

مطمئن باش تلاش های امروزت در آینده بهت نتایجی خواهد داد که ارزشش روداره.

۱۰۱- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی با شرط  $A \subset B$  باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

(۱)  $B \cap A' = A$     (۲)  $A \cap B' = A$     (۳)  $A \cap B' = \emptyset$     (۴)  $B \cap A' = \emptyset$

۱۰۱- گزینه «۴» به کمک نمودارون مشخص می شود گزینه «۴» نادرست است:  $B \cap A' = B - A \neq \emptyset$

۱۰۲- مجموعه  $(A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B))$ ، با کدام مجموعه، برابر است؟

(۱)  $A \cup B'$     (۲)  $A \cap B'$     (۳)  $A$     (۴)  $B'$

۱۰۲- گزینه «۴» با توجه به قانون جذب و تقاضل جواب رami می یابیم:  $(A \cap B') \cup [(B \cap C)' \cap ((B' \cup A) \cap B')]$

$$(A \cap B') \cup [(B' \cup C') \cap B'] = (A \cap B') \cup B' = B'$$

۱۰۵- باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $P(x)$  بر  $x-1$  و  $2x+1$  به ترتیب، ۸ و ۵ است. باقی مانده تقسیم

$P(x)$  بر  $x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

(۱)  $-x+4$     (۲)  $x+3$     (۳)  $2x+6$     (۴)  $2x-3$

۱۰۵- گزینه «۳» تابع  $p(x)$  را به صورت روبرود نظر گرفته و شروع به حل می کنیم:  $p(x) = (2x^2 - x - 1)q(x) + ax + b$

$$\begin{cases} p(1) = 8 & \Rightarrow a + b = 8 \\ p\left(\frac{-1}{2}\right) = 0 & \Rightarrow \frac{-1}{2}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 6 \quad R = 2x + 6$$

۱۰۶- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  و  $y = \frac{1}{3}x + 2$ ، کدام است؟

(۱) ۸    (۲) ۹    (۳) ۱۰    (۴) ۱۲

۱۰۶- گزینه «۴» برای پیدا کردن مساحت ناحیه بین دو نمودار، ابتدا نمودار توابع را رسم می کنیم و سپس مساحت دوزنقه را منهای مساحت های مثلث های می کنیم:

$$S = \frac{(6+2) \times 8}{2} - \left( \frac{2 \times 2}{2} + \frac{6 \times 6}{2} \right) = 32 - 20 = 12$$

۱۰۷- اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$  باشند، مقدار  $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

۱۰۷- گزینه «۱» با توجه به ترکیب توابع و مفهوم وارون یک تابع داریم:  $(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}[f^{-1}(20)]$

$$f^{-1}(20) = a \Rightarrow f(a) = 20 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 16$$

$$g^{-1}(16) = b \Rightarrow g(b) = 16 \Rightarrow \frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

۱۰۸- قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$ ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

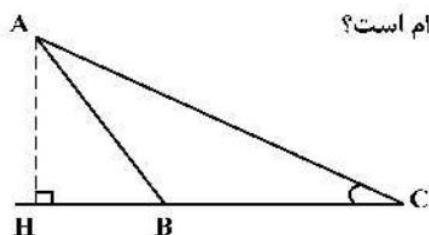
$$x = 2/5 \quad (4)$$

$$x = 2 \quad (3)$$

$$x = 1/5 \quad (2)$$

$$x = 1 \quad (1)$$

۱۰۸- گزینه «۲» با کمک تریسیم و انتقال روی محور طول با قرینه نسبت به محور عرض، با خط تقارن مشخص می‌شود:  $f(-x+4) = \sqrt{-x+4}$



۱۰۹- در شکل زیر، فرض کنید  $\sin C = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟

$$3/25 \quad (1)$$

$$3/5 \quad (2)$$

$$3/6 \quad (3)$$

$$3/75 \quad (4)$$

۱۰۹- گزینه «۴» ابتدا مقدار  $\sin C = \frac{5}{13}$  را در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow AH = CH \times \tan C \Rightarrow AH = 9 \times \frac{5}{12} = \frac{15}{4} = 3/75$$

۱۱۰- اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم دایره مثلثاتی و  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$  باشد، مقدار  $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ ، کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (1)$$

۱۱۰- گزینه «۳» ابتدا نسبت مثلثاتی خواسته شده را ساده نموده و به کمک فرمول نسبت های مثلثاتی زوایای مرکب جواب را می‌یابیم:

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\frac{3\pi}{4} \cos\alpha - \sin\frac{3\pi}{4} \sin\alpha$$

$$\Rightarrow -\cos\frac{\pi}{4} \times \frac{-\sqrt{2}}{10} - \sin\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

۱۱۱- مجموع جوابهای معادله مثلثاتی  $\tan(3x)\tan(x) = 1$  در بازه  $|\pi, 2\pi|$ ، کدام است؟

(۱)  $5\pi$       (۲)  $6\pi$       (۳)  $\frac{9\pi}{2}$       (۴)  $\frac{11\pi}{2}$

۱۱۱-گزینه «۲» برای حل معادله مثلثاتی باید دو طرف تساوی دارای یک نام از نسبت مثلثاتی باشد:  $\tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$

$$\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, x_3 = \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, x_4 = \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow 7\pi$$

۱۱۲- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی

....., {۴, ۵, ۶}, {۲, ۳}, {۱}. مجموع اعداد واقع در دسته بیستم، کدام است؟

(۱) ۴۱۲۰      (۲) ۴۰۲۰      (۳) ۴۰۱۰      (۴) ۳۹۸۰

۱۱۲-گزینه «۳» با توجه به تعداد داده شده، باید مجموع جملات دنباله حسابی را با شروع ۱۹۱ و انتهای ۱۲۰ که بیست عددی باشد می‌یابیم:

$$91 + \dots + 210 = \frac{20}{2}(91 + 210) = 4010$$

۱۱۳- مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه،  $\frac{1}{10}$  جرم باقی‌مانده را از دست

بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ ( $\log 3 = 0,48$ )

(۱) ۳۶۰      (۲) ۳۰۰      (۳) ۲۷۰      (۴) ۲۴۰

۱۱۳-گزینه «۱» وقتی ده درصد کم می‌شود یعنی نو درصدی ماند:  $24 \times \left(\frac{9}{10}\right)^t = 8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{Log}} t(\log 9 - \log 10) = -\log 3$

$$t = \frac{-0,48}{\frac{2 \times 0,48}{-1}} = 12 \text{ پس } 12 \text{ ماه طول می‌کشد یعنی } t = 12 \times 30 = 360 \text{ روز}$$

۱۱۴- فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  حاصل  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

(۱) ۱      (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $-\frac{1}{3}$       (۴) -۱

۱۱۴-گزینه «۱» برای پیدا کردن حد در بی‌نهایت وضع ابهام حد  $\frac{\infty}{\infty}$  می‌توان از حد پرتوان استفاده نمود:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$

۱۱۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}}$  کدام است؟

-۰٫۶ (۴)

-۰٫۸ (۳)

-۱٫۲ (۲)

-۱٫۵ (۱)

۱۱۵- گزینه «۲» برای رفع ابهام حدود  $\frac{0}{0}$  می توان از قاعده هسپیتال استفاده نمود:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{-6}{5} = -1/2$$

۱۱۶- فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$  یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار  $a$ ، کدام است؟

 $\frac{5}{2}$  (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

 $-\frac{3}{2}$  (۱)

۱۱۶- گزینه «۱» برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، پیوستگی را نقاط مرزی بررسی می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & , 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & , x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 2a + 4 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow 0 = b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

۱۱۷- نمودار تابع  $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$  دارای خطهای مجانب  $y = -1$ ،  $x = -2$  و  $x = 1$  است.  $f(-1)$  کدام است؟

-۱٫۵ (۴)

۱٫۷۵ (۳)

۱٫۵ (۲)

۱٫۲۵ (۱)

۱۱۷- گزینه «۱» با توجه به وجود مجانب افقی و دو مجانب قائم داریم:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c} = -1 \Rightarrow a = 2$

$$2x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} \rightarrow -1 = \frac{-b}{2} \Rightarrow b = 2 \\ P = \frac{c}{a} \rightarrow -2 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -4 \end{cases} \Rightarrow f(-1) = \frac{5}{4} = 1/20$$

۱۱۸- اگر  $f$  یک تابع مشتق‌پذیر،  $g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$  و  $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  باشد، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۱۱۸- گزینه «۲» برای پیدا کردن جواب از مشتق تابع مرکب استفاده می‌کنیم:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

$$g'(x) = \frac{-1 \times -\sin x}{\cos^2 x} f'\left(\frac{1}{\cos x}\right) \Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \times f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$$

۱۱۹- آهنگ متوسط تغییر تابع  $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$  در بازه  $[5, 6]$  برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار  $x$  است؟

- (۱)  $4 + \sqrt{2}$  (۲)  $3 + 2\sqrt{2}$  (۳)  $2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$  (۴)  $2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$

۱۱۹- گزینه «۴» آهنگ متوسط را محاسبه نموده با آهنگ لحظه‌ای برابر قرار داده و مقدار  $x$  را می‌یابیم:

$$\bar{f} = f'(x)$$

$$\frac{f'(6) - f'(5)}{6 - 5} = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2}$$

۱۲۰- خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$  در نقطه  $x = 4$  واقع بر آن، محور  $y$  ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- (۱)  $-4$  (۲)  $-1$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

۱۲۰- گزینه «۳» معادله خط مماس بر منحنی را می‌نویسیم، برای این کار مشتق به ازای طول نقطه تماس برابر شیب خط مماس است:

$$m = f'(4) = \frac{2}{3}$$

$$(4, 8) \Rightarrow y - 8 = \frac{2}{3}(x - 4) \xrightarrow{x=0} y = 2$$

۱۲۱- اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  برابر ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  باشند،  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $-3$  (۴)  $-1$

۱۲۱- گزینه «۴» ابتدا نسبت مثلثاتی زاویه مرکب را نوشته و به کمک مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم جواب را می‌یابیم:

$$S = \frac{-2}{3}, P = \frac{-1}{3}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{-2}{3}}{1 - (\frac{-1}{3})} = -1$$

باران باش و بیار، نپرس کاسه‌های خالی از آن کیست... / همايون شريك ۲۷۲۱ ۱۳۴ ۰۹۱۲