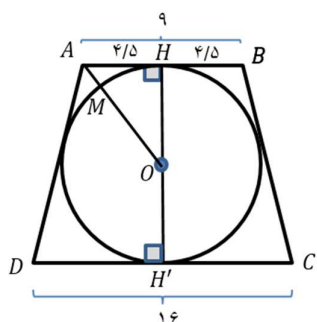


۱۲۲- یک دوزنقہ متساوی الساقین با قاعدہ ہایی به اندازہ ۹ و ۱۶ واحد، بر دایرہ ای محیط شدہ است. فاصلہ نزدیکترین نقاط دایرہ، تا راس کوچک دوزنقہ کدام است؟



$$\frac{5}{2} \text{ (۴)} \quad 2 \text{ (۳)} \quad \sqrt{3} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۱)}$$

$$HH' = 2r = \sqrt{9 \times 16} = 12 \Rightarrow OH = 6$$

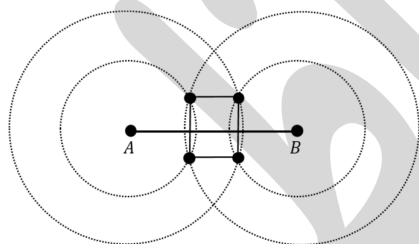
گزینه ۱:

$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{36 + \frac{81}{4}} = \frac{15}{2}$$

$$AM = OA - OM = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

۱۲۳- پارہ خط AB به اندازہ ۸ واحد در صفحہ مختصات مفروض است. چہار دایرہ با مراکز A و B و شعاع های ۳ و ۷ واحد رسم می کنیم. نقاط تلاقی دایرہ های کوچک با دایرہ های بزرگ، دقیقاً راس های کدام چہارضلعی هستند؟

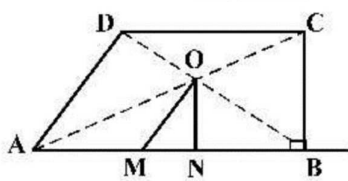
(۱) لوزی (۲) متوازی الاضلاع (۳) مستطیل (۴) دوزنقہ متساوی الساقین



گزینه ۳: مستطیل

۱۲۴- مطابق شکل زیر، از محل قطرهای دوزنقہ قائم الزاویہ $ABCD$ ($\hat{B} = 90^\circ$)، پارہ خط های OM و ON به ترتیب موازی با AD و BC رسم شدہ اند نسبت $\frac{AM}{BN}$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) کوچکتر از ۱ (۴) بزرگتر از ۱ کوچکتر از ۲

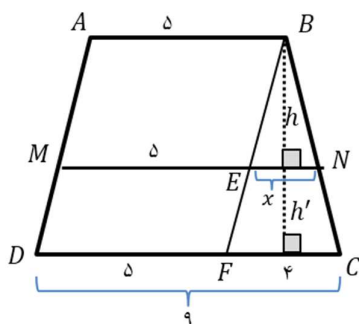


گزینه ۱: خط های AB و DC موازیند پس دو مثلث DOC و AOB متشابهند (زز) پس:

$$\frac{BO}{DO} = \frac{AO}{CO} \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{AO}{AC} \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} ON \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AO}{AC} = \frac{AN}{AB} \\ OM \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BO}{BD} = \frac{BM}{AB} \end{array} \right\} (*) \frac{AN}{AB} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow AN = BM \xrightarrow{-MN} AM = BN \Rightarrow \frac{AM}{BN} = 1$$

۱۲۵- اندازہ قاعدہ های ذوزنقه ای ۵ و ۹ واحد است پاره خطی موازی قاعدہ های ذوزنقه چنان رسم می کنیم که ذوزنقه را به دو قسمت مساوی تقسیم کند. اندازہ پاره خط، کدام است؟



(۱) ۷ (۲) $\sqrt{53}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{57}$

گزینه ۲: با توجه به شکل خط BF را موازی AD رسم می کنیم چهارضلعی های $ABEM$ و

$MEFD$ متوازی الاضلاع هستند پس $AB = ME = DF = 5$ و $FC = 4$ می باشد.

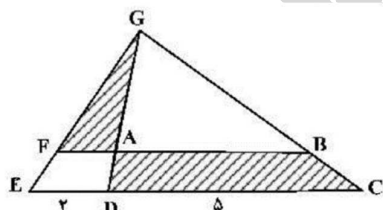
طول $EN = x$ در نظر می گیریم طبق تالس در مثلث BFC :

$$EN \parallel FC \Rightarrow \frac{EN}{FC} = \frac{h}{h+h'} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{h}{h+h'} \Rightarrow \frac{x}{4-x} = \frac{h}{h'} \quad (*)$$

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{ABNM}} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times (5+5+x) \times h}{\frac{1}{2} \times (5+x+9) \times h'} = 1 \Rightarrow \frac{(10+x)x}{(14+x)(4-x)} = 1 \Rightarrow x^2 + 10x - 28 = 0$$

$$\begin{cases} x = -5 - \sqrt{53} & \text{غ ق ق} \\ x = -5 + \sqrt{53} \Rightarrow \boxed{MN = \sqrt{53}} \end{cases}$$

۱۲۶- در شکل زیر، $DG = 3DA$ و اندازہ پاره خط های DE و DC به ترتیب ۲ و ۵ واحد هستند مساحت مثلث AFG ، چند درصد ذوزنقه $ABCD$ است؟



(۱) ۴۰ (۲) ۳۶ (۳) ۳۲ (۴) ۲۴

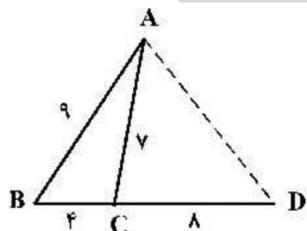
گزینه ۳: $\frac{S_{AFG}}{S_{GED}} = \left(\frac{GA}{GD}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{FADE}} = \frac{4}{5}$ تشابه

از طرفی می دانیم اگر دو مثلث راس مشترک داشته باشند و قاعدہ آنها رو یک خط راست باشد

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{4S}{\frac{4S}{\frac{2}{5}S}} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100}$$

نسبت مساحتها برابر نسبت قاعدہ ها است.

۱۲۷- در شکل روبه رو، اندازہ پاره خط AD کدام است؟



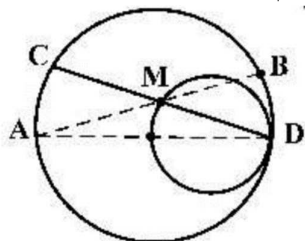
(۱) ۹ (۲) $3\sqrt{10}$ (۳) ۱۰ (۴) $6\sqrt{3}$

گزینه ۱: با استفاده از قضیه استوارت:

$$AB^2 \cdot CD + AD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BD + BC \cdot CD \cdot BD$$

$$81 \times 8 + AD^2 \times 4 = 49 \times 12 + 4 \times 8 \times 12 \Rightarrow AD^2 = 81 \Rightarrow \boxed{AD = 9}$$

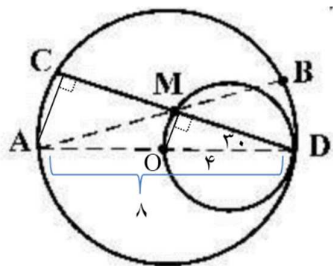
۱۲۸- در شکل زیر، دو دایره به شعاع های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است حاصل



$MA \times MB$ ، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۱۲

گزینه ۴: در این سوال طول کمان AC به اشتباه اندازه کمان نوشته شده و اشاره ای به قطر بودن AD



نشده است: $\frac{\alpha}{360} = \frac{\text{طول کمان}}{2\pi r} \Rightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi \cdot 4} \Rightarrow \alpha = 30$

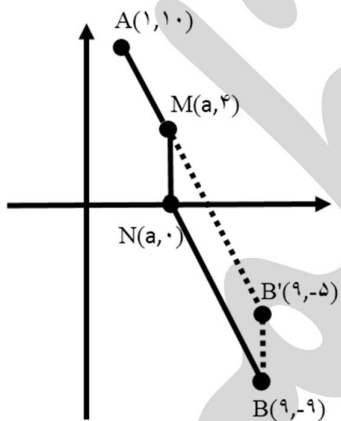
$$\Delta ODM : \cos 30 = \frac{MD}{OM} = \frac{MD}{4} \Rightarrow MD = 2\sqrt{3}$$

$$\Delta ACD : \cos 30 = \frac{CD}{AD} = \frac{CD}{8} \Rightarrow CD = 4\sqrt{3} \Rightarrow CM = CD - MD = 2\sqrt{3}$$

رابط طولی در دایره $MA \times MB = CM \times MD = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$

۱۲۹- چهار نقطه $A(1, 10)$ ، $B(9, -9)$ ، $M(a, 4)$ و $N(a, 0)$ را در صفحه مختصات، در نظر بگیرید. کمترین اندازه

خط شکسته $AMNB$ ، کدام است؟



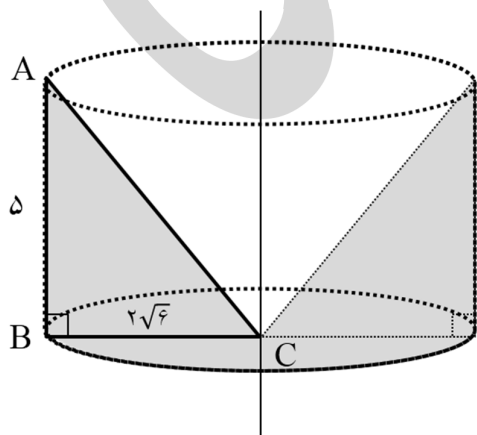
- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹ (۴) ۱۸

گزینه ۱: از نقطه B به اندازه ۴ واحد بالا می رویم (موازی و هم اندازه با MN) تا به $B'(9, -5)$ برسیم

$$\text{کمترین } AMNB = \underbrace{AB'}_{\text{خط راست}} + \underbrace{BB'}_{MN} = \sqrt{(1-9)^2 + (10+5)^2} + 4 = \boxed{21}$$

۱۳۰- حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه ABC با ضلع های قائم AB و AC ، به ترتیب با اندازه های ۵ و $2\sqrt{6}$

واحد، حول خط گذرا از راس C و موازی ضلع AB ، کدام است؟



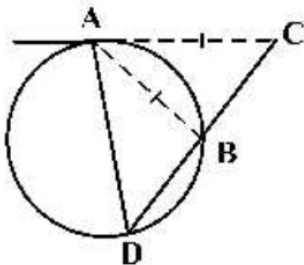
- (۱) 60π (۲) 70π (۳) 75π (۴) 80π

گزینه ۴:

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 \times 5 = \boxed{80\pi}$$

۱۳۱- در شکل زیر اندازه قطعه مماس AC برابر وتر AB است. الزاما کدام برابری درست است؟

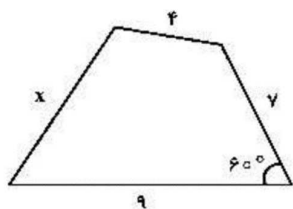
(۱) $BC = BA$ (۲) $BD = AC$ (۳) $BC = BD$ (۴) $DA = DC$



گزینه ۴:

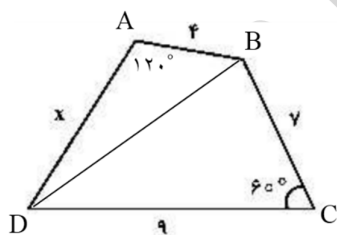
$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{CAB} = \hat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{AD} \stackrel{AB=AC}{\Rightarrow} \boxed{CD = AD}$$

۱۳۲- چهارضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است $(x + 2)$ کدام است؟



(۱) $\sqrt{51}$ (۲) $\sqrt{55}$ (۳) $\sqrt{57}$ (۴) $\sqrt{59}$

گزینه ۲: می دانیم در چهارضلعی محاطی زاویه های مقابل مکملند پس $\hat{A} = 120^\circ$



ΔBCD قضیه کسینوسها $BD^2 = 49 + 81 - 2 \times 7 \times 9 \times \cos 60^\circ = 67 \Rightarrow BD = \sqrt{67}$

ΔABD قضیه کسینوسها $67 = x^2 + 16 - 2 \times 4 \times x \times \cos 120^\circ \Rightarrow x^2 + 4x - 51 = 0$

فرمول Δ
 $\Rightarrow x = -2 + \sqrt{55} \Rightarrow \boxed{x + 2 = \sqrt{55}}$

۱۳۳- کوچکترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ محور x ها را با کدام طول، قطع می کند؟

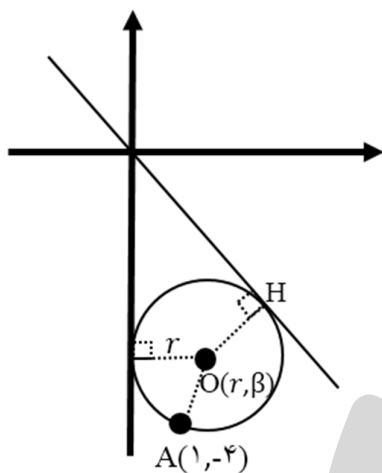
(۱) $1, -3$ (۲) $0, -3$ (۳) $2, -1$ (۴) $3, -2$

گزینه ۱: AB قطر دایره است

مرکز $O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3)$ دایره $\Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$
 شعاع $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(2+4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{13}$

$y=0$
 $\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$

۱۳۴- از بین دایرہ های گذرا از نقطه $A(1, -4)$ و مماس بر خط های $4x + 3y = 0$ و محور y ، بزرگترین شعاع دایرہ کدام است؟



$$(1) \quad \frac{5}{3} \quad (2) \quad \frac{17}{9} \quad (3) \quad \frac{7}{3} \quad (4) \quad \frac{22}{9}$$

گزینه ۲: فرض کنیم مرکز دایرہ $O(\alpha, \beta)$ باشد با توجه به اینکه دایرہ بر محور y ها

مماس است بنابراین $r = \alpha$ پس $O(r, \beta)$

$$r = OH \Rightarrow r = \frac{|4r + 3\beta|}{5} \Rightarrow |4r + 3\beta| = 5r \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3\beta = r \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}r & \text{منفی است غ ق} \\ 3\beta = -9r \Rightarrow \beta = -3r \Rightarrow O = (r, -3r) \end{cases}$$

$$r = OA \Rightarrow r = \sqrt{(r-1)^2 + (-3r+4)^2} \Rightarrow 9r^2 - 26r + 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = \frac{17}{9} \end{cases}$$

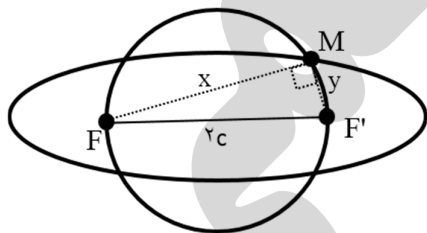
۱۳۵- در یک بیضی به قطرهای ۸ و $2\sqrt{7}$ و کانون های F و F' ، دایرہ ای به قطر FF' بیضی را در نقطه M ، قطع می کند. فاصله نقطه M تا نزدیکترین کانون، کدام است؟

$$(1) \quad 4 - 2\sqrt{2} \quad (2) \quad 2/5 \quad (3) \quad 4 - \sqrt{2} \quad (4) \quad 3$$

$$\begin{cases} 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \\ 2b = 2\sqrt{7} \Rightarrow b = \sqrt{7} \Rightarrow c = \sqrt{16-7} = 3 \end{cases} \quad \text{گزینه ۳:}$$

$$(*) \quad \text{تعریف بیضی: } x + y = 2a \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$$

$$\text{فیثاغورس: } x^2 + y^2 = 4c^2 \Rightarrow x^2 + (8-x)^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - \sqrt{2} \\ x = 4 + \sqrt{2} \end{cases} \quad \sqrt{}$$



۱۳۶- اگر نقطہ $F(-\frac{1}{2}, -2)$ کانوں سهمی $y^2 + ay + bx + 1 = 0$ باشد، کوچکترین مقدار b ، کدما است؟

$$(1) -4 \quad (2) -3 \quad (3) -2 \quad (4) 2$$

گزینہ ۱: $y^2 + ay + bx + 1 = 0 \Rightarrow y^2 + ay + \frac{a^2}{4} = -bx - 1 + \frac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -bx + \frac{a^2 - 4}{4} \Rightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -b\left(x - \frac{a^2 - 4}{4b}\right) \Rightarrow \begin{cases} S = (\alpha, \beta) = \left(\frac{a^2 - 4}{4b}, -\frac{a}{2}\right) \\ 4P = -b \Rightarrow P = -\frac{b}{4} \end{cases}$$

$$\text{کانوں } F = (\alpha + P, \beta) = \left(\frac{a^2 - 4}{4b} - \frac{b}{4}, -\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, -2\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = 4 \\ \frac{12}{4b} - \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow b = 3, -4 \end{cases}$$

۱۳۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ درایہ های سطر اول ماتریس A^3 ، کدما است؟

$$(1) [30 \quad 6 \quad 64] \quad (2) [30 \quad 6 \quad 78]$$

$$(3) [24 \quad 8 \quad 86] \quad (4) [30 \quad 6 \quad 86]$$

گزینہ ۴:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ 30 & 6 & 64 \\ 24 & 8 & 86 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ 30 & 6 & 64 \\ 24 & 8 & 86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ 24 & 8 & 86 \\ 30 & 6 & 86 \end{bmatrix}$$

۱۳۸- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$ ، ماتریس X ، کدام است؟

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} -۹ & -۷ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}}_A X \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}}_C \Rightarrow AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}XB^{-1} \quad \text{گزینه ۳}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}XB^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} ۲۰ & -۲۴ \\ -۱۶ & ۱۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix}$$

۱۳۹- جوابهای معادله $\begin{vmatrix} -۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳-x \end{vmatrix} = ۰$ ، کدام است؟

۲, ۵ (۴)

۱, ۵ (۳)

۱, ۴ (۲)

۱, -۴ (۱)

$$\begin{vmatrix} \boxed{-۴} & \boxed{۱} & \boxed{۱} \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳-x \end{vmatrix} = -۴ \begin{vmatrix} ۲-x & ۱ \\ ۲ & ۳-x \end{vmatrix} - ۱ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳-x \end{vmatrix} + ۱ \begin{vmatrix} ۱ & ۲-x \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ \quad \text{گزینه ۳}$$

$$۴۰ - ۴x^2 + ۲۴x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow x^2 - ۶x + ۵ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱, ۵}$$

۱۴۰- اندازه اضلاع مثلث قائم الزاویه ای، به صورت $x + ۱$ ، $۲x + ۱$ و $۲x + ۳$ است. مساحت مثلث، کدام است؟

۳۹ (۴)

۴۵ (۳)

۵۶ (۲)

۶۰ (۱)

گزینه ۱:

$$\text{غ ق ق} \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۷ \end{cases} \Rightarrow x^2 - ۶x - ۷ = ۰ \Rightarrow (۲x + ۳)^2 = (x + ۱)^2 + (۲x + ۱)^2 \Rightarrow \text{فیثاغورس}$$

$$S = \frac{۸ \times ۱۵}{۲} = ۶۰$$