

امسان دادفواه ۹۱۲۵۱۶۳۴۹۲

پاسخ تشریحی سوالات مسابان کنکور رشته ریاضی فارغ از کشور ۹۹

۱۰۵- به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x-1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده $P(x)$ بر $x+2$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

-۸ (۲)

-۱۰ (۱)

گزینه ۱

$$2\left(\frac{1}{14}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$1 + a + 4 - 12 = 0 \rightarrow a = 7$$

$$P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

۱۰۶- نمودارهای دو تابع $y = x + 7$ و $y = |x - 2| + |x + 1|$ ، در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

 $10\sqrt{2}$ (۴)

۱۳ (۳)

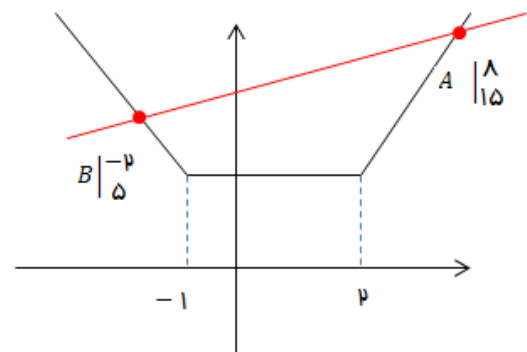
۱۲ (۲)

 $8\sqrt{2}$ (۱)گزینه ۴

$$A: 2x - 1 = x + 7 \rightarrow x = 8$$

$$B: -2x - 1 = x + 7 \rightarrow x = -2$$

$$AB = \sqrt{(-2 - 8)^2 + (5 - 15)^2} = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$



۱۰۷- با فرض $x \geq 2$ ؛ $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

گزینه ۴

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 ; x \geq 2 \quad g(x) = \frac{3-x}{2}$$

$$-9 \xrightarrow{g^{-1}} 3 \xrightarrow{f^{-1}} 4$$

$$\frac{3-x}{2} = -9$$

$$x^2 - 4x + 9 = 3 \rightarrow x = 4 \text{ و } x = -2$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \quad (x - 4)(x + 2) = 0$$

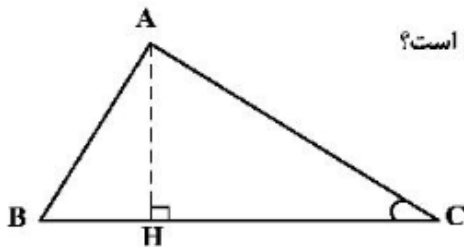
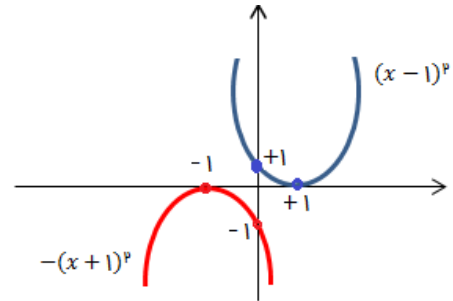
۱۰۸- ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را f واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

(۱) ۰، ۲ (۲) -۱، ۱ (۳) -۱، ۲ (۴) -۲، ۱

گزینه ۲

$$(x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(x+1)^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد عمودی بالا}} -(x+1)^2 + 4$$

$$-(x+1)^2 + 4 = (x-1)^2 \rightarrow 4x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 1$$



۱۰۹- در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

- (۱) ۴۸
(۲) ۵۶
(۳) ۶۴
(۴) ۷۲

گزینه ۳

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow \sin C = \frac{2}{3}$$

$$AH = 96 \times \sin C = 96 \times \frac{2}{3} = 64$$

۱۱۰- اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار $\sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

گزینه ۱

$$\sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\alpha + \frac{\sqrt{5}}{5}\sin\alpha\right) = -\left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{10}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{1}{5}$$

۰۹۱۲۵۱۶۳۲۰۰۰

۱۱۱- جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

گزینه ۱

اگر $k = 0$ در گزینه‌ها $x = 0$ جواب معادله است.

گزینه‌های ۳ و ۴ غلط

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} : \sin \frac{\pi}{6} + \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} \quad \text{غ ۵}$$

گزینه ۲ غلط

۱۱۲- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\dots, \{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$ در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

۱۶۵۱ (۴)

۱۶۳۹ (۳)

۱۵۸۹ (۲)

۱۵۶۳ (۱)

گزینه ۳

$$1 + 2 + \dots + 140 = \frac{140 \times 141}{2} = 9870$$

$$a_n = 1 + 2(n-1)$$

$$a_{9870} = 1 + 2(9869) = 19739$$

۱۱۳- در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم.

پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟ ($\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.48$)

۳۲ (۴)

۳۰ (۳)

۲۴ (۲)

۲۰ (۱)

گزینه ۲

$$a_n = a \left(\frac{96}{100} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} a$$

$$(n-1) \log \frac{96}{100} = -\log 3$$

$$(n-1) \left(\log \sqrt[3]{96} - \log 100 \right) = -\log 3 \rightarrow (n-1) (\frac{1}{3} \log 96 + \log 3 - \log 100) = -\log 3 \rightarrow (n-1) = \frac{100}{\frac{1}{3} \log 96 + \log 3 - \log 100} = 24$$

۱۱۴- فرض كنيد $n \in \mathbb{N}$. حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ كدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$+\infty \quad (1)$$

گزینه ۲

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \frac{1}{2}$$

۱۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ كدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$-\sqrt{2} \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{p} \left(\sqrt{1 + \frac{px}{p}} - \sqrt{1 - \frac{x}{p}} \right)}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{p} \left(\left(\frac{1}{p} \left(\frac{px}{p} + 1 \right) + 1 \right) - \left(\frac{1}{p} \left(-\frac{x}{p} + 1 \right) + 1 \right) \right)}{\sqrt{\frac{x^p}{p}}} = \frac{\sqrt{p}x}{-\frac{x}{\sqrt{p}}} = -p$$

۱۱۶- تعداد نقاط ناپيوستگي تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$; $|x| \leq 2$ كدام است؟

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

گزینه ۴

$$f(x) = [x] \sin \pi x \quad [-2, 2]$$

در اعداد غير صحيح كه هر دو تابع $\sin \pi x$ و $[x]$ پيوسته هستند پس حاصلضرب آنها نيز پيوسته است.

در اعداد صحيح $[x]$ ناپيوسته ولی به علت اینکه مقدار $\sin \pi x$ در اعداد صحيح صفر است باز هم تابع حاصلضرب

پيوسته . پس $f(x)$ در \mathbb{R} پيوسته است.

۱۱۷- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ ، فقط یک مجانب قائم $x = 2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن، کدام است؟

$$y = \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$y = -1 \quad (1)$$

گزینه ۲

$$2x^p + bx + c = 2(x - 2)^p$$

$$2x^p + bx + c = 2x^p - 4x + 8$$

$$b = -4, \quad c = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{مجانِب افقی } y = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{ax^p + 7x}{2x^p - 4x + 8}$$

$$f(3) = 6$$

$$\frac{9a + 21}{2} = 6$$

$$9a = -9 \rightarrow a = -1$$

۱۱۸- اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x) = f\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ، کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (1)$$

گزینه ۲

$$g'(x) = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2} f'\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{4} f'\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

۱۱۹- فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

گزینه ۴

در $x = ۴$ مماس مشترک دارند پس در $x = ۴$ مقدارها و مشتق های برابر دارند.

$$۱۶ + ۴a + b = ۸ \rightarrow ۴a + b = -۸ \rightarrow b = ۱۲$$

$$y' = ۲x + a \rightarrow y' = \sqrt{x} + \frac{1}{۲}\sqrt{x}$$

$$۸ + a = ۳ \rightarrow a = -۵$$

۱۲۰- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + ۶x} & ; ۰ \leq x < ۴ \\ \left[\frac{x}{۴}\right](x^2 - ۹x) & ; ۴ \leq x < ۸ \end{cases}$ مقدار $f'(۲) - f'(۵)$ ، کدام است؟

 $\frac{۳}{۲}$ (۴) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{1}{۲}$ (۲) $\frac{1}{۴}$ (۱)گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + ۶x} & ۰ \leq x < ۴ \\ \left[\frac{x}{۴}\right](x^2 - ۹x) & ۴ \leq x < ۸ \end{cases}$$

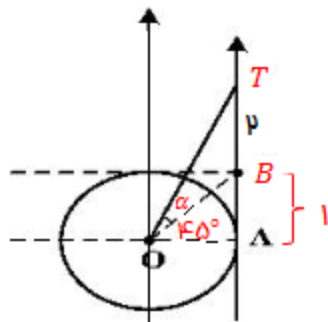
$$f'(۲) - f'(۵) = \frac{1}{۴}$$

$$\text{ضابطه } f'(x) = \frac{x + ۳}{\sqrt{x^2 + ۶x}}$$

$$\text{ضابطه } f'(x) = ۲x - ۹ \text{ (۲)}$$

$$f'(۲) = \frac{۵}{۴}$$

$$f'(۵) = ۱$$



۱۲۱- با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر $BT = 2$ باشد، مقدار $\tan(\widehat{TOB})$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

گزینه ۳

$$\tan \alpha = \tan(\alpha + 45 - 45)$$

$$= \frac{\tan(\alpha + 45) - 1}{1 + \tan(\alpha + 45)} = \frac{3 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{2}$$