

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

مثال اگر دو زوج مرتب  $(\frac{5}{x} - \frac{7}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$  و  $(-1, -3)$  برابر باشند، حاصل  $\frac{y}{x}$  کدام است؟

$$\begin{matrix} 1(1) & 2(2) & -2(3) & -1(4) \end{matrix}$$

جواب:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -1 \\ \frac{5}{x} - \frac{7}{y} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = 0 \\ \frac{5}{x} - \frac{7}{y} = -2 \end{cases}$$

$$\frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow \frac{-2}{-1} = y = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow \frac{1}{-2} = x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{گزینه ۲}$$

تابع  $f$  فرض کنید  $A, B$  در مجموعه باشند، در این صورت تابع  $f$  از  $A$  به  $B$ ، رابطه‌ای است که در آن، هر عضو مجموعه  $A$  دقیقاً یک عضو از مجموعه  $B$  نسبت داده شود.

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب

مثال اگر رابطه  $f = \{(a+2, 3), (3, a+4), (3, 5), (b, 1)\}$  تابع باشد،  $ab$  کدام است؟

$$\begin{matrix} 2(1) & -2(2) & -3(3) & 3(4) \end{matrix}$$

جواب:

$$\begin{matrix} (r, 5) \\ (r, a^r + 4) \end{matrix} \Rightarrow a^r = 1 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$a = 1 \Rightarrow f = \{(b, b), (r, 5), (r, 3)\} \Rightarrow a \neq 1$$

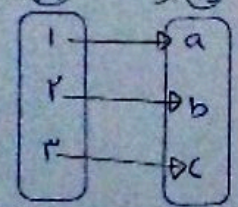
تکراری

$$a = -1 \Rightarrow f = \{(b, b), (r, 5), (r, 3)\} \Rightarrow b = 3$$

تکراری

$$ab = -1 \times 3 = -3 \quad \text{گزینه ۳}$$

دسته (A) برد (B)



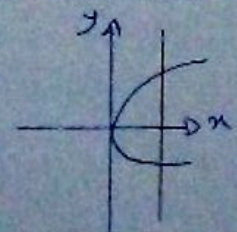
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

مثال: تعداد توابع از  $A \rightarrow B$

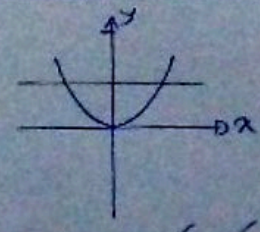
$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

مثال: تعداد توابع یک به یک از  $A \rightarrow B$

نمایش تابع به صورت نمودار بیگانه



تابع دوران یا فنون

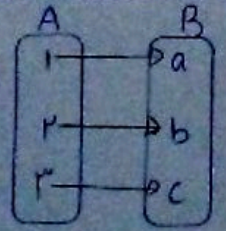


تابع یک به یک دوران یا فنون

نمایش نموداری تابع

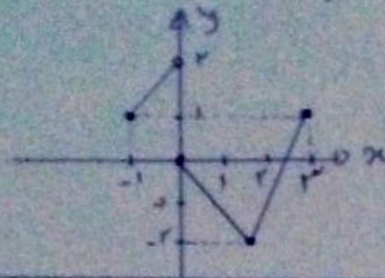
دامنه به محور x ها

بردار به محور y ها



از هر یک از اعضای مجموعه A (میتواند بیگانه خارج شود) تابع دوران  
به هر یک از اعضای مجموعه B (حداکثر یک بیگانه دارد) یک به یک بودن  
نمای اعضای B حد آتش یکبار اشتباه شده باشند  
نمودار درست آوردن تعداد توابع نوشت ما انسانها از اهل منزل و هم منزل

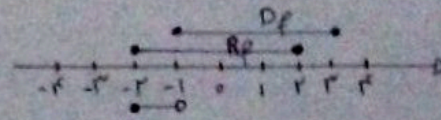
مثال: اگر  $D_f$  دامنه،  $R_f$  بردار و شکل مقابل باشد،  $R_f - D_f$  که است؟



$$\begin{array}{ll} [-1, 2] & (1) \\ [2, 3] & (3) \\ [1, 3] & (2) \end{array}$$

$$R_f = [-1, 2]$$

$$D_f = [-1, 3]$$



$$\Rightarrow R_f - D_f = [-1, -1] \quad \text{گزینه ۲}$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

$A =$  هواره دامنه تابع

$B =$  بردار زیر مجموعه ای از مجموعه  $B$  است

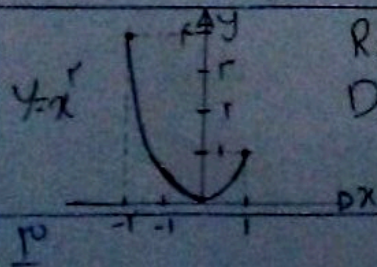
نمایش صوری تابع

مثال برای تابع  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  که دامنه از نمایش های زیر نیز قابل قبول باشد:

$$f(x) = x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 4] \\ f(x) = x^2 \end{array} \right. (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{array} \right. (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f: [-1, 1] \rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = x^2 \end{array} \right. (4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \\ f(x) = x^2 \end{array} \right. (3)$$



$$R_f = [0, 4]$$

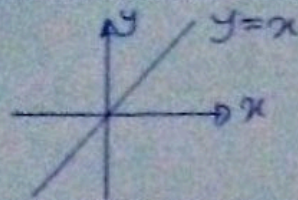
$$D_f = [-1, 1]$$

گزینه ۲

تذکر: معمولا معادلاتی که در آن ها توان  $x$  زوج بوده و  $y$  درون قدر مطلق و یا بدون

مراکت باشد، تابع نیستند

$$x^2 + y^2 = 1$$



تابع همانی:  $f(x) = x$

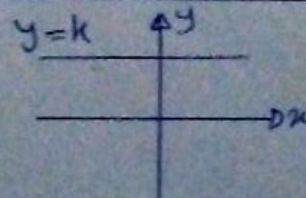
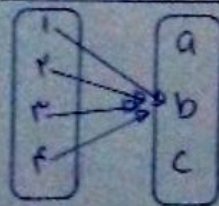
مثال: اگر تابع  $f = \{(a+b, 1-a), (b, a-2)\}$  همانی باشد،  $ab$  کدوم است؟

$$1(1) \quad 2(3) \quad -1(2) \quad -2(1)$$

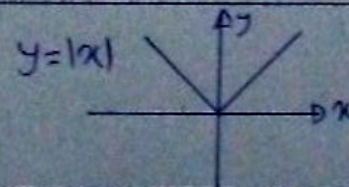
جواب:

$$\left. \begin{matrix} a+b=1-a \\ b=a-2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} a+a-2=1-a \Rightarrow 2a=3 \\ a=1, b=-1 \Rightarrow ab=-1 \end{matrix}$$

گزینه ۲



تابع ثابت:  $f(x) = k$



تابع قدر مطلق:  $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & D_1 \\ f_2(x) & D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & D_n \end{cases}$$

تابع چند ضابطه‌ای:

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$$

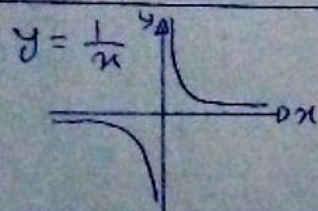
$$R_f = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$$

تذکره: شرط آن که یک معادله حیدر معادله ای از ضابطه یک تابع باشد، آن است که هر یک از ضابطه های آن، تابع بر او را داشته باشد. دامنه های هر دو ضابطه در نگاه آن شهر باشد یا اگر عضو مشترکی در دامنه ها داشته باشند، مقدار تابع از ضابطه ها به ازای آن عضو برابر شود.

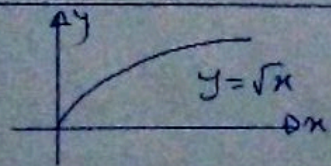
مثال: اگر رابطه  $y = \begin{cases} mx - x^2 & x > -1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$  تابع باشد،  $m$  کدام است؟

$3^3(1) \quad 1(2) \quad -1(2) \quad -3(1)$

جواب: گزینه ۱  $-m - 1 = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow -m - 1 = 2 \Rightarrow m = -3$



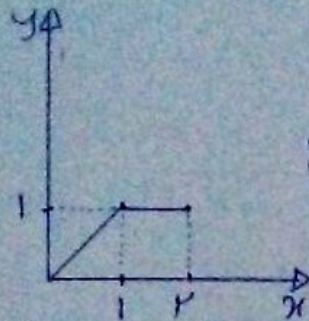
تابع گویا:  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$   $q(x) \neq 0$



تابع رادیکالی:  $f(x) = \sqrt{g(x)}$   $g(x) \geq 0$

$f(x) + k$	$f(x) - k$	$k f(x)$	$\frac{1}{k} f(x)$	$-f(x)$
$k$ واحد به سمت بالا	$k$ واحد به سمت پایین	$y$ ها $k$ برابر می شوند	$y$ ها بر $k$ تقسیم می شوند	قرینه نسبت به محور $x$ ها
$f(x+k)$	$f(x-k)$	$f(kx)$	$f(\frac{x}{k})$	$f(1-x)$
$k$ واحد به سمت چپ	$k$ واحد به سمت راست	$x$ ها بر $k$ تقسیم می شوند	$x$ ها $k$ برابر می شوند	قرینه نسبت به محور $y$ ها

مثال: نمودار  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. به کمک آن، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



(آ)  $y = f(x) + 1$  (ب)  $y = f(x+1)$  (پ)  $y = 2f(x)$

(ت)  $y = f(2x)$  (ث)  $y = -f(x)$  (ج)  $y = f(-x)$

(ح)  $y = -2f(x-1) + 1$  (ز)  $y = \frac{1}{2}f(-\frac{x}{2}) - 1$

تاری دو تابع  $f$  و  $g$  ساری بزرگتر هستند، هرگاه در شرط لازم زیر هم زمان برقرار باشند:

(الف)  $D_f = D_g$

(ب) برای هر  $x$  از این دامنه یکسان داشته باشیم  $f(x) = g(x)$

مثال کدام جفت از توابع زیر با بزرگتر برابر هستند؟

(۱)  $f(x) = (x^2)^{\frac{1}{2}}$  ,  $g(x) = (x^{\frac{1}{2}})^2$

(۲)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$  ,  $g(x) = \sqrt{x-2} \times \sqrt{x+2}$

(۳)  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  ,  $g(x) = \sqrt{2-x} \times \sqrt{2+x}$

(۴)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$  ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}}$

نکته: برد تابع هر گزاف با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  برابر است با:

$R_f = R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

$(c \neq 0), (ad - bc \neq 0)$

مثال: برد تابع  $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 2}$  کدام است؟

$$R = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \quad (1) \quad R = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\} \quad (2) \quad R = \{1, 2\} \quad (3) \quad R = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad (4)$$

نکته: برد تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$a > 0 \Rightarrow R_f = \left[ -\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right) \quad ; \quad a < 0 \Rightarrow R_f = \left( -\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right]$$

برای هر دو عدد حقیقی مثبت  $a, b$  داریم:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

برای هر عدد مثبت  $a$  داریم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال: برد تابع  $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x - 3$  کدام است؟

$$\left[ -\frac{1}{4}, \frac{7}{4} \right] \quad (1) \quad \left[ -\frac{1}{4}, 2 \right] \quad (2) \quad [-1, 2] \quad (3) \quad \left[ -\frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right] \quad (4)$$

مثال: برد توابع زیر را بدست آورید:

الف)  $f(x) = |x+3| + |x-2|$

ب)  $g(x) = |x-2| - |x+1|$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} \leq \sqrt{2}$$

الف)  $[\sqrt{2} - \sqrt{3}]$

ب)  $\left[ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right]$

$$\lfloor x+k \rfloor \stackrel{k \in \mathbb{Z}}{=} \lfloor x \rfloor + k$$

دو عدد صحیح:

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x, \quad 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$$

$$\lfloor x \rfloor = k \stackrel{k \in \mathbb{Z}}{\iff} k \leq x < k+1$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -x & x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

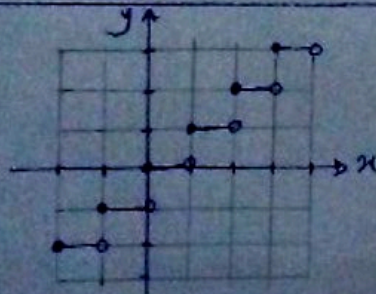
مسئله عبارات زیر را حل کنید:

$$\lfloor x+2 \rfloor + \lfloor x-2 \rfloor = 12 - \lfloor x+1 \rfloor \quad (a) \quad \lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = 7 \quad (b)$$

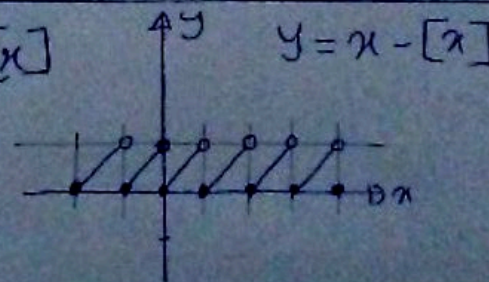
$$2x^2 - 7x + 2 = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor} \quad (c)$$

مسئله: چند عدد صحیح  $\Delta$  در رابطه  $\sqrt{\Delta} < \lfloor \frac{\sqrt{\Delta}-1}{3} \rfloor < \Delta$  صدق می کند؟

۲(۱) ۳(۲) ۴(۳) ۵(۴)



$$y = \lfloor x \rfloor$$



$$y = x - \lfloor x \rfloor$$



مثال نمودار تابع  $f(x) = [2x] + |x|$  در بازه  $(-1, 1)$  از چند نیم خط تشکیل شده است؟

۲(۱) ۳(۲) ۴(۳) ۵(۴)

رسم نمودار تابع  $y = [f(x)]$

مثال نمودار تابع  $y = [x^2]$  را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید.

مثال نمودار تابع  $y = [x]^2$  را رسم کنید.

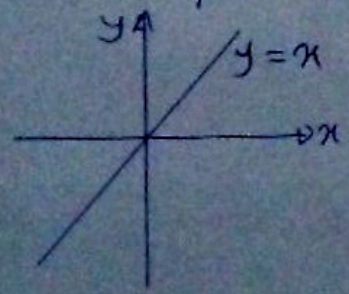
مثال اگر تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 2 \\ 2x + a & x < 2 \end{cases}$  یک به یک باشد، عدد  $a$  کدام است؟

- ۱)  $a > -1$
- ۲)  $a > 1$
- ۳)  $a < 1$
- ۴)  $a < -1$

شرط وارون پذیری یک تابع یک به یک بودن آن است.

$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$

$D_f = R_{f^{-1}}, R_f = D_{f^{-1}}$



نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به خط  $y=x$  قرینه هستند.

برای دست آوردن ضابطه تابع وارون، های  $x, y$  را عوض می کنیم، سپس آن را ساده می کنیم.

مثال: اگر  $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$  باشد،  $f^{-1}(-1)$  کدام است؟

- ۱) ۲    ۲) ۳    ۳) ۴    ۴) ۵

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$x \in D_{f^{-1}}$$

$$x \in D_f$$

با حل معادله  $f(x) = x$ ، غرض ما به نقاط تلاقی نمودارهای  $f$  و  $f^{-1}$  است.  $f^{-1}$  است.

تابع باضابطه  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  باشد،  $c \neq 0$ ،  $ad-bc \neq 0$ :

شود آن که در این تابع راسته باشد  $f^{-1}$  است که  $f(x) = f^{-1}(x)$  آن است که  $a+d=0$

مثال: اگر  $f(x) = x^2 - 11x$ ؛  $x \geq 2$ ، نمودارهای  $f$  و  $f^{-1}$  را با هم در نظر بگیریم. متقاطع اند؟

- ۱) ۵    ۲) ۶    ۳) ۷    ۴) ۸

$(f+g)(x)$	$(f-g)(x)$	$(f \times g)(x)$	$(\frac{f}{g})(x)$
$D_f \cap D_g$	$D_f \cap D_g$	$D_f \cap D_g$	$D_f \cap D_g - \{x   g(x) = 0\}$

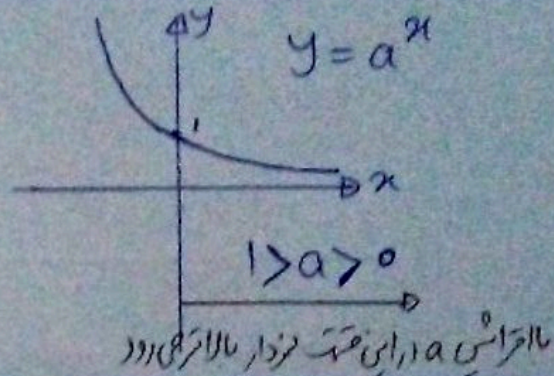
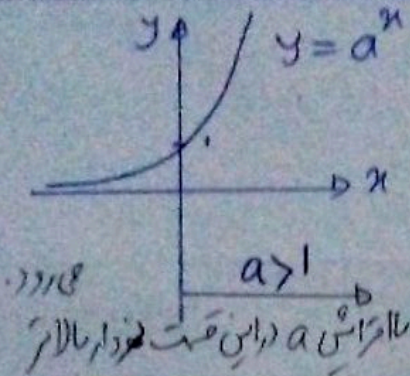
$$f \circ g(x) = f(g(x)), D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

مثال: اگر  $f(x) = \frac{x^2-2}{1+x^2}$ ،  $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، تابع  $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$  را بیابید؟

- ۱) ۲    ۲) ۳    ۳) ۴    ۴) ۵

تابع نمایی: به تابع  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) تابع نمایی می گویند.



معادلات نمایی

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

مثال: نمودارهای در تابع  $f(x) = 2^{ax+b}$  و  $g(x) = (\frac{1}{8})^x$  در نقطه ای به هم برخورد می کنند.

مستطقی هستند اگر  $f(2) = 64$  باشد، مقدار  $f(\frac{1}{14})$  کدام است؟

$$2(1) - 2(2) - 2(3) - 2(4) - 2(5)$$

نامعادلات نمایی

$$a < a \xrightarrow{f(x) > g(x)} f(x) < g(x)$$

$$a < a \xrightarrow{0 < a < 1} f(x) > g(x)$$

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$3^{x+4} > \frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{x+5} < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{x^2+2x+1}$$

تابع نمایی  $f(x) = a^x$  یک به یک، در نتیجه وارون پذیر است. تابع وارون تابع  $f$  را با

نماد  $f^{-1}(x) = \log_a x$  نمایش می‌دهیم. در آن تابع لگاریتمی در پایه یا صیغی  $a$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \quad (a > 0, a \neq 1) \quad \text{می‌گوئیم.}$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

دامنه توابع لگاریتمی

$$f(x) = \log \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x) > 0 \\ h(x) > 0, h(x) \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad \log AB = \log A + \log B$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \quad \log_a A^n = n \log_a A$$

$$\log_a A = \frac{1}{m} \log_a A^m \quad \log_a A^n = \frac{n}{m} \log_a A^m$$

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad a^{\log_b c} = b^{\log_a c}$$

$$\log_b a \times \log_c b = \log_b a \times \frac{1}{\log_b c} = \frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$$

$$a^{\log_a A} = A \quad \log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

نتیجه