



آزمون غیر حضوری

دروس اختصاصی دوازدهم ریاضی

۲۱ شهریور ۹۹

(مباحث ۴ مهر ۹۹)

گروه فنی و تولید:

محمد اکبری	مدیر تولید آزمون
عادل حسینی	مسئول دفترچه بخش اختصاصی
مدیر گروه: فاطمه رسولی نسب مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری	گروه مستندسازی
فاطمه روحی - ندا اشرفی	حروف نگار و صفحه آرا
سوران نعیمی	ناظر چاپ

بنیاد علمی آموزشی قلم چی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام داراییها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»



حسابان ۱

حسابان ۱

کل کتاب

۱- اگر α و β جواب‌های معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت

$$\frac{2\alpha^2 - 6\alpha}{\beta} + \frac{2\beta^2 - 6\beta}{\alpha}$$

کدام است؟

- ۶ (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۶ (۴)

۲- مجموع مقادیر صحیحی از m که به ازای آن‌ها معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{m}$ جواب دارد، کدام است؟

- ۱ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) صفر (۱)

۳- اگر خط $y = \frac{1}{p}x + b$ نمودار وارون خود را در نقطه $(a, 2)$ قطع کند، حاصل $a - b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۴- اگر $(fog)(x) + (gog^{-1})(x) = 4x^2 + 5x - 3$ و $g(x) = 2x - 1$ باشد، مقدار $(gof)(1)$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴)

۵- حاصل ضرب جواب‌های معادله $\log_{\sqrt{9}} x - 3\sqrt{\log_9 x} + 1 = 0$ برابر 3^a است. مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴)

۶- اگر $A = 2(\sin^{-1} \frac{1}{5}) - 1$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (زاویه بر حسب رادیان است.)

- ۱ (۱) $-\frac{1}{2} < A < 0$ (۲) $0 < A < \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} < A < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2} < A < 1$ (۵)

۷- اگر $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، ساده شده عبارت $A = \sqrt{1 - \sin 2x} - \cos x$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\sin x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\sin x - 2\cos x$ (۴) $\sin x + \cos x$ (۵)

۸- حد تابع $f(x) = \sqrt{(2x+a)(x^2 - 4x + 3)}$ در $x = 3$ برابر L است. حاصل $a + L$ کدام است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴)

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1 + [-2x] - \sqrt{x^2 - 8}}{|x^2 - 3x|}$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

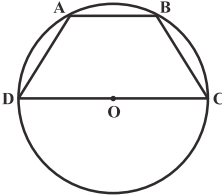
- ۱ (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۱۰- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته می‌باشد؟

- ۱ (۱) هر مقدار a (۲) هیچ مقدار a (۳) ۱ (۴)

هندسه ۲

هندسه ۲
کل کتاب



۱۱- مطابق شکل زیر، دوزنقه $ABCD$ درون دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. اگر طول قاعده AB برابر 10 و فاصله آن از مرکز دایره برابر 12 باشد، آنگاه طول پاره‌خطی که وسط ساق‌های دوزنقه را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۶
(۳) ۱۷
(۴) ۱۸

۱۲- اگر مساحت سطح محصور بین دو ضلعی منتظم محاطی و محیطی یک دایره، $\frac{1}{4}$ مساحت n ضلعی منتظم محیطی آن باشد، n کدام است؟

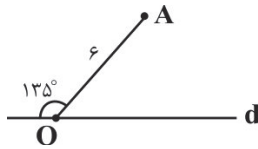
- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۱۳- طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, 3)$ و $C'(O', 8)$ برابر 12 واحد است. بیشترین فاصله نقاط دو دایره از هم چند برابر کمترین فاصله آنها است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۱۴- مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 6 واحد را در نظر بگیرید. طول مماس مشترک خارجی دو دایره محاطی داخلی و خارجی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $4/5$ (۳) $6/5$ (۴) $7/5$



۱۵- اگر A' بازتاب نقطه A نسبت به خط d باشد، مساحت مثلث OAA' کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۹
(۳) ۳۶
(۴) ۱۸

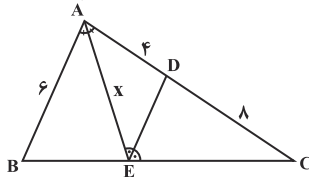
۱۶- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع $6\sqrt{3}$ را حول نقطه هم‌رسی میانه‌های آن 60° دوران می‌دهیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود. محیط شش ضلعی $AA'BB'CC'$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) $12\sqrt{3}$ (۳) ۳۰ (۴) ۳۶

۱۷- دوزنقه $ABCD$ با قاعده‌های $AB=5$ و $CD=8$ و مساحت 39 مفروض است. اگر M نقطه دلخواهی روی قاعده CD باشد، کمترین مقدار $MA+MB$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۱۸- در شکل زیر، AE نیمساز زاویه BAC و DE نیمساز زاویه AEC است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول AE کدام است؟

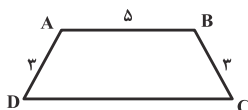


- (۱) $2\sqrt{5}$
(۲) $2\sqrt{6}$
(۳) $3\sqrt{3}$
(۴) $4\sqrt{2}$

۱۹- در مثلثی به طول اضلاع 5 ، 6 و 7 ، فاصله نقطه وسط ضلع متوسط از ضلع بزرگتر کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{6}}{7}$ (۲) $\frac{6\sqrt{6}}{7}$ (۳) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ (۴) $\frac{6\sqrt{6}}{5}$

۲۰- در دوزنقه متساوی‌الساقین زیر، نیمساز زاویه A با ساق BC موازی است. محیط چهارضلعی حاصل از وصل کردن وسط اضلاع دوزنقه کدام است؟



- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴
(۳) ۱۶ (۴) ۱۸



آمار و احتمال

آمار و احتمال

کل کتاب

۲۱- گزاره $[p \Rightarrow q] \vee p$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

$$q \Rightarrow p \quad (۱)$$

$$p \Rightarrow q \quad (۲)$$

$$\sim p \Rightarrow q \quad (۳)$$

$$q \Rightarrow \sim p \quad (۴)$$

۲۲- کدام یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟

$$\forall x \in \mathbb{R}; -2x^2 + 2x - 7 < 0 \quad (۱)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}; \left| 3x + \frac{1}{3x} \right| \geq 2 \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; -5x^2 - 6x + 9 < 0 \quad (۳)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; x + y = 0 \quad (۴)$$

۲۳- برای سه مجموعه A, B و C ، اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq B'$ باشد، حاصل $(A \cup B) - C$ همواره برابر کدام مجموعه است؟

$$B' \quad (۲)$$

$$C \quad (۱)$$

$$B \quad (۴)$$

$$C' \quad (۳)$$

۲۴- در یک آزمایش تصادفی، $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه است. اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ بوده و $P(a)$ ، $P(b)$ و $P(c)$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، $P(b)$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}-2}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (۱)$$

۲۵- در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود، احتمال اینکه دو تاس، دو عدد متوالی را نشان دهند، کدام است؟

$$\frac{4}{11} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{11} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{11} \quad (۱)$$

۲۶- دو پیشامد A و B مستقل هستند. اگر $P(A-B) = P(B|A) = \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه $P(A'|B')$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

۲۷- دانش آموزی ۱۲ درس دارد که در نمودار جعبه‌ای نمرات او، میانگین نمرات داخل جعبه ۱۵ و میانگین نمرات قبل و بعد از جعبه به ترتیب ۱۰ و ۱۷ می‌باشد. میانگین کل نمرات او کدام است؟

$$14/25 \quad (۲)$$

$$14 \quad (۱)$$

$$14/8 \quad (۴)$$

$$14/5 \quad (۳)$$

۲۸- اگر ضریب تغییرات داده‌های $x_1 - 4, x_2 - 4, \dots, x_{10} - 4$ ، $x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_{10} + 4$ باشد، آنگاه مجموع داده‌های x_1, x_2, \dots, x_{10} کدام است؟

$$60 \quad (۲)$$

$$50 \quad (۱)$$

$$80 \quad (۴)$$

$$70 \quad (۳)$$

۲۹- قرار است از میان دانش‌آموزان پایه دوازدهم یک دبیرستان که با شماره‌های ۱ تا ۱۸۰ مشخص گردیده‌اند، تعدادی به روش نمونه‌گیری سامانمند برای انجام یک آزمون تستی انتخاب شوند. اگر شماره‌های اولین و چهارمین دانش‌آموز انتخاب شده به ترتیب ۶ و ۴۲ باشد، آنگاه این دانش‌آموزان به چند طبقه تقسیم شده‌اند؟

$$18 \quad (۲)$$

$$15 \quad (۱)$$

$$20 \quad (۴)$$

$$12 \quad (۳)$$

۳۰- اعضای مجموعه A ۶ عضو A تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. اگر یک زیرمجموعه C ۴ عضوی از این مجموعه به تصادف انتخاب شود، با چه احتمالی میانگین اعضای این زیرمجموعه، پارامتر جامعه (میانگین) را به درستی برآورد می‌کند؟

$$\frac{4}{15} \quad (۴)$$

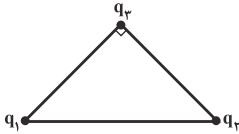
$$\frac{1}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$



فیزیک ۲

فیزیک ۲
کل کتاب


۳۱- مطابق شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ثابت شده‌اند. اگر به جای بار q_1 ، بار $-q_1$ قرار دهیم، بردار نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 چند درجه دوران می‌کند؟ $(|q_1| = |q_2|)$

(۱) صفر

(۲) ۹۰

(۳) ۱۸۰

(۴) به علامت بارها بستگی دارد.

۳۲- در یک میدان الکتریکی یکنواخت، بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -2\mu\text{C}$ از نقطه A با پتانسیل الکتریکی 100V رها می‌شود. اگر کار نیروی الکتریکی در جابه‌جایی بار تا نقطه B برابر با $4 \times 10^{-5}\text{J}$ باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B چند ولت است؟

(۱) ۱۸۰

(۲) ۸۰

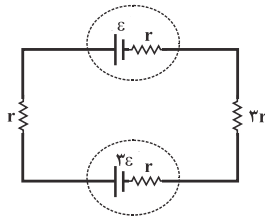
(۳) ۱۲۰

(۴) ۶۰

۳۳- اگر فاصله بین صفحات یک خازن تخت را ۲۰ درصد کاهش دهیم، در یک اختلاف پتانسیل الکتریکی ثابت، انرژی ذخیره شده در خازن چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. (۲) ۲۵ درصد افزایش می‌یابد. (۳) ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. (۴) ۲۵ درصد کاهش می‌یابد.

۳۴- در مدار شکل زیر، نسبت توان ورودی مولد به توان خروجی مولد دیگر کدام است؟

(۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$ 

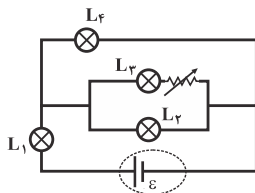
۳۵- در مدار شکل مقابل، اگر مقاومت رئوستا را کاهش دهیم، نور لامپ‌ها چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) نور لامپ‌های L_1 ، L_3 و L_4 افزایش می‌یابد و نور لامپ L_2 کاهش می‌یابد.

(۲) نور لامپ‌های L_1 و L_3 افزایش می‌یابد و نور لامپ‌های L_2 و L_4 کاهش می‌یابد.

(۳) نور لامپ‌های L_1 و L_3 افزایش می‌یابد و نور لامپ‌های L_2 و L_4 تغییر نمی‌کند.

(۴) نور لامپ‌های L_1 و L_4 افزایش می‌یابد و نور لامپ‌های L_2 و L_3 کاهش می‌یابد.



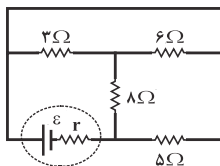
۳۶- در مدار شکل زیر، جریان الکتریکی عبوری از مقاومتی که بیشترین توان الکتریکی مصرفی را دارد، ۳A است. اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مولد چند ولت است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۲/۵

(۳) ۱/۵

(۴) ۲۵



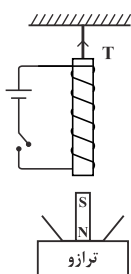
۳۷- ذره‌ای با بار الکتریکی $-3\mu\text{C}$ و با سرعت $\vec{v} = 5 \times 10^8 \hat{j}$ سانتی‌متر بر ثانیه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = 4\hat{i} + 4\sqrt{3}\hat{j}$ گاوس در حال حرکت است. اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره چند نیوتون است؟

(۱) 6×10^{-3} (۲) $1/2 \times 10^{-2}$ (۳) $6\sqrt{3} \times 10^{-3}$

(۴) صفر



۳۸- مطابق شکل زیر، سیملوله با طنابی به جرم ناچیز و نیروی کشش T از سقف آویزان است. اگر وزن آهنربای تیغه‌ای برابر با W_1



و وزن سیملوله برابر W_2 باشد، پس از وصل کردن کلید کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $T > W_2$ و عدد ترازو $W_1 < W_2$

(۲) $T > W_2$ و عدد ترازو $W_1 > W_2$

(۳) $T < W_2$ و عدد ترازو $W_1 < W_2$

(۴) $T < W_2$ و عدد ترازو $W_1 > W_2$

۳۹- مطابق شکل زیر، میله رسانایی به طول 20cm که روی یک رسانای U شکل قرار دارد، در مدت 0.4s به اندازه 10cm به

سمت راست حرکت می‌کند. اگر خط‌های میدان مغناطیسی درون سوی یکنواختی به بزرگی $0.2T$ عمود بر سطح قباب باشد،

اندازه نیروی محرکه القایی متوسط ایجاد شده بر حسب میلی‌ولت و جهت جریان القایی مطابق با کدام گزینه است؟

× × × ×

(۱) 0.1mV ، پادساعتگرد

× × × ×

(۲) 10mV ، پادساعتگرد

× × × ×

(۳) 0.1mV ، ساعتگرد

× × × ×

(۴) 10mV ، ساعتگرد

۴۰- معادله جریان الکتریکی گذرنده از یک سیملوله آرمانی در SI به صورت $I = 10 \sin 4\pi t$ است. اگر ضریب القاوری آن 20mH

باشد، بیشینه انرژی ذخیره شده در سیملوله چند ژول است؟

۰/۲ (۴)

۱۰۰۰ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

شیمی ۲

۴۱- چه تعداد از عبارتهای زیر نادرست است؟

شیمی ۲

کل کتاب

(الف) رسانایی گرمایی چهارمین عنصر دوره دوم جدول دوره‌ای، از سومین عنصر گروه ۱۴ بیشتر است.

(ب) در گروه ۱۴ جدول دوره‌ای تا دوره ششم، سه عنصر دارای رسانایی الکتریکی بالایی هستند.

(پ) در شرایط یکسان، سرعت واکنش کلر با گاز هیدروژن کمتر از سرعت واکنش گاز فلوئور با گاز هیدروژن است.

(ت) همواره در یک گروه، با افزایش شعاع اتمی، واکنش‌پذیری عنصرها افزایش می‌یابد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۴۲- از تجزیه ۲ کیلوگرم واکنش دهنده ناخالص در واکنش: $2\text{NaN}_3(s) \rightarrow 2\text{Na}(s) + 3\text{N}_2(g)$ ، 672 لیتر فرآورده گازی در

شرایط STP به دست می‌آید. درصد خلوص واکنش‌دهنده کدام است؟ ($N = 14, Na = 23 : \text{g.mol}^{-1}$)

۶۵ (۲)

۶۰ (۱)

۷۵ (۴)

۷۰ (۳)

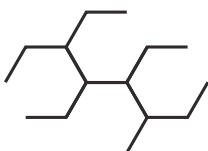
۴۳- کدام مطلب درباره ترکیب زیر نادرست است؟

(۱) تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در این ترکیب برابر با ۱۸ است.

(۲) نام آن ۳، ۴، ۵-تترا اتیل اوکتان است.

(۳) درصد جرمی کربن در آن به تقریب برابر با ۷۸.۵٪ است.

(۴) تعداد جفت الکترون‌های اشتراکی با مجموع تعداد اتم‌های آن برابر است.





۴۴- چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟

- (الف) ظرفیت گرمایی یک مول آلومینیم، با ظرفیت گرمایی ویژه $0/9 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ برابر با $24/3 \text{ J.K}^{-1}$ است. ($Al = 27 \text{ g.mol}^{-1}$)
 (ب) ظرفیت گرمایی ویژه در دما و فشار اتاق به نوع و مقدار ماده بستگی دارد.
 (پ) اگر به جرم مساوی از دو ماده با ظرفیت گرمایی ویژه متفاوت، 2000 J گرما بدهیم، تغییر دمای ماده با ظرفیت گرمایی کمتر، بیشتر خواهد بود.
 (ت) ظرفیت گرمایی ویژه یک ماده هم‌ارز با گرمای لازم برای افزایش دمای آن ماده به اندازه یک درجه سلسیوس است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۵- با توجه به داده‌های زیر، ΔH واکنش (IV) چند کیلوژول است؟

- I) $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \longrightarrow 2\text{NH}_3(\text{g}) \quad \Delta H_1 = -92 \text{ kJ}$
 II) $\text{N}_2\text{H}_4(\text{g}) + \text{H}_2(\text{g}) \longrightarrow 2\text{NH}_3(\text{g}) \quad \Delta H_2 = -187 \text{ kJ}$
 III) $2\text{H}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O}(\text{g}) \quad \Delta H_3 = -242 \text{ kJ}$
 IV) $\text{N}_2\text{H}_4(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \longrightarrow \text{N}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{g}) \quad \Delta H_4 = ?$

۳۳۷ (۱) ۵۲۱ (۲) -۵۲۱ (۳) -۳۳۷ (۴)

۴۶- با توجه به جدول زیر، آنتالپی واکنش مقابل چند کیلوژول است؟ $2\text{C}_2\text{H}_6(\text{g}) \longrightarrow \text{C}_2\text{H}_4(\text{g}) + \text{H}_2(\text{g})$

C-C	C-H	H-H	پیوند
۳۴۸	۴۱۵	۴۳۶	میانگین آنتالپی پیوند (kJ.mol^{-1})

۹۱۸ (۱) ۵۰۳ (۲) ۴۶ (۳) -۳۶۹ (۴)

۴۷- مقداری گاز N_2 و H_2 را وارد یک ظرف ۵ لیتری می‌کنیم. پس از ۱۰ دقیقه از انجام واکنش، $8/5$ گرم آمونیاک و 12 گرم

نیترژن در ظرف موجود است. مقدار اولیه گاز نیترژن چند گرم است و سرعت مصرف گاز هیدروژن چند $\text{mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$

- است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید) ($\text{H} = 1, \text{N} = 14; \text{g.mol}^{-1}$)
 $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \longrightarrow 2\text{NH}_3(\text{g})$
 ۰/۰۱۹، ۱۹ (۱) ۰/۰۱۵، ۱۹ (۲) ۰/۰۱، ۷ (۳) ۰/۰۱۵، ۷ (۴)

۴۸- کدام گزینه درست است؟

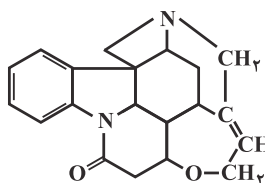
(۱) مولکول تفلون از اتم‌های هیدروژن، کربن و فلوئور تشکیل شده است.

(۲) پلی‌اتن سبک برخلاف پلی‌اتن سنگین در برابر نور کدر است.

(۳) نسبت شمار پیوندهای یگانه به دو گانه در مونومر سازنده پلی‌استیرن برابر ۳ است.

(۴) پلی‌آمیدها برخلاف پلی‌استرها در حضور آب تجزیه نمی‌شوند.

۴۹- با توجه به ساختار مقابل، چند مورد از عبارت‌های زیر درست هستند؟



(الف) دو گروه آمینی در ساختار آن وجود دارد.

(ب) ترکیبی آروماتیک است.

(پ) در این ساختار ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(ت) یکی از گروه‌های عاملی موجود در این ساختار، علت طعم و بوی گشنیز است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۰- در اثر واکنش مقداری متیل پروپانوات با آب، 111 گرم پروپانوئیک اسید تولید شده است. اگر درصد خلوص متیل پروپانوات برابر

با ۶۰٪ باشد، جرم متیل پروپانوات اولیه، چند گرم بوده است؟ ($\text{C} = 12, \text{H} = 1, \text{O} = 16; \text{g.mol}^{-1}$)

۲۲۰ (۱) ۷۹/۲ (۲) ۱۳۲ (۳) ۲۷۲/۸ (۴)



ریاضی ۱

ریاضی ۱
کل کتاب

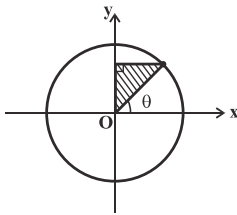
۵۱- اگر جملات سوم، چهارم و دهم از یک دنباله حسابی، به ترتیب برابر با جملات اول، دوم و چهارم یک دنباله هندسی با جملات افزایشی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۲- خط d ، خط $y=1$ را در طول ۳ و با زاویه 30° قطع می‌کند. در این صورت عرض از مبدأ خط d کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\sqrt{3}-1$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $1-\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۳- اگر مساحت مثلث هاشورخورده در دایره مثلثاتی شکل زیر برابر $\frac{1}{6}$ باشد، حاصل $\sin\theta + \cos\theta$ کدام است؟



- (۱) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (۲) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۴- اگر $A = \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \times (2-\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ باشد، مقدار A چند برابر $\sqrt{20}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\sqrt{5}$

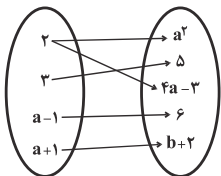
۵۵- نقطه (x_s, y_s) ، نقطه ماکزیمم سهمی $y = ax^2 - x - 2$ است. اگر $y_s \leq x_s$ باشد، حدود a کدام است و رأس سهمی در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد؟

- (۱) $a < 0$ ، دوم (۲) $a \leq -\frac{3}{8}$ ، دوم (۳) $a < 0$ ، سوم (۴) $a \leq -\frac{3}{8}$ ، سوم

۵۶- اگر جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+c}$ به صورت زیر باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

	۱	۲	
$f(x)$	-	+	-
	۰	۰	۰

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱



۵۷- شکل زیر، نمودار پیکانی تابع f است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۵۸- قرینه نمودار $y = |x+1|$ نسبت به محور x ها را ۲ واحد به سمت x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل نیمساز ناحیه چهارم را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) -۲

۵۹- یک روی سکه‌ای عدد ۲ و روی دیگرش عدد ۳ حک شده است. سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر ۲ بیاید، تاسی را ۲ بار و اگر ۳ بیاید، همان سکه را ۳ بار دیگر پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه این تجربه تصادفی چند عضو دارد؟

- (۱) ۲۸۸ (۲) ۴۴ (۳) ۲۰ (۴) ۴۸

۶۰- اگر یک عدد طبیعی چهاررقمی را با کنار هم قراردادن تصادفی ارقام متمایز ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ درست کنیم، احتمال آنکه این عدد زوج باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{25}$ (۲) $\frac{12}{25}$ (۳) $\frac{13}{25}$ (۴) $\frac{16}{25}$



هندسه ۱

هندسه ۱
کل کتاب

۶۱- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، نقاط B و C ثابت هستند و ضلع BA طول ثابت a دارد. با تغییر اندازه زاویه B ، محل برخورد دو قطر متوازی‌الاضلاع روی کدام یک از اشکال هندسی زیر قرار می‌گیرد؟

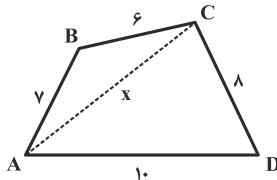
(۱) دو خط به فاصله $\frac{a}{2}$ از ضلع BC

(۲) دایره‌ای به مرکز O نقطه وسط ضلع BC و به شعاع $\frac{a}{2}$

(۳) دایره‌ای به مرکز O نقطه وسط ضلع BC و به شعاع a

(۴) دو خط به فاصله a از ضلع BC

۶۲- در شکل زیر به ازای چند مقدار صحیح x ، طول قطر AC از هیچ کدام از اضلاع چهارضلعی $ABCD$ کوچک تر نیست؟



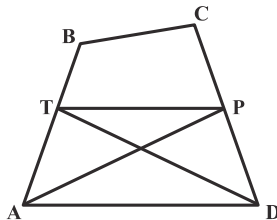
(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۳

۶۳- در شکل زیر $TP \parallel AD$ است. اگر مساحت چهارضلعی $ABCP$ برابر ۶ باشد، مساحت چهارضلعی $DTBC$ کدام است؟



(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۲

۶۴- از رأس A در مربع $ABCD$ به طول ضلع ۵، خطی رسم می‌کنیم به گونه‌ای که ضلع BC را در نقطه M و امتداد ضلع DC را

در نقطه N قطع کند. حاصل $\frac{1}{CM} - \frac{1}{CN}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{20}$

(۳) $\frac{2}{5}$

(۲) $\frac{1}{10}$

(۱) $\frac{1}{5}$

۶۵- مثلث ABC به طول اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ با مثلث $A'B'C'$ متشابه است. اگر طول کوچکترین ارتفاع مثلث دوم برابر $\frac{20}{13}$ باشد، محیط مثلث دوم کدام است؟

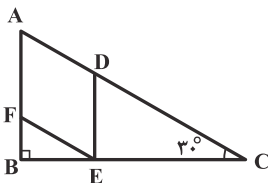
(۴) ۲۰

(۳) ۱۲

(۲) ۱۰

(۱) ۵

۶۶- در شکل زیر، چهارضلعی $ADEF$ لوزی است. اگر $AB = 3$ باشد، طول قطر کوچکتر این لوزی کدام است؟



(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) ۲

(۴) $\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{2}$

۶۷- در دوزنقه $ABCD$ ، نیمساز دو زاویه A و D همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. اگر $AO = 3$ و $DO = 4$ باشد، مجموع فواصل نقطه O از سه ضلع AB ، AD و DC کدام است؟

(۴) $7/2$

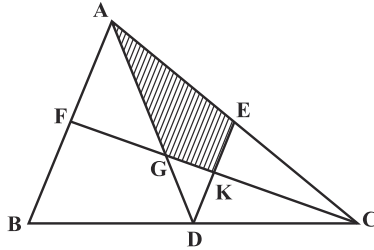
(۳) $3/6$

(۲) $4/8$

(۱) $2/4$



۶۸- در شکل زیر، G محل هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC و $DE \parallel AB$ است. اگر مساحت چهارضلعی $AGKE$ برابر ۲۵ باشد،



مساحت چهارضلعی $BFGD$ کدام است؟

۵۵ (۱)

۵۰ (۲)

۴۵ (۳)

۴۰ (۴)

۶۹- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

(۱) اگر دو خط d و d' موازی صفحه P باشند، آن‌گاه d و d' موازی هستند.

(۲) اگر دو صفحه P و P' موازی خط d باشند، آن‌گاه دارای فصل مشترکی موازی d هستند.

(۳) از نقطه A خارج صفحه P ، بی‌شمار صفحه عمود بر صفحه P می‌توان رسم کرد.

(۴) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که با هر دو خط متناظر d و d' موازی باشد.

۷۰- محیط سطح مقطع حاصل از تقاطع یک صفحه با کره‌ای به شعاع R برابر ۶π است. اگر فاصله مرکز کره از این صفحه برابر ۴ باشد، مساحت کره کدام است؟

۳۶π (۱)

۶۴π (۲)

۸۴π (۳)

۱۰۰π (۴)

فیزیک ۱

فیزیک ۱
کل کتاب

۷۱- مخروطی به جرم $۱۲۰۰g$ که دارای شعاع مقطع $۴cm$ و ارتفاع $۱۰cm$ است، از ماده‌ای به

چگالی $\frac{۲۰}{۳} \frac{g}{cm^3}$ ساخته شده است. اگر درون مخروط پنج حفره هم‌حجم وجود داشته باشد،

در صورتی که دو حفره را به‌طور کامل با روغن به چگالی $\frac{۸}{۳} \frac{g}{cm^3}$ پر کنیم، جرم مجموعه

چند گرم خواهد شد؟ ($\pi = ۳$)

۱۲۲۰ (۱)

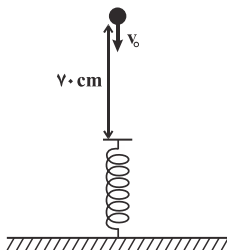
۱۲۳۰ (۲)

۱۲۳۲ (۳)

۱۲۳۸ (۴)

۷۲- مطابق شکل زیر، گلوله‌ای به جرم $۲۰۰g$ از فاصله ۷۰ سانتی‌متری بالای فنری قائم با جرم ناچیز، با تندی v به سمت فنر پرتاب می‌شود. اگر بیشینه فشردگی این فنر برابر با $۱۰cm$ باشد و در این حالت $\frac{۶}{۵} J$ انرژی پتانسیل کشسانی در مجموعه جسم و

فنر ذخیره شده باشد، v چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰ \frac{N}{kg}$ و اتلاف انرژی نداریم.)



۷ (۲)

$\sqrt{7}$ (۱)

۱۴ (۴)

$\sqrt{14}$ (۳)

۷۳- تندی اتومبیلی به جرم ۲ تن که در مسیری افقی در حال حرکت است، طی مدت ۲ ثانیه از $\frac{۳۶}{h} km$ به $\frac{۵۴}{h} km$ می‌رسد. اگر

توان تولیدی موتور این اتومبیل $۲۵۰kW$ باشد، بازده موتور آن چند درصد است؟ (فرض کنید تمام توان خروجی اتومبیل صرف افزایش تندی آن می‌شود.)

۴۰ (۴)

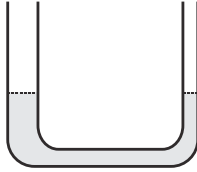
۳۰ (۳)

۲۰ (۲)

۲۵ (۱)

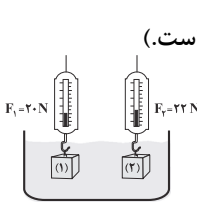


۷۴- در لوله U شکل زیر، سطح مقطع شاخه سمت چپ، دو برابر سطح مقطع شاخه سمت راست است و آب در حال تعادل است. اگر به ارتفاع ۶cm نفت به شاخه سمت چپ اضافه کنیم، بعد از ایجاد تعادل، سطح آب در شاخه سمت راست نسبت به حالت اولیه خود چند سانتی متر بالا می‌رود؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ، $\rho_{\text{نفت}} = 0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



$(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$ و $\rho_{\text{نفت}} = 0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ، $\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ، $\rho_{\text{نفت}} = 0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$
 ۴/۸ (۱)
 ۲/۴ (۲)
 ۳/۲ (۴)
 ۱/۶ (۳)

۷۵- دو جسم هم جنس با چگالی $20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و ظاهری یکسان را به نیروسنج‌هایی آویزان کرده و مطابق شکل درون سیالی غوطه‌ور می‌کنیم. اگر بعد از ایجاد تعادل، نیروسنج‌های (۱) و (۲) به ترتیب 20N و 22N را نشان دهند، کدام جسم دارای حفره است و حجم حفره درون آن چند سانتی متر مکعب است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و یک جسم توپُر و یک جسم دارای حفره است.)



$(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$ و یک جسم توپُر و یک جسم دارای حفره است.
 ۱۰۰، (۱) (۱)
 ۱۰۰، (۲) (۲)
 ۱۰، (۱) (۳)
 ۱۰، (۲) (۴)

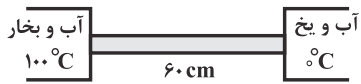
۷۶- درصد تغییرات چگالی یک جسم جامد در اثر افزایش دمای 80°C برابر با 0.6% درصد است. اگر میله‌ای به طول 2m از همین جنس داشته باشیم، در اثر افزایش دمای 40°C طول آن چند سانتی متر تغییر می‌کند؟

2×10^{-3} (۱)
 6×10^{-3} (۲)
 0.2 (۳)
 0.6 (۴)

۷۷- درون 4kg آب 20°C ، یک گرمکن الکتریکی با توان $1/6\text{kW}$ قرار می‌دهیم. پس از 61 دقیقه چند کیلوگرم از آب باقی می‌ماند؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ ، $L_V = 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ و اتلاف انرژی نداریم.)

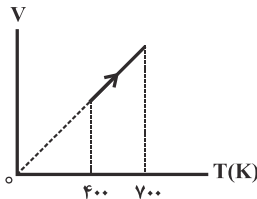
۳ (۱)
 ۲ (۲)
 ۱ (۳)
 صفر (۴)

۷۸- مطابق شکل زیر، میله رسانایی با ابعاد $60\text{cm} \times 7\text{cm} \times 4\text{cm}$ بین دو منبع گرمایی قرار گرفته است. اگر در مدت 4 دقیقه، 40 گرم از یخ موجود در منبع سرد ذوب شود، رسانندگی گرمایی میله چند واحد SI است؟ ($L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}$)



40 (۱)
 60 (۲)
 120 (۴)
 80 (۳)

۷۹- نمودار $V-T$ فرایندی که نیم‌مول گاز کامل طی می‌کند، مطابق شکل زیر است. کاری که گاز طی این فرایند روی محیط انجام می‌دهد، برابر با چند ژول است؟ ($R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$)



1200 (۱)
 -1200 (۲)
 2400 (۳)
 -2400 (۴)

۸۰- یک ماشین گرمایی آرمانی در هر چرخه 270kJ گرما از چشمه گرم می‌گیرد. اگر بازده آن 40% باشد، توسط کار تولیدی این ماشین در چهار چرخه، می‌توان جسمی به جرم m را با تندی ثابت از سطح زمین تا ارتفاع $10/8$ متری سطح زمین بالا برد.

$(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$ ؟
 4×10^3 (۱)
 400 (۲)
 10^3 (۳)
 100 (۴)



شیمی ۱

شیمی ۱
کل کتاب

۸۱- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) با افزایش عدد جرمی ایزوتوپ‌های هیدروژن، نیم‌عمر آنها همواره کاهش می‌یابد.
 (۲) هسته برخی عناصر، با وجود نسبت نوترون به پروتون کوچکتر از ۱/۵، همچنان پرتوزا است.
 (۳) فراوانی ایزوتوپ ^{235}U در مخلوط طبیعی عنصر اورانیم، کمتر از ۷٪ درصد است.
 (۴) در مقیاس amu، جرم پروتون اندکی کمتر از جرم نوترون است.

۸۲- همه عبارت‌های زیر درست‌اند، به جز...

- (۱) آرایش الکترونی گونه‌ای که به $3p^6$ ختم شده است می‌تواند به یک آنیون، کاتیون یا اتم خنثی مربوط باشد.
 (۲) تعداد عنصرهای دسته d جدول تناوبی، بیشتر از عنصرهای دسته p است.
 (۳) عنصرهای هم‌گروه به دلیل داشتن خواص شیمیایی مشابه، طیف نشری خطی مشابهی دارند.
 (۴) الکترون در هر لایه‌ای که باشد، در همه نقاط پیرامون هسته حضور می‌یابد.

۸۳- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) اگر آرایش الکترونی دو عنصر X و Y به ترتیب به $2p^2$ و $2p^4$ ختم شود، ترکیب‌های پایدار XY و XY_3 قابل تشکیل است.
 (ب) طیف نشری خطی حاصل از عنصرها بصورت نواری پیوسته از رنگ‌های خاص است.
 (پ) هر چه از هسته دورتر شویم، اختلاف سطح انرژی لایه‌های الکترونی کمتر می‌شود.
 (ت) دوره سوم جدول دوره‌ای شامل ۱۸ عنصر است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۴- اگر اختلاف تعداد الکترون و نوترون در یون X^{3+} برابر ۱۱ باشد، عدد اتمی عنصر X کدام است و در کدام گروه از جدول دوره‌ای قرار دارد؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید).

(۱) ۱۲، ۳۱ (۲) ۱۳، ۳۱
 (۳) ۱، ۳۹ (۴) ۲، ۳۹

۸۵- کدام یک از عبارت‌های زیر در مورد تقطیر جزء به جزء هوای مایع نادرست است؟

- (الف) در تقطیر جزء به جزء، ابتدا گاز نیتروژن، سپس اکسیژن و در نهایت آرگون جداسازی می‌شود.
 (ب) تهیه اکسیژن صد در صد خالص در این فرایند دشوار است.
 (پ) گاز کربن دی‌اکسید در هوای مایع به مقدار ناچیزی وجود دارد.
 (ت) هر چه اختلاف نقطه جوش دو ماده بیشتر باشد، جداسازی آن آسان‌تر است.

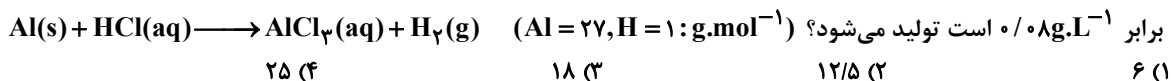
(۱) الف و ت (۲) الف و پ
 (۳) ب و پ (۴) ب و ت

۸۶- پس از موازنه واکنش زیر، نسبت مجموع ضرایب فراورده‌ها به مجموع ضرایب واکنش دهنده‌ها کدام است؟



(۱) ۱ (۲) $\frac{8}{9}$
 (۳) $\frac{12}{7}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۸۷- از واکنش ۹ گرم آلومینیم با مقدار کافی هیدروکلریک اسید طی واکنش موازنه نشده زیر، چند لیتر گاز در شرایطی که چگالی گاز





۸۸- همه عبارت‌های زیر درست هستند، به جز...

- (۱) در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۴ مولار سدیم هیدروکسید، تعداد $10^{23} \times 4 \times 10^2$ یون سدیم وجود دارد.
 (۲) در بین ترکیب‌های HCl ، NH_3 و HBr کمترین نقطه جوش مربوط به HCl است.
 (۳) نیاز روزانه بدن هر فرد بالغ به یون سدیم دو برابر یون پتاسیم است.
 (۴) محلول آبی ۰/۱ مولار KCl رسانای قوی جریان برق است.

۸۹- چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟

- (الف) مقایسه انحلال‌پذیری گازهای NO ، CO_2 و N_2 در دما و فشار معین به صورت $CO_2 > NO > N_2$ است.
 (ب) چروکیده شدن خیار در آب شور نمونه‌ای از فرایند اسمز است.
 (پ) مطابق قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها در آب با دما رابطه معکوس دارد.

(ت) در دمای $25^\circ C$ و فشار 1 atm ، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در آب آشامیدنی بیشتر از آب دریا است.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۹۰- ۱۰۰ گرم محلول سیر شده KNO_3 در دمای $38^\circ C$ در اختیار داریم. اگر دمای این محلول را به $30^\circ C$ برسانیم، غلظت یون NO_3^- موجود در محلول چند برابر حالت اول خواهد بود؟ (حجم محلول ثابت فرض شود.

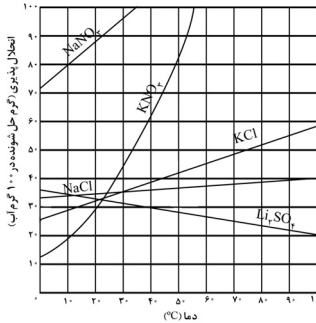
$$(N = 14, O = 16, K = 39 : g.mol^{-1})$$

(۱) ۱/۴۸

(۲) ۰/۲۳

(۳) ۰/۴

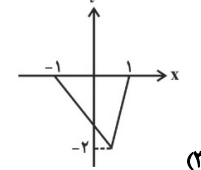
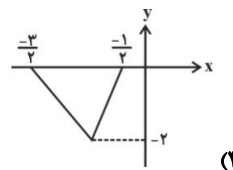
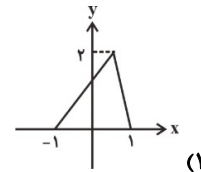
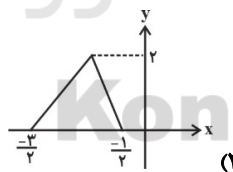
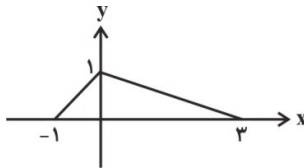
(۴) ۰/۷۵



حسابان ۲

تابع، مثلثات

صفحه‌های ۱ تا ۴۴



۹۲- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \frac{1}{[2x] + x}$ با دامنه \mathbb{R}^+ درست است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

(۲) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

(۳) نه صعودی است و نه نزولی.

(۴) اکیداً نزولی است.



۹۳- اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد و برای هر x حقیقی، $f(x) \leq x$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x) < f(x^2 + 1)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 0)$
 (۲) \emptyset
 (۳) \mathbb{R}
 (۴) $(0, 1)$

۹۴- اگر $f(x) = 1 - |1 - x^2|$ باشد، تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ در کدام یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-2, -\frac{1}{2})$
 (۲) $(-1, \frac{1}{2})$
 (۳) $(\frac{1}{2}, 2)$
 (۴) $(-3, -\frac{3}{2})$

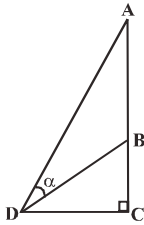
۹۵- اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد و نمودار تابع $y = x + f(x)$ محور x ها را در نقاط به طول $x=1$ و $x=2$ قطع کند، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

- (۱) x
 (۲) $-x$
 (۳) $x+1$
 (۴) $1-x$

۹۶- اگر دوره تناوب تابع $y = 3 - 5 \sin ax$ دو برابر دوره تناوب تابع $y = 1 + \cos 3x$ باشد، مقدار a کدام است؟ ($a > 0$)

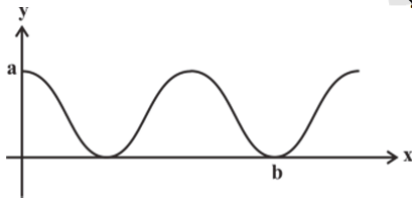
- (۱) $\frac{2}{3}$
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) 3
 (۴) $\frac{1}{3}$

۹۷- در مثلث قائم الزاویه شکل زیر، اگر $CD = 1$ ، $AC = 5$ و $AB = 3$ باشد، $\tan \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{11}$
 (۲) $\frac{5}{9}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{1}{8}$

۹۸- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4}$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟



Konkur.in

- (۱) $2\pi + \frac{1}{2}$
 (۲) $2\pi + 1$
 (۳) $\frac{3\pi + 1}{2}$
 (۴) $\frac{3\pi + 2}{2}$

۹۹- انتهای کمان جواب‌های معادله $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} + x) = 0$ روی دایره مثلثاتی در فاصله $[0, \pi]$ ، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

- (۱) مثلث قائم الزاویه
 (۲) مثلث متساوی الساقین
 (۳) دوزنقه
 (۴) مربع

۱۰۰- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$ ، در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$
 (۲) $\frac{7\pi}{2}$
 (۳) 2π
 (۴) π



هندسه ۳

هندسه ۳

ماتریس و کاربردها
صفحه‌های ۹ تا ۳۱

$$101- \text{معادله } \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & x & 1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0 \text{ چند جواب دارد؟}$$

- (۱) فقط یک جواب ساده
(۲) فقط یک جواب مضاعف
(۳) یک جواب ساده و یک جواب مضاعف
(۴) سه جواب متمایز

$$102- \text{برای ماتریس مربعی } A \text{ از مرتبه } 3, \text{ رابطه } A^2 = 6I \text{ برقرار است. دترمینان ماتریس } A \text{ کدام است؟}$$

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۱

$$103- \text{اگر } A \text{ یک ماتریس } 3 \times 3 \text{ باشد به طوری که } |A| = \frac{1}{4}, \text{ آنگاه دترمینان وارون ماتریس } 2A^2 \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{8}$

$$104- \text{اگر } A \text{ و } B \text{ ماتریس‌های مربعی مرتبه } 2 \text{ باشند به طوری که } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } A + B = AB, \text{ وارون ماتریس } B \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$105- \text{اگر } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } AX = B - 2I \text{ باشد، آنگاه ماتریس } X \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -19 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 13 & -6 \\ -19 & -3 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} 13 & 2 \\ -19 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 13 & 2 \\ -25 & -3 \end{bmatrix}$

ریاضیات گسسته

$$106- \text{چند مقدار طبیعی و دو رقمی } a \text{ وجود دارد به طوری که دو عدد } 3n + a \text{ و } 7n + 3 \text{ به ازای هر } n \in \mathbb{N}, \text{ نسبت به هم اول باشند؟}$$

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

$$107- \text{به ازای چند عدد صحیح } n, \text{ بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد } n^2 - n \text{ و } n^2 + n \text{ برابر ۹ است؟}$$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) هیچ

$$108- \text{در یک تقسیم، مقسوم، مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت، اعدادی اول و باقی‌مانده، برابر ۱۱ است. خارج‌قسمت این تقسیم کدام است؟}$$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

$$109- \text{برای چند عدد طبیعی } n, \text{ رابطه } 2n^2 + 1 | 3n + 3 \text{ برقرار است؟}$$

- (۱) هیچ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

ریاضیات گسسته

آشنایی با نظریه اعداد
صفحه‌های ۱ تا ۳۰



- ۱۱۰- خارج قسمت تقسیم ۷۸۷ بر چند عدد طبیعی برابر ۱۰ است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶
- ۱۱۱- اگر $3a \equiv 7$ و $5a \equiv 2b$ ، آنگاه باقی مانده تقسیم b بر ۱۱ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۱۱۲- کوچک ترین عدد طبیعی a برای این که رابطه $a \equiv 0 \pmod{3^1 + 3^1 + 3^1}$ برقرار باشد، کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۵
- ۱۱۳- اعداد صحیح x و y در معادله $1000 = 23x + 45y^2$ صدق می کنند. باقی مانده تقسیم x بر ۹ کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۱۱۴- به ازای کدام مقدار n ، معادله سیاله $(2m^2 + 1)x + (2m - 4)y = n$ ، همواره در Z جواب دارد؟
 (۱) ۴۹ (۲) ۵۴ (۳) ۶۶ (۴) ۷۵
- ۱۱۵- به ازای چند مقدار a ، باقی مانده تقسیم عدد $13a79$ بر دو عدد ۹ و ۱۱ یکسان است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

فیزیک ۳

۱۱۶- در شرایط خلأ، دو گلوله به فاصله زمانی $2/5$ s از یک نقطه بالای سطح زمین از حال سکون رها می شوند.

چند ثانیه پس از رها شدن گلوله اول، فاصله دو گلوله به $68/75$ m می رسد؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ و ارتفاع به

اندازه کافی زیاد است.)

- (۱) $2/5$
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) $4/5$

۱۱۷- نیروی F به جرم m کیلوگرم شتاب $1/2 \frac{m}{s^2}$ و به جرم $(m + 5)$ کیلوگرم شتاب $8 \frac{m}{s^2}$ می دهد. m چند کیلوگرم است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۱۱۸- کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

- (۱) اگر دو نفر هر یک با نیروی 10 N و دو سر طنابی افقی را بکشند، نیروی کشش طناب برابر 20 N است.
 (۲) زمانی که نیروی خالص وارد بر جسمی صفر نیست، جسم میل دارد وضعیت حرکت خود را حفظ کند.
 (۳) اگر پرنده ای به یک هواپیمای در حال پرواز برخورد کند، بزرگی نیروی وارد بر پرنده از طرف هواپیما برابر با بزرگی نیروی وارد بر هواپیما از طرف پرنده است.

(۴) برایند نیروهای کنش و واکنش (عمل و عکس العمل) صفر است.

۱۱۹- فنر بدون جرمی با طول اولیه l_0 و ثابت فنر k از سقف یک آسانسور ساکن آویزان شده است. بار اول جرم m را به انتهای فنر متصل کرده و

بعد از ایجاد تعادل، آسانسور با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ به طرف بالا شروع به حرکت می کند. بار دوم جرم m' را به انتهای فنر متصل کرده و بعد از

ایجاد تعادل، آسانسور با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ از حالت سکون به طرف پایین شروع به حرکت می کند. اگر افزایش طول فنر نسبت به طول اولیه

در حالت دوم، ۲ برابر حالت اول باشد، حاصل $\frac{m'}{m}$ کدام است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

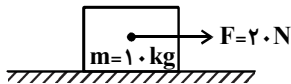
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

فیزیک ۳
 حرکت بر خط راست،
 دینامیک و حرکت دایره ای
 صفحه های ۱ تا ۴۶



۱۲۰- در شکل زیر، نیروی افقی $F = 20 \text{ N}$ بر جسمی به جرم 10 kg وارد می‌شود و جسم هم‌چنان ساکن است. در این صورت کدام یک از

$$\text{گزینه‌های زیر، الزاماً صحیح است؟ } (g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$



- (۱) ضریب اصطکاک جنبشی بین سطح و جسم کوچک‌تر از $0/2$ است.
- (۲) ضریب اصطکاک جنبشی بین سطح و جسم بزرگ‌تر یا مساوی $0/2$ است.
- (۳) ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح و جسم کوچک‌تر از $0/2$ است.
- (۴) ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح و جسم بزرگ‌تر یا مساوی $0/2$ است.

۱۲۱- جسمی را با سرعت افقی $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ روی یک سطح افقی که ضریب اصطکاک جنبشی آن برابر با $0/2$ است، پرتاب می‌کنیم. چند

$$\text{ثانیه طول می‌کشد تا جسم متوقف شود؟ } (g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$

- | | |
|--------|------------------------------|
| (۱) ۱۰ | (۲) ۵ |
| (۳) ۲۵ | (۴) باید جرم جسم معلوم باشد. |

۱۲۲- اتومبیلی به جرم 1 تن پس از طی مسافت 500 m با شتاب ثابت، اندازه سرعتش از $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ می‌رسد. اندازه نیروی

خالص وارد بر اتومبیل چند نیوتون است؟

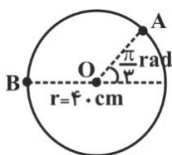
- | | |
|----------|----------|
| (۱) ۶۰۰ | (۲) ۳۰۰ |
| (۳) ۱۲۰۰ | (۴) ۱۸۰۰ |

۱۲۳- شخصی به جرم 60 kg درون یک آسانسور به جرم 800 kg ایستاده است. وقتی آسانسور از حال سکون به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند، اندازه نیروی کشش کابل آن برابر با 7740 N می‌شود. در این حالت اندازه نیرویی که از طرف کف آسانسور به

$$\text{شخص وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ } (g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$

- | | |
|---------|---------|
| (۱) ۵۴۰ | (۲) ۶۰۰ |
| (۳) ۶۶۰ | (۴) ۲۴۰ |

۱۲۴- مطابق شکل زیر، ذره‌ای که بر روی محیط دایره‌ای به شعاع 40 cm حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، در مدت 2 s از نقطه A به نقطه B می‌رسد. کمینه تندی این ذره چند متر بر ثانیه است؟ ($\pi = 3$)



- | |
|---------|
| (۱) ۰/۱ |
| (۲) ۰/۲ |
| (۳) ۰/۳ |
| (۴) ۰/۴ |

۱۲۵- خشک‌کن یک لباسشویی به صورت استوانه‌ای با محور قائم به شعاع 1 m است که با دوران سریع خود می‌تواند لباس‌ها را خشک کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی لباس‌ها با سطح داخلی استوانه برابر با $0/4$ باشد، بیشینه دوره حرکت دورانی استوانه قائم

$$\text{چند ثانیه باشد تا لباس‌ها فرو نریزند؟ } (g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, \pi = 3)$$

- | | |
|---------|---------|
| (۱) ۵ | (۲) ۲/۴ |
| (۳) ۱/۲ | (۴) ۳ |



شیمی ۳

شیمی ۳

مولکول‌ها در خدمت تدرسی،
آسایش و رفاه در سایه شیمی
صفحه‌های ۱ تا ۳۶

۱۲۶- از بین دو ماده سدیم هیدروکسید و پتاسیم هیدروکسید، ترکیب مناسب را برای تبدیل چربی $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_6\text{COOH}$ به صابون جامد را انتخاب می‌کنیم. برای تبدیل ۸ / ۹۰۸ گرم از این چربی به صابون جامد، چند گرم از ترکیب انتخاب شده مصرف می‌شود؟

$$(K = 39, Na = 23, O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1})$$

۱۲۸ (۱)

۱۲۸۰ (۲)

۱۷۹ / ۲ (۳)

۱۷۹۲ (۴)

۱۲۷- کدام عبارت نادرست است؟

(۱) در منابع علمی به جای $\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ از نماد $\text{H}^+(\text{aq})$ استفاده می‌کنند.

(۲) یکی از اهداف الکتروشیمی اطمینان از کیفیت فرآورده‌هاست.

(۳) درصد یونش یک اسید همیشه بین ۰ و ۱ است.

(۴) فورمیک اسید، قدرت اسیدی بیشتری از استیک اسید دارد.

۱۲۸- در واکنش $2A(g) + bB(g) \rightleftharpoons cC(g) + 2D(g)$ اگر به ازای تولید هر مول D، نیم مول C تولید شود، ثابت تعادل چند

$$L.mol^{-1} \text{ است؟ } \left(\frac{[D]}{[A]} = 2, [C] = 3 mol.L^{-1}, [B] = 4 mol.L^{-1} \right)$$

۳ (۱)

۱ / ۵ (۲)

۰ / ۳۷۵ (۳)

۰ / ۷۵ (۴)

۱۲۹- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

(۱) شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضداسیدها بوده که شامل منیزیم هیدروکسید است و به عنوان یک سوسپانسیون در نظر گرفته می‌شود.

(۲) اگر در نمونه‌ای از عصاره گوجه فرنگی، غلظت یون هیدرونیوم 4×10^6 برابر غلظت یون هیدروکسید باشد، pH نمونه برابر ۳ / ۷ است.

(۳) درجه یونش محلول ۰ / ۲۵ مولار آمونیاک برابر با ۸ / ۸ است. $(K_b = 1/6 \times 10^{-5})$

(۴) آمونیاک از جمله بازهای ضعیف است؛ به طوری که در محلول آن افزون بر مقدار کمی از یون‌های آب پوشیده، شمار بسیاری از مولکول‌های آمونیاک نیز یافت می‌شود.

۱۳۰- کدام یک از موارد زیر درست هستند؟

(الف) برای کاهش عوارض مصرف آسپرین می‌توان از $\text{Al}(\text{OH})_3$ استفاده کرد.

(ب) کلسیم اکسید، یک اکسید بازی است و کاغذ pH را به رنگ نارنجی تغییر می‌دهد.

(پ) رنگ گل ادریسی در خاکی که غلظت OH^- در آن برابر 5×10^{-10} مول بر لیتر است، آبی است.

(ت) در دما و غلظت یکسان مجموع بار محلول HCl از HF بیشتر است.

۴) پ، ت

۳) الف، ب

۲) الف، ت، پ

۱) الف، پ



حسابان ۱

گزینه «۴» - ۱

با جای گذاری $x = \beta$ و $x = \alpha$ در معادله داریم:

$$2\alpha^2 - 6\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha = 1$$

$$2\beta^2 - 6\beta - 1 = 0 \Rightarrow 2\beta^2 - 6\beta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha^2 - 6\alpha}{\beta} + \frac{2\beta^2 - 6\beta}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

گزینه «۱» - ۲

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{m} \quad x \neq 0, -1 \rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{1}{m}; m \neq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (1-2m)x - m = 0$$

برای اینکه معادله درجه دوم فوق جواب داشته باشد، باید $\Delta \geq 0$ باشد.

$$\Rightarrow \Delta = (1-2m)^2 + 4m = 1 + 4m^2 \geq 0$$

به ازای هر مقدار ناصفر m ، $\Delta \geq 0$ می‌باشد، پس مقادیر صحیح m به صورت زیر است:

$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

بنابراین مجموع مقادیر آن صفر است.

گزینه «۱» - ۳

هر خط با شیب مثبت، وارونش را روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کند.

$$\Rightarrow a = 2$$

همچنین نقطه $(2, 2)$ در معادله خط صدق می‌کند:

$$\Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(2) + b \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow a - b = 2 - 1 = 1$$

گزینه «۴» - ۴

$$(f \circ g)(x) + \underbrace{(g \circ g^{-1})(x)}_x = 4x^2 + 5x - 3$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x - 3 \Rightarrow f(2x-1) = 4x^2 + 4x - 3$$

با فرض $t = 2x - 1$ ، داریم $x = \frac{t+1}{2}$ پس:

$$f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{t+1}{2}\right) - 3 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 1 + 2t + 2 - 3$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 4t \Rightarrow f(1) = 5$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(5) = 2(5) - 1 = 9$$

گزینه «۲» - ۵

ابتدا شروط مربوط به دامنه را بررسی می‌کنیم:

$$\log \sqrt{9} x \Rightarrow x > 0$$

$$\log_9 x \Rightarrow x > 0$$

$$\sqrt{\log_9 x} \Rightarrow \log_9 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\Rightarrow x \in [1, +\infty)$$

برای حل این معادله لگاریتمی، ابتدا لازم است تمامی پایه‌ها برابر باشند:

$$\log \sqrt{9} x - 3\sqrt{\log_9 x} + 1 = 2\log_9 x - 3\sqrt{\log_9 x} + 1 = 0$$

حال با فرض $\sqrt{\log_9 x} = t$ داریم:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\log_9 x} = 1 \Rightarrow x = 9 \\ t = \sqrt{\log_9 x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$$

هر دو جواب به دست آمده در شروط دامنه صدق می‌کنند و حاصل ضرب آن‌ها

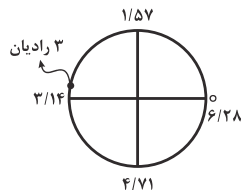
$$\Rightarrow a = \frac{5}{2} \quad 9\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \quad \text{برابر است با } 3\sqrt{2}$$

گزینه «۴» - ۶

با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ داریم:

$$A = -\left(1 - 2\sin^2 \frac{1}{5}\right) = -\cos 2$$

زاویه ۳ رادیان را روی دایره مثلثاتی شکل زیر مشاهده می‌کنید:



۳ رادیان بین $\frac{5\pi}{6}$ و π رادیان قرار دارد، در نتیجه داریم:

$$\cos \pi < \cos 3 < \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow -1 < \cos 3 < -\frac{\sqrt{3}}{2} \times (-1) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < -\cos 3 < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < A < 1$$

گزینه «۱» - ۷

$$A = \sqrt{1 - 2\sin x \cos x} - \cos x$$

$$= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} - \cos x$$

$$= \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} - \cos x = |\sin x - \cos x| - \cos x$$

$$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow A = -\sin x + \cos x - \cos x$$

$$\Rightarrow A = -\sin x$$

حد چپ: $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 \cos^2 x}}$

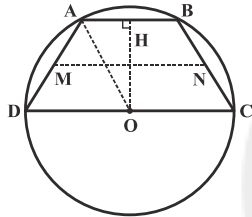
$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2} |\cos x|} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2} \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{2} \cos x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sqrt{2} \sin x) = \sqrt{2}$$

چون حد چپ و حد راست برابر نیستند، به ازای هیچ مقدار a تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته نخواهد بود.

هندسه ۲

۱۱- گزینه «۴»



می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین داریم:

$$AH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\Delta AHO: AO^2 = AH^2 + OH^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AO = 13$$

می‌دانیم AO همان شعاع دایره است، پس داریم:

$$DO = CO = AO = R = 13$$

$$\Rightarrow CD = 26$$

طول پاره‌خطی که وسط ساق‌های دوزنقه را بهم وصل می‌کند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow MN = \frac{10 + 26}{2} = 18$$

۱۲- گزینه «۲»

هر دو n ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند. اگر S و S' به ترتیب مساحت‌های n

ضلعی منتظم محاط در دایره و n ضلعی منتظم محیط بر دایره باشند، آنگاه داریم:

$$\frac{S' - S}{S'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{نسبت اضلاع} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

می‌دانیم طول هر ضلع n ضلعی منتظم محیطی و محیطی یک دایره به شعاع R

به ترتیب از روابط $2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ و $2R \tan \frac{180^\circ}{n}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{2R \sin \frac{180^\circ}{n}}{2R \tan \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{n} = 30^\circ \Rightarrow n = 6$$

۸- گزینه «۳»

چون تابع در $x = 3$ حد دارد پس تابع f در همسایگی $x = 3$ باید تعریف شود و این زمانی امکان‌پذیر است که عبارت زیر رادیکال یعنی $(x-1)(x-3)(x+a)$ در همسایگی ۳ نامنفی شود. پس باید $x = 3$ ریشهٔ عبارت $2x + a = 0$ نیز باشد، بنابراین $a = -6$ خواهد بود. در این صورت داریم:

$$f(x) = \sqrt{2(x-3)^2(x-1)} = |x-3| \sqrt{2(x-1)}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \Rightarrow a + L = -6 + 0 = -6$$

۹- گزینه «۳»

ابتدا عبارت جزء صحیح را عددگذاری می‌کنیم و سپس داخل قدرمطلق را در نقطه $x = 3$ تعیین علامت می‌کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x + 1 + \underbrace{-2(3^-)}_{\text{منفی}} - \sqrt{x^2 - 8}}{x(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 5 - \sqrt{x^2 - 8}}{-x(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{2x - 5 - \sqrt{x^2 - 8}}{-x(x-3)} \times \frac{2x - 5 + \sqrt{x^2 - 8}}{2x - 5 + \sqrt{x^2 - 8}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(2x - 5)^2 - (x^2 - 8)}{-2x(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2 - 20x + 23}{-2x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(2x-11)}{-2x(x-3)}$$

$$= \frac{-2}{-2(3)} = \frac{1}{3}$$

۱۰- گزینه «۴»

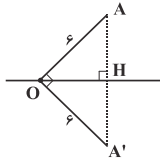
شرط پیوسته بودن تابع در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ این است که رابطهٔ

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

حد راست: $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 \cos^2 x}}$

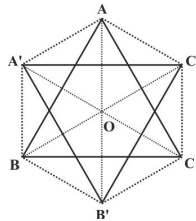
$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2} |\cos x|} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin 2x}{-\sqrt{2} \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2 \sin x \cos x}{-\sqrt{2} \cos x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (-\sqrt{2} \sin x) = -\sqrt{2}$$



$$S_{\triangle OAA'} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$

۱۶ - گزینه «۴»



فرض کنیم O نقطه هم‌مرسی میانه‌های مثلث ABC باشد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه‌ها برابر یکدیگرند، پس $\frac{2}{3}$ طول آنها نیز با هم برابر است. از طرفی دوران تبدیلی طولیا است، بنابراین داریم:

$$OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$$

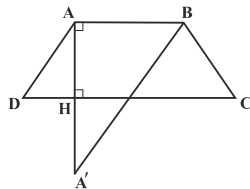
$$\widehat{AOA'} = \widehat{A'OB} = \widehat{BOB'} = \widehat{B'OC} = \widehat{COC'} = \widehat{C'OA} = 60^\circ$$

پس شش ضلعی AA'BB'CC' منظم است و مثلث AOA' متساوی‌الاضلاع است، چون زاویه O، ۶۰ درجه بوده و دو ضلع OA و OA' برابرند، پس AA' = AO می‌باشد. از طرفی طول AO، $\frac{2}{3}$ طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. پس داریم:

$$AO = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} \right) = 6$$

$$AA' = AO = 6 \Rightarrow \text{محیط شش ضلعی} = 6 \times 6 = 36$$

۱۷ - گزینه «۲»



برای پیدا کردن کمترین مقدار MA + MB به گونه‌ای که M روی قاعده CD باشد، کافی است بازتاب نقطه A را نسبت به ضلع CD یافته و آن را A' بنامیم و سپس مقدار A'B' را به دست آوریم (این مقدار دقیقاً برابر با کمترین مقدار MA + MB است).
با توجه به مفروضات سؤال داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH(AB + CD) \Rightarrow 39 = \frac{1}{2} AH(5 + 8) \Rightarrow AH = 6$$

$$\Rightarrow AA' = 12$$

$$\triangle A'AB: A'B^2 = AA'^2 + AB^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow A'B = 13$$

۱۳ - گزینه «۱»

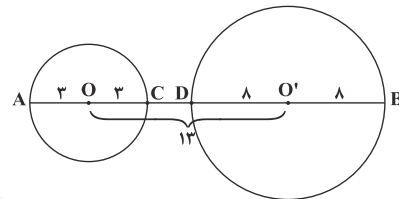
اگر R و R' شعاع‌های دو دایره و d طول خط‌المرکزین آنها باشد، آنگاه داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی دو دایره} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow 12 = \sqrt{d^2 - (3 - 8)^2} \Rightarrow 144 = d^2 - 25$$

$$\Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13$$

دو دایره متخارج‌اند $\Rightarrow d > R + R'$



$$\left. \begin{aligned} \text{بیشترین فاصله نقاط دو دایره} &= AB = 13 + 3 + 8 = 24 \\ \text{کمترین فاصله نقاط دو دایره} &= CD = 13 - (3 + 8) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{24}{2} = 12$$

۱۴ - گزینه «۳»

روش اول:

اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۶ باشند، آنگاه داریم:

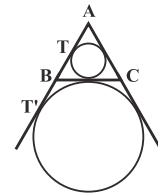
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 9\sqrt{3}$$

$$P = \frac{1}{2} (3 \times 6) = 9$$

شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی این مثلث از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{9\sqrt{3}}{9 - 6} = 3\sqrt{3}$$



مطابق شکل دایره‌های محاطی داخلی و خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع، مماس خارج هستند، بنابراین طول مماس مشترک خارجی آنها برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{r \times r_a} = 2\sqrt{\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}} = 2 \times 3 = 6$$

روش دوم:

$$AT' = P = 9, AT = P - a = 9 - 6 = 3$$

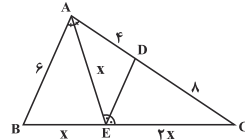
$$TT' = AT' - AT = 9 - 3 = 6$$

۱۵ - گزینه «۴»

واضح است که زاویه AOH برابر ۴۵° است، در نتیجه زاویه AOA' برابر ۹۰° خواهد بود. همچنین بازتاب تبدیلی طولیا است، بنابراین OA' = OA = ۶ است و در نتیجه داریم:



۱۸- گزینه «۲»



مطابق شکل اگر $AE = x$ فرض شود، آنگاه بنا به قضیه نیمساز زاویه های داخلی داریم:

$$\Delta AEC: DE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{x}{2x} \Rightarrow EC = 2x$$

$$\Delta ABC: AE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{x}{2x} \Rightarrow BE = x$$

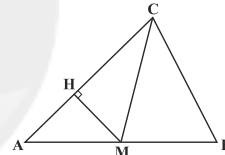
حال با توجه به رابطه طول نیمساز زاویه داخلی داریم:

$$AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot EC \Rightarrow x^2 = 6 \times 12 - x \times 2x \Rightarrow 3x^2 = 72$$

$$\Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

۱۹- گزینه «۲»

فرض کنیم $AB = 6$ ، $AC = 7$ و $BC = 5$ باشد، با استفاده از قضیه هرون برای مثلث ABC داریم:



$$P = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

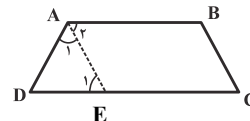
$$\Rightarrow S = \sqrt{9 \times (9-5)(9-7)(9-6)} = 6\sqrt{6}$$

میانه CM مساحت مثلث ABC را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند:

$$S_{\Delta AMC} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}MH \cdot AC \Rightarrow 3\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times MH \times 7 \Rightarrow MH = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

۲۰- گزینه «۲»



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_\gamma = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AE \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_\gamma = \hat{E}_1 = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} AE \parallel BC \\ DC \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}_1 = \alpha$$

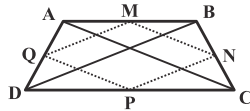
از طرفی می دانیم:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث ABD ، طول قطر BD را محاسبه

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos A \quad \text{می کنیم:}$$

$$= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 \Rightarrow BD = 7 \Rightarrow AC = 7$$



محیط چهارضلعی حاصل از وصل کردن وسط اضلاع ذوزنقه، برابر مجموع طول قطرهای آن است، پس داریم:

$$\text{محیط } (MNPQ) = AC + BD = 2 \times 7 = 14$$

آمار و احتمال

۲۱- گزینه «۳»

طبق قوانین گزاره ها داریم:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \vee p \equiv [(\sim p \vee q) \wedge q] \vee p \equiv q \vee p \equiv p \vee q$$

قانون جذب

$$\equiv \sim(\sim p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

۲۲- گزینه «۴»

گزینه «۱»، در معادله درجه دوم $-2x^2 + 2x - 7 = 0$ ، $\Delta = -52 < 0$ وضریب x^2 منفی است، پس عبارت موردنظر همواره منفی است.

گزینه «۲»:

$$\left. \begin{array}{l} u > 0 \Rightarrow u + \frac{1}{u} \geq 2 \\ u < 0 \Rightarrow u + \frac{1}{u} \leq -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{u \neq 0} \left| u + \frac{1}{u} \right| \geq 2$$

$$\xrightarrow{u=3x} \left| 3x + \frac{1}{3x} \right| \geq 2$$

گزینه «۳»، در معادله درجه دوم $-\delta x^2 - 6x + 7 = 0$ ، $\Delta = 176 > 0$ است،پس معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می باشد. چون ضریب x^2 منفی است،

پس عبارت موردنظر به ازای مقادیر بزرگتر از هر دو ریشه و مقادیر کوچکتر از

هر دو ریشه منفی است.

گزینه «۴»: هیچ عدد حقیقی ای وجود ندارد که مجموع آن با تمام اعداد حقیقی

برابر صفر شود، پس این گزاره سوری نادرست است.

۲۳- گزینه «۴»

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$C \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq C' \Rightarrow B \cap C' = B$$

$$(A \cup B) - C = B - C = B \cap C' = B$$

$$\frac{\sum_{i=4}^9 x_i}{6} = 15 \Rightarrow \sum_{i=4}^9 x_i = 6(15) = 90$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{30 + 51 + 90}{12} = \frac{171}{12} = 14 \frac{3}{4}$$

۲۸- گزینه «۲»

اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_6 به ترتیب برابر \bar{x} و σ باشد، میانگین و انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_6 + b$ فرض $a > 0$ به ترتیب برابر $a\bar{x} + b$ و $a\sigma$ است. بنابراین داریم:

$$CV_1 = 5CV_2 \Rightarrow \frac{\sigma}{\bar{x}-4} = \frac{5\sigma}{\bar{x}+4} \Rightarrow \bar{x}+4 = 5\bar{x}-20$$

$$\Rightarrow 4\bar{x} = 24 \Rightarrow \bar{x} = 6$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_6}{6} = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 36$$

۲۹- گزینه «۱»

اختلاف بین شماره‌های اولین و چهارمین دانش‌آموز انتخاب شده، سه برابر تعداد اعضای هر طبقه است. بنابراین داریم:

$$42 - 6 = 3 \times \text{تعداد اعضای هر طبقه}$$

$$\text{تعداد طبقات} = \frac{36}{3} = 12$$

۳۰- گزینه «۳»

فرض کنید مجموعه A به صورت $A = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ باشد.

اگر میانگین ۶ عضو مجموعه A برابر \bar{x} باشد، در این صورت:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 6\bar{x}$$

اگر میانگین ۴ عضو زیرمجموعه $A_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ برابر \bar{x} باشد، در این صورت:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 4\bar{x}$$

بنابراین مجموع دو عضو که در زیرمجموعه A_1 نیست، برابر

$$2\bar{x} = 6\bar{x} - 4\bar{x} \text{ و میانگین آنها برابر } \frac{2\bar{x}}{2} = \bar{x} \text{ است. اگر به جای انتخاب ۴}$$

عضو برای زیرمجموعه B ، دو عضو دیگر را انتخاب کنیم، در ۳ حالت $\{a_1, a_2\}$ ، $\{a_2, a_5\}$ و $\{a_3, a_6\}$ ، میانگین دو عضو انتخابی برابر \bar{x} است.

پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$\frac{3}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}$$

۲۴- گزینه «۲»

اگر قدر نسبت دنباله برابر q باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q^2 = 1 \Rightarrow q^2 + q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$P(b) = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

۲۵- گزینه «۴»

فرض کنید پیشامدهای A و B به ترتیب به صورت «اعداد رو شده دو تاس، دو عدد متوالی باشند» و «حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود» تعریف شوند. در این صورت داریم:

$$B = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$$

$$A \cap B = \{(5,4), (5,6), (4,5), (6,5)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{11}$$

۲۶- گزینه «۱»

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند. در نتیجه پیشامدهای A و B' و پیشامدهای A' و B' نیز مستقل از هم هستند. در نتیجه داریم:

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B') = \frac{2}{3}$$

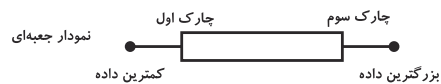
$$P(A - B) = P(A \cap B') = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A)P(B') = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}P(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A') = \frac{1}{2}$$

$$P(A'|B') = P(A') = \frac{1}{2}$$

۲۷- گزینه «۲»

در نمودار جعبه‌ای نمرات این دانش‌آموز، ۶ نمره داخل جعبه، سه نمره قبل و سه نمره بعد از جعبه قرار دارد.



$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} = 10 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i = 30$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{3} = 17 \Rightarrow \sum_{i=1}^{12} x_i = 51$$



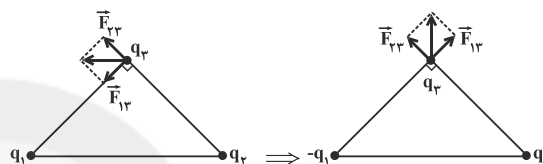
فیزیک ۲

۳۱- گزینه «۲»

با عوض شدن علامت بار q_1 ، جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار q_3 از طرف بار q_1 نیز عوض می‌شود. از طرفی چون اندازه بارهای q_1 و q_2 یکسان و فاصله آن‌ها تا بار q_3 برابر است، بنابراین طبق قانون کولن، اندازه نیروی وارد بر بار q_3 از طرف دو بار یکسان است.

با این توضیحات با عوض شدن جهت نیروی \vec{F}_{13} و ثابت ماندن جهت نیروی \vec{F}_{23} ، همواره نیروی خالص وارد بر بار q_3 به اندازه 90° دوران خواهد کرد.

به عنوان مثال:



۳۲- گزینه «۳»

در یک میدان الکتریکی یکنواخت و در یک جابه‌جایی معین، کار نیروی الکتریکی برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی در همان جابه‌جایی است. بنابراین:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_E}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{-W_E}{q}$$

$$\Rightarrow V_B - 100 = \frac{-4 \times 10^{-5}}{-2 \times 10^{-6}} \Rightarrow V_B = 120V$$

۳۳- گزینه «۲»

زمانی که فاصله بین صفحات یک خازن تخت را ۲۰ درصد کاهش دهیم، تغییرات ظرفیت خازن برابر است با:

$$d_2 = d_1 - \frac{20}{100}d_1 \Rightarrow d_2 = 0.8d_1$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1}{0.8d_1} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{5}{4}$$

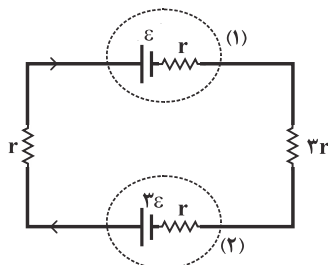
$$\frac{\Delta C}{C_1} \times 100 = \left(\frac{C_2}{C_1} - 1 \right) \times 100 = \left(\frac{5}{4} - 1 \right) \times 100 = 25\%$$

بنابراین ظرفیت خازن ۲۵ درصد افزایش خواهد داشت. برای انرژی ذخیره شده در خازن، داریم:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

با توجه به این که انرژی ذخیره شده در خازن در یک اختلاف پتانسیل ثابت، با ظرفیت خازن متناسب است، بنابراین وقتی ظرفیت خازن ۲۵ درصد افزایش یابد، انرژی ذخیره شده در خازن نیز ۲۵ درصد افزایش خواهد یافت.

۳۴- گزینه «۴»



با توجه به این که نیروی محرکه مولد (۲) بیش‌تر از نیروی محرکه مولد (۱) است، بنابراین مولد (۱) دارای توان ورودی و مولد (۲) دارای توان خروجی است. جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$I = \frac{3\epsilon - \epsilon}{r + 3r + r + r} \Rightarrow I = \frac{\epsilon}{3r}$$

توان ورودی مولد (۱) برابر است با:

$$P_{\text{ورودی}} = I(\epsilon + rI) = I\left(\epsilon + r \times \frac{\epsilon}{3r}\right) = \frac{4}{3}\epsilon I$$

توان خروجی مولد (۲) برابر است با:

$$P_{\text{خروجی}} = I(3\epsilon - rI) = I\left(3\epsilon - r \times \frac{\epsilon}{3r}\right) = \frac{8}{3}\epsilon I$$

بنابراین:

$$\frac{P_{\text{ورودی}}}{P_{\text{خروجی}}} = \frac{\frac{4}{3}\epsilon I}{\frac{8}{3}\epsilon I} = \frac{1}{2}$$

۳۵- گزینه «۲»

با کاهش مقاومت رثوستا، مقاومت معادل مدار (R_{eq}) کاهش می‌یابد.

بنابراین طبق رابطه $I = \frac{\epsilon}{R_{eq} + r}$ ، با کاهش R_{eq} ، جریان کل مدار افزایش می‌یابد. بنابراین جریان بیشتری از لامپ L_1 که در شاخه اصلی مدار قرار دارد، می‌گذرد و نور لامپ L_1 افزایش می‌یابد. ولتاژ دو سر لامپ‌های L_2 و L_3 یکسان و برابر است با:

می‌یابد. بنابراین جریان بیشتری از لامپ L_1 که در شاخه اصلی مدار قرار دارد، می‌گذرد و نور لامپ L_1 افزایش می‌یابد. ولتاژ دو سر لامپ‌های L_2 و L_3 یکسان و برابر است با:

$$\epsilon - V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = V_3 = \epsilon - V_1$$

چون ولتاژ دو سر مولد ثابت و ولتاژ دو سر لامپ L_1 افزایش یافته است، ولتاژ دو سر لامپ‌های L_2 و L_3 کاهش می‌یابد و در نتیجه نور آن‌ها کم می‌شود.

مجموع جریان عبوری از لامپ‌های L_2 ، L_3 و L_4 با جریان اصلی مدار برابر است. با کاهش ولتاژ دو سر لامپ‌های L_2 و L_3 ، جریان عبوری از آن‌ها کاهش یافته و چون جریان شاخه اصلی مدار افزایش یافته است، جریان عبوری از لامپ L_4 افزایش یافته و نور لامپ L_4 افزایش خواهد یافت.



۳۶- گزینه «۱»

$$|\varepsilon| = Blv = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow |\varepsilon| = 0.2 \times 0.2 \times \frac{0.1}{0.4}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon| = 0.01V = 10mV$$

با حرکت میله به سمت راست، میدان مغناطیسی درون سوی گذرنده از سطح قاب افزایش می‌یابد و بنابراین بنا به قانون لنز، جریان القا شده در جهت پادساعتگرد در قاب ایجاد می‌شود تا با اثرات مغناطیسی خود، با افزایش شار مخالفت کند.

۴- گزینه «۱»

با توجه به این که شدت جریان بیشینه ۱۰ آمپر است، داریم:

$$U = \frac{1}{2} LI_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 10^2 \Rightarrow U = 1J$$

شیمی ۲

۴۱- گزینه «۳»

عبارت‌های «الف» و «ت» نادرست‌اند.

(الف) کربن رسانایی گرمایی ندارد ولی ژرمانیم دارای رسانایی گرمایی است.

(ب) عنصرهای C و Sn و Pb از رسانایی الکتریکی بالایی برخوردارند.

(پ) واکنش‌پذیری هالوژن‌ها با گاز هیدروژن از بالا به پایین کاهش می‌یابد.

(ت) در گروه نافلزها (مانند هالوژن‌ها)، با افزایش شعاع اتمی، واکنش‌پذیری کاهش می‌یابد.

۴۲- گزینه «۲»

$$? g NaN_3 = 672 L N_3 \times \frac{1 \text{ mol } N_3}{22.4 L N_3} \times \frac{65 g NaN_3}{1 \text{ mol } N_3}$$

$$\times \frac{65 g NaN_3}{1 \text{ mol } N_3} = 1300 g NaN_3$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{مقدار خالص}}{\text{مقدار ناخالص}} \times 100 = \frac{1300}{2000} \times 100 = 65$$

۴۳- گزینه «۴»

تعداد جفت الکترون اشتراکی را در آلکان‌ها می‌توان از رابطه $3n + 1$ محاسبه نمود. در نتیجه این ترکیب دارای $(3 \times 16 + 1 = 49)$ جفت الکترون پیوندی است. ولی مجموع اتم‌های آن برابر ۵۰ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: فرمول مولکولی این ترکیب C_16H_{34} است. در نتیجه اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در این ترکیب برابر با ۱۸ است.

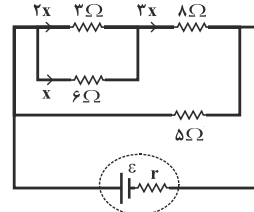
گزینه «۲»: نام آن ۳، ۴، ۵، ۶-تترا اتیل اوکتان است.

گزینه «۳»:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم هیدروکربن}} \times 100$$

$$= \frac{16 \times 12}{(16 \times 12) + (34 \times 1)} \times 100 = 85$$

مدار را به شکل زیر ساده می‌کنیم.



اگر جریان عبوری از مقاومت ۶ اهمی را برابر با x بگیریم، جریان عبوری از مقاومت ۳ اهمی برابر با $2x$ و از ۸ اهمی برابر با $3x$ خواهد شد. مقاومت معادل شاخه بالایی برابر است با:

$$R' = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + 8 = 10\Omega$$

پس جریان عبوری از شاخه پایینی که مقاومت آن نصف شاخه بالایی است برابر با $6x$ است. در نتیجه مقاومت ۵ اهمی دارای بیشترین توان الکتریکی مصرفی است.

اختلاف پتانسیل دو سر مولد همان اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت 5Ω است. بنابراین:

$$V_\Delta = R_\Delta I_\Delta = 5 \times 3 = 15V \Rightarrow V_{\text{مولد}} = 15V$$

۳۷- گزینه «۴»

طبق رابطه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار $(F = |q|vB \sin \theta)$ تنها مؤلفه‌ای از میدان مغناطیسی باعث ایجاد نیروی مغناطیسی بر ذره باردار متحرک می‌شود که بر راستای حرکت ذره عمود باشد، بنابراین چون ذره در جهت محور y ها در حال حرکت است، مؤلفه B_x میدان باعث ایجاد نیروی مغناطیسی خواهد شد. داریم:

$$F = |q|vB \sin \theta = 3 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-4} \times 1$$

$$\Rightarrow F = 6 \times 10^{-3} N$$

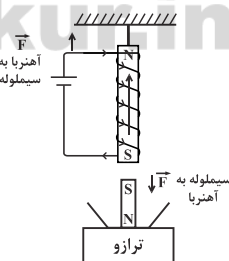
۳۸- گزینه «۳»

مطابق شکل، پس از بسته شدن کلید، سیملوله به آهنربا تبدیل می‌شود و نیروی دافعه بین سیملوله و آهنربای تیغه‌ای ایجاد می‌شود.

در نتیجه نیرویی رو به پایین به آهنربا از طرف

سیملوله وارد می‌شود و باعث افزایش عدد ترازو

نسبت به وزن آهنربا می‌شود (عدد ترازو $W_1 <$



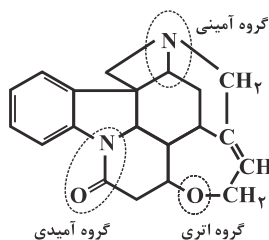
هم چنین نیروی رو به بالایی به سیملوله از طرف آهنربا وارد می‌شود و باعث کاهش نیروی کشش طناب نسبت به وزن سیملوله می‌شود. $(T < W_2)$

۳۹- گزینه «۲»

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، چون شار مغناطیسی عبوری تغییر کرده است، بنابراین نیروی محرکه القا شده ایجاد می‌شود و داریم:



۴۹- گزینه «۲»



بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به ساختار داده شده، یک گروه آمینی و یک گروه آمیدی در آن وجود دارد.

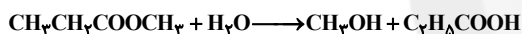
ب) به دلیل وجود حلقه بنزن، ترکیبی آروماتیک محسوب می‌شود.

پ) تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی برابر است با:

$$\underbrace{2 + 2}_{\text{مربوط به اتم‌های O}} + \underbrace{1 + 1}_{\text{مربوط به اتم‌های N}} = 6$$

ت) عامل بو و طعم گشنیز، وجود گروه عاملی الکی (هیدروکسیل) است که در این ترکیب وجود ندارد.

۵۰- گزینه «۱»



$$\times \frac{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{COOH}}{74 \text{g C}_2\text{H}_5\text{COOH}} \times \frac{1 \text{ mol CH}_3\text{CH}_2\text{COOCH}_3}{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{COOH}}$$

$$\times \frac{88 \text{g CH}_3\text{CH}_2\text{COOCH}_3}{1 \text{ mol CH}_3\text{CH}_2\text{COOCH}_3} \times \frac{100 \text{g ناخالص}}{60 \text{g ناخالص}}$$

$$= 220 \text{g CH}_3\text{CH}_2\text{COOCH}_3 \text{ ناخالص}$$

ریاضی ۱

۵۱- گزینه «۳»

جملات دنباله حسابی را با a_n و جملات دنباله هندسی را با b_n نمایش می‌دهیم. داریم:

$$a_3 = b_1 \text{ و } a_4 = b_2 \text{ و } a_5 = b_3$$

$$\frac{\text{ویژگی جملات}}{\text{دنباله هندسی}} \rightarrow \frac{b_4 - b_2}{b_2 - b_1} = \frac{a_5 - a_4}{a_4 - a_3}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1 q^3 - b_1 q}{b_1 q - b_1} = \frac{(a_1 + 4d) - (a_1 + 3d)}{(a_1 + 3d) - (a_1 + 2d)}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1 q(q^2 - 1)}{b_1(q - 1)} = \frac{qd}{d} \Rightarrow q(q + 1) = 6 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ \text{غ.ق. } q = -3 \end{cases}$$

چون جملات دنباله هندسی افزایشی است، مقدار مثبت برای قدرنسبت قابل قبول است.

۴۴- گزینه «۲»

بررسی عبارت‌ها:
الف)

$$C = 1 \text{ mol Al} \times \frac{27 \text{g Al}}{1 \text{ mol Al}} \times \frac{0.9 \text{ J}}{\text{g.K}} = 24.3 \text{ J.K}^{-1}$$

ب) ظرفیت گرمایی ویژه در دما و فشار اتاق فقط به نوع ماده بستگی دارد.

ت) ظرفیت گرمایی یک ماده هم‌ارز با گرمای لازم برای افزایش دمای آن ماده به اندازه یک درجه سلسیوس است.

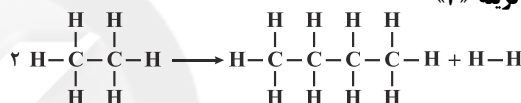
بنابراین، عبارت‌های «الف» و «ب» به درستی بیان شده‌اند.

۴۵- گزینه «۴»

واکنش (I) را باید معکوس کنیم. از واکنش (II) و واکنش (III) بدون تغییر استفاده می‌کنیم.

$$\Delta H_{IV} = -\Delta H_I + \Delta H_{II} + \Delta H_{III} \\ \Rightarrow \Delta H_{IV} = 92 + (-187) + (-242) = -337 \text{ kJ}$$

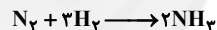
۴۶- گزینه «۳»



$$\Delta H = 2\Delta H_{\text{C-H}} - \Delta H_{\text{C-C}} - \Delta H_{\text{H-H}}$$

$$\Rightarrow \Delta H = 2 \times 415 - 348 - 436 = 46 \text{ kJ}$$

۴۷- گزینه «۲»



$$? \text{ mol NH}_3 = 8 / 5 \text{g NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 \text{g NH}_3} = 0.5 \text{ mol NH}_3$$

$$\bar{R}_{\text{NH}_3} = \frac{0.5}{5 \times 10} = 0.01 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\frac{\bar{R}_{\text{NH}_3}}{2} = \frac{\bar{R}_{\text{H}_2}}{3} \Rightarrow \bar{R}_{\text{H}_2} = 0.015 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$? \text{g N}_2 = 8 / 5 \text{g NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 \text{g NH}_3} \times \frac{1 \text{ mol N}_2}{2 \text{ mol NH}_3}$$

$$\times \frac{28 \text{g N}_2}{1 \text{ mol N}_2} = 7 \text{g N}_2 \text{ مصرفی}$$

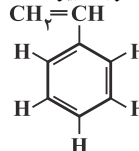
$$12 \text{g} + 7 \text{g} = 19 \text{g N}_2 \text{ مقدار اولیه}$$

۴۸- گزینه «۳»

(۱) تفلون تنها از اتم‌های کربن و فلورین تشکیل شده است.

(۲) پلی‌اتن سبک شفافیت بیشتری در مقایسه با پلی‌اتن سنگین داشته و در برابر نور شفاف است.

(۳) مونومر سازنده پلی‌استیرن به صورت زیر است:



$$\Rightarrow \frac{\text{شمار پیوندهای یگانه}}{\text{شمار پیوندهای دوگانه}} = \frac{12}{4} = 3$$

(۴) پلی‌آمیدها، همانند پلی‌استرها، در حضور آب تجزیه می‌شوند.

$$A = \left(\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}} \right) \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^2} \times \sqrt{5}$$

$$= \sqrt[3]{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} \times \sqrt{5} = \sqrt[3]{49-48} \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

۵۵- گزینه «۴»

سهمی دارای ماکزیمم است، پس $a < 0$ است. از طرفی مختصات رأس سهمی برابر است با:

$$x_s = \frac{-(-1)}{2a} = \frac{1}{2a}$$

$$y_s = -\frac{(-1)^2 - 4(a)(-2)}{4a} = -\frac{1+8a}{4a}$$

چون $y_s \leq x_s$ است، داریم:

$$-\frac{1+8a}{4a} \leq \frac{1}{2a} \quad a < 0 \rightarrow -\frac{1+8a}{4} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -(1+8a) \geq 2$$

$$\Rightarrow -1-8a \geq 2 \Rightarrow 8a \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{3}{8}$$

واضح است که مقدار $x_s = \frac{1}{2a}$ منفی است. هم چنین از آنجایی که $y_s \leq x_s$ است، مقدار y_s نیز منفی بوده و رأس سهمی در ناحیه سوم قرار خواهد گرفت.

۵۶- گزینه «۴»

با توجه به جدول تعیین علامت $x=2$ ریشه مخرج کسر می باشد و چون علامت $f(x)$ در اطراف $x=2$ تغییر نمی کند، $x=2$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد. هم چنین $x=1$ نیز ریشه عبارت صورت کسر است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \Rightarrow a+b+c = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

۵۷- گزینه «۲»

چون از ۲، دو پیکان خارج شده است، پس داریم:

$$a^2 = 4a - 3 \Rightarrow a = 1, 3$$

اما $a = 3$ غیر قابل قبول است؛ زیرا در این صورت زوج های مرتب (۲، ۶) و

(۲، ۹) عضو رابطه می شوند و این یعنی f تابع نیست.

پس $a = 1$ است و داریم:

$$f = \{(2,1), (3,5), (6,6), (2, b+2)\}$$

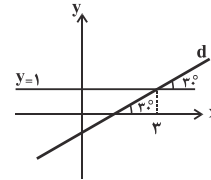
حال:

$$\xrightarrow{f \text{ تابع است}} b+2=1 \Rightarrow b=-1$$

۵۲- گزینه «۳»

ضابطه خط d را به صورت $y = ax + b$ در نظر می گیریم. مطابق شکل داریم:

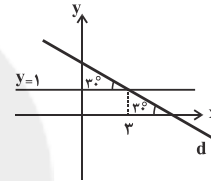
$$\text{شیب خط} = a = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



از طرفی نقطه $(3, 1)$ روی خط d قرار دارد:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}(3) + b = 1 \Rightarrow b = 1 - \sqrt{3}$$

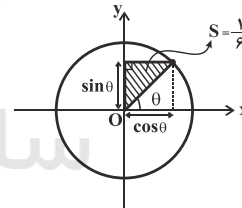
دقت کنید که اگر خط d را به صورت زیر در نظر بگیریم، عرض از مبدأ آن $1 + \sqrt{3}$ به دست می آید.



۵۳- گزینه «۱»

با توجه به نکات دایره مثلثاتی داریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$



از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده می کنیم و داریم:

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

θ در ناحیه اول است و مقادیر نسبت های مثلثاتی آن مثبت هستند. بنابراین:

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

۵۴- گزینه «۲»

$$A = \left(\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}} \right) (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{5\sqrt{5}} \right)$$

$$A = \left(\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{3}} (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{5\sqrt{5}} \right)$$



۵۸- گزینه «۲»

$$y = |x+1| \rightarrow \text{قرینه نسبت به محور } x$$

$$\rightarrow y = -|x-1| \text{ واحد به سمت راست}$$

$$\text{تقاطع بانیمساز ناحیه چهارم} \rightarrow -|x-1| = -x$$

$$\Rightarrow |x-1| = x \Rightarrow x-1 = -x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{y=-x} y = -\frac{1}{2}$$

۵۹- گزینه «۲»

$$n(S) = 1 \times 6 \times 6 + 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 36 + 8 = 44$$

۶۰- گزینه «۳»

تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی با مجموعه ارقام مشخص شده (بدون تکرار ارقام) برابر است با:

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$$

تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی فرد با مجموعه ارقام مشخص شده (بدون تکرار ارقام) برابر است با:

$$4 \times 4 \times 3 \times 3 = 144$$

بنابراین تعداد اعداد زوج چهاررقمی با مجموعه ارقام داده شده برابر است با:

$$300 - 144 = 156$$

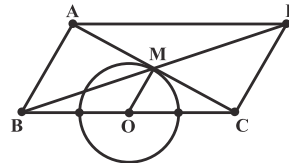
اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، آنگاه احتمال وقوع این پیشامد برابر است با:

$$P(A) = \frac{156}{300} = \frac{13}{25}$$

هندسه ۱

۶۱- گزینه «۲»

مطابق شکل فرض کنید O نقطه وسط ضلع BC و M محل تلاقی قطرهای متوازی الاضلاع ABCD باشد. در متوازی الاضلاع، قطرهای یکدیگر را در M نصف می‌کنند. بنابراین در مثل CAB، پاره خط OM وسط‌های دو ضلع CA و CB را به هم وصل کرده است. پس با ضلع BA موازی و طول آن نصف طول این ضلع است.



$$OM = \frac{BA}{2} = \frac{a}{2}$$

چون طول OM ثابت و O نیز نقطه ثابتی است، نقطه M روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{a}{2}$ است. نقاط برخورد این دایره با ضلع BC قابل قبول نیست.

۶۲- گزینه «۴»

طبق نامساوی مثلثی، اگر a، b و c طول‌های اضلاع یک مثلث باشند، آنگاه $|b-c| < a < b+c$ است، بنابراین داریم:

$$\Delta ABC: 7-6 < x < 7+6 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} 2 \leq x \leq 12 \quad (1)$$

$$\Delta ADC: 10-8 < x < 10+8 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} 3 \leq x \leq 17 \quad (2)$$

از طرفی طول قطر AC از هیچ کدام از اضلاع کوچکتر نیست، پس $x \geq 10$ است و در نتیجه با توجه به رابطه‌های (1) و (2) داریم:

$$10 \leq x \leq 12 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{10, 11, 12\}$$

۶۳- گزینه «۲»

با توجه به اینکه $TP \parallel AD$ است، مثلث‌های ATP و DTP دارای ارتفاع برابر و قاعده مشترک TP هستند، بنابراین داریم:

$$S_{\Delta DTP} = S_{\Delta ATP} \quad (1)$$

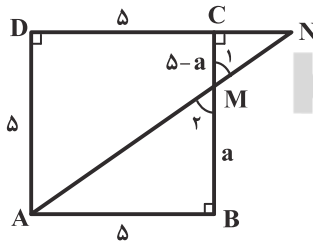
از طرفی برای دو چهارضلعی ABCP و DTBC داریم:

$$S_{ABCP} = S_{BCPT} + S_{\Delta ATP}$$

$$S_{DTBC} = S_{BCPT} + S_{\Delta DTP}$$

با توجه به رابطه (1) و مشترک بودن مساحت چهارضلعی BCPT در هر دو رابطه بالا، مساحت چهارضلعی DTBC برابر مساحت چهارضلعی ABCP، یعنی برابر ۶ است.

۶۴- گزینه «۱»



فرض کنید $MB = a$ و $CM = 5 - a$ باشد. مطابق شکل دو مثلث CMN و BMA به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. داریم:

$$\Delta CMN \sim \Delta BMA \Rightarrow \frac{CN}{BA} = \frac{CM}{BM} \Rightarrow \frac{CN}{5} = \frac{5-a}{a}$$

$$\Rightarrow CN = \frac{5(5-a)}{a}$$

$$\frac{1}{CM} - \frac{1}{CN} = \frac{1}{5-a} - \frac{a}{5(5-a)} = \frac{5-a}{5(5-a)} = \frac{1}{5}$$



۶۵- گزینه ۲»

مثلث ABC ، قائم‌الزاویه است. مساحت آن برابر $30 = \frac{5 \times 12}{2}$ است و کوچکترین ارتفاع آن، ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع است.

$$S = \frac{1}{2} \times h \times 13 \xrightarrow{S=30} h = \frac{2 \times 30}{13} = \frac{60}{13}$$

نسبت تشابه دو مثلث برابر است با:

$$k = \frac{h}{h'} = \frac{\frac{60}{13}}{\frac{20}{13}} = 3$$

$$\frac{\Delta_{\text{محیط } ABC}}{\Delta_{\text{محیط } A'B'C'}} = k \Rightarrow \frac{5+12+13}{\Delta_{\text{محیط } A'B'C'}} = 3 \Rightarrow \Delta_{\text{محیط } A'B'C'} = 10$$

۶۶- گزینه ۱»

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف طول وتر است، پس $AC = 6$ می‌باشد. اگر طول هر ضلع لوزی $ADEF$ را برابر x در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

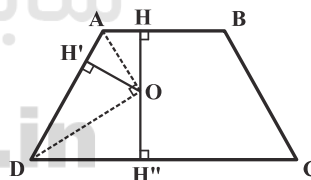
$$DC = AC - AD = 6 - x$$

از طرفی $DE \parallel AB$ است، پس $\widehat{DEC} = 90^\circ$ و در نتیجه مثلث DEC قائم‌الزاویه است. در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف

$$\frac{DE}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{6-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$$

طول وتر است، بنابراین داریم: در مثلث ADF ، $AD = AF = 2$ و $\hat{A} = 60^\circ$ است. پس این مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و $DF = 2$ است، بنابراین طول قطر کوچکتر لوزی برابر ۲ می‌باشد.

۶۷- گزینه ۴»



در زاویه A و D در دوزنقه $ABCD$ مکمل یکدیگرند، بنابراین نیمسازهای AO و DO بر هم عمودند و مثلث ADO قائم‌الزاویه است. مطابق شکل، عمودهای OH ، OH' و OH'' را به ترتیب بر اضلاع AB ، AD و CD رسم می‌کنیم. داریم:

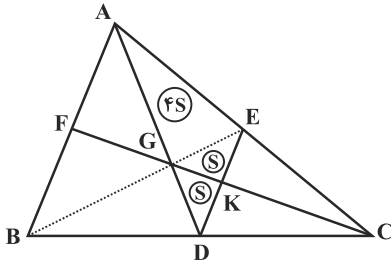
$$\Delta_{ADO} : AD^2 = AO^2 + DO^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AD = 5$$

$$OH' = \frac{OA \times OD}{AD} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

نقطه O محل تلاقی نیمساز زوایای A و D است، پس از سه ضلع AB ، AD و DC به یک فاصله می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$OH = OH' = OH'' = \frac{12}{5} \Rightarrow OH + OH' + OH'' = \frac{36}{5}$$

۶۸- گزینه ۴»



$$DE \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow 1 = \frac{CE}{AE}$$

پس E وسط AC و در نتیجه BE میانه است و G روی پاره خط BE قرار دارد. فرض کنید $S_{\Delta_{GK}} = S$ باشد. با توجه به موازی بودن DE و AB و

طبق تعمیم قضیه تالس، $EK = \frac{1}{2}AF$ و $KD = \frac{1}{2}BF$ است. با توجه به برابری AF و BF داریم:

$$EK = KD \Rightarrow S_{\Delta_{GK}} = S_{\Delta_{GD}} \Rightarrow S_{\Delta_{GK}} = S_{\Delta_{GD}} = S$$

همچنین با توجه به خواص میانه داریم:

$$AG = 2GD \Rightarrow S_{\Delta_{AG}} = 2S_{\Delta_{GD}} = 2 \times 2S = 4S$$

$$\Rightarrow S_{\Delta_{AGKE}} = 5S = 25 \Rightarrow S = 5$$

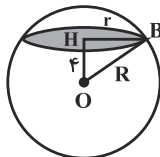
می‌دانیم از برخورد میانه‌های یک مثلث، ۶ مثلث با مساحت یکسان حاصل می‌شود، بنابراین داریم:

$$S_{BFGD} = 2S_{\Delta_{AG}} = 8S = 40$$

۶۹- گزینه ۳»

از نقطه A خارج صفحه P ، خط d را عمود بر این صفحه رسم می‌کنیم. می‌دانیم دو صفحه بر هم عمودند هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر دیگری عمود باشد، بنابراین هر صفحه گذرنده از خط d که لزوماً از نقطه A نیز می‌گذرد، بر صفحه P عمود است.

۷۰- گزینه ۴»



شعاع دایره سطح مقطع را r می‌نامیم، داریم:

$$\Rightarrow 6\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 3$$

بنابه قضیه فیثاغورس در مثلث OBH داریم:

$$R^2 = r^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 5^2 = 100\pi$$



فیزیک ۱

۷۱- گزینه «۳»

مجموع حجم حفره‌ها برابر با تفاضل حجم ظاهری و حجم واقعی مخروط است.

$$\text{داریم: } V_{\text{حفره‌ها}} = V_{\text{ظاهری}} - V_{\text{واقعی}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{m}{\rho}$$

$$\Rightarrow V_{\text{حفره‌ها}} = \frac{1}{3} \times 3 \times 4^2 \times 10 - \frac{1200}{30} \Rightarrow V_{\text{حفره‌ها}} = 100 \text{ cm}^3$$

بنابراین حجم هر حفره برابر است با:

$$V_{\text{حفره}} = \frac{V_{\text{حفره‌ها}}}{5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm}^3$$

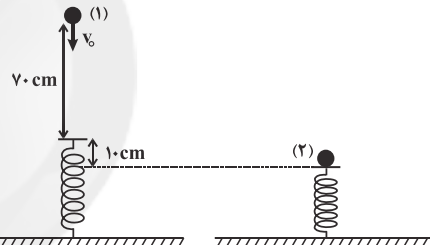
چون حجم دو حفره با روغن پر شده است، بنابراین جرم روغن برابر است با:

$$m_{\text{روغن}} = \rho_{\text{روغن}} V_{\text{روغن}} = 0.8 \times (2 \times 20) \Rightarrow m_{\text{روغن}} = 32 \text{ g}$$

بنابراین جرم مجموعه برابر است با:

$$m_{\text{کل}} = m_{\text{مخروط}} + m_{\text{روغن}} = 1200 + 32 = 1232 \text{ g}$$

۷۲- گزینه «۲»



ارتفاعی که فنر بیشترین فشردگی را دارد، مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر می‌گیریم. چون اتلاف انرژی نداریم، با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 + U_e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + m g (h + x) = 0 + 0 + U_e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 0.2 \times v_0^2 + 0.2 \times 10 \times (0.7 + 0.1) = 6/5 \Rightarrow v_0 = \frac{7}{5} \frac{m}{s}$$

۷۳- گزینه «۱»

کار خروجی موتور اتومبیل طبق قضیه کار-انرژی جنبشی برابر است با:

$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{\text{خروجی}} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow W_{\text{خروجی}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^3 \times \left(\left(\frac{54}{3.6} \right)^2 - \left(\frac{36}{3.6} \right)^2 \right) = 125 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{\text{خروجی}} = 125 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{W_{\text{خروجی}}}{t} = \frac{125}{2} = 62.5 \text{ kW}$$

با استفاده از تعریف بازده، می‌توان نوشت:

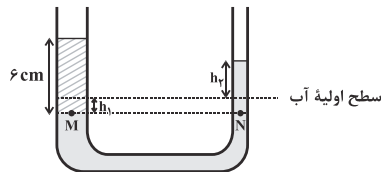
$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{62.5}{250} \times 100 = 25\%$$

۷۴- گزینه «۴»

بعد از ریختن نفت در شاخه سمت چپ و برقراری تعادل، حجم آب جابه‌جا

شده در دو شاخه برابر است و داریم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 h_1 = A_2 h_2 \xrightarrow{A_1 = 2A_2} h_2 = 2h_1$$



با استفاده از برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، داریم:

$$P_M = P_N$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{نفت}} g h' + P_0 = \rho_{\text{آب}} g (h_1 + h_2) + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{نفت}} h' = \rho_{\text{آب}} (h_1 + h_2)$$

$$\frac{h_1 = h_2}{2} \rightarrow 0.8 \times 6 = 1 \times \frac{2h_2}{2} \Rightarrow h_2 = 3/2 \text{ cm}$$

۷۵- گزینه «۳»

چون حجم و شکل ظاهری دو جسم مشابه است، پس نیروی شناوری وارد بر هر

دو جسم یکسان است. چون جسم غوطه‌ور در حال تعادل است، داریم:

$$F + F_b = mg \Rightarrow F = mg - F_b$$

$$\xrightarrow{F_2 > F_1} m_2 g - F_{b_2} > m_1 g - F_{b_1} \xrightarrow{F_{b_2} = F_{b_1}} m_2 > m_1$$

بنابراین جسم m_1 دارای حفره است و حجم حفره برابر است با:

$$V_{\text{حفره}} = V_{\text{ظاهری}} - V_{\text{واقعی}} = V_2 - V_1$$

$$\frac{V = \frac{m}{\rho}}{\rho} \rightarrow V_{\text{حفره}} = \frac{m_2}{\rho} - \frac{m_1}{\rho} \Rightarrow V_{\text{حفره}} = \frac{m_2 - m_1}{\rho} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\xrightarrow{F_{b_2} = F_{b_1}} F_2 - F_1 = (m_2 - m_1) g$$

$$\Rightarrow 22 - 20 = (m_2 - m_1) \times 10 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0.2 \text{ kg} = 200 \text{ g} \quad (2)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$V_{\text{حفره}} = \frac{200}{30} = 10 \text{ cm}^3$$



۷۶- گزینه «۳»

با توجه به رابطه تغییرات چگالی برحسب دما، داریم:

$$\Delta \rho = -\rho_1 (\alpha) \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = -\alpha \Delta \theta$$

$$\Rightarrow \frac{-0.6}{100} = -\alpha \times 80 \Rightarrow \alpha = 2/5 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$$

برای افزایش طول داریم:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta L = 2/5 \times 10^{-5} \times 200 \times 40 \Rightarrow \Delta L = 0.2 \text{ cm}$$

۷۷- گزینه «۲»

گرمای تولیدی توسط گرمکن طی مدت زمان ۶۱ دقیقه برابر است با:

$$Q = Pt = 1/6 \times 10^3 \times 61 \times 60$$

$$\Rightarrow Q = (16 \times 6 \times 61 \times 10^3) \text{ J}$$

اگر فرض کنیم m' کیلوگرم از آب بخار می‌شود، داریم:

$$Q = mc_p \Delta \theta + m' L_v$$

$$\Rightarrow 16 \times 6 \times 61 \times 10^3 = 4 \times 4200 \times 80 + m' \times 2256 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 16 \times 6 \times 61 \times 10^3 = 4 \times 21 \times 16 \times 10^3 + m' \times 141 \times 16 \times 10^3$$

$$\Rightarrow 6 \times 61 - 4 \times 21 = m' \times 141 \Rightarrow m' = 2 \text{ kg}$$

چون جرم اولیه آب ۴kg بوده است، پس جرم آب باقی‌مانده برابر با ۲kg است.

۷۸- گزینه «۴»

گرمای لازم برای ذوب ۴۰ گرم یخ برابر است با:

$$Q = mL_F = (40 \times 336) \text{ J}$$

چون این گرمای مدت ۴ دقیقه شارش یافته است، بنابراین آهنگ رسانش گرمایی برابر است با:

$$H = \frac{Q}{t} = \frac{40 \times 336}{4 \times 60} \Rightarrow H = 56 \text{ W}$$

بنابراین:

$$H = k \frac{A(T_H - T_L)}{L} \Rightarrow 56 = k \frac{4 \times 7 \times 10^{-4} \times 100}{60 \times 10^{-2}}$$

$$\Rightarrow k = 120 \frac{\text{W}}{\text{m.K}}$$

۷۹- گزینه «۱»

طبق معادله حالت گازهای کامل، چون امتداد فرایند از مبدأ مختصات دستگاه

$V - T$ عبور می‌کند، بنابراین گاز فرایندی هم‌فشار را طی می‌کند

از طرفی کاری که گاز روی محیط انجام می‌دهد قرینه کاری

است که محیط روی گاز انجام می‌دهد. بنابراین:

$$W' = -W = -(-P\Delta V) \Rightarrow W' = P\Delta V$$

$$\frac{PV = nRT}{P} \rightarrow W' = nR\Delta T = 0.5 \times 8 \times (700 - 400)$$

$$\Rightarrow W' = 1200 \text{ J}$$

۸۰- گزینه «۱»

ابتدا کار تولیدی ماشین گرمایی آرمانی طی یک چرخه را به دست می‌آوریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow |W| = \eta Q_H = \frac{4}{10} \times 270 = 108 \text{ kJ}$$

کار کل طی چهار چرخه برابر است با:

$$W_T = (4 \times 108) \text{ kJ}$$

برای بالا بردن یک جسم تا ارتفاع معین با تندی ثابت، کار انجام شده توسط

ماشین صرف غلبه بر کار نیروی وزن می‌شود و به صورت انرژی پتانسیل

گراشتی در جسم ذخیره می‌شود. بنابراین:

$$W_T = mgh \Rightarrow 4 \times 108 \times 10^3 = m \times 10 \times 10 / 8$$

$$\Rightarrow m = 4 \times 10^3 \text{ kg}$$

شیمی ۱

۸۱- گزینه «۱»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: با توجه به جدول صفحه ۶ کتاب درسی دهم، عدد جرمی ${}^5_1\text{H}$

بیشتر از ${}^4_1\text{H}$ است، اما نیم‌عمر آن بیشتر است.

گزینه «۲»: در هسته عنصر تکنسیم (${}^{99}_{43}\text{Tc}$) نسبت نوترون به پروتون کمتر از

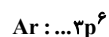
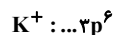
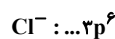
۱/۵ است، اما هسته آن ناپایدار است.

گزینه «۴»: با توجه به جدول صفحه ۱۵ شیمی دهم، این گزینه درست است.



۸۲- گزینه ۳»

طیف نشری خطی هر عنصر مختص آن عنصر بوده و می‌توان از آن برای شناسایی عناصر بهره برد.
بررسی سایر گزینه‌ها:
(۱)



(۲) در جدول دوره‌ای تعداد عنصرهای دسته d برابر ۴۰ و دسته p برابر ۳۶ است.

۸۳- گزینه ۱»

تنها عبارت «پ» درست است.
بررسی عبارت‌های نادرست:
عبارت «الف»، با توجه به آرایش الکترونی داده شده، X و Y به ترتیب C و O هستند. مولکول حاصل از C و O، کربن مونوکسید (CO) و کربن دی‌اکسید (CO_۲) است.
عبارت «ب»: طیف نشری خطی حاصل از عناصر متشکل از نوارهای ناپیوسته است.
عبارت «ت»: با توجه به جدول تناوبی، ۸ عنصر در این ردیف وجود دارد.

۸۴- گزینه ۲»

$$\begin{cases} n - e = 11 \\ n + Z = 70 \\ e = Z - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 39 \\ Z = 31 \end{cases} \Rightarrow X = [18 \text{Ar}] 3d^1 4s^2 4p^1$$

این عنصر در گروه ۱۳ جدول دوره‌ای قرار دارد.

۸۵- گزینه ۲»

بررسی عبارت‌های نادرست:
الف) در تقطیر جزء به جزء ابتدا گاز نیتروژن و سپس آرگون و در نهایت اکسیژن جداسازی می‌شوند.
ب) در دمای -78°C ، کربن دی‌اکسید به صورت جامد خارج می‌شود و در هوای مایع با دمای -200°C وجود ندارد.

۸۶- گزینه ۱»

واکنش موازنه شده به صورت زیر است:

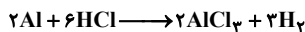


$$\frac{5+1+3}{3+6} = 1$$

نسبت خواسته شده

۸۷- گزینه ۲»

معادله موازنه شده به صورت زیر است:



$$?L\text{H}_2 = 9\text{g Al} \times \frac{1\text{mol Al}}{27\text{g Al}} \times \frac{3\text{mol H}_2}{2\text{mol Al}} \times \frac{2\text{g H}_2}{1\text{mol H}_2}$$

$$\times \frac{1L\text{H}_2}{0.08\text{g H}_2} = 12 / 5L\text{H}_2$$

۸۸- گزینه ۳»

نیاز روزانه بدن هر فرد بالغ به یون پتاسیم دو برابر یون سدیم است.
بررسی سایر گزینه‌ها:
گزینه «۱»:

$$n = M.V \Rightarrow n = 0.4 \times 0.5 = 0.2\text{mol NaOH}$$

$$?Na^+ = 0.2\text{mol NaOH} \times \frac{1\text{mol Na}^+}{1\text{mol NaOH}}$$

$$\times \frac{6.02 \times 10^{23} Na^+}{1\text{mol Na}^+} = 1.204 \times 10^{23} Na^+$$

گزینه «۲»: نقطه جوش NH_۳ از دو ترکیب دیگر بیشتر است، زیرا بین مولکول‌های آن پیوند هیدروژنی تشکیل می‌شود. از طرفی نقطه جوش HBr از HCl بیشتر است، زیرا جرم و حجم HBr بیشتر است.

گزینه «۴»: KCl به خوبی در آب حل شده و به یون‌های K⁺ و Cl⁻ تفکیک می‌شود.

۸۹- گزینه ۲»

عبارت «پ» نادرست است.

بررسی عبارت نادرست:

ب) مطابق قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها در آب با فشار رابطه مستقیم دارد.

۹۰- گزینه ۴»

با توجه به نمودار، انحلال‌پذیری KNO_۳ در دمای 38°C به تقریب برابر با ۶۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. پس می‌توان مقدار نمک حل شده در ۱۰۰ گرم محلول را محاسبه کرد.

$$?g\text{KNO}_3 = 100\text{g محلول} \times \frac{60\text{gKNO}_3}{160\text{g محلول}} = 37.5\text{gKNO}_3$$



۹۲- گزینه «۴»

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow [2x_1] \leq [2x_2]$$

$$\Rightarrow x_1 + [2x_1] < x_2 + [2x_2]$$

$$\xrightarrow{\text{در دامنه } \mathbb{R}^+} \frac{1}{x_1 + [2x_1]} > \frac{1}{x_2 + [2x_2]}$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \text{تابع اکیداً نزولی است.}$$

۹۳- گزینه «۳»

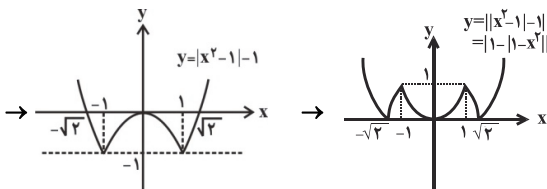
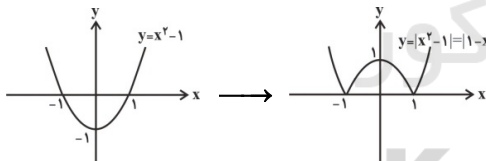
$$f(f(x)) < f(x^2 + 1) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(x) < x^2 + 1$$

داریم: $f(x) \leq x$ و می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی x : $x < x^2 + 1$ (زیرا

$$x^2 - x + 1 \text{ عبارتی درجه } ۲ \text{ با } \Delta < 0 \text{ و } a > 0 \text{ است. پس: } x^2 - x + 1 > 0)$$

در نتیجه برای هر x : $f(x) < x^2 + 1$ و جواب نامعادله کل اعداد حقیقی است.

۹۴- گزینه «۴»



با توجه به شکل‌های بالا، تابع در بازه $I = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ اکیداً نزولی است.

پس در بازه $i = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ که زیرمجموعه‌ای از بازه I می‌باشد نیز اکیداً

نزولی است.

با توجه به معادله $\text{KNO}_3(s) \xrightarrow{\text{آب}} \text{K}^+(aq) + \text{NO}_3^-(aq)$ می‌توان

مقدار مول NO_3^- در دمای 38°C را محاسبه کرد:

$$? \text{ mol NO}_3^- = 37 / 5 \text{ g KNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{101 \text{ g KNO}_3}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol NO}_3^-}{1 \text{ mol KNO}_3} = \frac{75}{202} \text{ mol NO}_3^-$$

انحلال‌پذیری KNO_3 در دمای 30°C به تقریب برابر با 45 گرم در 100 گرم

آب است. با استفاده از این اطلاعات، مقدار رسوب تشکیل شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{محلول } 38^\circ\text{C} = 160 \text{ g} \\ \text{محلول } 30^\circ\text{C} = 145 \text{ g} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{جرم رسوب} = 160 - 145 = 15 \text{ g}$$

$$? \text{ g KNO}_3 = 100 \text{ g محلول} \times \frac{15 \text{ g رسوب}}{160 \text{ g محلول}} = 9 / 375 \text{ g KNO}_3$$

از $37/5$ گرم نمک در دمای 38°C ، مقدار $9/375$ گرم رسوب کرده، پس

همچنان $28/125$ گرم آن به صورت محلول است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$? \text{ mol NO}_3^- = 28 / 125 \text{ g KNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{101 \text{ g KNO}_3}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol NO}_3^-}{1 \text{ mol KNO}_3} = \frac{225}{808} \text{ mol NO}_3^-$$

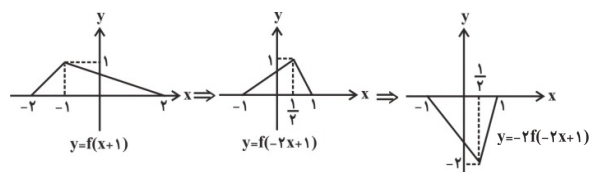
$$\frac{225}{808} = \frac{225}{808} \times \frac{808}{75} = 0 / 75$$

حسابان ۲

۹۱- گزینه «۳»

ابتدا نمودار $y = f(x+1)$ را رسم می‌کنیم، سپس به وسیله آن نمودار

$$y = f(-2x+1) \text{ و درانتها } y = -2f(-2x+1) \text{ را رسم خواهیم کرد.}$$





گزینه ۲» - ۹۵

چون نمودار تابع $y = x + f(x)$ از نقاط $(1,0)$ و $(2,0)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases} y = x + f(x) \rightarrow 1 + f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = -1 \\ y = x + f(x) \rightarrow 2 + f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = -2 \end{cases} \quad (1)$$

فرض کنیم خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ به ترتیب $R(x) = ax + b$ و $Q(x)$ باشد. لذا می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f(2) = 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -x$$

گزینه ۲» - ۹۶

در توابع $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ ، دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ می‌باشد، بنابراین داریم: $(a, b \neq 0)$

$$y = 3 - 5 \sin ax \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$y = 1 + \cos 3x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{|a|} = \frac{2}{3}$$

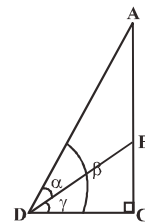
$$\Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱» - ۹۷

اگر $\hat{ADC} = \beta$ و $\hat{BDC} = \gamma$ ، آنگاه $\alpha = \beta - \gamma$. از طرفی:

$$\tan \beta = \frac{AC}{CD} = \frac{5}{1} = 5$$

$$BC = AC - AB = 2 \Rightarrow \tan \gamma = \frac{BC}{CD} = \frac{2}{1} = 2$$



از روی بسط عبارت‌های $\sin(\beta \pm \gamma)$ و $\cos(\beta \pm \gamma)$ ، که از حسابان ۱ به یاد داریم، به سادگی به دست می‌آید که:

$$\tan(\beta \pm \gamma) = \frac{\tan \beta \pm \tan \gamma}{1 \mp \tan \beta \tan \gamma}$$

بنابراین در این سؤال داریم:

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} = \frac{5 - 2}{1 + 5 \times 2} = \frac{3}{11}$$

گزینه ۴» - ۹۸

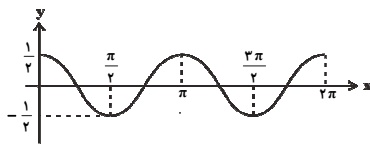
برای رسم نمودار این تابع، ابتدا $y = \frac{1}{3} \cos 2x$ را با به دست آوردن مقادیر

حداکثر، حداقل و دوره تناوب تابع رسم می‌کنیم و سپس نمودار را به اندازه $\frac{1}{3}$

روی محور y ها به بالا انتقال می‌دهیم:

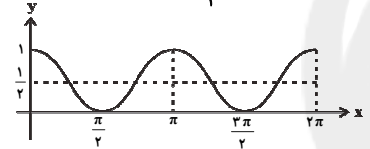
$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{2} = \pi = \text{مقدار تناوب}, \quad -\frac{1}{3} = \text{مقدار حداقل}, \quad \frac{1}{3} = \text{مقدار حداکثر}$$

$$y = \frac{1}{3} \cos 2x:$$



نمودار تابع $y = \frac{1}{3} \cos 2x$ را به اندازه

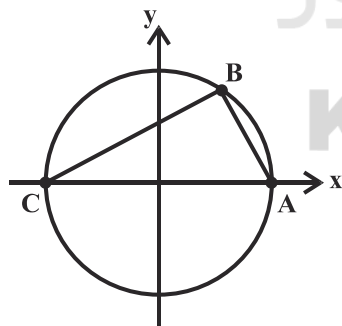
$\frac{1}{3}$ روی محور y ها به بالا انتقال می‌دهیم



بنابراین $a = 1$ و $b = \frac{2\pi}{3}$ است، پس:

$$a + b = 1 + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi + 3}{3}$$

گزینه ۱» - ۹۹



$$2 \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط A و C} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{نقطه B} \end{cases}$$

چند ضلعی حاصل، یک مثلث قائم‌الزاویه است؛ زیرا زاویه B ، روبه‌رو به کمان 180° است.



۱۰۰ - گزینه ۲»

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x - 2\sin x \cos x &= 1 \\ \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 &= 2\sin x \cos x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}; (k \in \mathbb{Z})$$

پس جوابها عبارتند از:

$$\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \pi, \pi + \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{9\pi}{8} \Rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{7\pi}{2}$$

هندسه ۳

۱۰۱ - گزینه ۳»

طبق قاعده ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & x & 1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = (x^3 + x^3 + 1) - (x^2 + x^2 + x^2) = (2x^3 - 3x^2 + 1)$$

اگر مقدار دترمینان را مساوی صفر قرار دهیم، آنگاه داریم:

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2(x-1) - (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow (x-1)(2x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 2x^2-x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین $x=1$ جواب مضاعف و $x=-\frac{1}{2}$ جواب ساده این معادله است.

۱۰۲ - گزینه ۱»

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & | & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & | & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = |6I|$$

$$\Rightarrow (1 \times (-2) \times 6) |A| (-(2 \times (-3) \times 1)) = 6^3$$

$$\Rightarrow (-12) |A| (6) = 216 \Rightarrow |A| = -3$$

تذکر: دترمینان ماتریس‌هایی که تمامی درایه‌های بالای قطر اصلی یا زیر قطر

اصلی آنها برابر صفر باشند، برابر حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی

است.

۱۰۳ - گزینه ۲»

$$|(2A^2)^{-1}| = \frac{1}{|2A^2|} = \frac{1}{2^2 |A|^2} = \frac{1}{4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 2$$

۱۰۴ - گزینه ۳»

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, |A| = -2 - (-1) = -1 \\ \Rightarrow A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A + B = AB \Rightarrow A = (A - I)B$$

$$\Rightarrow A^{-1}A = A^{-1}(A - I)B$$

$$\Rightarrow I = (I - A^{-1})B \xrightarrow{BB^{-1}=I} B^{-1} = I - A^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۰۵ - گزینه ۳»

با توجه به این که $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $|A| = 3 \times 3 - 2 \times 4 \neq 0$ ، پس A^{-1} وارون پذیر است و طرفین معادله $AX = B - 2I$ را می‌توانیم از چپ در A^{-1}

ضرب کنیم. داریم:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(B - 2A^{-1}I)$$

$$\xrightarrow{A^{-1}A=I} X = A^{-1}B - 2A^{-1}I \quad (*)$$

اما توجه کنید که $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ پس با جای‌گذاری در (*) خواهیم

داشت:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & -2 \\ -27 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ -19 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



ریاضیات گسسته

۱۰۶ - گزینه «۱»

$$(3n + a, 7n + 3) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 3n + a \\ d | 7n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | 21n + 7a \\ d | 21n + 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d | 7a - 9$$

برای آن که همواره $d = 1$ باشد، باید $7a - 9 = \pm 1$ باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} 7a - 9 = 1 \Rightarrow a = \frac{10}{7} \notin \mathbb{N} \\ 7a - 9 = -1 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۱۰۷ - گزینه «۴»

نکته: اگر a یک عدد صحیح باشد:

$$(a+1, a-1) = \begin{cases} 2 & ; \text{ فرد } a \\ 1 & ; \text{ زوج } a \end{cases}$$

$$(n^2 - n, n^2 + n) = 9 \Rightarrow |n| (n-1, n+1) = 9$$

داریم:

پس $|n| \times 2 = 9$ یا $|n| \times 1 = 9$. حالت اول امکان پذیر نیست، اما در حالت دوم داریم $|n| = 9$ ، یعنی n فرد است که با $(n-1, n+1) = 1$ تناقض دارد، پس معادله فاقد جواب است.

۱۰۸ - گزینه «۱»

طبق قضیه تقسیم، اگر مقسوم، مقسوم علیه و خارج قسمت را به ترتیب با a ، b و q نمایش دهیم، آنگاه $a = bq + 11$ است و در نتیجه $a > 11$ می باشد. با توجه به این که a عددی اول است، پس قطعاً a عددی فرد و $a - 11$ عددی زوج خواهد بود. بنابراین bq عددی زوج است. از طرفی $b > 11$ و b عددی اول است، در نتیجه b فرد می باشد. پس لزوماً q باید زوج باشد که تنها عدد زوج اول برابر ۲ است.

۱۰۹ - گزینه «۳»

$$\begin{cases} 2n+1 | (2n+1)n \Rightarrow 2n+1 | 2n^2+n \\ 2n+1 | 2n^2-3n+3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 2n+1 | 4n-3$$

$$\begin{cases} 2n+1 | 4n-3 \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2n+1 | 5 \Rightarrow n = -3, -1, 0, 2 \\ 2n+1 | 4n+2 \end{cases}$$

فقط $n = 2$ عددی طبیعی و قابل قبول برای این مسئله است.

۱۱۰ - گزینه «۳»

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} 787 = a \times 10 + r \\ a \in \mathbb{N}, 0 \leq r < a \end{cases} \xrightarrow{+a} \frac{787}{a} = 10 + \frac{r}{a}$$

$$\frac{0 \leq r < a}{a} \Rightarrow 10 \leq \frac{787}{a} < 11 \Rightarrow \begin{cases} 10a \leq 787 \Rightarrow a \leq 78.7 \\ \frac{787}{11} < a \Rightarrow a \geq 72 \end{cases}$$

بنابراین ۷ مقدار طبیعی برای a وجود دارد که عبارتند از ۷۲، ۷۳، ... و ۷۸.

۱۱۱ - گزینه «۲»

$$\begin{cases} 3a \equiv 7 \Rightarrow 15a \equiv 35 \\ 5a \equiv 2b \Rightarrow 15a \equiv 6b \end{cases} \Rightarrow 6b \equiv 35 \Rightarrow 6b \equiv 24 \Rightarrow b \equiv 4$$

۱۱۲ - گزینه «۲»

$$31 \equiv -2 \Rightarrow \begin{cases} 31^5 \equiv (-2)^5 \equiv 1 \\ 31^6 \equiv (-2)^6 \equiv 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب}} 31^9 \equiv 5 \quad (1)$$

$$9 \equiv -2 \Rightarrow 9^5 \equiv (-2)^5 \equiv 1 \Rightarrow (9^5)^6 \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } 9} 9^{31} \equiv 9 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2) \cdot (1)} 9^{31} + 31^9 + a \equiv 9 + 5 + a \equiv 3 + a \equiv 0$$

$$\xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a_{\min} = 8$$

۱۱۳ - گزینه «۳»

از آن جا که باقی مانده x بر ۹ مورد نظر است، طرفین معادله را در پیمانه ۹ با یکدیگر برابر قرار می دهیم:

$$\begin{cases} 23x + 45y^2 \equiv 23x + 9 \times 5y^2 \equiv 5x + 0 \equiv 5x \\ 1000 \equiv 1000 - 999 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5x \equiv 1 \Rightarrow 5x \equiv 1 + 9 \equiv 10 \equiv 5 \times 2 \Rightarrow x \equiv 2$$

بنابراین باقی مانده تقسیم x بر ۹ برابر ۲ است.

۱۱۴ - گزینه «۲»

$$(2m^2 + 1, 2m - 4) = d$$

$$d | 2m - 4 \Rightarrow d | 2m^2 - 4m \Rightarrow d | 4m + 1$$

$$d | 2m - 4 \Rightarrow d | 4m - 8 \Rightarrow d | 9$$

بنابراین برای آن که معادله همواره دارای جواب باشد، n باید مضرب ۹ باشد.

۱۱۵ - گزینه «۴»

$$13a79 \equiv 1 + 3 + a + 7 + 9 \equiv a + 20 \equiv a + 2$$

$$13a79 \equiv 9 - 7 + a - 3 + 1 \equiv a$$

با توجه به این که a یک رقم است و در نتیجه $0 \leq a \leq 9$ ، پس به ازای هیچ مقدار a ، باقی مانده تقسیم عدد $13a79$ بر دو عدد ۹ و ۱۱، یکسان نخواهد بود.



فیزیک ۳

۱۱۶- گزینه «۳»

محل رها شدن دو گلوله را مبدأ مکان در نظر می‌گیریم و معادله حرکت هر گلوله را می‌نویسیم. دقت کنید گلوله دوم را ۲/۵s بعد از گلوله اول رها می‌کنیم.

$$y_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + y_{o1} \quad t_1 = t \rightarrow y_1 = -\Delta t^2$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + y_{o2} \quad t_2 = (t - 2/5)s \rightarrow y_2 = -\Delta(t - 2/5)^2$$

چون گلوله اول همواره جلوتر از گلوله دوم است، بنابراین داریم:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \Delta t^2 - \Delta(t - 2/5)^2$$

$$\frac{\Delta y = 68/75 \text{ m}}{\Delta y = 68/75 \text{ m}} \rightarrow 68/75 = 2\Delta t - 31/25 \Rightarrow 2\Delta t = 100 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

۱۱۷- گزینه «۳»

با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F = ma \Rightarrow \begin{cases} F = 1/2m \\ F = 0/8(m + \Delta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1/2m = 0/8(m + \Delta)$$

$$\Rightarrow 0/4m = 4 \Rightarrow m = 10 \text{ kg}$$

۱۱۸- گزینه «۳»

در گزینه «۱» نیروی کشش طناب برابر ۱۰N می‌باشد.

در گزینه «۲» زمانی که نیروی خالص وارد بر جسمی برابر با صفر است، آن جسم میل دارد وضعیت حرکت خود را حفظ کند که به این خاصیت لختی می‌گویند.

در گزینه «۴»، چون نیروهای کنش و واکنش به دو جسم وارد می‌شود، قابل برابری نیستند.

در گزینه «۳»، بنابر قانون سوم نیوتون نیروهایی که هواپیما و پرنده بر هم وارد می‌کنند، کنش و واکنش یکدیگر هستند و بنابراین بزرگی یکسانی دارند.

۱۱۹- گزینه «۳»

در هر حالت با توجه به قانون دوم نیوتون، افزایش طول فنر نسبت به طول اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\text{حالت اول: } \sum F_1 = ma_1 \Rightarrow k\Delta l_1 - mg = ma$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m(g+a)}{k} \quad (1)$$

$$\text{حالت دوم: } \sum F_2 = m'a_2 \Rightarrow m'g - k\Delta l_2 = m'a$$

$$\Rightarrow \Delta l_2 = \frac{m'(g-a)}{k} \quad (2)$$

$$\frac{(1),(2)}{\Delta l_1} \rightarrow \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{m'(g-a)}{m(g+a)}$$

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = 2 \Rightarrow \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = 2 \Rightarrow \frac{\lambda m'}{12m} \Rightarrow \frac{m'}{m} = 3$$

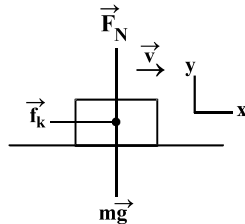
$$a = 2 \frac{m}{s^2}$$

۱۲۰- گزینه «۴»

چون جسم ساکن است، بنابراین مقصود سؤال ضریب اصطکاک ایستایی است و گزینه‌های «۱» و «۲» نمی‌توانند جواب سؤال باشند. از طرف دیگر چون جسم با نیروی $F = 20 \text{ N}$ ساکن مانده است، اندازه نیروی اصطکاک در آستانه حرکت بزرگ‌تر و یا مساوی با ۲۰N است و داریم:

$$f_{s,max} \geq 20 \Rightarrow mg\mu_s \geq 20 \Rightarrow \mu_s \geq \frac{20}{10 \times 10} \Rightarrow \mu_s \geq 0/2$$

۱۲۱- گزینه «۲»



تنها نیرویی که در راستای حرکت بر جسم وارد می‌شود، نیروی اصطکاک است و می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma \Rightarrow -mg\mu_k = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

$$\Rightarrow a = -0/2 \times 10 = -2 \frac{m}{s^2}$$

اکنون با استفاده از معادله سرعت - زمان داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -2t + 10 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

۱۲۲- گزینه «۱»

ابتدا با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی، شتاب اتومبیل را به دست می‌آوریم:

$$v_2 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_1 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \Delta x = 500 \text{ m}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 25^2 - 5^2 = 2 \times a \times 500 \Rightarrow a = 0/6 \frac{m}{s^2}$$

اکنون با استفاده از قانون دوم نیوتون، برابری نیروهای وارد بر اتومبیل را به دست می‌آوریم: (۱ تن = ۱۰۰۰kg)

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_{net} = 1000 \times 0/6 = 600 \text{ N}$$

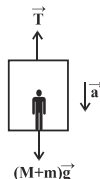
۱۲۳- گزینه «۱»

ابتدا قانون دوم نیوتون را برای مجموعه شخص و آسانسور به کار می‌بریم و شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$T - (M+m)g = (M+m)a$$

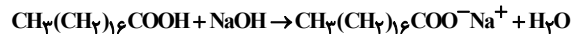
$$\Rightarrow 7740 - (800 + 60) \times 10 = (800 + 60)a$$

$$\Rightarrow a = -1 \frac{m}{s^2}$$





معادله واکنش انجام شده را می نویسیم و جرم سدیم هیدروکسید مورد نیاز را محاسبه می کنیم:



$$90.8 / 8g \text{ چربی} \times \frac{1 \text{ mol چربی}}{284g \text{ چربی}} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol چربی}}$$

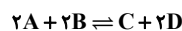
$$\times \frac{40g \text{ NaOH}}{1 \text{ mol NaOH}} = 128g \text{ NaOH}$$

۱۲۷- گزینه «۳»

درجه یونش (نه درصد یونش) یک اسید همیشه بین ۰ و ۱ است.

۱۲۸- گزینه «۴»

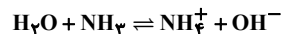
وقتی به ازای تولید هر مول D، نیم مول C تولید می شود، یعنی ضریب C نصف D است. از طرفی با توجه به واحد ثابت تعادل مجموع مول واکنش دهنده ها یک واحد از فرآورده ها بیشتر است. پس داریم:



$$K = \frac{[D]^2 [C]}{[A]^2 [B]^2} \xrightarrow{[D]=2, [C]=3, [B]=4} k = \frac{2^2 \times 3}{4^2} = 0.75 \text{ L.mol}^{-1}$$

۱۲۹- گزینه «۳»

واکنش تعادلی آمونیاک به شکل زیر است:



قبل از تعادل	M	.	.
تغییر	-Mα	+Mα	+Mα
بعد از تعادل	M - Mα	Mα	Mα

$$K_b = \frac{[\text{OH}^-][\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3]} = \frac{M\alpha \cdot M\alpha}{M(1-\alpha)} = 1/6 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} = 1/6 \times 10^{-5} \xrightarrow{M=0.25} \frac{0.25 \times \alpha^2}{1-\alpha} = 1/6 \times 10^{-5}$$

$$1-\alpha \approx 1 \rightarrow \alpha^2 = 6/4 \times 10^{-5} \Rightarrow \alpha = 8 \times 10^{-3}$$

۱۳۰- گزینه «۱»

موارد «الف» و «ب» درست و «ب» و «ت» نادرست هستند.

بررسی موارد درست:

الف) برای کاهش عوارض جانبی داروها مانند آسپرین می توان از ضد اسید استفاده کرد. (Al(OH)₃ نوعی ضد اسید است.)

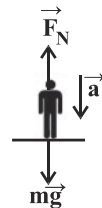
ب) رنگ گل ادریسی در محلول های اسیدی ($[\text{H}^+] > 10^{-7}$) و $[\text{OH}^-] < 10^{-7}$ آبی است.

بررسی موارد نادرست:

ب) کلسیم اکسید کاغذ pH را به رنگ آبی در می آورد.

ت) هر دو محلول در مجموع خنثی هستند.

اکنون قانون دوم نیوتون را برای شخص به کار می بریم و نیرویی که از طرف کف آسانسور بر آن وارد می شود را به دست می آوریم.



$$F_N - mg = ma \Rightarrow F_N - 60 \times 10 = 60 \times (-1) \Rightarrow F_N = 540 \text{ N}$$

۱۲۴- گزینه «۴»

کمینه تندی ذره در حالتی است که در مدت زمان یاد شده، کمترین مسافت را از A تا B طی کند، بنابراین باید در خلاف جهت عقربه های ساعت از A به B رسیده باشد، در این حالت در مدت ۲s، ذره ۱/۳ محیط دایره را طی می کند، در نتیجه دوره حرکت آن برابر است با:

$$T = 2 \times 3 = 6 \text{ s}$$

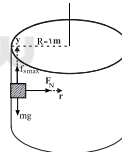
بنابراین می توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow 6 = \frac{2 \times 2 \times \pi \times 0.4}{v} \Rightarrow v = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۱۲۵- گزینه «۳»

شرط آن که لباس ها به پایین نریزند، آن است که نیروی وزن آن ها بیش از نیروی اصطکاک نباشد، در حالت حدی می توان نوشت:

$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow f_{s,\text{max}} = mg \Rightarrow \mu_s F_N = mg \Rightarrow F_N = \frac{mg}{\mu_s}$$



از طرف دیگر نیروی عمودی که جداره استوانه بر لباس ها وارد می کند باید نیروی مرکزگری لازم جهت حرکت دایره ای آن ها را تأمین کند، بنابراین می توان نوشت:

$$(F_{\text{net}})_x = m \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v = \frac{2\pi r}{T}} \rightarrow F_N = mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{\mu_s} = mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r\mu_s}{g}} = 2 \times 2 \times \sqrt{\frac{1 \times 0.4}{10}} = 1/2 \text{ s}$$

شیمی ۳

۱۲۶- گزینه «۱»

می دانیم صابون جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب است. پس سدیم هیدروکسید ترکیب مناسب انتخاب شده است.