

۶۹- گزینه «۲»

با توجه به رابطه نیمه‌عمر ماده پرتوزا، می‌توان نوشت:

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{84}{14} \Rightarrow n = 6$$

$$m = m_0 \left( \frac{1}{2} \right)^n \Rightarrow 3 = m_0 \left( \frac{1}{2} \right)^6 \Rightarrow m_0 = 192 \text{g}$$

$$m' = m_0 - m \Rightarrow m' = 192 - 3 \Rightarrow m' = 189 \text{g}$$

۷۰- گزینه «۳»

الف) نوترونهای آزاد شده در شکافت هسته اورانیم دارای انرژی جنبشی هستند.  
ب) پرتوی گاما جزو امواج الکترومغناطیسی است و سرعتی معادل سرعت نور دارد.

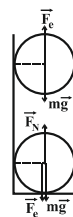
پ) پرتوی گاما در میدان مغناطیسی منحرف نمی‌شود زیرا بدون بار الکتریکی است.

ت) پرتوی  $\beta^-$  الکترون بوده و دارای بار الکتریکی منفی است.



فیزیک ۲

۷۱- گزینه «۲»



به گلوله بالای دو نیروی وزن و الکتریکی وارد می‌شود و گلوله در حالت تعادل قرار دارد. داریم:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_e - mg = 0 \Rightarrow F_e = mg \quad (*)$$

برای این که کف لوله شیشه‌ای نشکند، باید نیروی وارد شده به آن کمتر یا مساوی ۴N باشد. داریم:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_N - F_e - mg = 0 \Rightarrow F_N = F_e + mg$$

$$\frac{F_N \leq 4N}{(*) F_e = mg} \Rightarrow 2F_e \leq 4 \Rightarrow F_e \leq 2$$

$$\Rightarrow k \frac{|q|^2}{d^2} \leq 2 \Rightarrow 9 \times 10^9 \times \frac{(3 \times 10^{-6})^2}{d^2} \leq 2$$

$$\Rightarrow d \geq 0.9\sqrt{\Delta m} \Rightarrow d \geq 9\sqrt{\Delta cm}$$

۷۲- گزینه «۲»

(بی‌تا فور شیر)

با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، می‌توان نوشت:

$$\Delta K + \Delta U_E + \Delta U_G = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (v_-^2 - v_+^2) + q(V_- - V_+) + mg\Delta h = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} \times (v_-^2 - 0) + 12 \times 10^{-6} \times (0 - 400)$$

$$+ 2 \times 10^{-3} \times 10 \times 4 \times 10^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow v_-^2 = 4 \Rightarrow v_- = 2 \frac{m}{s}$$

۷۳- گزینه «۴»

ظرفیت یک خازن تابع عوامل ساختمانی آن است و به بار الکتریکی ذخیره شده در آن و اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن بستگی ندارد، بنابراین ظرفیت خازن ثابت می‌ماند.

برای بررسی تغییرات انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن داریم:

$$Q_2 = Q_1 - \frac{40}{100} Q_1 \Rightarrow Q_2 = 0.6 Q_1$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 = (0.6)^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = 0.36$$

$$\text{درصد تغییرات انرژی الکتریکی ذخیره شده} = \frac{\Delta U}{U_1} \times 100 =$$

$$= \left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right) \times 100 = (0.36 - 1) \times 100 = -64\%$$

۷۴- گزینه «۳»

اگر مقاومت هر رسانای استوانه‌ای در حالت اولیه برابر با  $R_0$  فرض شود، زمانی که به صورت موازی به یکدیگر متصل می‌شوند، داریم:

$$R = \frac{R_0}{n} \quad (1)$$

اگر از طول هر رسانا ۷۵ درصد کم کنیم، طبق رابطه  $R_0 = \rho \frac{L}{A}$ ، مقاومت آن

$$R'_0 = \frac{1}{4} R_0 \quad \text{برابر می‌شود.}$$

در این حالت زمانی که این مقاومت‌ها به صورت متوالی به یکدیگر متصل

$$R = nR'_0 = \frac{n}{4} R_0 \quad (2) \quad \text{می‌شوند، داریم:}$$

$$\frac{(2), (1)}{n} \rightarrow \frac{R_0}{n} = \frac{n}{4} R_0 \Rightarrow n = 2 \quad \text{در نتیجه:}$$

۷۵- گزینه «۴»

با باز کردن کلید K، مقاومت موازی R از مدار حذف می‌شود، بنابراین

$$\text{مقاومت معادل مدار افزایش می‌یابد. طبق رابطه } I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}, \text{ با افزایش}$$

مقاومت معادل مدار، جریان عبوری از مدار کاهش می‌یابد، یعنی آمپرسنج آرمانی عدد کمتری را نشان می‌دهد.

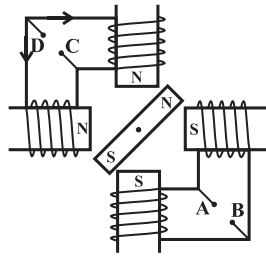
ولت‌سنج آرمانی  $V_1$ ، اختلاف پتانسیل دو سر مولد را نشان می‌دهد. طبق رابطه  $V_1 = \mathcal{E} - Ir_1$ ، با کاهش جریان عبوری از مدار، اختلاف پتانسیل دو سر مولد

افزایش می‌یابد و ولت‌سنج آرمانی  $V_1$  عدد بزرگتری را نشان خواهد داد.

ولت‌سنج آرمانی  $V_2$ ، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی R را نشان

$$\text{می‌دهد. طبق رابطه } V_2 = RI = \left(\frac{R}{2}\right) I \text{، با کاهش جریان مدار، ولت‌سنج}$$

آرمانی  $V_2$  عدد کمتری را نشان می‌دهد.

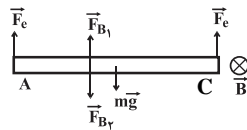


بنابراین پایه مثبت باتری در دو سیمولوله راست و پایین باید به A و در دو سیمولوله بالا و چپ به نقطه D متصل شود.

۷۸- گزینه «۲»

روش اول:

اگر فرض کنیم در حالتی که جریان  $1/5$  آمپری در میله از A به C می‌گذرد، اندازه نیروی مغناطیسی برابر با  $F_B$  باشد، در حالتی که جریان  $4/5$  آمپری در میله از C به A می‌گذرد، اندازه نیروی مغناطیسی برابر با  $3F_B$  و جهت آن برعکس می‌شود. بنابراین با توجه به اینکه نیروسنج‌ها زمانی که جریان از A به C است عدد کمتری را از زمانی که جریان از C به A است نشان می‌دهند، می‌توان نتیجه گرفت نیروی مغناطیسی در حالت اول به طرف بالا (خلاف جهت  $mg$ ) و در حالت دوم پایین (هم جهت با  $mg$ ) است.



جریان  $1/5A$  و از A به C.

$$mg = F_c + F_c + F_B$$

$$\Rightarrow mg = 2F_c + I\ell B \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow mg = 2 \times 0.6 + 1/5 \times 0.8 \times B \times 1$$

$$\Rightarrow mg = 1.2 + 1/2 B \quad (1)$$

جریان  $4/5A$  و از C به A:

$$mg + F'_B = F'_c + F'_c$$

$$\Rightarrow mg + I'\ell B \sin 90^\circ = 2F'_c$$

$$\Rightarrow mg + 4/5 \times 0.8 \times B \times 1 = 2 \times 1.2$$

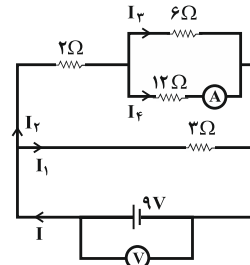
$$\Rightarrow mg + 3/2 B = 2.4 \quad (2)$$

با استفاده از دو رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$1/2 + 1/2 B + 3/2 B = 2.4 \Rightarrow 4/2 B = 1.2 \Rightarrow B = 0.25 T$$

۷۶- گزینه «۳»

ابتدا مدار را با توجه به نقاط هم‌پتانسیل، به صورت شکل زیر ساده می‌کنیم و مقاومت معادل مدار را محاسبه می‌کنیم.



$$R' = \frac{6 \times 12}{6 + 12} \Rightarrow R' = 4 \Omega$$

$$R'' = 2 + 4 \Rightarrow R'' = 6 \Omega$$

$$R_{eq} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} \Rightarrow R_{eq} = 2 \Omega$$

جریان عبوری از شاخه اصلی مدار برابر است با:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{9}{2} \Rightarrow I = 4.5 A$$

چون مقاومت معادل شاخه بالا ( $R'' = 6 \Omega$ ) با مقاومت ۳ اهمی شاخه پایین موازی است، جریان I به نسبت عکس مقاومت‌ها بین آن‌ها تقسیم می‌شود. داریم:

$$I_2 = 1/5 A, I_1 = 3 A$$

جریان  $I_2$  نیز به نسبت عکس مقاومت‌های ۶ اهمی و ۱۲ اهمی بین آن‌ها تقسیم می‌شود. بنابراین جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی برابر است با:

$$I_4 = 0.5 A, I_3 = 1 A$$

ولت‌سنج ایده‌آل، اختلاف پتانسیل دو سر مولد را نشان می‌دهد.

۷۷- گزینه «۲»

برای اینکه آهنربای چرخنده ساعتگرد بچرخد و به طور افقی بایستد، لازم است قطبهای آهنربا و جهت جریان عبوری از سیمولوله‌ها با توجه به قاعده دست راست مطابق شکل زیر باشد.

با توجه به این که الکترون‌ها در قسمت A تجمع کرده‌اند،  $V_C > V_A$

خواهد بود و بنابراین:  $V_A - V_C = -0.6 \text{ mV}$

۸۰- گزینه «۱»

ابتدا با استفاده از رابطه انرژی ذخیره شده در سیمپلوه، ضریب القاوری آن را محاسبه می‌کنیم.

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow 4 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times L \times 10^{-2} \Rightarrow L = 8 \times 10^{-5} \text{ H}$$

حال با استفاده از رابطه ضریب القاوری، می‌توان نوشت:

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell} \Rightarrow 8 \times 10^{-5} = 4 \times 3 / 14 \times 10^{-7} \times \frac{10 \times 10^{-4} \times N^2}{62 / 8 \times 10^{-2}}$$

$$\Rightarrow N^2 = 4 \times 10^4 \Rightarrow N = 200 \text{ دور}$$

شیمی ۳

۸۱- گزینه «۳»

بررسی گزینه‌ها:

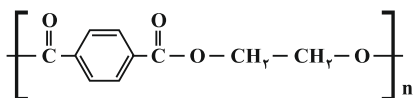
گزینه «۱»:



$$? \text{ g CH}_3\text{OH} = 16 \text{ mole}^- \times \frac{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}}{1 \text{ mole}^-} \times \frac{32 \text{ g CH}_3\text{OH}}{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}}$$

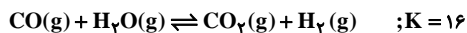
$$= 128 \text{ g CH}_3\text{OH}$$

گزینه «۲»: ساختار پلیمر PET به صورت زیر است:



$$(\text{C}_8\text{H}_8\text{O}_4)_n \Rightarrow 192n = 21120 \Rightarrow n = 110$$

گزینه «۳»:



شروع	۱	۱	۰	۰
تغییر	-x	-x	+x	+x
تعادل	1-x	1-x	x	x

$$\Rightarrow K = \frac{x^2}{(1-x)^2} \Rightarrow 16 = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

روش دوم:

چون جهت میدان مغناطیسی مشخص نیست، با استفاده از اطلاعات داده شده، در حالت دوم اندازه نیروی مغناطیسی سه برابر و جهت آن عکس حالت اولیه است. داریم:

$$\vec{F}_B - mg\vec{j} + 2F_e\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{F}_B = (mg - 2F_e)\vec{j} \quad (1)$$

$$-3\vec{F}_B - mg\vec{j} + 2F_e'\vec{j} = 0 \Rightarrow 3\vec{F}_B = (-mg + 2F_e')\vec{j} \quad (2)$$

با جمع معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$2\vec{F}_B = (F_e' - F_e)\vec{j} \Rightarrow 2\vec{F}_B = (1/2 - 0/6)\vec{j}$$

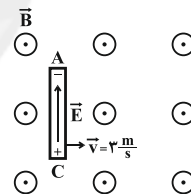
$$\Rightarrow \vec{F}_B = 0/3\vec{j}$$

در نتیجه جهت نیروی مغناطیسی در حالت اول به سمت بالا است و داریم:

$$F_B = I\ell B \sin\theta \Rightarrow 0/3 = 1/5 \times 0/8 \times B \times \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4} \text{ T}$$

۷۹- گزینه «۲»



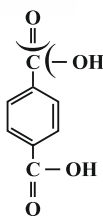
با حرکت میله در جهت نشان داده شده در میدان مغناطیسی، به الکترون‌های آزاد میله رسانا نیروی مغناطیسی وارد می‌شود که طبق قاعده دست راست، الکترون‌ها به سمت نقطه A حرکت می‌کنند. بنابراین قسمت A دارای بار منفی شده و قسمت C دارای بار مثبت می‌شود. با جدا شدن بارهای مثبت و منفی از یکدیگر، یک میدان الکتریکی بین دو قسمت میله ایجاد می‌شود و به الکترون‌ها به طرف نقطه C نیرو وارد می‌کند.

در حالت تعادل، اندازه نیروی الکتریکی وارد بر الکترون‌ها برابر با اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر آن‌ها است و داریم:

$$F_E = F_B \Rightarrow eE = evB \Rightarrow \frac{|\Delta V|}{\ell} = vB$$

$$\Rightarrow |\Delta V| = \ell vB = 0/5 \times 2 \times 4 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow |\Delta V| = 0/6 \times 10^{-3} \text{ V} = 0/6 \text{ mV}$$



\*  
C عدد اکسایش  $3 = 4 - 1 = 3$

ت) هنگام تهیه پلی استر PET علاوه بر PET، آب نیز تولید می شود. از واکنش آب با گاز اتن، اتانول که نوعی ضد عفونی کننده است به دست می آید.

۸۴- گزینه «۴»

گاز متان واکنش پذیری بسیار کمی دارد و تبدیل آن به متانول فرایندی دشوار است. سایر گزینه ها با توجه به متن کتاب درسی درست هستند.

۸۵- گزینه «۲»

تنها مورد «الف» نادرست است. سنتز یک فرایند شیمیایی هدفمند است که در آن با استفاده از مواد ساده تر، مواد شیمیایی دیگر پدید می آید.

۸۶- گزینه «۴»

ترفتالیک اسید از پارازیلن به دست می آید. عدد اکسایش اتم های گروه عاملی در پارازیلن و ترفتالیک اسید به ترتیب ۳- و ۴+ است. بررسی سایر گزینه ها:

گزینه «۱»: در مونومر PET، ۱۰ اتم کربن و ۴ اتم اکسیژن وجود دارد. پس نسبت اتم های کربن به اکسیژن برابر ۲/۵ است.

گزینه «۲»: PET یک پلی آمید نیست.

گزینه «۳»: ترفتالیک اسید از پارازیلن به دست می آید.

۸۷- گزینه «۱»

$$\text{ترفتالیک اسید} \times \frac{166 \text{g}}{166 \text{g}} = 996 \text{g} \text{ PET}$$

$$\times \frac{192 \text{g PET}}{192 \text{g PET}} = 1152 \text{g PET}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = 0.8 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$? \text{g CO}_2 = 0.8 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 1 \text{L} \times \frac{44 \text{g}}{1 \text{mol}} = 35.2 \text{g}$$

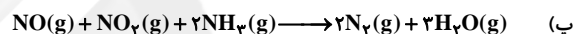
گزینه «۴»: با کاهش دما، تعادل در جهت گرماده ( $\Delta H < 0$ ) پیش می رود و با افزایش فشار تعادل در جهت تعداد مول گازی کمتر ( $a > b$ ) پیش می رود.

۸۲- گزینه «۱»

بررسی موارد:

الف) این واکنش به دلیل داشتن انرژی فعال سازی زیاد در دماهای پایین انجام نمی شود یا بسیار کند است.

ب) کاتالیزگرهای مبدل کاتالیستی شامل Pt، Rh، Pd (نه Pb) و Pt می باشد.



$$\text{گاز L} = 0.34 \text{g NH}_3 \times \frac{1 \text{mol NH}_3}{17 \text{g NH}_3} \times \frac{5 \text{mol گاز}}{2 \text{mol NH}_3}$$

$$\times \frac{30 \text{L گاز}}{1 \text{mol گاز}} = 1.5 \text{L گاز}$$

ت) شرایط بهینه فرایند هابر شامل دمای  $450^\circ \text{C}$ ، فشار  $20 \text{ atm}$  و کاتالیزگر Fe است.

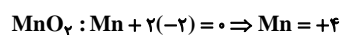
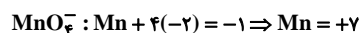
۸۳- گزینه «۴»

همه عبارت ها درست اند. بررسی عبارت ها:

الف) با حضور مبدل های کاتالیستی  $\text{CO}_2$  که یکی از گازهای گلخانه ای است تولید می شود.

ب) به منظور تأمین نیتروژن مورد نیاز گیاهان می توان آمونیاک را که یکی از فراورده های پتروشیمی است، به صورت مایع به خاک تزریق کرد.

پ)



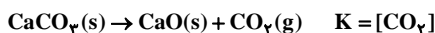
$$\Rightarrow 3 = \text{اندازه تغییر عدد اکسایش}$$

۸۸- گزینه «۱»

تنها مورد سوم نادرست است. الکل لازم برای بازیافت PET از واکنش متان و آب به دست می آید. سایر موارد با توجه به کتاب درسی درست هستند.

۸۹- گزینه «۳»

ثابت تعادل به شکل زیر است.



$$1/2 = \frac{\text{mol CO}_2}{1} = \text{mol CO}_2 = 1/2$$

۲۶/۴ گرم گاز برابر ۰/۶ مول CO<sub>2</sub> است، با افزودن ۰/۶ مول CO<sub>2</sub>، مول

CO<sub>2</sub> برابر ۱/۵ (۱/۵ = ۱/۲) می شود. برای این که تعادل تغییر نکند، حجم

نیز باید ۱/۵ برابر شود.

۹۰- گزینه «۳»

تنها مورد (پ) نادرست است. ترفالیک اسید از پارازایلن به دست می آید که ۸ اتم کربن دارد. آلکان ۸ کربنه ۱۸ اتم هیدروژن دارد و پارازایلن ۱۰ اتم هیدروژن دارد.

شیمی ۱

۹۱- گزینه «۳»

با توجه به اینکه یون X<sup>۳+</sup> دارای ۲۸ الکترون است، نتیجه می گیریم اتم X دارای ۳۱ پروتون است.

$$A + 2X : N - p = 3 \Rightarrow N - 31 = 3 \Rightarrow N = 34$$

$$\Rightarrow A + 2 = N + p \Rightarrow A = 63$$

۹۲- گزینه «۲»

$$m = 15 \times 10^{-27} \text{ kg} \times \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} = 15 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

$$E = mc^2 = (15 \times 10^{-30}) (3 \times 10^8)^2 = 135 \times 10^{-6} \text{ J} = 135 \times 10^6 \text{ kJ}$$

$$? \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} = \frac{135 \times 10^6 \text{ kJ}}{50 \text{ ton Fe}} \times \frac{1 \text{ ton Fe}}{10^6 \text{ g Fe}} \times \frac{56 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol Fe}} = 15/12 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

۹۳- گزینه «۱»

۳۶۰۰۰ g C<sub>6</sub>H<sub>12</sub>O<sub>6</sub>: مول گاز CO<sub>2</sub> خارج شده از واکنشگاه ۱؟

$$\times \frac{1 \text{ mol}}{180 \text{ g}} \times \frac{80}{100} \times \frac{2 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} = 320 \cdot \text{mol CO}_2$$

بازده درصدی

گاز CO<sub>2</sub> خارج شده از واکنشگاه ۲ نصف واکنشگاه ۱ است. پس CO<sub>2</sub> خروجی از واکنشگاه ۲ برابر ۱۶۰۰ مول می باشد.

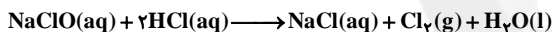
چون ضریب CO<sub>2</sub> و C<sub>6</sub>H<sub>12</sub>O<sub>6</sub> در واکنش انجام شده در واکنشگاه ۱ برابر است بنابراین تعداد مول C<sub>6</sub>H<sub>12</sub>O<sub>6</sub> تولید شده نیز برابر ۳۲۰۰ مول خواهد بود.

$$320 \cdot \text{mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \times \frac{R}{100} \times \frac{2 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}$$

$$= 160 \cdot \text{mol CO}_2 \Rightarrow x = 25$$

۹۴- گزینه «۴»

ابتدا واکنش را موازنه می کنیم:



$$\times \frac{\text{خالص } 80 \text{ L Cl}_2}{100 \text{ L Cl}_2} \times \text{ناخالص } 25 \text{ L Cl}_2 \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{36.5 \text{ g HCl}} = 0.606 \text{ mol HCl}$$

$$\times \frac{0.71 \text{ g Cl}_2}{1 \text{ L Cl}_2} \times \frac{1 \text{ mol Cl}_2}{71 \text{ g Cl}_2} \times \frac{100}{66} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Cl}_2} = 0.606 \text{ mol HCl}$$

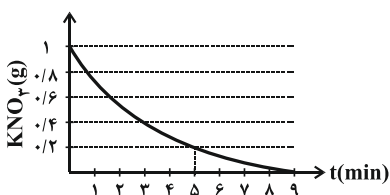
$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow M = \frac{0.606 \text{ mol}}{0.2 \text{ L}} = 3.03 \text{ mol.L}^{-1}$$

۹۵- گزینه «۳»

ابتدا معادله واکنش را موازنه می کنیم:



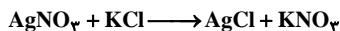
با توجه به نمودار مقدار KNO<sub>3</sub> مصرف شده را تعیین کرده و سپس حجم گاز O<sub>2</sub> را به دست می آوریم:





۹۸- گزینه ۲

واکنش انجام گرفته بین پتاسیم کلرید و نقره نیترات به صورت زیر است.



ابتدا جرم پتاسیم کلرید مصرفی در این واکنش که برابر با جرم رسوب است را

به دست می آوریم:

$$?gKCl = 1440gAgNO_3 \times \frac{1mL \text{ محلول}}{1/2g \text{ محلول}} \times \frac{1L}{1000mL}$$

$$\times \frac{0/5 \Delta mol AgNO_3}{1L} \times \frac{1mol KCl}{1mol AgNO_3} \times \frac{74/5g KCl}{1mol KCl} = 44/7g KCl$$

در دمای ۷۵°C، ۵۰ گرم KCl در هر ۱۰۰ گرم آب حل می شود.

$$?gKCl = 450g \text{ محلول} \times \frac{50g KCl}{150g \text{ محلول}} = 150g KCl$$

$$\Rightarrow 450 - 150 = 300g H_2O$$

$$150 - 44/7 = 105/3g KCl$$

حال مقدار KCl موجود در ۱۰۰ گرم آب در دمای جدید را محاسبه می کنیم:

$$?g KCl = 100g H_2O \times \frac{105/3g KCl}{300g H_2O} = 35/1g KCl$$

انحلال پذیری KCl در دمای جدید ۳۵/۱ گرم می باشد. در دمای ۳۰°C یا

۳۰۳K می توان ۳۵/۱ گرم KCl را در ۱۰۰ گرم آب حل کرد.

۹۹- گزینه ۱

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH_{HX} = pH_{HY} \Rightarrow [H^+]_{HX} = [H^+]_{HY}$$

$$[H^+] = M\alpha \Rightarrow M_X\alpha_X = M_Y\alpha_Y$$

$$42g HX \times \frac{1mol HX}{28g HX} \times \frac{1}{250 \times 10^{-3}L} \times \alpha_X$$

$$= 28g HY \times \frac{1mol HY}{42g HY} \times \frac{1}{500 \times 10^{-3}L} \times \alpha_Y \Rightarrow \frac{\alpha_X}{\alpha_Y} = \frac{2}{9}$$

۱۰۰- گزینه ۲

ابتدا غلظت یون H<sup>+</sup> را در محلول HF محاسبه می کنیم:

$$[H^+] = \alpha.M = \frac{0/1}{100} \times 0/1 = 10^{-4} mol.L^{-1}$$

در محلول HCl نیز غلظت H<sup>+</sup> با Cl<sup>-</sup> برابر است. پس غلظت H<sup>+</sup> را در

آن محلول نیز به دست می آوریم.

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-4} mol.L^{-1}$$

KNO<sub>3</sub> = ۱-۰/۲ = ۰/۸g مصرف شده

$$?LO_2 \times \frac{1mol O_2}{101g} \times \frac{1mol KNO_3}{2mol KNO_3} = 0/8g KNO_3$$

$$\times \frac{22/4LO_2}{1mol O_2} = 0/089LO_2$$

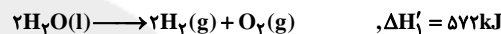
$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0/089}{5} \Rightarrow \bar{R}_{O_2} = 0/018 \frac{L}{min}$$

۹۶- گزینه ۱

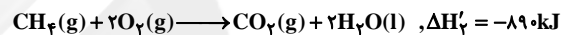
با استفاده از قانون هس واکنش سوختن گرافیت را از واکنش های ۱، ۲ و ۳

به دست می آوریم:

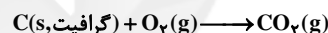
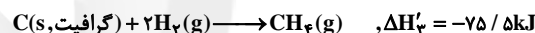
واکنش ۱ را وارونه می کنیم:



واکنش ۲ را وارونه می کنیم:



واکنش ۳ بدون تغییر باقی می ماند:



$$\Delta H = \Delta H'_1 + \Delta H'_2 + \Delta H'_3 \Rightarrow \Delta H = -393/5kJ$$

۳۹۳/۵kJ گرما به ازای سوختن ۱ مول گرافیت آزاد می شود. پس به ازای

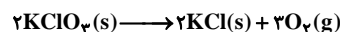
۴/۲ مول، ۴/۲ × ۳۹۳/۵kJ گرما آزاد می شود.

$$Q = mc\Delta\theta$$

$$\Rightarrow 4/2 \times 393/5 / 5 \times 10^3 = 10 \times 10^3 \times 4/2 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 39/35^\circ C$$

۹۷- گزینه ۴

ابتدا معادله را موازنه می کنیم:



اکنون مقدار گاز اکسیژن بر حسب لیتر را در این بازه زمانی محاسبه می کنیم:

$$?LO_2 : 35g KClO_3 \times \frac{1mol}{122/5g} \times \frac{3}{2} \times \frac{100}{100} = 3mol O_2$$

$$\times \frac{22g O_2}{1mol O_2} \times \frac{1LO_2}{0/6g O_2} = 16LO_2$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta V_{O_2}}{\Delta t} = \frac{16}{5} = 0/32 \frac{L}{s}$$