پاسخ نامه ریاضی تجربی آزمون سراسری ۱۳۹۹

امین خوانین زاده

۱۲۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}$ ، کدام است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $-1+\sqrt{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

حل اول)

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}\times\frac{\overbrace{5+\sqrt{6}}^{\text{برای گویا کردن}}}{5+\sqrt{6}}=\frac{10\sqrt{2}+2\overbrace{\sqrt{12}}^{2\sqrt{3}}+15\sqrt{3}+3\overbrace{\sqrt{18}}^{3\sqrt{2}}}{25-6}=\frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}\xrightarrow{\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\overbrace{\sqrt{3}+1}^{\text{برای گویا کردن}}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}$$

پاسخ نهایی : $\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=\sqrt{2}-1$

حل دوم (شاگردای خودی)

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2(\sqrt{3}-1)^{-1}=\frac{2/8+5/2}{5-2/4}-2(\overbrace{1/7-1}^{\frac{7}{10}})^{-1}=\frac{8}{2/6}-\frac{20}{7}=(3)^{+}-(3)^{-}=0/\ldots$$

$\sqrt{27}$ با قاعده بنا محاسبه شده است. ($\sqrt{5^2+2}=5+\frac{2}{2\times5}$)

گزینه۱) $2/7$ گزینه۲) $0/4$ گزینه ۳) منفی گزینه 4) منفی

۱۲۷- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی ... , {۲, ۳, ۴} , {۱}. در دستهٔ نهم، واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

۱) ۷۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۳ ۴) ۷۴

عدد آخر هر دسته مربع کامل شماره همان دسته است، پس عدد آخر دسته هشتم $8^2 = 64$ است؛ عدد بعدی (65) اولین عدد دسته نهم است.

عدد آخر دسته نهم $9^2 = 81$ است.

اگر x واسطه عددی بین 65 و 81 باشد داریم: $x = \dfrac{65+81}{2} = 73$

۱۲۸- فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x-1) + p(1-x)$، آنگاه حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

$p(x)$ بر عامل های $x^2 - 1$ یعنی $(x-1)$ و $(x+1)$ بخش پذیر است: $p(-1) = 0 \quad , \quad p(1) = 0$

برای تعیین باقی مانده $Q(x)$ بر $x-2$ کافیست ریشه مقسوم علیه را در مقسوم (Q) جای گذاری کنیم:

$Q(2) = p(1) + p(-1) = 0$

۱۲۹- معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

$$S = \frac{1}{P} \xRightarrow{S=-\frac{b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}} \frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2m^2 - 5m - 7 = 0 \begin{cases} m = -1 \xrightarrow{\text{بررسی}\Delta} \Delta < 0 \\ m = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

دو مقدار برای m بدست می آید ، با بررسی شرط Δ برای $m = -1$ ، Δمنفی می شود که با شرط داشتن دو ریشه در تناقض است.

چون در گزینه ها (به ازای هیچ مقدار m) نداریم ، نیاز به بررسی $\frac{7}{2}$ نیست و قابل قبول است.

۱۳۰- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۱ < \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳$، کدام است؟

۱) $(۰/۶ \, , \, ۱/۵)$ ۲) $(۰/۸ \, , \, ۱/۲)$ ۳) $(۱ \, , \, ۲)$ ۴) $(۰/۸ \, , \, ۲)$

جواب به صورت بازه ای از اعداد در گزینه ها آمده $\xleftarrow{\text{حل}}$ عدد گذاری از محل اختلاف نظر گزینه ها

$$x = 1/5 \Longrightarrow 1 < \frac{\overbrace{2/5}^{1/...}}{2} < 3$$

حذف گزینه های 1 و2 به جرم نداشتن عدد خوب 1/5

$$x = 1 \Longrightarrow 1 < \frac{2}{1} < 3$$

حذف گزینه 3 به جرم نداشتن عدد خوب 1

۱۳۱- فرض کنید نقاط $(-۲,۵)$، $(۰ \, , \, ۵)$ و $(۱۱ \, , \, ۱)$، بر سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۲ \, , \, ۹)$ ۴) $(۲, \, ۱۵)$

$$(0\,,5) \longrightarrow c = 5$$

$$(1\,,11) \longrightarrow a + b + 5 = 11 \longrightarrow a + b = 6$$

$$(-2,5) \longrightarrow 4a - 2b + 5 = 5 \longrightarrow 2a - b = 0$$

$\Rightarrow a = 2 \;, b = 4$

$y = 2x^2 + 4x + 5$

گزینه 1 در تابع صدق می کند

۱۳۲- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$ ۲) $۶\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

تابع انتقال یافته: $\sqrt{x} \xrightarrow{\text{12 واحد به راست}} \sqrt{x - 12} \xrightarrow{\text{2 واحد به بالا}} \sqrt{x-12} + 2$

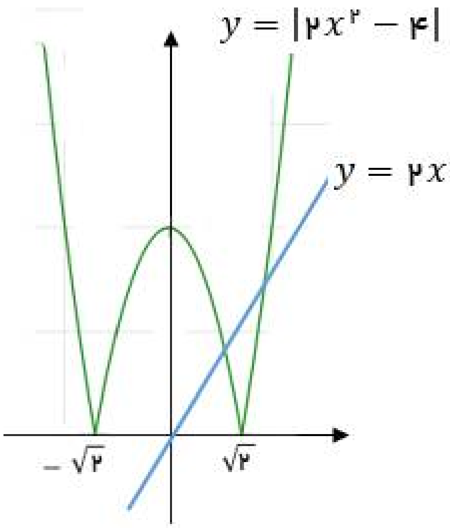
تقاطع تابع اولیه با تابع انتقال یافته: $\sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \xrightarrow{\text{بررسی عدد خوشگل}} x = 16$

با توجه به دامنه اولین عددی که زیر رادیکال ها رو مربع کامل می کنه 16ئه که تو معادله صدق می کنه و عرض تقاطع 4میشه

نقطه تقاطع: $(16\,,4) \xrightarrow{\text{فاصله از (0,0)}} \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16 \times 16 + 16} = \sqrt{17\,(16)} = 4\sqrt{17}$

۱۳۳- در بازهٔ $(a\,,b)$، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



با توجه به نمودار دو تابع واضح است که بین تقاطع دو تابع بازه ای است که $y = |2x^2 - 4|$ زیر خط $y = 2x$ قرار دارد

برای بدست آوردن نقطه تقاطع داریم:

$$2x = |2x^2 - 4|$$

با توجه به شکل که نقاط تقاطع اطرف $\sqrt{2}$ هستند اعداد نزدیک 1 و 2 را بررسی می کنیم که در معادله صدق می کنند.

$$(a\,,b) = (1\,,2) \rightarrow b - a = 1$$

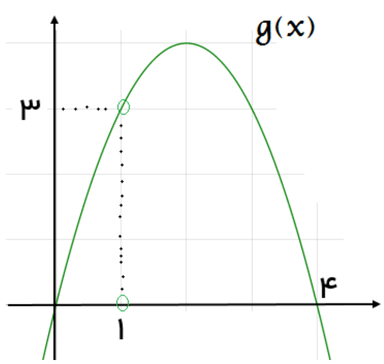
همان طور که گفته شد نیازی به حل معادله قدر مطلقی نیست اما به صرف تمرین:

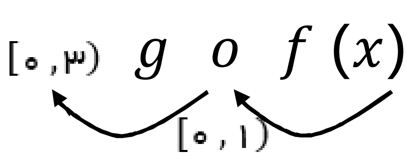
$$2x = |2x^2 - 4| \begin{cases} x > \sqrt{2} \rightarrow 2x = 2(x^2 - 2) \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ غ ق ق} \ , \quad x = 2 \\ x \leq \sqrt{2} \rightarrow 2x = -2(x^2 - 2) \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \ , x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

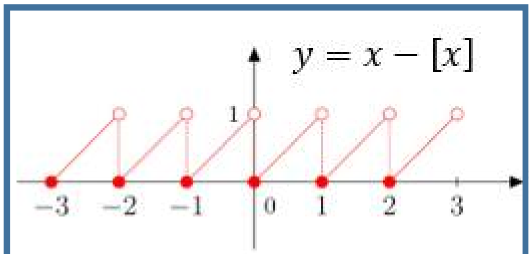
۱۳۴- اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع gof، کدام است؟

۱) $[0\,,2)$ ۲) $[0\,,3)$ ۳) $[0\,,4)$ ۴) $[1\,,4)$

تابع $f(x)$ در واقع همان تابع معروف چمن در باد است که طول بازه های هر شاخه تغییر کرده (نصف شده)!!! داشتن ضریب برای x روی خروجی (برد) تابع تاثیری ندارد و در بازه $[0\,,1)$ است.







تابع چمن در باد

با توجه به نمودار $g(x)$ واضح است در صورتی که ورودی آن در بازه $[0\,,1)$ خروجی آن در بازه $[0\,,3)$ قرار دارد.

۱۳۵- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

سوال در واقع $f^{-1}(6)+f^{-1}(12)$ را از ما می خواهد

$$f^{-1}(6)=?\to f(?)=6 \Longrightarrow f(?)=?+\sqrt{?}=6 \xrightarrow{\text{عدد خوشگل}} ?=4$$

$$f^{-1}(12)=?\to f(?)=12 \Longrightarrow f(?)=?+\sqrt{?}=12 \xrightarrow{\text{عدد خوشگل}} ?=9$$

$$\Rightarrow 4+9=13$$

۱۳۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

بجای حل سوال از گزینه ساده تر شروع به بررسی می کنیم

گزینه 2) نقطه تلاقی : $(1,-1)$ (عرض نقطه با توجه به اینکه روی نیمساز ربع چهارم قرار دارد تعیین شد.)

$$f^{-1}(1)=-1\to f(-1)=1 \xrightarrow{\text{بررسی}} \checkmark$$

۱۳۷- اگر $\log_۴ ۳=۰/۸$ باشد، مقدار $\log_{۱۲} ۶$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

$$\log_4 3=\log_{2^2} 3=\frac{1}{2}\log_2 3=0/8 \to \log_2 3=1/6$$

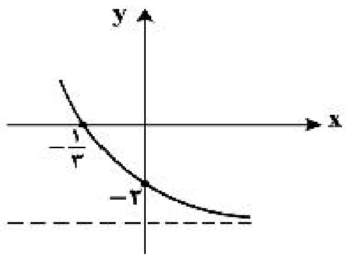
$$\log_{12} 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 12}=\frac{\log_2 3+\log_2 2}{\log_2 3+\log_2 4}=\frac{1/6+1}{1/6+2}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{13}{18}$$

حل دوم (شاگردای خودی) (مثل تیپ تبدیلی مثلثات که فرض غیر منطقی می کنیم ، ولی چون نسبت می خوایم اوکیه)

$$\frac{\log 3}{\log 4}=\frac{8}{10} \Longrightarrow \log 3=8 \quad , \quad \log 4=10 \xrightarrow{\log 2^2=2\log 2} \log 2=5$$

$$\frac{\log 6}{\log 12}=\frac{\log 3+\log 2}{\log 3+\log 4}=\frac{8+5}{8+10}=\frac{13}{18}$$

۱۳۸- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۴ + ۲^{ax+b}$ است. $f(-\frac{۵}{۳})$، کدام است؟



۱) ۵۴
۲) ۶۰
۳) ۴۸
۴) ۲۸

با توجه به تقاطع تابع با محور طول ها و عرض ها داریم:

$$f(0) = -2 \longrightarrow -4 + 2^{b} = -2 \Longrightarrow 2^{b} = 2 \rightarrow b = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \longrightarrow -4 + 2^{-\frac{a}{3}+1} = 0 \Longrightarrow 2^{-\frac{a}{3}+1} = 2^{2} \rightarrow a = -3$$

$$\Bigg\} \quad f(x) = -4 + 2^{-3x+1}, \qquad f\left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + 2^{6} = 60$$

۱۳۹- فرض کنید در دامنهٔ $[۰, +\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{۲^{x} + (\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}$، مفروض باشد. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_{۲}(۲-\sqrt{۳})$
۲) $\log_{۲}(\sqrt{۳}-۱)$
۳) $\log_{۲}(۱+\sqrt{۳})$
۴) $\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$

$$f^{-1}(2) = ? \rightarrow f(?) = 2$$

پس باید ببینیم به ازای کدام ورودی حاصل $f(x)$ برابر 2 می شود:

$$f(x) = 2 \rightarrow 2^{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 4 \xrightarrow{2^{x}=t} t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^{2} + 1 = 4t$$

$$t^{2} - 4t + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 12 \quad , \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \Longrightarrow t = 2^{x} = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2(2 + \sqrt{3})$$ ✓

$$t_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \Longrightarrow t = 2^{x} = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \text{منفی} \rightarrow \text{غ ق ق}$$

۱۴۰- حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

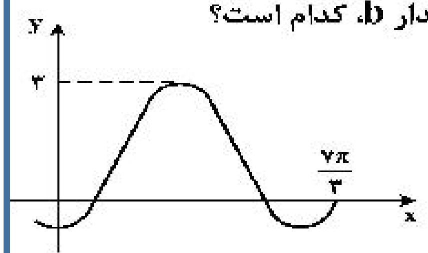
۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

از زوایای داده شده 360 تا 360 تا بیرون می ریزیم:

$$\tan(-60)\ \cos(-150) + \tan(120)\sin(120) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

- کسینوس منفی خوار ، بقیه سوراخ دار
- سینوس زوایای مکمل باهم برابر و سایر نسبت های مثلثاتی برای زوایای مکمل قرینه یک دیگرند.

۱۴۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ است. مقدار b، کدام است؟



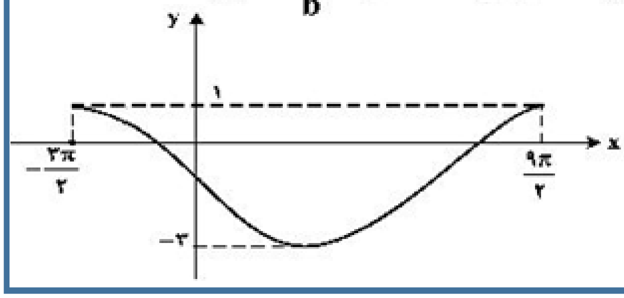
۱) ۲
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲-

تابع پس از ساده سازی به صورت $y = a + b\cos(x)$ است. با توجه به نمودار مشخص است که ضریب $\cos(x)$ منفی است. (حذف گزینه های 1 و 2)

$$y_{max} = 3 \xrightarrow{\cos(x)=-1} a - b = 3$$

$$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \to a + b\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = a + \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری } a=-\frac{b}{2} \text{ در رابطه بالا}} -\frac{b}{2} - b = 3 \to b = -2$$

۱۴۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) ۲-
۲) ۳-
۳) ۴-
۴) ۶-

با توجه به نمودار واضح است که a یا b یک کدام منفی هستند. $(ab < 0)$ ، با فرض b مثبت:

$$\text{تناوب } T = \frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi \quad , \quad 2\pi \xrightarrow{\times 3} 6\pi \xrightarrow{\text{طبق انتقال:تغییرات روی محور } x \text{ ها برعکس}} b = \frac{1}{3}$$

$$y_{max} = 1 \xrightarrow{\sin(bx)=-1} -a + c = 1$$

$$y_{min} = -3 \xrightarrow{\sin(bx)=1} a + c = -3$$

$$\Rightarrow a = -2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

۱۴۳- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$، با شرط $x \neq k\pi$، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$
۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

با توجه به گزینه ها از محل اختلاف نظر گزینه ها ، زاویه چک می کنیم:

$x = 0 \rightarrow \sin(-45) = \cos(45)$ حذف گزینه های 1 و2 به جرم داشتن زاویه بد صفر

$x = -30 \rightarrow \underbrace{\sin(-105)}_{\text{منفی}} = \cos(15)$ حذف گزینه 3 به جرم داشتن زاویه بد 30- درجه

۱۴۴- حاصل $\lim\limits_{x \to -۲^-} \frac{[x] + ۳}{x + ۲}$، کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) ۱-
۳) صفر
۴) ۱

$$x \to -2^- \ : \ \frac{[-2^-] + 3}{x + 2} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \text{صفر}$$

۱۴۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{24}$ ۲) $\dfrac{1}{18}$ ۳) $\dfrac{1}{12}$ ۴) $\dfrac{5}{36}$

با توجه به اینکه حاصل حد در بی نهایت عدد شده پس پرتوان بالا با پر توان پایین برابر است: $n=1$

$$x\to\infty : \frac{ax}{4x}=\frac{1}{6} \longrightarrow a=\frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)=\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}$$

$$x\to 3 : \frac{0}{0}$$

حل اول) استفاده هوپیتال

$$HOP \xrightarrow{x=3} \frac{\frac{2}{3}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{3\sqrt[3]{64}}}{4}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{12}}{4}=\frac{\frac{8-6}{12}}{4}=\frac{\frac{1}{6}}{4}=\frac{1}{24}$$

حل دوم (شاگردای خودی)

$$\frac{\frac{2}{3}\times\frac{31}{10}-2-\frac{6}{120}}{\frac{4}{10}}=\frac{\frac{62-60-1/5}{30}}{\frac{4}{10}}=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{4}{10}}=\frac{1}{24}$$

۱۴۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & ; x\le -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & ; x>-2\end{cases}$، در $x=-2$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

بررسی پیوستگی در نقطه $x=-2$

$$\begin{cases}\text{چ، م} \to 3\\ \text{ر} \to -2-2b+c\end{cases} \Rightarrow -2b+c=5$$

بررسی مشتق چپ و راست در نقطه $x=-2$

$$\begin{cases}\text{چ} \xrightarrow{x=-2} \dfrac{-2}{2\sqrt{5-2x}}=-\dfrac{1}{3}\\ \text{ر} \to -x+b=2+b\end{cases} \Rightarrow b=-\frac{7}{3}$$

با جایگذاری $b=-\frac{7}{3}$ در رابطه $-2b+c=5$ مقدار $c=\frac{1}{3}$ محاسبه می شود.

۱۴۷- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$، در نقطهٔ $x=2$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

نخست تابع را برای بهتر مشتق گرفتن ساده می کنیم.

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{\overbrace{(2x+2)}^{\text{مشتق صورت}}\overbrace{(x^2-x)^3}^{\text{مخرج}}-\overbrace{3(x^2-x)^2(2x-1)}^{\text{مشتق مخرج}}\overbrace{(x^2+2x)}^{\text{صورت}}}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2)=\frac{6\times 8-3\times 4\times 3\times 8}{64}=\frac{8\,(6-36)}{64}=-\frac{30}{8}=-\frac{15}{4}$$

۱۴۸- فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

ابتدا نقاط بحرانی تابع را تعیین می کنیم . ($f'(x) = 0$)

$$f'(x) = 1 + \frac{\overbrace{-2x + 4}^{-2(x-2)}}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0 \longrightarrow \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}} = 1 \rightarrow x - 2 = \sqrt{4x - x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}\,2} x^2 - 4x + 4 = 4x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \xRightarrow{\times\frac{1}{2}} x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 8 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \Longrightarrow f(x_1) = f(2 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$ max نسبی

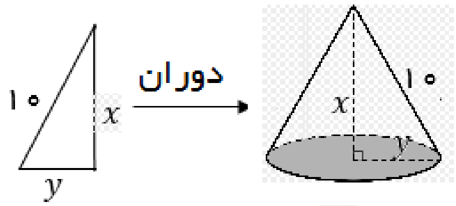
$$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \Longrightarrow f(x_2) = f(2 - \sqrt{2}) = 2$$ min نسبی

باید فاصله نقطه $(2 + \sqrt{2}\ ,\ 2 + 2\sqrt{2})$ از خط $y = x$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

۱۴۹- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصـل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$



$100 = x^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 100 - x^2$

$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(100 - x^2)x$

باید max تابع $V = \frac{1}{3}\pi(100x - x^3)$ را محاسبه کنیم. نقطه ای که در آن تابع بیشترین مقدار را دارد ، متشق تابع در آن نقطه صفر می شود. (نقطه بحرانی)

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3x^2) = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{100}{3} \xrightarrow{\text{رابطه بین } x \text{ و } y} y^2 = \frac{200}{3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

۱۵۰- به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ۴) ۹۵

از تمام حالات ، حالاتی که دو دوست با هم آمده اند را بر می داریم:

$$\binom{9}{5} - \binom{9-2}{5-2} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} - \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 9 \times 7 \times 2 - 7 \times 5 = 7(18 - 5) = 91$$

- بجای محاسبه $\binom{9}{5}$ ، حاصل $\binom{9}{4}$ را بدست می آوریم.

- وقتی می خواهیم دو دوست باهم به مهمانی بیایند آن دو نفر را انتخاب کرده ، از 7 نفر باقی مانده 3 نفر دیگر را انتخاب می کنیم.

۱۵۱- پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}}$$

کتاب های فارسی را در یک بسته کنار هم و کتاب های انگلیسی را در یک بسته کنار هم در نظر می گیریم

$$\text{احتمال} = \frac{\overbrace{2!}^{\text{جابجایی بسته ها}} \times \overbrace{5!}^{\text{جابجایی کتب فارسی}} \times \overbrace{3!}^{\text{جابجایی کتب انگلیسی}}}{8!} = \frac{1}{28}$$

فارسی

انگلیسی

۱۵۲- ضریب تغییرات داده‌های آماری به‌صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰ , ۱۰ , ۱۰ , ۱۰ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۱ , ۱۱ , ۱۱ , ۱۴ , ۱۴ , ۱۴ , ۱۴ , ۱۴ , ۱۴ , ۱۴

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۷ ۴) ۰/۱۸

از همه داده ها 10 واحد کم می کنیم سپس میانگین می گیریم:

$$\overline{x} - 10 = \frac{5(0) + 4(1) + 7(4)}{16} = 2 \Longrightarrow \overline{x} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4} = 3/25 \Longrightarrow \sigma = \sqrt{3/25} = 1/8$$

- از آنجا که می دانیم $18^2 = 324$ است، $\sqrt{3/25}$ را به طور تقریبی 1/8 در نظر گرفتیم.

$$C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{1/8}{12} = 0/15$$

۱۵۳- مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC کدام است؟

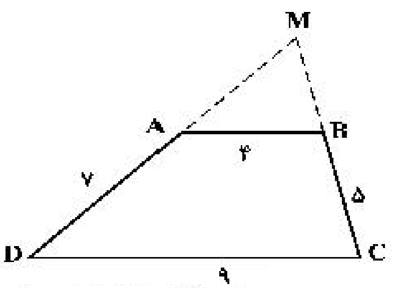
۱) ۴ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $4\sqrt{2}$

برای محاسبه ارتفاع AH کافیست فاصله نقطه A را از پاره خط BC بدست آوریم.

با توجه به اینکه عرض نقاط B و C چهار واحد از طول خودشان کمتر است معادله خط بدون نوشتن روابط قابل حدس زدن است: $x - y - 4 = 0 \leftarrow y = x - 4$

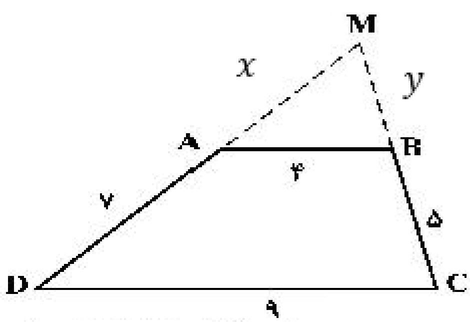
$$AH = \frac{|1-5-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

۱۵۴- اندازهٔ اضلاع متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



۱) ۱۳/۲
۲) ۱۳/۶
۳) ۱۴/۴
۴) ۱۴/۸

با استفاده از قضیه تالس $MA = x$ و $MB = y$ را محاسبه می کنیم:

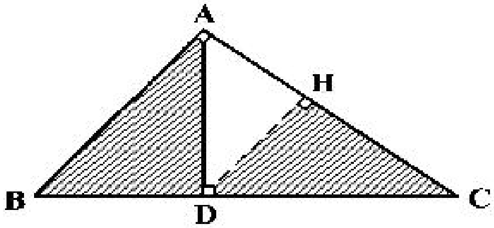


$$\frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \rightarrow 9x = 4x + 28 \rightarrow 5x = 28 \rightarrow x = \frac{28}{5} = 5/6$$

$$\frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \rightarrow 4y + 20 = 9y \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4$$

محیط مثلث $MAB = x + y + 4 = 5/6 + 4 + 4 = 13/6$

۱۵۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD و ABD، کدام است؟



۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{4}{7}$

۳) $\frac{16}{21}$ ۴) $\frac{8}{9}$

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 3 + 4 \rightarrow BC = \sqrt{7}$

به طور واضح دو مثلث ABD و HCD متشابه اند.

می دانیم در دو مثلث متشابه اگر نسبت تشابه بین اضلاع k باشد، نسبت مساحت آن دو مثلث k^2 است:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{HCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

- از اضلاع نسبت دو وتر را نوشتیم.

برای محاسبه CD می دانیم در هر مثلث قائم الزوایه هر ضلع واسه هندسی بین تصویر خودش روی وتر و وتر است:

$$(AC)^2 = CD \times BC \rightarrow CD = \frac{(AC)^2}{BC} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{HCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{\sqrt{7}}}\right)^2 = \frac{3}{\frac{16}{7}} = \frac{21}{16} \rightarrow \text{گزینه } 3$$

- در سوال 128 ، طراح باقی مانده تقسیم را می خواست نه حاصل تقسیم!!!
- در سوال 154 ، چهار ضلعی $ABCD$ ذوزنقه است ، نه متوازی الاضلاع !!!