



۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{1}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{56} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{14} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{28} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳ دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد روشده، یک عدد اول است؟

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟

$$\frac{9}{11} \quad (۲)$$

$$\frac{29}{33} \quad (۴)$$

$$\frac{8}{11} \quad (۱)$$

$$\frac{28}{33} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۵ چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

$$\frac{41}{96} \quad (۲)$$

$$\frac{55}{96} \quad (۴)$$

$$\frac{19}{48} \quad (۱)$$

$$\frac{23}{48} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{۳} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{۱۲} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{۴} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

$$\frac{۳}{۱۴} \quad (۲)$$

$$\frac{۵}{۱۴} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{۶} \quad (۱)$$

$$\frac{۲}{۹} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۸ از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن‌ها در مورد ادبیات و ۷ عدد آن‌ها در مورد تاریخ است به طور تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

$$\frac{۱۷}{۶۶} \quad (۲)$$

$$\frac{۳۷}{۱۳۲} \quad (۴)$$

$$\frac{۱۵}{۶۶} \quad (۱)$$

$$\frac{۳۵}{۱۳۲} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۹ دو تاس را انداخته‌ایم، اگر حاصل جمع شماره‌های روشده کمتر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد کدام است؟

$$\frac{۲}{۵} \quad (۲)$$

$$\frac{۳}{۵} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{۳} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{۲} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۰ اعداد ۱، ۲، ...، ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

$$\frac{1}{۹} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{۶} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{۱۲} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{۸} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

از ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم ۶ نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده‌اند. احتمال آنکه ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟

$$\frac{2}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{14} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{14} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

احتمال این که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟

$$\frac{4}{33} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{33} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{32} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

پنج مهره سفید و ۵ مهره سیاه یکسان را در ظرفی ریخته‌ایم. به تصادف دو مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ‌اند؟

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در آزمایشگاهی ۷ موش نگه‌داری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

$$\frac{4}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{16}{21} \quad (۴)$$

$$\frac{10}{21} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه‌ای مرغوب‌اند. با کدام احتمال از ۴ کالای خریداری شده این کارخانه لااقل یک کالا مرغوب است؟

$$\frac{255}{256} \quad (۲)$$

$$\frac{63}{64} \quad (۴)$$

$$\frac{251}{256} \quad (۱)$$

$$\frac{127}{128} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت انجام آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش سفید است؟

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{7} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گروه خونی افراد، کدام نوع متغیر است؟

$$(۲) \quad \text{کیفی - ترتیبی}$$

$$(۴) \quad \text{کمی - گسسته}$$

$$(۱) \quad \text{کیفی - اسمی}$$

$$(۳) \quad \text{کمی - پیوسته}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

$$\frac{5}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

حروف کلمه ATAXIA را بریده، به طور تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{1}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

پنج مهره سفید یکسان با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهره سیاه یکسان با شماره‌های ۱ تا ۵ را در ظرفی قرار می‌دهیم، به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

- (۱) کمی گسسته
(۲) کمی پیوسته
(۳) کیفی اسمی
(۴) کیفی ترتیبی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

- (۱) $\frac{1}{12}$
(۲) $\frac{1}{15}$
(۳) $\frac{1}{18}$
(۴) $\frac{1}{24}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر "رو" بیاید آنگاه تاس می‌ریزیم. اگر "پشت" بیاید دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال، حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{7}{24}$
(۴) $\frac{5}{12}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

هریک از اعداد ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱، بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور متوالی و تصادفی گوی‌ها را از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک‌درمیان خارج می‌شوند؟

- (۱) $\frac{1}{1}$
(۲) $\frac{1}{12}$
(۳) $\frac{1}{15}$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

- (۱) $\frac{1}{1}$
(۲) $\frac{1}{15}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{25}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$
(۲) $\frac{5}{18}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{5}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟

$$\frac{37}{42} \quad (۲)$$

$$\frac{73}{84} \quad (۴)$$

$$\frac{31}{42} \quad (۱)$$

$$\frac{67}{84} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است. اگر سه مهره از کیسه خارج کنیم، با کدام احتمال، حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج شده هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{19}{22} \quad (۲)$$

$$\frac{41}{44} \quad (۴)$$

$$\frac{17}{22} \quad (۱)$$

$$\frac{39}{44} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

از بین مجموعه اعداد متوالی $\{51, 52, \dots, 300\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۶ یا بر ۷ بخش‌پذیر است ولی مضرب ۴۲ نیست؟

$$0/26 \quad (۲)$$

$$0/31 \quad (۴)$$

$$0/24 \quad (۱)$$

$$0/28 \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

$$\frac{25}{77} \quad (۲)$$

$$\frac{50}{143} \quad (۴)$$

$$\frac{30}{91} \quad (۱)$$

$$\frac{40}{143} \quad (۳)$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$$\frac{29}{45} \quad (۲)$$

$$\frac{32}{45} \quad (۴)$$

$$\frac{28}{45} \quad (۱)$$

$$\frac{31}{45} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

$$\frac{17}{42} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{14} \quad (۴)$$

$$\frac{8}{21} \quad (۱)$$

$$\frac{10}{21} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

$$\frac{5}{18} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{18} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

هریک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه‌رقمی حاصل مضرب ۳ است؟

$$0/4 \quad (۲)$$

$$0/6 \quad (۴)$$

$$0/3 \quad (۱)$$

$$0/5 \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{37}{60} \quad (۲)$$

$$\frac{31}{60} \quad (۴)$$

$$\frac{41}{120} \quad (۱)$$

$$\frac{79}{120} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت است؟

$$\frac{3}{11} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{11} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{22} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{22} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{18} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{18} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{5}{18}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول شش مهره سفید و در ظرف دوم سه مهره سفید است. از اولی هفت مهره و از دومی پنج مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{13}{72}$ (۲) $\frac{7}{36}$
 (۳) $\frac{15}{72}$ (۴) $\frac{31}{144}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

- (۱) $\frac{20}{27}$ (۲) $\frac{34}{45}$
 (۳) $\frac{38}{45}$ (۴) $\frac{23}{27}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{11}{18}$
 (۳) $\frac{25}{36}$ (۴) $\frac{13}{18}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند؟

- (۱) $\frac{61}{4}$ (۲) $\frac{61}{8}$
 (۳) $\frac{62}{4}$ (۴) $\frac{62}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند $0/025$ و احتمال انتقال به افراد دیگر $0/2$ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

- (۱) $0/13$
 (۲) $0/14$
 (۳) $0/15$
 (۴) $0/16$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها دفترچه سلامت دارد؟

- (۱) $0/658$
 (۲) $0/669$
 (۳) $0/685$
 (۴) $0/696$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

- (۱) $\frac{2}{7}$
 (۲) $\frac{5}{14}$
 (۳) $\frac{3}{7}$
 (۴) $\frac{4}{7}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{31}{168}$
 (۲) $\frac{11}{56}$
 (۳) $\frac{17}{84}$
 (۴) $\frac{13}{56}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج‌شده، سفید است؟

- (۱) $\frac{25}{63}$
 (۲) $\frac{26}{63}$
 (۳) $\frac{10}{21}$
 (۴) $\frac{11}{21}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

- (۱) $\frac{5}{14}$ (۲) $\frac{3}{7}$
 (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

- (۱) $15/2$ (۲) $15/6$
 (۳) $15/8$ (۴) $16/2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

در جعبه‌ای ۶ مهره سفید، ۴ مهره سیاه است. دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره دوم، سفید است؟

- (۱) $0/5$ (۲) $0/6$
 (۳) $0/64$ (۴) $0/72$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

بهر روز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بسته ریاضی، ۷ بسته تجربی و ۶ بسته علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب $0/7$ ، $0/8$ و $0/9$ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟

- (۱) $\frac{25}{36}$ (۲) $\frac{29}{36}$
 (۳) $\frac{30}{36}$ (۴) $\frac{31}{36}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب است؟

- (۱) $\frac{5}{24}$ (۲) $\frac{11}{48}$
 (۳) $\frac{13}{48}$ (۴) $\frac{7}{24}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

- (۱) ۹۱% (۲) ۹۲%
(۳) ۹۳% (۴) ۹۴%

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، تقریباً کدام است؟

- (۱) ۱۴/۷۲ (۲) ۱۴/۸۱
(۳) ۱۵/۳۳ (۴) ۱۶/۶۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چندبرابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$
(۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{8}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

در دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $P(A \cap B) = 0/1$ ، $P(A \cup B) = 0/6$ و با فرض $P(B') > P(B)$ ، احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۳
(۳) ۰/۲ (۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟ $\left(\sqrt{\frac{2}{5}} \simeq 0/534\right)$

- (۱) ۰/۱۵ (۲) ۰/۲۰
(۳) ۰/۲۵ (۴) ۰/۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۸ A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = 0/4$ ، $P(B|A) = 0/25$ و $P(B) = 0/3$ باشد، $P(B|A')$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{5}$

(۱) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵۹ ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	
	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴

(۲) $0/15$

(۱) $0/12$

(۴) $0/18$

(۳) $0/17$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۶۰ میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

(۲) $9/36$

(۱) $9/25$

(۴) $9/63$

(۳) $9/52$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۶۱ واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده‌های ۱۶، ۲۴ و ۲۶ به آن اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند، انحراف معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟

(۲) $1/25$

(۱) $0/75$

(۴) ۲

(۳) $1/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۲ اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه اضلاع مربع‌هایی ۱۵ و $0/2$ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

(۲) ۲۲۹

(۱) ۲۲۷

(۴) ۲۳۴

(۳) ۲۳۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۶۳ در یک خانواده دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

(۲) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است، مقدار $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

۱۲/۷، ۳۰/۲، ۱۰/۶، ۱۱/۹، ۱۰/۶، ۱۲/۳، ۱۱/۲، ۱۳/۵، ۱۲/۸، ۱۱/۵

- (۱) -۰/۲۲۵
(۲) -۰/۱۲۵
(۳) ۰/۱۷۵
(۴) ۰/۲۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لاقط در یکی از این دو آزمون موفق می‌شود؟

- (۱) ۰/۷۴
(۲) ۰/۷۶
(۳) ۰/۸۲
(۴) ۰/۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

- (۱) گروه اول
(۲) گروه دوم
(۳) یکسان
(۴) اظهار نظر نمی‌توان کرد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

یک خانواده سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

- (۱) $\frac{۳}{۸}$
(۲) $\frac{۵}{۸}$
(۳) $\frac{۳}{۷}$
(۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لاقط یکی از فرزندان پسر است؟

- (۱) $\frac{۱}{۳}$
(۲) $\frac{۱}{۲}$
(۳) $\frac{۵}{۸}$
(۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگه‌داری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

- (۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$
(۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$
(۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$
(۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

$$\frac{3}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

در جدول فراوانی زیر، واریانس داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴
فراوانی	۴	۳	۹	۷	۲

$$11/96 \quad (۲)$$

$$11/72 \quad (۱)$$

$$12/36 \quad (۴)$$

$$12/24 \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

داده‌های آماری در ۴ دسته با درصد فراوانی نسبی آن‌ها بیان شده است. میانگین این داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
درصد فراوانی نسبی	۱۵	۳۰	۲۵	a

$$16/8 \quad (۲)$$

$$16/5 \quad (۱)$$

$$17/1 \quad (۴)$$

$$17 \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنان مهارت قالبی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی دارد یا مهارت قالبی‌بافی دارد؟

$$5/75 \quad (۲)$$

$$5/7 \quad (۱)$$

$$5/85 \quad (۴)$$

$$5/8 \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

دو تاس سالم را باهم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

$$\frac{37}{64} \quad (۲)$$

$$\frac{39}{64} \quad (۴)$$

$$\frac{27}{64} \quad (۱)$$

$$\frac{19}{32} \quad (۳)$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم، سپس از بین باقی‌مانده مهره‌ها به تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{5}{14}$ (۲) $\frac{3}{7}$
 (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{9}{14}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشند. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) ۰/۲۵ (۲) ۰/۲۷
 (۳) ۰/۲۸ (۴) ۰/۳۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

دستگاه A کالایی با میانگین وزن ۱۵۰ و انحراف معیار ۳/۶ و دستگاه B همان کالا را با میانگین وزن ۱۶۰ و انحراف معیار ۳/۸۴ بسته‌بندی می‌کند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیشتر است؟

- (۱) یکسان (۲) A
 (۳) B (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است:

A : ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹
 B : ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۴, ۱۷, ۱۸

دقت عمل کدام بیشتر است؟

- (۱) A (۲) B
 (۳) یکسان (۴) غیرقابل پیش‌بینی

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

در ۱۲ داده آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ است، ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{9}$
 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸۰ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آن‌ها ۵ است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) ۱۲۴
(۲) ۱۳۴
(۳) ۱۴۹
(۴) ۱۶۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۸۱ داده‌های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟

- (۱) ۰/۴
(۲) ۰/۴۸
(۳) ۰/۵۲
(۴) ۰/۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک دوم داخل ۱۳۹۵

۸۲ یک جامعه به اندازه ۱۲ و واریانس ۱۲/۶، با جامعه دیگری به اندازه ۲۴ و واریانس ۷/۲، تشکیل جامعه جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه جدید کدام است؟

- (۱) ۲/۹
(۲) ۳
(۳) ۳/۱
(۴) ۳/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۸۳ در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم، سپس از بین بقیه مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر، سفید است؟

- (۱) $\frac{1}{11}$
(۲) $\frac{2}{11}$
(۳) $\frac{4}{11}$
(۴) $\frac{5}{22}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۴ در دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $P(A \cap B) = ۰/۶$ و $P(A \cap B') = ۰/۲$ ، آنگاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

- (۱) ۰/۷
(۲) ۰/۷۵
(۳) ۰/۸۵
(۴) ۰/۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۵ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) ۲۲۹
(۲) ۲۳۲
(۳) ۲۳۴
(۴) ۲۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۶ در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ است. ضریب تغییرات، کدام است؟

- (۱) $0/225$ (۲) $0/275$
(۳) $0/325$ (۴) $0/375$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۷ میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها $65/44$ است. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) $0/12$ (۲) $0/15$
(۳) $0/2$ (۴) $0/25$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۸ ظرف A شامل ۸ مهره از عدد ۱ تا ۸ و ظرف B دارای ۵ مهره از عدد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع آن‌ها از ۸ بیشتر است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$
(۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{7}{8}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۹ دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه "رو" یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$
(۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۹۰ سه سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه لااقل یکی از پیشامدهای سکه فقط یک "رو" یا عدد تاس زوج باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{7}{12}$
(۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{11}{16}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۹۱ یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه "رو" ظاهر شده است؟

- (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{5}{8}$
(۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{11}{12}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

در ۲۵ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۳۲۵۰ می‌باشد. ضریب تغییرات در این داده‌ها کدام است؟

۹۲

- (۱) ۰/۲۵۷۲
(۲) ۰/۲۶۴۵
(۳) ۰/۲۶۷۲
(۴) ۰/۲۷۲۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ می‌باشد. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

۹۳

- (۱) ۰/۹۲
(۲) ۰/۹۴
(۳) ۰/۹۶
(۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

۹۴

- (۱) ۰/۹۲
(۲) ۰/۹۴
(۳) ۰/۹۶
(۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

نمرات مهارت برای کارگر (A) : ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳ و ۱۲ و برای کارگر (B) : ۱۶/۵، ۱۶، ۱۵/۵، ۱۳ و ۱۱/۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

۹۵

- (۱) A
(۲) B
(۳) یکسان
(۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

۹۶

- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{4}{9}$
(۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

شش داده آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ داده دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده‌اند. انحراف معیار گروه جدید، کدام است؟

۹۷

- (۱) ۲/۲
(۲) ۲/۳
(۳) ۲/۴
(۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۹۸ اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a، برابر با ۱۳ باشد، میانه آن‌ها کدام است؟

(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

(۴) ۱۴

(۳) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۹۹ میانگین طول ضلع مربع‌هایی ۲۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۰۶ است. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

(۲) $627/25$

(۱) $626/5$

(۴) $628/5$

(۳) $627/75$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۰ در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می‌شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های فراری دیابتی است؟

(۲) $\frac{5}{14}$

(۱) $\frac{15}{56}$

(۴) $\frac{15}{28}$

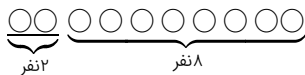
(۳) $\frac{3}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گزینه ۳

۱

برای محاسبه احتمال اینکه دو فرد موردنظر در کنار هم نباشند، احتمال اینکه هر دو فرد در کنار هم باشند را محاسبه می‌کنیم و از احتمال کل کم می‌کنیم.



دو نفر در کنار هم باشند:

$$P(A') = \frac{2!9!}{10!} = \frac{1}{5}$$

دو نفر در کنار هم نباشند:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

گزینه ۳

۲

۳ کتاب انگلیسی ۵ کتاب فارسی

$$n(S) = 8!$$

$$n(A) = 5! \times 3! \times 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 3! \times 2}{8!} = \frac{3 \times 2 \times 2}{8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{28}$$

گزینه ۱

۳

فضای نمونه‌ای این آزمایش $6^2 = 36$ حالت دارد.
فضای مطلوب به صورت زیر است:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 6), (6, 1) \\ (2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3) \\ (5, 6), (6, 5) \end{array} \right\}$$

این مجموعه ۱۵ عضوی است:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

گام اول

الف) از بین $۱۱ = ۵ + ۶$ موش، ۳ موش انتخاب می‌شود. قرار است لااقل یک موش سفید باشد پس می‌تواند یکی، دو تا یا هر سه تای آن‌ها سفید باشد.
 ب) متمم این‌که لااقل یک موش از سه موش انتخاب شده سفید باشد، سیاه بودن هر سه موش است.

گام دوم

روش اول:

$$P(\text{سه موش سفید}) + P(\text{دو موش سفید}) + P(\text{یک موش سفید}) = P(\text{لااقل یک موش سفید})$$

$$= \frac{\binom{5}{1} \binom{6}{2}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{5}{2} \binom{6}{1}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{75}{165} + \frac{60}{165} + \frac{10}{165} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از پیشامد احتمال متمم

$$P(A') = P(\text{هر سه موش سیاه}) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$$

$$P(A) = P(\text{لااقل یک موش سفید}) = 1 - P(A') = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33}$$

گام اول

الف) به واژه حداقل در صورت تست دقت کنید. حداقل دو نفر از ۴ نفر ماه تولد یکسان داشته باشند یعنی یا دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند، یا سه نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند و یا چهار نفر.

ب) اگر پیشامد A چنین تعریف شود که حداقل دو نفر از میان ۴ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند آن‌گاه پیشامد متمم (A') یعنی هیچ دو نفری از میان ۴ نفر ماه تولدشان یکسان نباشد و همگی در ماه‌های متفاوت به دنیا آمده باشند.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

گام دوم

$$P(A') = P(\text{هیچ دو نفری متولد یک ماه نباشند}) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{55}{96}$$

$$P(A) = P(\text{حداقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند}) = 1 - P(A') = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

گام اول

الف) اگر قرار باشد حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید، می‌تواند یک سکه رو و دیگری پشت بیاید و یا اینکه هر دو رو بیایند.
ب) اگر قرار باشد عدد تاس مضرب ۳ باشد، عدد رو شده ۳ یا ۶ است.

ج) اگر A پیشامد مطلوب خواسته شده باشد احتمال افتادنش به صورت مقابل تعریف می‌شود: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

گام دوم

تعداد کل حالت‌ها در پرتاب دو سکه و یک تاس برابر است با:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 6 = 24$$

حالت‌های مطلوب به صورت زیر است:

$$A = \{(r, p, 3), (r, p, 6), (p, r, 3), (p, r, 6), (r, r, 3), (r, r, 6)\}$$

$$n(A) = 6$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

گام اول

الف) برای اینکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند باید هر ۳ سیاه یا هر ۳ سفید باشند.

ب) فضای حالت به صورت انتخاب ۳ مهره از میان $9 = 5 + 4$ مهره موجود است.

ج) پیشامد مورد نظر به صورت انتخاب ۳ مهره از میان ۴ مهره سفید یا انتخاب ۳ مهره از میان ۵ مهره سیاه تعریف می‌شود.

د) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6 \times 6!} = 84$$

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3} \binom{7}{2}}{\binom{12}{5}} = \frac{10 \times 21}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8} = \frac{35}{132}$$

می‌توانیم براساس پیشامد رخ داده، فضای نمونه‌ای را محدود کنیم، فضای نمونه‌ای جدید عبارت است از:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

و پیشامد مطلوب را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای جدید می‌نویسیم. داریم:

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

یعنی $n(S) = 10$ و $n(A) = 4$ داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

تعداد حالات بیرون آوردن دو کارت به‌تصادف از میان ۹ کارت برابر است با:

$$n(S) = \binom{9}{2} = 36$$

مجموعه حالاتی که مجموع دو کارت، برابر ۱۱ باشند، عبارت است از:

$$A = \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)\}$$

پس $n(A) = 4$ داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

باتوجه به فرض سؤال، احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{5}{4}}{\binom{9}{6}} = \frac{6 \times 5}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

گام اول

به طور کلی $11 = 6 + 5$ موش داریم. پیشامد مطلوب این است که هر ۳ موش از بین ۶ موش سفید انتخاب شوند.

گام دوم

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{6 \times 8!} = 165$$

$$n(A) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3!} = 20$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

گام اول

الف) چون در صورت تست گفته شده لااقل بر روی یکی از دو موش انتخاب شده آزمایش صورت گرفته باشد، یعنی یا یکی از موش‌ها یا هر دوی آن‌ها مورد آزمایش قرار بگیرند.
 ب) اگر پیشامد A را مورد آزمایش واقع شدن لااقل یکی از موش‌ها تعریف کنیم، A' یعنی هیچ موشی آزمایش نشده باشد.

گام دوم

روش اول:

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{42}{2} = 21$$

$n(A)$ = (هر دو موش آزمایش شده باشند) + (یکی از موش‌ها آزمایش شده باشد)

$$= \binom{3}{1} \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 12 + 3 = 15$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از احتمال پیشامد متمم

$$P(A') = P(\text{هیچ موشی آزمایش نشده باشد}) = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

گزینه ۲

۱۵

گام اول

الف) احتمال مرغوب بودن هر کالا ۷۵٪ و احتمال نامرغوب بودنش ۲۵٪ است.

ب) هدف این است که از میان ۴ کالای خریداری شده حداقل یکی مرغوب باشد. پس می‌تواند یک کالا، دو کالا، سه کالا و یا هر چهار کالای خریداری شده مرغوب باشد.

گام دوم

از احتمال پیشامد متمم استفاده می‌کنیم، یعنی احتمال اینکه تمام کالاها نامرغوب باشد را محاسبه می‌کنیم. پیشامد متمم را با A' نشان می‌دهیم، بنابراین:

$$P(A') = P(\text{همگی نامرغوب باشند}) = \left(\frac{25}{100}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

گزینه ۳

۱۶

گام اول

قرار است فقط یکی از ۴ موش انتخاب شده سفید باشد پس باید یک موش از بین ۳ موش سفید و ۳ موش از بین ۵ موش سیاه انتخاب شود.

گام دوم

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{5}{3} = 3 \times 10 = 30$$

$$n(S) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

گزینه ۱

۱۷

گروه خونی افراد، یک متغیر کیفی اسمی است.

گام اول

الف) یک عدد در صورتی بر ۶ بخش پذیر است که هر بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر باشد.

ب) عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد. چون $۳ + ۲ + ۱ + ۰ = ۶$ پس عدد ساخته شده حتماً بر ۳ بخش پذیر است.

ج) عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکانش زوج باشد یعنی ۲ یا صفر. چون یکی از ارقام صفر است، در یک حالت یکان را صفر و در حالت دیگری یکان را ۲ در نظر می گیریم.

گام دوم

$$\left. \begin{array}{l} \text{یکان صفر: } ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶ \\ \text{یکان دو: } ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۴ \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = ۶ + ۴ = ۱۰$$

$$n(S) = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۸$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹}$$

گام اول

الف) تعداد کلمات ساخته شده با n حرف که m حرف از آن‌ها تکراری باشد برابر است با $\frac{n!}{m!}$.

ب) برای حل تست از روش دسته بندی استفاده می کنیم. یعنی حروفی که قرار است کنار هم باشند را در یک دسته قرار می دهیم و به عنوان یک حرف جدید در نظر می گیریم. به این صورت:

AAATXI
یک حرف

پس پیشامد مطلوب تعداد کلمات ساخته شده با ۴ حرف است.

گام دوم

$$n(S) = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$

$$n(A) = ۴!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴!}{۱۲۰} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

اگر مهره های سفید و سیاه را باتوجه به شماره های آن‌ها با ω_1 تا ω_5 و b_1 تا b_5 نمایش دهیم، فضای نمونه آزمایش مورد نظر برابر است با:

$$S = \{(\omega_1, \omega_5), (\omega_2, \omega_4), (b_1, b_5), (b_2, b_4), (\omega_1, b_5), (\omega_2, b_4), (\omega_3, b_3), (\omega_4, b_2), (\omega_5, b_1)\}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از:

$$A = \{(\omega_1, \omega_5), (\omega_2, \omega_4), (b_1, b_5), (b_2, b_4)\}$$

$$\text{احتمال مورد نظر: } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۹}$$

از آنجایی که نوع آلاینده‌گی هوا می‌تواند به صورت آلاینده‌گی مونوکسید کربن، دی‌اکسید کربن و غیره باشد، پس کیفی اسمی است. توجه کنید در این سؤال میزان آلاینده‌گی هوا که کمی پیوسته می‌باشد، سؤال نشده است.

$$\underbrace{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}}_{\text{هر دو سفید}} + \underbrace{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}}_{\text{هر دو سیاه}} = \frac{60 + 3}{28 \times 15} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

می‌دانیم هر سکه دو حالت دارد پس احتمال ظاهر شدن هر یک از حالت‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است، همچنین در پرتاب یک تاس، با احتمال $\frac{2}{6}$ عدد ظاهر شده مضرب ۳ خواهد بود. باتوجه به صورت سؤال اگر در پرتاب سکه "رو" بیاید، تاس می‌ریزیم و اگر "پشت" بیاید، دوباره سکه پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم حداکثر در پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ باشد؛ بنابراین باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد:
حالت اول: در اولین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، عدد ظاهر شده مضرب ۳ باشد.

$$P(x=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

حالت دوم: در اولین پرتاب سکه، "پشت" و در دومین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود.

$$P(x=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{12}$$

حالت سوم: در اولین و دومین پرتاب سکه، "پشت" و در سومین پرتاب سکه، "رو" بیاید سپس با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود.

$$P(x=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{24}$$

بنابراین داریم:

$$P(x \leq 3) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{4+2+1}{24} = \frac{7}{24}$$

تعداد حالت‌های فضای نمونه‌ای برابر $n(S) = 6!$ است. برای اینکه شماره‌های زوج و فرد، یک درمیان قرار گیرند، داریم:

$$\begin{array}{cccccc} \text{زوج} & \text{فرد} & \text{زوج} & \text{فرد} & \text{زوج} & \text{فرد} \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ 4 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \end{array}$$

ولی چون می‌توان ابتدا با عدد فرد شروع کرد، پس تعداد اعضای پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A) &= 2 \times 3! \times 3! \\ P(A) &= \frac{2 \times 3! \times 3!}{6!} = \frac{1}{10} = 0.1 \end{aligned}$$

گام اول

الف) ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داریم. از میان ۵ مهره، ۳ مهر دارای شماره فرد و ۲ مهره دارای شماره زوج هستند. پیشامد مورد نظر خارج نشدن دو مهره با شماره فرد به صورت متوالی است. بنابراین مهره‌ها باید به صورت یک در میان زوج و فرد خارج شوند و چون تعداد مهره‌ها به شماره‌های فرد یکی بیشتر است پس تنها حالت ممکن چنین می‌شود:

فرد, زوج, فرد, زوج, فرد : پیشامد A

ب) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

فضای حالت به صورت تمام حالت‌هایی که ۵ شماره می‌توانند به صورت پشت سر هم قرار گیرند تعریف می‌شود پس:

$$n(S) = 5! = 120$$

A : فرد, زوج, فرد, زوج, فرد

$$n(A) = 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

بنابراین:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 0.1$$

گام اول

الف) تعداد کل حالت‌ها ($n(S)$) در پرتاب دو تاس برابر ۳۶ است.

ب) مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس عددی بین ۲ و ۱۲ خواهد بود. بنابراین پیشامد مورد نظر شامل حالت‌هایی می‌شود که جمع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ است.

ج) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ شود را مشخص می‌کنیم:

مجموع دو تاس برابر ۴ : (۱, ۳), (۲, ۲), (۳, ۱)

مجموع دو تاس برابر ۸ : (۲, ۶), (۳, ۵), (۴, ۴), (۵, ۳), (۶, ۲)

مجموع دو تاس برابر ۱۲ : (۶, ۶)

بنابراین $n(A) = 9$ و $n(S) = 36$ داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

گام اول

الف) به واژه حداقل در صورت تست توجه کنید. این واژه نقش تعیین‌کننده‌ای در حل تست دارد. وقتی قرار است حداقل یک مهره از ۳ مهره انتخاب شده، آبی باشد یعنی تعداد مهره‌های آبی می‌تواند یکی، دو تا یا سه تا باشد.

ب) اگر پیشامد A را انتخاب حداقل یک مهره آبی تعریف کنیم آن‌گاه پیشامد A' انتخاب نشدن مهره آبی یا انتخاب هر سه مهره از میان مهره‌های قرمز و سفید را بیان می‌کند. این تست را می‌توان با احتمال پیشامد متمم نیز حل کرد.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

گام دوم

روش اول:

فضای نمونه‌ای شامل انتخاب ۳ مهره از میان ۹ مهره موجود است. بنابراین

$$P(\text{سه مهره آبی}) + P(\text{دو مهره آبی}) + P(\text{یک مهره آبی}) = P(\text{حداقل یک مهره آبی})$$

$$= \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{40 + 30 + 4}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

روش دوم:

با استفاده از احتمال پیشامد متمم داریم:

$$P(A') = P(\text{مهره آبی نداشته باشیم}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

پیشامد A را خارج شدن حداکثر ۲ مهره هم‌رنگ تعریف می‌کنیم؛ بنابراین متمم آن (A') پیشامد خارج شدن سه مهره هم‌رنگ خواهد بود.

$$P(A') = P(\text{هر سه مهره هم‌رنگ}) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10 + 4 + 1}{220} = \frac{15}{220}$$

بنابراین احتمال اینکه حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج شده، هم‌رنگ باشند برابر است با:

$$P(A) = 1 - \frac{15}{220} = \frac{205}{220} = \frac{41}{44}$$

عددی مضرب ۴۲ است که هم بر ۶ و هم بر ۷ بخش پذیر باشد. اگر پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۶ را با A و بخش پذیر بودن آن بر ۷ را با B نشان دهیم، هدف محاسبه $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = ۳۰۰ - ۵۱ + ۱ = ۲۵۰$$

تعداد اعداد بخش پذیر بر ۶ برابر است با:

$$n(A) = \left[\frac{۳۰۰}{۶} \right] - \left[\frac{۵۰}{۶} \right] = ۵۰ - ۸ = ۴۲$$

بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴۲}{۲۵۰}$$

تعداد اعداد بخش پذیر بر ۷ برابر است با:

$$n(B) = \left[\frac{۳۰۰}{۷} \right] - \left[\frac{۵۰}{۷} \right] = ۴۲ - ۷ = ۳۵$$

بنابراین داریم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳۵}{۲۵۰}$$

تعداد اعداد بخش پذیر بر ۴۲ برابر $n(A \cap B)$ است:

$$n(A \cap B) = \left[\frac{۳۰۰}{۴۲} \right] - \left[\frac{۵۰}{۴۲} \right] = ۷ - ۱ = ۶$$

بنابراین:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۶}{۲۵۰}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{۴۲}{۲۵۰} + \frac{۳۵}{۲۵۰} - \frac{۱۲}{۲۵۰} = \frac{۶۵}{۲۵۰} = \frac{۱۳}{۵۰} = ۰/۲۶$$

$$P_{\text{جس}} = P(\text{۱ مهره سفید، ۱ مهره سیاه}) + P(\text{۱ مهره قرمز، ۲ مهره سفید})$$

$$= \frac{\binom{۲}{۱} \binom{۷}{۲} \binom{۵}{۱}}{\binom{۱۴}{۴}} + \frac{\binom{۲}{۱} \binom{۷}{۳}}{\binom{۱۴}{۴}} = \frac{۲ \times \frac{۷ \times ۶}{۲} \times ۵ + ۲ \times \frac{۷!}{۳! \times ۴!}}{\frac{۱۴!}{۴! \times ۱۰!}}$$

$$= \frac{۷ \times ۶ \times ۵ + ۲ \times \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳ \times ۲}}{\frac{۱۴ \times ۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱}{۴ \times ۳ \times ۲}}$$

$$P_{\text{جس}} = \frac{۲۱۰ + ۷۰}{۷ \times ۱۳ \times ۱۱} = \frac{۲۸۰}{۱۳ \times ۱۱} = \frac{۲۰}{۱۴۳}$$

گام اول

به طور کلی $۵ + ۲ + ۳ = ۱۰$ مهره در جعبه وجود دارد که دو تا از آن بیرون می‌آوریم. هم‌رنگ بودن دو مهره یعنی یا هر دو سفید، یا هر دو سیاه و یا هر دو قرمز باشند. احتمال هم‌رنگ نبودن را خواسته‌اند پس می‌توان از احتمال پیشامد متمم استفاده کرد.

گام دوم

پیشامد متمم به صورت احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره خواهد بود، یعنی:

$$P(\text{هم‌رنگ بودن}) = P(\text{هر دو سفید}) + P(\text{هر دو سیاه}) + P(\text{هر دو قرمز})$$

$$= \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۳}{۴۵} + \frac{۱}{۴۵} + \frac{۱۰}{۴۵} = \frac{۱۴}{۴۵}$$

$$P(\text{غیرهم‌رنگ بودن}) = 1 - P(\text{دو مهره هم‌رنگ}) = 1 - \frac{۱۴}{۴۵} = \frac{۳۱}{۴۵}$$

گام اول

از میان ۳ مهره انتخاب شده، فقط یکی سفید است؛ یعنی یک مهره از بین ۴ مهره سفید و ۲ مهره از بین مهره‌های سیاه و قرمز انتخاب شود (پیشامد A).

گام دوم

انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره: $\binom{۹}{۳}$
 انتخاب یک مهره از بین ۴ مهره سفید: $\binom{۴}{۱}$
 انتخاب دو مهره از مهره‌های سیاه و قرمز: $\binom{۵}{۲}$

$$n(A) = \binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰$$

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶ \times ۶!} = ۸۴$$

بنابراین احتمال اینکه فقط یکی از مهره‌ها سفید باشد برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴۰}{۸۴} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

پیشامد A را رو شدن دو عدد متوالی تعریف می‌کنیم، تمام حالت‌های ممکن به صورت زیر است:

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۱۰ و تعداد کل حالت‌ها برابر ۳۶ است؛ بنابراین احتمال پیشامد A برابر می‌شود با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

$$n(A) = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (1, 3, 5), (3, 4, 5)\} \Rightarrow n(A) = ۴, \quad n(S) = \binom{۵}{۳} = ۱۰$$

$$\Rightarrow P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۰}$$

$P(\text{دو مهره قرمز و یک مهره غیر از قرمز}) + P(\text{دو مهره سیاه و یک مهره غیر از سیاه}) + P(\text{دو مهره سفید و یک مهره غیر از سفید}) = P(\text{دو مهره هم‌رنگ})$

$$= \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \binom{7}{1} + \binom{2}{2} \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{50 + 21 + 8}{120} = \frac{79}{120}$$

گام اول

برای اینکه رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت باشد باید از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم.

گام دوم

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{220} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

برای اینکه مجموع مضرب ۳ باشد، باید ۳، ۶، ۹ یا ۱۲ باشد.

مجموع	حالت‌ها
۳	(۱, ۲), (۲, ۱)
۶	(۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳), (۴, ۲), (۵, ۱)
۹	(۳, ۶), (۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳)
۱۲	(۶, ۶)

پس در کل ۱۲ حالت داریم که احتمال آن برابر با $\frac{1}{3} = \frac{12}{36} = \frac{12}{6^2} = \frac{n(A)}{n(S)}$ است.

مجموع باید ۴، ۸ یا ۱۲ باشد:

۴ مجموع: (۱, ۳), (۲, ۲), (۳, ۱)

۸ مجموع: (۲, ۶), (۳, ۵), (۴, ۴), (۵, ۳), (۶, ۲)

۱۲ مجموع: (۶, ۶)

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

اگر مهره‌ای را از ظرف آخر برداریم به احتمال $\frac{7}{11}$ متعلق به ظرف اول است. پس با قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{مهره سفید}) \begin{cases} \text{مهره از ظرف اول} \Rightarrow \frac{7}{11} \times \frac{\text{احتمال سفید بودن}}{24} \rightarrow \frac{6}{18} \\ \text{مهره از ظرف دوم} \Rightarrow \frac{5}{11} \times \frac{\text{احتمال سفید بودن}}{3} \rightarrow \frac{3}{18} \end{cases} \Rightarrow P(\text{مهره سفید}) = \frac{7}{11} \times \frac{6}{24} + \frac{5}{11} \times \frac{3}{18} = \frac{31}{144}$$

احتمال خواسته شده را به صورت زیر مرحله به مرحله بررسی می کنیم:

احتمال حداقل یک مهره سفید \times اگر مهره خارج شده از ظرف اول سفید باشد $P(A)$
 + احتمال حداقل یک مهره سفید \times اگر مهره خارج شده از ظرف اول سیاه باشد

$$P(A) = \frac{6}{9} \times \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{1} \binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{3}{9} \times \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{1} \binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{10 + 25}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{6 + 24}{45} = \frac{2 \times 35 + 1 \times 30}{3 \times 45} = \frac{70 + 30}{3 \times 45} = \frac{100}{3 \times 45} = \frac{20}{27}$$

شکل نمودار درختی مسئله به صورت زیر است:



احتمال خواسته شده عبارت است از:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{0}{\binom{9}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{9}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{9}{2}}$$

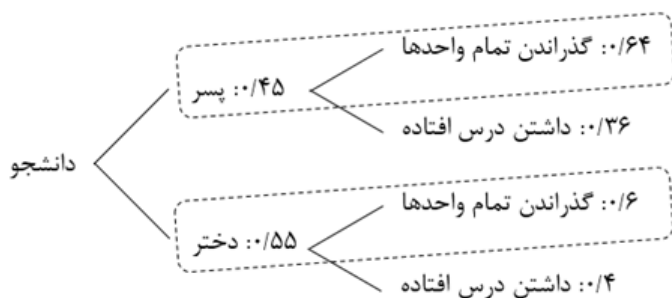
$$= 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{10 + 20}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{30}{36} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{11}{6} = \frac{11}{18}$$

گام اول

هر دانشجوی سال اول با احتمال $0/55$ دختر است و با احتمال $0/45$ پسر است. هر دانشجویی دختر با احتمال $0/6$ تمام واحدهای درسی خود را گذرانده و با احتمال $0/6$ درس افتاده دارد. همچنین هر دانشجویی پسر با احتمال $0/64$ تمام واحدهای درسی خود را گذرانده و با احتمال $0/36$ درس افتاده دارد.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی می توان احتمال این که هر دانشجو تمام واحدهای درسی خود را گذرانده باشد، را حساب کرد:



$P(\text{دختر و گذراندن تمام واحدها}) + P(\text{پسر و گذراندن تمام واحدها}) = P(\text{گذراندن تمام واحدها})$

$$= (0/45 \times 0/64) + (0/55 \times 0/6) = 0/618$$

بنابراین $61/8$ درصد از دانشجویان تمام واحدهای درسی خود را گذرانده اند.

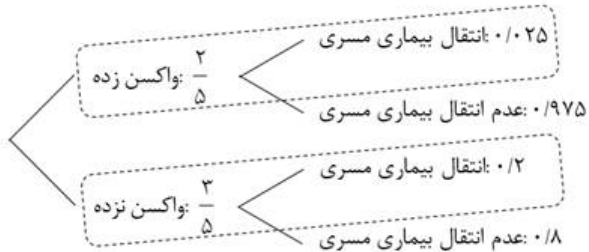
گام اول

الف) هر یک از کارگران کارگاه می‌توانند واکسن زده باشند یا واکسن نزده باشند. احتمال این که کارگری واکسن زده باشد $\frac{2}{5}$ و احتمال این که واکسن نزده باشد $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ است.

ب) هر فرد واکسن زده با احتمال $\frac{2}{5}$ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $\frac{3}{5} = 0.6$ بیمار نمی‌شود.
ج) هر فردی که واکسن نزده باشد با احتمال $\frac{2}{5}$ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $1 - \frac{2}{5} = 0.4$ بیمار نمی‌شود.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال این که یک کارگر به بیماری مسری مبتلا شود را محاسبه می‌کنیم.



$P(\text{انتقال به واکسن نزده}) = P(\text{انتقال به واکسن زده}) + P(\text{انتقال بیماری به کارگر})$

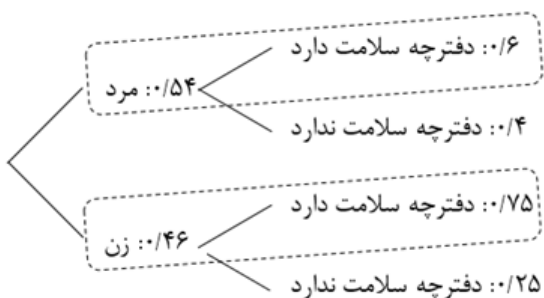
$$= \left(\frac{2}{5} \times 0.25\right) + \left(\frac{3}{5} \times 0.2\right) = 0.1 + 0.12 = 0.22$$

گام اول

فرد انتخاب شده با احتمال $\frac{54}{100}$ مرد و با احتمال $\frac{46}{100}$ زن است.
هر مرد با احتمال $\frac{6}{100}$ دفترچه دارد و با احتمال $1 - \frac{6}{100} = \frac{94}{100}$ دفترچه ندارد. همچنین هر زن با احتمال $\frac{75}{100}$ دفترچه دارد و با احتمال $\frac{25}{100}$ دفترچه ندارد.

گام دوم

با رسم یک نمودار درختی می‌توان احتمال دفترچه دار بودن فرد انتخاب شده را محاسبه کرد.



حالت مطلوب می‌تواند به صورت مردی با دفترچه باشد یا یک زن با دفترچه، پس:

$$P(\text{دفترچه دار بودن}) = P(\text{مرد با دفترچه}) + P(\text{زن با دفترچه})$$

$$= \left(\frac{54}{100} \times \frac{6}{100}\right) + \left(\frac{46}{100} \times \frac{75}{100}\right) = \frac{324}{10000} + \frac{3450}{10000} = \frac{3774}{10000} = 0.3774$$

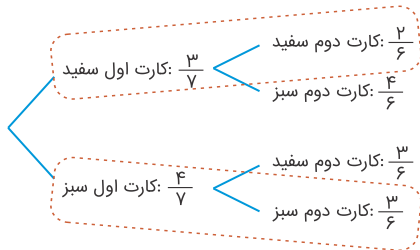
گام اول

کارت اول می‌تواند سفید یا سبز باشد و کارت دوم هم می‌تواند سفید یا سبز باشد. حالت دلخواه هم‌رنگ بودن دو کارت است یعنی هر دو سبز یا هر دو سفید. دقت کنید که کارت‌ها بدون جای‌گذاری بیرون آورده می‌شوند و کل کارت‌های موجود برابر است با: $۳ + ۴ = ۷$

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال هم‌رنگ بودن دو کارت را محاسبه می‌کنیم.

$$P(\text{هم‌رنگ بودن}) = P(\text{هر دو سفید}) + P(\text{هر دو سبز}) = \left(\frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶}\right) + \left(\frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶}\right) = \frac{۱}{۷} + \frac{۲}{۷} = \frac{۳}{۷}$$



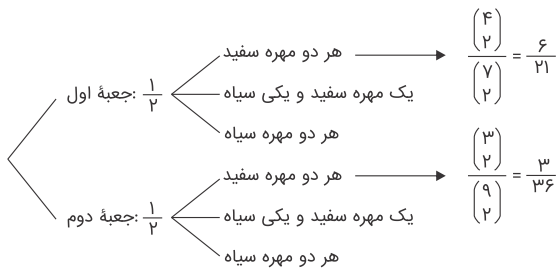
گزینه ۱

گام اول

الف) احتمال انتخاب هر یک از جعبه‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

ب) احتمال سفید بودن دو مهره خارج شده از هر یک از جعبه‌ها را تعیین کرده و با استفاده از نمودار درختی احتمال کل را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم



$$P(\text{هر دو مهره سفید}) = P(\text{جعبه اول و سفید}) + P(\text{جعبه دوم و سفید})$$

$$= \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۲۱}\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۳۶}\right) = \frac{۳۱}{۱۶۸}$$

دقت کنید که چون می‌خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهره انتخابی سفید باشد بنابراین باید ۲ مهره دیگر سیاه باشند و چون سه ظرف داریم، احتمال انتخاب هر یک از ۳ ظرف $\frac{1}{3}$ است. احتمال آنکه از هر ظرف ۲ مهره سیاه و ۲ مهره سفید خارج شود را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{احتمال انتخاب ظرف A} &= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 10}{126} \\ \text{احتمال انتخاب ظرف B} &= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126} \\ \text{احتمال انتخاب ظرف C} &= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{3} \left(\frac{60}{126} + \frac{45}{126} + \frac{45}{126} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{150}{126} = \frac{50}{126} = \frac{25}{63}$$

توجه کنید:

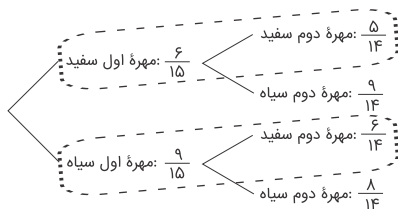
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \\ \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \end{cases}$$

گام اول

الف) مهره اول خارج شده می‌تواند سفید یا سیاه باشد. احتمال سفیدبودن مهره دوم بر اساس حالت مهره اول قابل محاسبه است.
ب) از نگاهی دیگر، چون رنگ مهره اول را نمی‌دانیم فرض می‌کنیم هنوز مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفیدبودن مهره دوم را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:



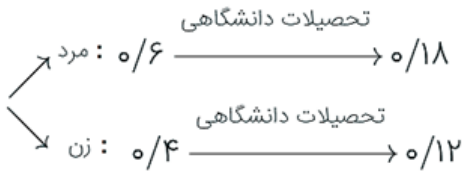
بنابراین داریم:

$$P(\text{دو مهره سفید}) = \left(\frac{6}{15} \times \frac{5}{14} \right) + \left(\frac{9}{15} \times \frac{6}{14} \right) = \frac{30 + 54}{210} = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$$

روش دوم:

بدون توجه به رنگ مهره اول و با فرض اینکه هنوز مهره‌ای خارج نشده، احتمال سفیدبودن رنگ مهره دوم برابر $\frac{2}{5}$ است.

فرد تحصیل کرده می‌تواند زن با تحصیلات دانشگاهی یا مرد با تحصیلات دانشگاهی باشد. برای حل سؤال از قانون احتمال کل (نمودار درختی) استفاده می‌کنیم.



$$P(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = (0/6 \times 0/18) + (0/4 \times 0/12) = 0/108 + 0/48$$

$$= 0/156 \Rightarrow P(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = \%15/6$$

راه حل اول:

باتوجه به آنکه رنگ مهره اولی که از جعبه خارج شده، مشاهده نشده است، مثل این است که مهره‌ای خارج نشده، پس احتمال خروج مهره سفید در انتخاب دوم $0/6 = \frac{6}{10}$ است.

راه حل دوم:

B: پیشامد سفیدبودن کارت اول:

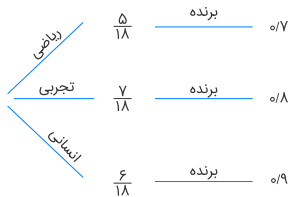
B': پیشامد سیاهبودن کارت اول:

A: پیشامد سفیدبودن کارت دوم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9}$$

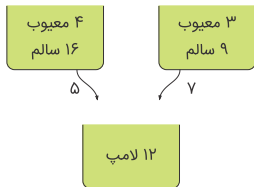
$$= \frac{54}{90} = 0/6$$

فرض کنید A پیشامد برنده شدن بهروز باشد، پس:



$$P(A) = \frac{5}{18} \times 0/7 + \frac{7}{18} \times 0/8 + \frac{6}{18} \times 0/9$$

$$= \frac{35}{180} + \frac{56}{180} + \frac{54}{180} = \frac{145}{180} = \frac{29}{36}$$



در جعبه جدید در کل ۱۲ لامپ وجود دارد. حال اگر لامپی از جعبه جدید انتخاب کنیم، احتمال اینکه به ترتیب متعلق به جعبه اول و دوم باشد برابر $\frac{۷}{۱۲}$ و $\frac{۵}{۱۲}$ است. همچنین احتمال معیوب بودن لامپ جعبه اول و دوم برابر $\frac{۴}{۲۰}$ و $\frac{۳}{۱۲}$ است. فرض کنید A پیشامد معیوب بودن لامپ جعبه جدید باشد، پس:

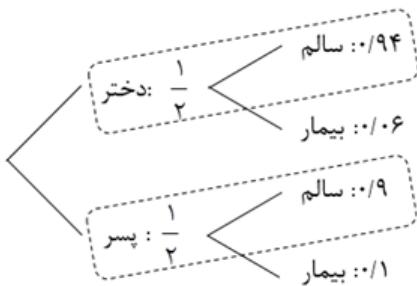
$$P(A) = \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۲۰} + \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۷}{۴۸} = \frac{۱۱}{۴۸}$$

گام اول

الف) هر فرزند پسر با احتمال $\frac{۱}{۲}$ بیماری ارثی از والدینش دریافت می‌کند و با احتمال $\frac{۱}{۹}$ دریافت نمی‌کند و سالم است. به همین ترتیب هر فرزند دختر با احتمال $\frac{۱}{۶}$ بیماری ارثی دریافت می‌کند و با احتمال $\frac{۱}{۹۴}$ دریافت نمی‌کند و سالم است.
ب) به کلمه ندارد دقت کنید. احتمال سالم بودن فرزند به دنیا آمده را باید حساب کرد.

گام دوم

هر فرزند به دنیا آمده با احتمال $\frac{۱}{۲}$ دختر و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ پسر است. دو حالت مطلوب وجود دارد: فرزند پسر و سالم باشد یا فرزند دختر و سالم باشد. با استفاده از نمودار درختی احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.



$$P(\text{سالم بودن فرزند}) = P(\text{دختر و سالم}) + P(\text{پسر و سالم}) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{94}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{188} + \frac{1}{18} = \frac{9}{94} + \frac{10}{188} = \frac{18}{188} = \frac{9}{94} = 9.57\%$$

$$\bar{x} = \frac{۲۵ \times ۳۰ - (۵۰ + ۴۵ + ۱۵ + ۱۰)}{۲۵ - ۴} = \frac{۷۵۰ - ۱۲۰}{۲۱} = \frac{۶۳۰}{۲۱} = ۳۰$$

با حذف داده‌ها، میانگین تغییری نکرد، بنابراین برای محاسبه واریانس داده‌های باقی‌مانده، کافی است جملات مربوط به داده‌های ناجور را از واریانس حذف کنیم:

$$\sigma^2 = (s)^2 = ۶۴ \Rightarrow (\sigma')^2 = \frac{۶۴ \times ۲۵ - [(۱۰ - ۳۰)^2 + (۱۵ - ۳۰)^2 + (۴۵ - ۳۰)^2 + (۵۰ - ۳۰)^2]}{۲۵ - ۴}$$

$$= \frac{۱۶۰۰ - ۱۲۵۰}{۲۱} = \frac{۳۵۰}{۲۱} = ۱۶/۶۶$$

انحراف معیار و میانگین داده‌های اولیه را به ترتیب با σ_x و \bar{x} نشان می‌دهیم، در این صورت ضریب تغییرات این داده‌ها برابر می‌شود با:

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad (*)$$

برای محاسبه ضریب تغییرات داده‌های جدید داریم:

$$CV_{(2x+3)} = \frac{\sigma_{(2x+3)}}{2\bar{x}+3}$$

$$\text{می‌دانیم} \begin{cases} \overline{ax+b} = a\bar{x} + b \\ \sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x \end{cases} \text{ پس:}$$

$$CV_{(2x+3)} = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x}+3} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{CV_{(2x+3)}}{CV_x} = \frac{\frac{2\sigma_x}{2\bar{x}+3}}{\frac{\sigma_x}{\bar{x}}} = \frac{2\bar{x}}{2\bar{x}+3}$$

باتوجه به فرض سؤال $\bar{x} = 12$ ، پس نسبت ضریب تغییرات داده‌های جدید به ضریب تغییرات داده‌های اولیه، برابر است با:

$$\frac{2 \times 12}{2 \times 12 + 3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

رابطه احتمال اجتماع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow 0/6 = P(A) + P(B) - 0/1 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0/7$$

همچنین چون A و B مستقل‌اند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0/1 \Rightarrow P(A) = \frac{0/1}{P(B)}$$

بنابراین:

$$P(A) + P(B) = 0/7 \Rightarrow \frac{0/1}{P(B)} + P(B) = 0/7 \Rightarrow P^2(B) - 0/7P(B) + 0/1 = 0$$

$$P(B) = \frac{0/7 \pm \sqrt{0/49 - 0/4}}{2} = \frac{0/7 \pm 0/3}{2} \Rightarrow P(B) = 0/5, 0/2$$

باتوجه به اینکه $P(B') > P(B)$ است، پس $P(B) = 0/2$.

راه حل اول: ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{5 + 7 + 3 \times 8 + 2 \times 10}{7} = \frac{12 + 24 + 20}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

واریانس:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(5 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + 3 \times (8 - 8)^2 + 2 \times (10 - 8)^2}{7} \\ &= \frac{9 + 1 + 0 + 8}{7} = \frac{18}{7} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار: } \sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

حال ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} = \frac{3}{8} \times 0.534 \approx 0.20$$

راه حل دوم: برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۸ را از همه داده‌ها کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -3, -1, 0, 0, 0, 2, 2 \\ \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{2 + 2 - 1 - 3}{4} = 0 \\ \sigma^2 = \frac{2 \times 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}{4} = \frac{18}{4} \Rightarrow \sigma = 3\sqrt{\frac{2}{4}} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_{\text{اصلی}} = \bar{x}_{\text{جدید}} + 8 = 0 + 8 = 8$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{4}}}{8} \approx 0.20$$

برای محاسبه $P(B|A')$ به $P(B \cap A')$ و $P(A')$ نیاز است.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\begin{aligned} P(B \cap A') &= P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3 - P(A) \cdot P(B|A) \\ &= 0.3 - 0.4 \times 0.25 = 0.3 - 0.1 = 0.2 \end{aligned}$$

پس:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

راه حل اول:

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{5 \times 10 + 4 \times 11 + 7 \times 14}{16} = \frac{50 + 44 + 98}{16} = \frac{192}{16} = 12$$

سپس انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{5 \times (10 - 12)^2 + 4 \times (11 - 12)^2 + 7 \times (14 - 12)^2}{16} \\ &= \frac{5 \times 4 + 4 \times 1 + 7 \times 4}{16} = \frac{20 + 4 + 28}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4} \\ \Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma &= \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

حالت ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{24} \approx 0.15$$

راه حل دوم:

برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۱۰ را از همه داده‌ها کم می‌کنیم:

داده‌ها: $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{5}, \underbrace{1, \dots, 1}_{4}, \underbrace{4, 4, \dots, 4}_{7}$

$$\bar{x}_{\text{کوچک}} = \frac{0 + 4(1) + 7(4)}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\bar{x}_{\text{اصلی}} = \bar{x}_{\text{کوچک}} + 10 = 2 + 10 = 12$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} \approx 0.15$$

$$\text{واریانس} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 9 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{18} \Rightarrow \sum_{i=1}^{18} (x_i - 25)^2 = 18 \times 9 = 162$$

از آنجاکه میانگین سه داده آماری اضافه شده برابر ۲۵ می‌باشد $\left(\frac{20 + 27 + 28}{3} = 25 \right)$ ، بنابراین میانگین داده‌های جدید همان ۲۵ است.

$$\begin{aligned} \sigma'^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{21} (x_i - 25)^2}{21} = \frac{\sum_{i=1}^{18} (x_i - 25)^2 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2}{21} \\ &= \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} \approx 9.52 \end{aligned}$$

چون واریانس برابر صفر است نتیجه می‌گیریم تمام داده‌ها با هم برابرند و چون با افزودن ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ میانگین تغییر نمی‌کند میانگین این ۳ عدد برابر یازده داده قبلی است.

$$\bar{x} = \frac{۲۴ + ۱۶ + ۲۶}{۳} = ۲۲$$

بنابراین باید انحراف معیار داده‌های زیر را حساب کنیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(۲۲ - ۱۶)^2 + (۲۴ - ۲۲)^2 + (۲۶ - ۲۲)^2}{۱۴}} = ۲$$

نکته: واریانس داده‌ها را می‌توان از رابطه $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$ به دست آورد.

اگر طول اضلاع مربع‌ها را x_i در نظر بگیریم، باتوجه به فرض سؤال داریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ۰/۲ \xrightarrow{\bar{x}=۱۵} \sigma = ۱۵ \times ۰/۲ = ۳ \Rightarrow ۹ = \frac{\sum x_i^2}{n} - ۱۵^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = ۲۳۴$$

از آنجا که مساحت مربع‌ها به صورت x_i^2 است، پس میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۲۳۴ است.

گام اول

(الف) فضای نمونه‌ای مربوط به یک خانواده دو فرزند چهار حالت دارد. اما با توجه به اینکه می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، حالتی که هر دو فرزند دختر باشند را حذف می‌کنیم.

(ب) با توجه به فضای نمونه‌ای جدید، احتمال پیشامد خواسته شده را حساب می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(پ, پ), (پ, د), (د, پ)\}, \quad n(S) = ۳$$

از میان ۳ حالت نوشته شده فقط ۲ حالت مطلوب ماست و حالتی که هر دو فرزند پسر باشد قابل قبول نیست. بنابراین احتمال این‌که این خانواده دارای فرزند دختر باشد برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$۱۰/۶, ۱۰/۶, ۱۱/۲, ۱۱/۵, ۱۱/۹, ۱۲/۳, ۱۲/۷, ۱۲/۸, ۱۳/۵, ۳۰/۲$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، پس میانه (Q_2) برابر میانگین داده پنجم و ششم است.

$$Q_2 = \frac{۱۱/۹ + ۱۲/۳}{۲} = ۱۲/۱$$

۵ عدد قبل از میانه و ۵ عدد بعد از آن قرار دارند، بنابراین:

$$Q_1 = ۱۱/۲, \quad Q_3 = ۱۲/۸$$

پس:

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{۱۱/۲ + ۱۲/۸ - ۲(۱۲/۱)}{۱۲/۸ - ۱۱/۲} = \frac{-۰/۲}{۱/۶} = -۰/۱۲۵$$

احتمال قبولی در آزمون اول را $P(A)$ و احتمال قبولی در آزمون دوم را $P(B)$ فرض می‌کنیم.

$$P(A) = 0.7, \quad P(B) = 0.6, \quad P(B|A) = 0.8$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.56 \\ = 1.3 - 0.56 = 0.74$$

در گروه اول $\bar{X}_1 = 80$ و $\sigma_1 = 5$ و در گروه دوم $\bar{X}_2 = 72$ و $\sigma_2 = 4$ است. برای دو گروه، ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{X}_1} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{X}_2} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

چون $CV_2 < CV_1$ است، پس گروه دوم بهتر است.

گام اول

الف) در چنین تست‌های احتمال شرطی بهتر است ابتدا فضای نمونه‌ای جدید را با توجه به شرط داده شده تعریف کنیم. می‌دانیم در یک خانواده سه فرزند تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $2^3 = 8$ است. چون حداقل یکی از فرزندان حتماً دختر است پس حالتی که هر سه فرزند پسر باشند از فضای نمونه‌ای حذف می‌شود. ب) پیشامد مطلوب را با توجه به فضای نمونه‌ای جدید تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$n(S) = 8 - 1 = 7$$

اگر پیشامد داشتن حداقل دو فرزند دختر را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\}$$

$$n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{7}$$

گام اول

الف) با توجه به این که مشخص شده فرزند اول خانواده دختر است، اعضای فضای نمونه‌ای را در حالت جدید حساب کرده و احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم. ب) چون گفته شده لااقل یکی از فرزندان پسر باشد، پس از دو فرزند باقی مانده یکی یا هر دو باید پسر باشد.

گام دوم

$$S = \{(د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د)\}$$

$$n(S) = 4$$

$$A = \{(د, پ, پ), (د, د, پ), (د, پ, د)\}$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

گام اول

الف) به طور کلی $۵ + ۳ = ۸$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. قرار است اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد پس موش دوم می‌تواند سفید یا سیاه باشد. یعنی دو حالت داریم.

ب) این دو حالت هیچ اشتراکی با هم ندارند پس احتمال کل برابر مجموع احتمال‌های دو حالت تعریف می‌شود.

گام دوم

حالت اول: موش اول سفید، موش دوم سفید، موش سوم سیاه

$$P_1 = \frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۶۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۲۸}$$

حالت دوم: موش اول سفید، موش دوم سیاه، موش سوم سیاه

$$P_2 = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۳۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۵۶}$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{۵}{۲۸} + \frac{۵}{۵۶} = \frac{۱۰ + ۵}{۵۶} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

گام اول

با این شرط که می‌دانیم یکی از فرزندان خانواده سه فرزند پسر است، فضای نمونه‌ای جدید را تعریف کرده و پیشامد مطلوب را از میان آن مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د)\}$$

در واقع حالتی که تمام فرزندان دختر باشد، حذف شده است. پس در حالت جدید داریم:

$$n(S) = ۷$$

پیشامد A که داشتن دو دختر از میان سه فرزند را بیان می‌کند، ۳ عضو دارد.

$$A = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, د)\}$$

$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۷}$$

ابتدا از همه داده‌ها، ۱۱ واحد کم می‌کنیم. با انجام این تغییر، واریانس داده‌ها تغییری نمی‌کند؛ بنابراین به جدول زیر می‌رسیم که با استفاده از رابطه $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ ، میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

مرکز دسته (x_i)	۱	۴	۷	۱۰	۱۳
فراوانی (f_i)	۴	۳	۹	۷	۲

$$\bar{x} = \frac{۴ \times ۱ + ۳ \times ۴ + ۹ \times ۷ + ۷ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۳}{۴ + ۳ + ۹ + ۷ + ۲} = \frac{۱۷۵}{۲۵} = ۷$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{۴(۱-۷)^2 + ۳(۴-۷)^2 + ۹(۷-۷)^2 + ۷(۱۰-۷)^2 + ۲(۱۳-۷)^2}{۴ + ۳ + ۹ + ۷ + ۲}$$

$$= \frac{۱۴۴ + ۲۷ + ۰ + ۶۳ + ۷۲}{۲۵} = \frac{۳۰۶}{۲۵} = ۱۲/۲۴$$

مجموع درصد فراوانی‌های نسبی باید برابر با ۱۰۰ درصد باشد. داریم:

$$۱۵ + ۳۰ + ۲۵ + \alpha = ۱۰۰ \Rightarrow \alpha = ۳۰ \text{ درصد}$$

اگر F_i و f_i به ترتیب فراوانی نسبی و فراوانی (مطلق) دسته A_i و n تعداد کل داده‌ها باشد، داریم: $F_i = \frac{f_i}{n} \Rightarrow f_i = nF_i$

$$\begin{aligned} \text{میانگین} &= \frac{۱۲ \times f_1 + ۱۵ \times f_2 + ۱۸ \times f_3 + ۲۱ \times f_4}{n} \\ &= \frac{۱۲ \times nF_1 + ۱۵ \times nF_2 + ۱۸ \times nF_3 + ۲۱ \times nF_4}{n} \\ \Rightarrow \text{میانگین} &= ۱۲ \times F_1 + ۱۵ \times F_2 + ۱۸ \times F_3 + ۲۱ \times F_4 \\ &= ۱۲ \times ۰/۱۵ + ۱۵ \times ۰/۳ + ۱۸ \times ۰/۲۵ + ۲۱ \times ۰/۳ = ۱۷/۱ \end{aligned}$$

گام اول

الف) پیشامد داشتن تحصیلات ابتدایی را با A و پیشامد داشتن مهارت قالی‌بافی را با B نشان می‌دهیم. هدف محاسبه $P(A \cup B)$ است. (ب) می‌دانیم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ج) دو پیشامد A و B مستقل‌اند پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ با محاسبه $P(A \cap B)$ می‌توان $P(A \cup B)$ را حساب کرد.

گام دوم

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۲۵ = ۰/۱۵ \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۲۵ - ۰/۱۵ = ۰/۷ \end{aligned}$$

ابتدا توجه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ است. سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (۱) \text{ در پرتاب اول، هر دو تاس زوج بیایند: } P_1 &= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \\ (۲) \text{ در پرتاب دوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:} \end{aligned}$$

$$P_2 = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{پرتاب دوم}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

(۳) در پرتاب سوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_3 = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب دوم}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{پرتاب سوم}} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} : P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{16}{64} + \frac{12}{64} + \frac{9}{64} = \frac{16+12+9}{64} = \frac{37}{64}$$

چون هیچ اطلاعی از رنگ مهره‌های خارج شده نداریم، پس می‌توانیم فرض کنیم که هیچ مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفید بودن این مهره را به دست آوریم:

$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{۳}{۷}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \xrightarrow{P=4\bar{x}, 4x=14 \Rightarrow \bar{x}=21} \sigma^2 = 490 - 441 = 49 \Rightarrow \sigma = 7$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

برای مقایسه دقت عمل دو دستگاه، باید ضریب تغییرات مربوط به دو دستگاه را به دست آوریم.

$$A \text{ دستگاه: } CV_A = \frac{\sigma_A}{x_A} = \frac{۳/۶}{۱۵۰} = 0.024$$

$$B \text{ دستگاه: } CV_B = \frac{\sigma_B}{x_B} = \frac{۳/۸۴}{۱۶۰} = 0.024$$

چون ضریب تغییرات دو دستگاه یکسان است؛ پس دقت عمل دو دستگاه نیز یکسان می‌باشد.

ضریب تغییرات نمرات آزمون هر کارگری کمتر باشد به منزله آن است که دقت بیشتری دارد.

$$\bar{x}_A = \frac{۱۵ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۹}{۶} = ۱۶$$

$$\bar{x}_B = \frac{۱۶ + ۱۴ + ۱۷ + ۱۴ + ۱۷ + ۱۸}{۶} = ۱۶$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2}{۶} = \frac{۸}{۳}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 2^2}{۶} = \frac{۷}{۳}$$

$$\sigma_B^2 < \sigma_A^2 \Rightarrow \sigma_B < \sigma_A \xrightarrow{\bar{x}_A = \bar{x}_B} CV_B < CV_A$$

پس دقت عمل B بیشتر است.

$$\text{میانگین داده‌ها: } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۷۲}{۱۲} = ۶$$

$$\text{واریانس داده‌ها: } \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{۴۸۰}{۱۲} - ۳۶ = ۴$$

$$\Rightarrow \text{ضریب تغییرات داده‌ها: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow ۵ = \frac{\sum x_i^2}{n} - ۱۲^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = ۱۴۹ = \text{میانگین مساحت‌ها}$$

اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، ضریب تغییرات این داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

که \bar{x} میانگین داده‌هاست و داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

و σ انحراف معیار داده‌هاست و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

با دو روش می‌توان ضریب تغییرات u_i ها را محاسبه کرد.
روش اول:

$$u_i = 12x_i + 6 \Rightarrow u_i = 18, 30, 42, 54, 66$$

$$\bar{x} = \frac{18 + 30 + 42 + 54 + 66}{5} = \frac{210}{5} = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(18 - 42)^2 + (30 - 42)^2 + (42 - 42)^2 + (54 - 42)^2 + (66 - 42)^2}{5} = \frac{576 + 144 + 0 + 144 + 576}{5} = 288$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

بنابراین ضریب تغییرات u_i ها برابر است با:

$$CV = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7} \simeq \frac{2 \times 1.4}{7} = 0.4$$

روش دوم:

نکته ۱: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه میانگین داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه میانگین داده‌ها نیز با آن عدد ثابت جمع می‌شود.

نکته ۲: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه انحراف معیار داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه انحراف معیار داده‌ها تغییری نمی‌کند.

ابتدا با استفاده از روابط گام اول، میانگین و انحراف معیار x_i ها را به دست می‌آوریم، سپس با توجه به دو نکته بالا، میانگین و انحراف معیار u_i ها و در آخر ضریب تغییرات آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = 12\bar{x} + 6 = 12(3) + 6 = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = 12\sigma = 12(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2 \times 1.4}{7} = 0.4$$

اگر داده‌های جامعه اول را با x_i و داده‌های جامعه دوم را با y_i نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow 12/6 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 151/2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2} \Rightarrow 7/2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{24}$$

$$\Rightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = 172/8$$

باتوجه به آنکه $\bar{x} = \bar{y}$ ، پس واریانس کل داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2} = \frac{324}{36} = 9$$

و در نتیجه انحراف معیار داده‌ها برابر با $\sigma = 3$ است.

مهرة اول در حل مسئله تأثیری ندارد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{5 \times 4}{11 \times 10} = \frac{2}{11}$$

وقتی A و B باشند، A و B' نیز مستقل اند. پس:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0/6$$

$$P(A \cap B') = P(A)P(B') = 0/2$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B')} = \frac{P(B)}{P(B')} = \frac{0/6}{0/2} = 3$$

$$\Rightarrow P(B) = 3P(B') \quad , \quad P(B) + P(B') = 1$$

$$\Rightarrow P(B') = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

حال چون $P(A)P(B) = 0/6$ ، پس $P(A) = \frac{4}{5}$ و داریم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{10} = \frac{17}{20} = 0/85$$

$$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{\substack{\bar{x}=15 \\ CV=0/2}} \sigma = 3 \Rightarrow \sigma^2 = 9$$

مطابق رابطه واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 \xrightarrow{\substack{x_i^2=S_i \\ \bar{x}=15}} 9 + 15^2 = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \bar{S} \Rightarrow \bar{S} = 234$$

گام اول

الف) ضریب تغییرات از رابطه $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ به دست می‌آید که σ انحراف معیار و \bar{x} میانگین داده‌ها است. می‌دانیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

(ب) داریم:

$$n = 30$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 240$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{30}^2 = 2190$$

گام دوم

با توجه به اطلاعات موجود، ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌ها را به دست آوریم:

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{30}^2}{30} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{2190}{30} - 8^2 = 73 - 64 = 9 \Rightarrow \sigma = \sqrt{9} = 3$$

پس ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0.375$$

گزینه ۲

۸۷

گام اول

برای به دست آوردن ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، ابتدا انحراف معیار طول اضلاع را با σ نشان داده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

در این تست $\bar{x} = 8$ و $\frac{\sum x_i^2}{n} = 65/44$ است، پس σ را محاسبه کرده و با استفاده از فرمول $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ، ضریب تغییرات را مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{65/44 - 8^2} = \sqrt{65/44 - 64} = \sqrt{1/44} = 1/2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/2}{8} = 0.15$$

گام اول: تعداد کل حالت‌های پیش‌آمده برابر است با:

$$\binom{8}{1} \times \binom{5}{1} = 8 \times 5 = 40$$

گام دوم: حالت‌های مطلوب را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &(4, 5) \\ &(5, 4), (5, 5) \\ &(6, 3), (6, 4), (6, 5) \\ &(7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5) \\ &(8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 5) \end{aligned}$$

تعداد حالت‌ها برابر ۱۵ است.

گام آخر: احتمال مطلوب ما برابر است با:

$$P(A) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

A: پیشامد آن است که هر دو سکه رو بیاید.

B: پیشامد آن است که تاس ۶ بیاید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{6 + 4 - 1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

نکته: دقت کنید که A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر هستند.

گام اول: احتمال هر پیشامد را حساب می‌کنیم:

$$P(A) = \text{فقط یک سکه رو} = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \text{تاس زوج} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{مطلوب}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$

توجه داشته باشید که دو پیشامد از هم مستقل‌اند، بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

اگر پیشامد آنکه جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ باشد را با A و پیشامد آنکه سکه رو ظاهر شود را با B نمایش دهیم، آنگاه متمم پیشامد A آن است که جمع دو تاس کمتر یا مساوی ۴ باشد. در این صورت داریم:

$$A' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{6}$$

همچنین احتمال وقوع پیشامد B برابر $P(B) = \frac{1}{2}$ است. دو پیشامد A و B، مستقل از یکدیگرند، پس $P(A \cap B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ است. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{3250}{25} - \left(\frac{275}{25}\right)^2 = 130 - 121 = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad \bar{x} = \frac{275}{25} = 11$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{11} = 0.2727$$

راه حل اول:

دو پیشامد مستقل از یکدیگرند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98$$

راه حل دوم:

متمم پیشامد آنکه "حداقل یک نفر عمل موفقیت آمیز داشته باشد" آن است که "هیچ کدام عمل موفقیت آمیز نداشته باشند"، از آنجاکه عمل جراحی A و B مستقل از هم است، احتمال پیشامد اخیر برابر است با:

$$(1 - 0.9) \times (1 - 0.8) = 0.02$$

پس احتمال مورد نظر سؤال، برابر می شود با $0.98 = 1 - 0.02$.

راه حل اول:

چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{14}{100} + \frac{75}{100} - \left(\frac{14}{100} \times \frac{75}{100}\right) = 0.96$$

راه حل دوم:

هرگاه در مسائل احتمال لاقبل یکی داشتیم از متمم استفاده می کنیم (C': احتمال اینکه هیچ کدام قبول نشوند):

$$P(C') = \frac{16}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{4}{100} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100}$$

$$A: 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \Rightarrow \bar{x}_A = 14$$

$$B: 11/5 \quad 13 \quad 15/5 \quad 16 \quad 16/5 \Rightarrow \bar{x}_B = 14/5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}, \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(12-14)^2 + (13-14)^2 + 0 + (15-14)^2 + (16-14)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{2}}{14}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{(11/5 - 14/5)^2 + (13 - 14/5)^2 + (15/5 - 14/5)^2 + (16 - 14/5)^2 + (16/5 - 14/5)^2}{5}$$

$$= \frac{9 + 2/25 + 1 + 2/25 + 4}{5} = \frac{18/5}{5} = 3/5 \Rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{3/5}}{14/5}$$

CV_A کوچکتر است، پس کارگر A دقت بیشتری دارد.

$$P(A) = 2P(B) = 2x$$

$$P(A \cup B) = \frac{Y}{q} \Rightarrow P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B)} = \frac{Y}{q}$$

$$\Rightarrow 2x + x - 2x(x) = \frac{Y}{q} \Rightarrow 3x - 2x^2 = \frac{Y}{q}$$

$$\xrightarrow{\times q} 27x - 18x^2 = Y \Rightarrow 18x^2 - 27x + Y = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 1)(6x - Y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \checkmark \\ x = \frac{Y}{6} \times \end{cases}$$

بنابراین $P(A) = 2x = \frac{2}{3}$ است.

گام اول: ابتدا میانگین تمام داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{6 \times 12 + 9 \times 14}{6 + 9} = 13/2$$

گام دوم: رابطه دوم واریانس را برای هرکدام از دسته داده‌ها می‌نویسیم:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}_1^2 \Rightarrow 6 = \frac{\sum x_i^2}{6} - 12^2 \Rightarrow \sum x_i^2 = 900$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum x_i'^2}{n'} - \bar{x}_2^2 \Rightarrow 4 = \frac{\sum x_i'^2}{9} - 14^2 \Rightarrow \sum x_i'^2 = 1800$$

گام سوم: حال واریانس تمام داده‌های ترکیب‌شده را می‌یابیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 + \sum x_i'^2}{n + n'} - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{900 + 1800}{15} - 13/2^2 \Rightarrow \sigma^2 = 5/4$$

$$\Rightarrow \sigma = 2/4$$

$$\bar{x} = 13 \Rightarrow \frac{a + 7 + 10 + 14 + 11 + 16 + 18 + 9 + 20}{9} = \frac{a + 105}{9} = 13$$

$$\Rightarrow a + 105 = 117 \Rightarrow a = 12$$

حالا با داشتن a ، داده‌ها را مرتب می‌کنیم تا میانه آن‌ها را پیدا کنیم:

$$7 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad \underset{\text{میانه}}{12} \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.06 = \frac{\sigma}{25} \Rightarrow \sigma = 1/5$$

$$\sigma^2 = 2/25 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$2/25 = 25^2 - \text{میانگین مساحت‌ها}$$

$$2/25 + 625 = 627/25 : \text{میانگین مساحت‌ها}$$

گام اول

به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. پیشامد مطلوب این است که فقط یکی از موش‌ها دیابتی باشد. پس یک موش از بین ۵ موش سالم و یک موش از بین ۳ موش دیابتی انتخاب می‌شود.

گام دوم

$$n(S) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 6!} = \frac{56}{2} = 28$$

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{28}$$



۱ اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر با کدام است؟

(۲) $x^2 - 2x - 1$

(۱) $x^2 - x + 3$

(۴) $x^2 - x + 1$

(۳) $x^2 - 2x + 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲ نمودار تابع با ضابطه $y = 2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1, x \in [-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل شده است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳ در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) فاقد نقطه مشترک

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۴ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

(۲) $\cot x$

(۱) $\tan x$

(۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

(۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آنگاه $(f + g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) $x^2 - 1$
 (۲) $x^2 + 1$
 (۳) $x^2 - 2x$
 (۴) $x^2 + 2x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشند آنگاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۸ اگر $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۹ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ‌ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -۲
 (۲) ۵/۰
 (۳) ۱
 (۴) ۵/۱

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) $\frac{7}{3}$
 (۳) $\frac{8}{3}$
 (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

۱۱ قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) -۲
 (۲) -۱
 (۳) ۱
 (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۲ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) $4x$
(۳) $2x^2$
(۴) $4x^2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۳ فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ ، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

- (۱) $\log_2(2-\sqrt{3})$
(۲) $\log_2(\sqrt{3}-1)$
(۳) $\log_2(1+\sqrt{3})$
(۴) $\log_2(2+\sqrt{3})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x|$ و $y = 5 - |x - 1|$ ، کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
(۲) $[0, 3]$
(۳) $[1, 2]$
(۴) $[1, 3]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۶ اگر $1 \leq x$ ؛ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۵
(۳) ۱۸
(۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۷ اگر عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ ، بر سه جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

اگر عبارت $x^f + ax^2 - bx + 4$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

(۲) -۵

(۱) -۸

(۴) تعریف نشده

(۳) -۲

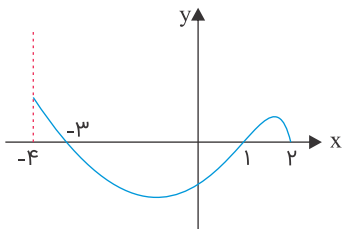
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

اگر عبارت $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم آن بر $x^2 - 1$ کدام است؟

(۲) $-2x + 1$ (۱) $-3x - 6$ (۴) $3x - 4$ (۳) $2x + 4$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

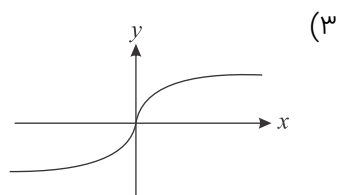
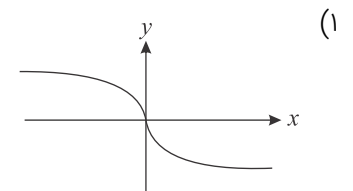
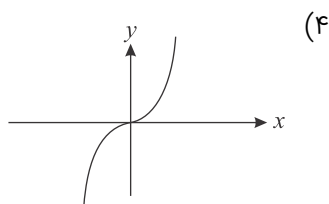
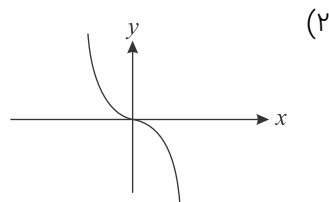
شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(۱) $[0, 2]$ (۲) $[-3, 2]$ (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$ (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$ 

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۴

اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۲۳ اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$
 (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ ، آنگاه عدد a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
 (۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$
 (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۶ اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = \lambda x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $2x^2 - 7x + 3$ (۲) $2x^2 - 3x + 7$
 (۳) $4x^2 - 2x + 13$ (۴) $4x^2 - 4x + 11$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۷ رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶
 (۳) ۷ (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۸ اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

خروجی $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow$ ورودی

- (۱) $\frac{11}{9}$ (۲) $\frac{7}{2}$
 (۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه تابع $g \circ f$ کدام است؟

۲۹

$$\begin{array}{ll} (۱) & -\frac{1}{4} \sin^2 2x \\ (۲) & -\frac{1}{2} \sin^2 2x \\ (۳) & \frac{1}{4} \cos^2 2x \\ (۴) & \frac{1}{2} \cos^2 2x \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

۳۰

$$\begin{array}{ll} (۱) & [-1, 1) \\ (۲) & (-1, 1] \\ (۳) & [1, +\infty) \\ (۴) & (-\infty, 1] \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ ، آنگاه ضابطه $f^{-1} \circ g^{-1}$ کدام است؟

۳۱

$$\begin{array}{ll} (۱) & x - 1 \\ (۲) & x + 1 \\ (۳) & x^2 - 1 \\ (۴) & x^2 + 1 \end{array}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

۳۲

$$\begin{array}{ll} (۱) & (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ (۲) & \mathbb{R} - \{0, 1\} \\ (۳) & \mathbb{R} - \{0\} \\ (۴) & (0, \infty) \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

۳۳

$$\begin{array}{ll} (۱) & [0, 2) \\ (۲) & [0, 3) \\ (۳) & [0, 4) \\ (۴) & [1, 4) \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

۳۴

$$\begin{array}{ll} (۱) & -x + 7 ; x > 1 \\ (۲) & \frac{1}{3}x + 2 ; x > 3 \\ (۳) & x + 7 ; x > -4 \\ (۴) & \frac{1}{2}x - 2 ; -4 < x < 1 \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۵ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ ، کدام است؟

- (۱) $4(1 - \sqrt{2})$
 (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$
 (۳) 4
 (۴) $4\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۶ اگر $f(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$ ، کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $f + g$
 (۲) $f \circ f$
 (۳) $g \circ f$
 (۴) $f \circ g$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۷ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$
 (۲) 4
 (۳) $\frac{16}{3}$
 (۴) 6

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

۳۸ اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ آنگاه $f(8)$ کدام است؟

- (۱) 5
 (۲) 3
 (۳) 7
 (۴) 8

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۹ تابع با ضابطه $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$
 (۲) $(-\infty, 1)$
 (۳) $(-2, 1)$
 (۴) $(1, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۰ اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) -1
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) 1
 (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۱ اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x + 1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $[0, 2)$
 (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[1, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر k ، بازه $(k - 2, 3k + 2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1}$ است؟

- (۱) $(\frac{1}{3}, 3]$ (۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
 (۳) $(-1, \frac{1}{3})$ (۴) $(-1, -\frac{1}{3})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۳ اگر $f(x) = \sqrt{3 - x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$
 (۳) $(-4, -1] \cup (1, 2)$ (۴) $(-4, -2) \cup (0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۴ اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$
 (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۵ اگر $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$ ، کدام است؟

- (۱) $2x$ (۲) $\frac{2}{x}$
 (۳) $x^2 - 1$ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴۶ اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، تابع $g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$ چگونه است؟

- (۱) ثابت (۲) همانی
 (۳) چندجمله‌ای (۴) یک به یک

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۷ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) $x-1$
 (۲) $x+1$
 (۳) x
 (۴) $2x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۸ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ باشند. دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{4}, +\infty)$
 (۲) $(\frac{1}{4}, +\infty)$
 (۳) $(-2, 0)$
 (۴) $(-1, \frac{1}{4})$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹ دو تابع f و g به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بیان شده‌اند، در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- (۱) $f \cup g$
 (۲) $f \cap g$
 (۳) $f - g$
 (۴) $f \circ g$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۰ اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - 4x + 3$
 (۲) $x^2 - 4x + 5$
 (۳) $x^2 - 2x + 5$
 (۴) $x^2 - 2x + 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۵۱ اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 1$
 (۲) $x^2 + 3$
 (۳) $x^2 + 4x + 5$
 (۴) $x^2 - 4x + 5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۵۲ اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $g \circ f(x) = \frac{1}{2}x$ ضابطه تابع g برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{x}{x+1}$
 (۲) $\frac{x-1}{x}$
 (۳) $\frac{x}{x-1}$
 (۴) $\frac{x+1}{x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۵۳ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $2x^2 + 3x + 1$
 (۲) $2x^2 - 2x + 3$
 (۳) $2x^2 - x + 4$
 (۴) $2x^2 + x + 3$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۴ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x - 1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۵ با فرض $x \geq 2$ و $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۵
 (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۶ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) x
 (۲) $-x$
 (۳) $-x - 1$
 (۴) $x + 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۷ اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر (-1) باشد، آنگاه $[x^{2^0}]$ کدام است؟ ([]: جزء صحیح)

- (۱) -1
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۸ دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض اند. تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$
 (۲) $\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\}$
 (۳) $\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\}$
 (۴) $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

$$y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (۲)$$

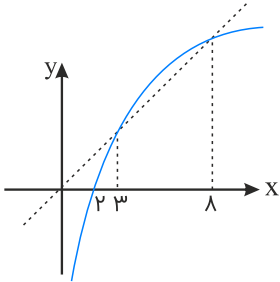
$$y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

$$y = x|x|; x \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$y = x|x|; x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



$$[0, 2] \quad (۱)$$

$$[2, 3] \quad (۲)$$

$$[2, 8] \quad (۳)$$

$$[3, 8] \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

ضابطه وارون تابع $\begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

$$y = -x^2; x < 0 \quad (۲)$$

$$y = x|x|; x \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

$$y = \pm x|x|; x \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$y = \pm x^2; x \in \mathbb{R} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

$$2 \quad (۲)$$

$$1/5 \quad (۱)$$

$$3 \quad (۴)$$

$$2/5 \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۴ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -1 و -4
 (۲) 4 و -1
 (۳) -4 و 1
 (۴) 4 و 1

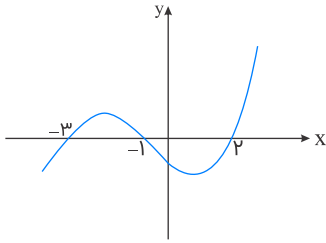
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۵ نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را 2 واحد به طرف x های منفی، سپس 9 واحد به طرف y ها منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور x ها است؟

- (۱) $(-5, 2)$
 (۲) $(-5, 3)$
 (۳) $(-2, 3)$
 (۴) $(-2, 5)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۶ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



- (۱) $[-3, 2]$
 (۲) $[-1, +\infty)$
 (۳) $(-\infty, -1]$
 (۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶۷ باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر 4 است، a کدام است؟

- (۱) -4
 (۲) -1
 (۳) 1
 (۴) 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۶۸ فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب 3 و 1 باشند. باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) 7
 (۲) 1
 (۳) صفر
 (۴) -1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶۹ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$
 (۲) $-\frac{3}{4}$
 (۳) -1
 (۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷۰ اگر $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = f(3x - 4)$ آنگاه حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

(۲) ۶

(۱) ۵

(۴) ۸

(۳) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۷۱ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

(۲) $x = 1/5$

(۱) $x = 1$

(۴) $x = 2/5$

(۳) $x = 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۷۲ اگر مجموعه جواب نامعادله $1 - |x + 1| < |x^2 - 2|$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

(۲) ۱

(۱) ۰/۵

(۴) ۲

(۳) ۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۳ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۷۴ تابع با ضابطه $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۲) $(-1, +\infty)$

(۱) $(-\infty, 2)$

(۴) $(2, +\infty)$

(۳) $(-1, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۵ تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌های وارون‌پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

(۲) $\frac{1}{4}x - 1 ; x \leq 4$

(۱) $\frac{1}{4}x + 1 ; x \geq 4$

(۴) $\frac{1}{4}x + 1 ; x \leq 4$

(۳) $\frac{1}{4}x - 1 ; x \geq 4$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ ، آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور x ها قرار می گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-5, 1)$ (۲) $(-1, 5)$
(۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, 5)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

- (۱) $\{-1, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$
(۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{2, -1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶
(۳) ۸ (۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

اگر $1 = [x - 2]$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

اگر خروجی ماشین شکل مقابل برای ورودی ۲، برابر ۵- باشد، A کدام است؟

خروجی $\rightarrow \sqrt{x} - 2x - 4 \rightarrow 2x + A \rightarrow$ ورودی

- (۱) $-\frac{15}{4}$ (۲) -3
(۳) ۳ (۴) $\frac{15}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{1+x}; x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1-x}; x < 1$
(۳) $1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

۸۲

- (۱) $-x + 6; x < -4$
 (۲) $-x + 5; x > 2$
 (۳) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$
 (۴) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

۸۳

- (۱) $-x^2$
 (۲) x^2
 (۳) $x|x|$
 (۴) $-x|x|$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

۸۴

- (۱) $y = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$
 (۲) $y = \frac{1-|x|}{|x|}; |x| > 1$
 (۳) $y = \frac{x}{|x|-1}; |x| > 1$
 (۴) $y = \frac{|x|-1}{x}; |x| < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟

۸۵

- (۱) -2
 (۲) -1
 (۳) صفر
 (۴) 1

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را y را 3 واحد به طرف x های مثبت، سپس 2 واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۸۶

- (۱) $(3, 4)$
 (۲) $(2, 5)$
 (۳) $(3, 5)$
 (۴) $(2, 6)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ ، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

۸۷

- (۱) صفر
 (۲) 1
 (۳) -1
 (۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(fog)(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۸۸

- (۱) -۴
(۲) ۲
(۳) ۲
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ آنگاه مجموعه مقادیر x کدام است؟

۸۹

- (۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
(۲) \mathbb{Z}
(۳) \mathbb{R}
(۴) \emptyset

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ ، در بازه (a, b) بزرگ تر از $\frac{7}{4}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

۹۰

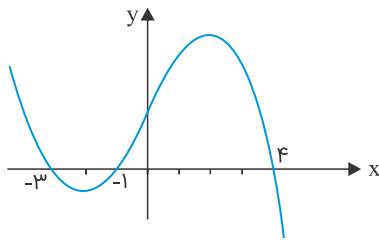
- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۵/۵
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

۹۱



- (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$
(۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$
(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$
(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

به ازای یک مقدار a ، چندجمله ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

۹۲

- (۱) -۱۰
(۲) -۸
(۳) ۴
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 2) \in fog$ و $(4, 1) \in gof$ باشند، دو تایی (a, b) کدام است؟

۹۳

- (۱) $(3, 4)$
(۲) $(4, 3)$
(۳) $(4, 5)$
(۴) $(5, 4)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) ۲
(۳) ۲
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$
(۲) $(-1, 3)$
(۳) $(2, 1)$
(۴) $(2, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- (۱) x
(۲) $4 - x$
(۳) $f(x)$
(۴) $2 - f(x)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbb{R} چگونه است؟

- (۱) نزولی
(۲) صعودی
(۳) وارون‌ناپذیر
(۴) یک‌به‌یک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$
(۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$
(۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$
(۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

اگر $f(x) = 2 - |x + 1|$ و $g(x) = x + |x|$ ، آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{1}{3})$
(۲) $(-1, +\infty)$
(۳) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$
(۴) $(0, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۰ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(1, 3), (0, 0)\}$
 (۲) $\{(2, 4), (3, 5)\}$
 (۳) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$
 (۴) $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۰۱ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(15) + g(3)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
 (۲) ۱۱
 (۳) ۱۰
 (۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۲ اگر $f(x) = x - [x]$ ، آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0]$
 (۲) $[0, 1]$
 (۳) $\{-1, 0\}$
 (۴) $\{0, 1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

- (۱) $-x + 4$
 (۲) $x + 3$
 (۳) $2x + 6$
 (۴) $2x - 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$; $(x > 1)$ مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$
 (۲) $6\sqrt{2}$
 (۳) $5\sqrt{2}$
 (۴) $2\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۵ عبارت $x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{8}$
 (۲) $-\frac{17}{16}$
 (۳) $\frac{17}{16}$
 (۴) $\frac{15}{8}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۰۶ اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $(0, 5] \cup [20, 25)$
 (۲) $[-5, 0) \cup (15, 20]$
 (۳) $(15, 20]$
 (۴) $[-5, 0)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۰۷ اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، دقیقاً ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x \in \mathbb{R}$
 (۲) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x)$, $x \in \mathbb{R}$
 (۳) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x > 0$
 (۴) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x)$, $x > 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۰۸ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۱۰۹ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۱۰ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x+3$ به ترتیب ۱ و -۴ است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6 کدام است؟

- (۱) $x-1$
 (۲) $x+1$
 (۳) $-x+2$
 (۴) $2x-1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۱۱ اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ ، نگاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{1}{2}, 1]$
 (۲) $[\frac{1}{2}, 1)$
 (۳) $(1, 2]$
 (۴) $[1, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۱۲ دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروضه اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱۳ اگر $f(x) = |x| - x$ ، ضابطه تابع $f \circ f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) x
(۲) $|x|$
(۳) $x + |x|$
(۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۱۴ فاصله نقطه برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۵ ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$
(۲) $y = -x^2 - 4x + 5; x \leq 2$
(۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$
(۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۱۶ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

- (۱) -1 و -7
(۲) -7 و 1
(۳) 1 و -7
(۴) 7 و 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۱۷ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\underline{x} \xrightarrow{f} \underline{g} \rightarrow 2x, \quad g(x) = 3x + 4$$

آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱۹ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۲۰ نمودار تابع با ضابطه $y = x - [x]; x \in [-2, 3]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

- (۱) $(4, 1)$
(۲) $(4, \sqrt{2})$
(۳) $(5, 1)$
(۴) $(5, \sqrt{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۲۱ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{p}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است)

- (۱) $1/75$
(۲) $2/25$
(۳) $2/5$
(۴) $2/75$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۲۲ به ازای مقداری از a ، چندجمله‌ای $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{3}$
(۲) $1 - \sqrt{5}$
(۳) $-1 - \sqrt{3}$
(۴) $-1 - \sqrt{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۲۳ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x-1) + p(1-x)$ ، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) -1
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

(۱) $[\frac{2}{3}, 2]$

(۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

(۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$

(۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{1-x}{x}$ برد تابع $g \circ f$ کدام بازه است؟

(۱) $(0, +\infty)$

(۲) $[0, +\infty)$

(۳) $(1, +\infty)$

(۴) $[1, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

دو تابع با ضابطه های $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

(۱) تعریف نشده

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۱) $[0, 1)$

(۲) $\{0\}$

(۳) $(-1, 1)$

(۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

(۱) $\frac{5}{2}$

(۲) ۳

(۳) $\frac{7}{2}$

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

نمودار تابع $y = [x^2]$ ، روی بازه $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

(۲) ۱، -۱

(۱) ۰، ۲

(۴) ۱، -۲

(۳) ۲، -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ ، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

(۲) $x \geq -1$ (۱) $x \leq -1$ (۴) $x \geq 1$ (۳) $x \leq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) هیچ مقدار m

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۲) ۹ و $\frac{1}{4}$ (۱) ۴ و $\frac{1}{9}$

(۴) ۹ و ۴

(۳) $\frac{1}{4}$ و ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(12) + g(6)$ ، کدام است؟

(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

(۴) ۱۴

(۳) ۱۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گزینه ۴

۱

راه حل اول:

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$x = 1 \Rightarrow f(-1) = 4 - 14 + 13 = 3$$

فقط در گزینه ۴، $f(-1) = 3$ است.

راه حل دوم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t + 3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t + 3}{2}\right) + 13$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

گزینه ۲

۲

گام اول

با توجه به ضابطه تابع که به صورت $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ است، محدوده اولیه x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$$-2 \leq x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x < 4, 4 \leq x < 6$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

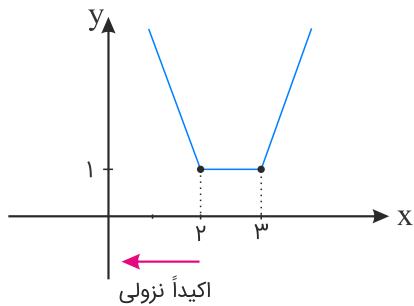
$$4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل شده است.

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) - (x-3) = -2x + 5$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = (x-2) - (x-3) = 1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x-2 + x-3 = 2x-5$$



بنابراین:

$$x \leq 2 \Rightarrow -2x + 5 = 2x^2 - x - 10 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$(2x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \checkmark \\ x = \frac{5}{2} & \times \end{cases}$$

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ از ما خواسته شده است ابتدا باید ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر x نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &\Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1+x^2} = x \\ \xrightarrow{\text{به توان } 2} &y^2(1+x^2) = x^2 \Rightarrow y^2 + y^2x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - y^2x^2 = y^2 \\ \Rightarrow x^2(1-y^2) &= y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \xrightarrow{\text{هم علامت } y,x} x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} ; -1 < x < 1 \end{aligned}$$

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sin x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \xrightarrow{1-\sin^2 x = \cos^2 x} f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ \Rightarrow f^{-1}(\sin x) &= \frac{\sin x}{|\cos x|} \end{aligned}$$

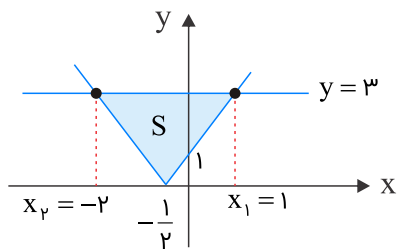
ابتدا تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \Rightarrow (g \circ f)(x) = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|2x + 1|$ و خط $y = 3$ را می‌یابیم.

$$2x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1, \quad -2x_2 - 1 = 3 \Rightarrow x_2 = -2$$



$$S = \frac{(|x_1| + |x_2|) \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

ضابطه $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطه تابع $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = x^2 - x - 2, \quad f(g(x)) = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) = x^2 + x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطه $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^2 - g(x) = x^2 + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{1}{4} \text{ اضافه می کنیم}} (g(x))^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{2} = \pm(x + \frac{1}{2})$$

پس برای ضابطه $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱) \quad g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1$$

$$۲) \quad g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینه ۱ قابل قبول است.

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ ، ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطه $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(6)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{\text{به توان } ۳} y^3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$6 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow 4 + 2 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow \frac{x^3}{2} = 4 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

نقطه $(2, 6)$ در ضابطه $g(x)$ صدق می کند، پس نقطه $(6, 2)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(6) = 2$ است.

ابتدا $f(-1)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{2})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2} \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{2})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد پس حاصل $f(f(-1))$ تعریف نشده است.

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست } 2} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

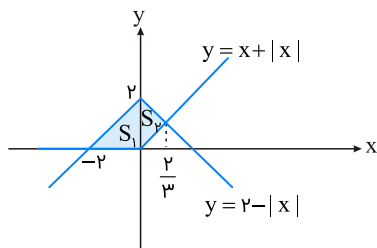
برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y = x$ و $y = \sqrt{-x+2}$ (نیمساز ناحیه اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان } 2} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$x = -2$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادله (*) صدق نمی‌کند.

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}, \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & ; x \geq 0 \\ x + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$2 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

اگر خط $3y - 2x = 4$ را به صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینه خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$3y - 4 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{2} = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -2$$

ابتدا با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ را تشکیل می دهیم. یعنی یک بار در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x ، متغیر $(1+x)$ و یک بار متغیر $(1-x)$ را قرار داده و ضابطه هر یک را تعیین می کنیم.

$$f(1+x) = (1+x)^2(2-1-x)^2 = (1+x)^2(1-x)^2 = [(1+x)(1-x)]^2 = (1-x^2)^2$$

$$f(1-x) = (1-x)^2(2-1+x)^2 = (1-x)^2(1+x)^2 = [(1-x)(1+x)]^2 = (1-x^2)^2$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ را به دست می آوریم:

$$f(1+x) - f(1-x) = (1-x^2)^2 - (1-x^2)^2 = 0$$

$$f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \stackrel{f^{-1}(2)=?}{\rightarrow} \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{t=2^x} t + \frac{1}{t} = 4$$

$$\Rightarrow t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ t = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

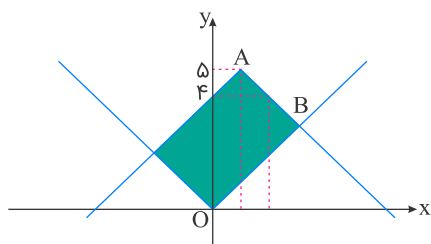
$$t = 2^x \Rightarrow x = \log_2^t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2^{(2+\sqrt{3})} \\ x = \log_2^{(2-\sqrt{3})} \end{cases} < 0 \text{ غ ق ق}$$

جواب $x = \log_2^{(2-\sqrt{3})}$ غیرقابل قبول است، زیرا دامنه $[0, +\infty)$ است.

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = ۵ - x - ۱ $	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = x $	۱	۰	۱



برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵ - |x - ۱| = |x| \Rightarrow |x| + |x - ۱| = ۵ \Rightarrow x = \frac{۰ + ۱ \pm ۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳, ۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(۳ - ۱)^2 + (۳ - ۵)^2} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$|BO| = \sqrt{۳^2 + ۳^2} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$S = |AB| \times |BO| = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. سپس باتوجه به محدوده قابل قبول برای x ، بازه‌ای که در آن تابع $f(3-x)$ تعریف شده است را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس باید داشته باشیم: $0 \leq 3 - x \leq 2$ ، بنابراین:

$$0 \leq 3 - x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطه $f(3-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{2x - x^2} &\Rightarrow f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} \\ &= \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \\ &\xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3] \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = y \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = y + 4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = y + 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-1| = \sqrt{y+4}$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$$

حال f^{-1} را با g قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11 \quad (1)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x = 21$ در معادله (۱) صدق می‌کند.

چون عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر است، باید باقی مانده تقسیم این عبارت بر سه جمله‌ای مورد نظر برابر صفر شود.

$$\frac{ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a}{-(ax^2 - 2ax + ax)} \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{ax + (2a + 4)}$$

$$\frac{(2a + 4)x^2 + (-a - 14)x + 10 - a}{-(2a + 4)x^2 - 2(2a + 4)x + 2a + 4}$$

$$\frac{(3a - 6)x + (6 - 3a)}{(3a - 6)x + (6 - 3a)}$$

باقی مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(3a - 6)x + (6 - 3a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - 6 = 0 \\ 6 - 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین به ازای $a = 2$ عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر است.

نکته: چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x - a)^2$ بخش پذیر است، هرگاه: $P(a) = P'(a) = 0$

$$P(x) = x^2 + ax^2 - bx + 4 \Rightarrow P'(x) = 2x^2 + 2ax - b$$

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a - b + 4 = 0 \\ P'(1) = 0 \Rightarrow 2 + 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -5 \\ 2a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع f صدق کند، نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(4)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(4)$ برابر α شود، در این صورت $(4, \alpha)$ در ضابطه f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha, 4)$ باید در ضابطه تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطه تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادله $f(\alpha) = 4$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x) = -x + \sqrt{-2x} \xrightarrow{f(\alpha)=4} 4 = -\alpha + \sqrt{-2\alpha} \Rightarrow \sqrt{-2\alpha} = \alpha + 4$$

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-2\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 0, \quad \alpha + 4 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -4$$

پس $\alpha \in [-4, 0]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$\begin{aligned} -2\alpha &= (\alpha + 4)^2 \Rightarrow -2\alpha = \alpha^2 + 8\alpha + 16 \Rightarrow \alpha^2 + 10\alpha + 16 = 0 \\ \Rightarrow (\alpha + 8)(\alpha + 2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به این که $\alpha \in [-4, 0]$ است، فقط $\alpha = -2$ قابل قبول خواهد بود.

گام اول

الف) عبارت $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است (به ازای هر عدد طبیعی n)، بنابراین $P(-2) = 0$ است.

ب) با توجه به گزینه های داده شده باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x^2 - 1$ یک چند جمله ای درجه یک به فرم $ax + b$ است. برای تعیین مقادیر a و b یک بار مقدار $P(1)$ و بار دیگر $P(-1)$ را محاسبه کرده و با حل دو معادله و دو مجهول مقدار a و b حساب می‌شود.

گام دوم

$$P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$$

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0$$

$2n + 1$ عددی فرد است. بنابراین $(-2)^{2n+1} = -2^{2n+1}$ است. هم چنین $2n$ یک عدد زوج بوده و داریم:

$$(-2)^{2n} = 2^{2n}$$

$P(-2)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$P(-2) = -2^{2n+1} + 2^{2n+1} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$$

با مشخص شدن مقدار k ، سراغ محاسبه باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ می‌رویم:

$$P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8 = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$$

$$P(1) = 1^{2n+1} + 2(1)^{2n} + (1)^5 - 5(1)^3 - 8 = a + b$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 1 - 5 - 8 = a + b \Rightarrow a + b = -9 \quad (I)$$

$$P(-1) = (-1)^{2n+1} + 2(-1)^{2n} + (-1)^5 - 5(-1)^3 - 8 = -a + b$$

$$\Rightarrow -1 + 2 - 1 + 5 - 8 = -a + b \Rightarrow -a + b = -3 \quad (II)$$

از دو رابطه (I) و (II) مقدار a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a + b = -9 \\ -a + b = -3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b = -12 \Rightarrow b = -6 \xrightarrow{(I)} a = -3$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ به صورت $-3x - 6$ است.

روش دوم:

باقی‌مانده عبارت $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8$ را بر $x^2 - 1$ می‌خواهیم.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

کافی است در عبارت فوق به جای x^2 عدد ۱ را قرار دهیم:

$$P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8 \Rightarrow P(x) = (x^2)^n x + 2(x^2)^n + (x^2)^2 x - 5x^2 x - 8$$

$$\xrightarrow{x^2=1} (1)^n x + 2(1)^n + (1)^2 x - 5(1)x - 8 = x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$

گزینه ۴

۲۱

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq 0$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می کنیم در چه بازه هایی $xf(x) \geq 0$ برقرار است. داریم:

x	-۴	-۳	۰	۱	۲
x	-	-	۰	+	+
f(x)	+	۰	-	-	+
xf(x)	-	+	۰	-	+

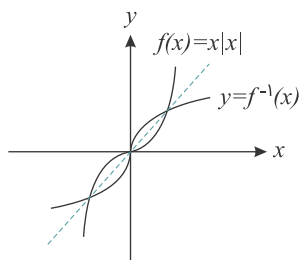
دو بازه مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[1, 2] \cup [-3, 0]$ درمی آید.

گزینه ۳

۲۲

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می کنیم. نمودار f^{-1} قرینه $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



گزینه ۲

۲۳

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g : [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$$

همواره داریم $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ ، در نتیجه:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = 5$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفه اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطه تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = 5$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهنده تابع g ، زوج مرتب $(6, 5)$ دارای مؤلفه دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = 6$. حال با داشتن ضابطه $f(x)$ ، مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=6} a + \sqrt{a} = 6$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$ ، معادله را به یک معادله درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود).

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 & \text{غ ق ق} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = 4$ جواب تست می شود.

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[12 \text{ واحد در جهت مثبت محور } x \text{ ها}]{12} y = \sqrt{x - 12} \xrightarrow[2 \text{ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}]{2} y = \sqrt{x - 12} + 2$$

حال منحنی حاصل را با $f(x) = \sqrt{x}$ برابر قرار می دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x - 12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x - 12} = \sqrt{x} - 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x - 12 = x + 4 - 4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow x = 16$$

$x = 16$ را در $f(x) = \sqrt{x}$ جایگذاری می کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow A(16, 4)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16(16 + 1)} = 4\sqrt{17}$$

در صورت مسئله ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع $f \circ g$ کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \Rightarrow g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = t \Rightarrow 2x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t - 3}{2}$$

$$g(t) = 8\left(\frac{t - 3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t - 3}{2}\right) + 20 \Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t^2 - 6t + 9}{4}\right) + 11(t - 3) + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

حالا ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می کنیم:

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می تواند رخ دهد:

$$۱) |x| = 2, |y| = 0 \Rightarrow x = \pm 2, y = 0 \Rightarrow (2, 0), (-2, 0) \in \mathbf{R}$$

$$۲) |x| = 0, |y| = 2 \Rightarrow x = 0, y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2), (0, -2) \in \mathbf{R}$$

$$۳) |x| = 1, |y| = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1 \Rightarrow (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1) \in \mathbf{R}$$

بنابراین رابطه \mathbf{R} با اعضایش به صورت زیر در می آید:

$$\mathbf{R} = \{(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

پس رابطه \mathbf{R} دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

گام اول

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را x در نظر می‌گیریم. وارد دستگاهی می‌شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می‌کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می‌کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_x \rightarrow \underbrace{2x - 2}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x} + 1}}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{4}{3}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{4}{3}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می‌توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و در نهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$f(x) = 2x - 2, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2} + 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(2x - 2) = 4\sqrt{2x - 2} + 4$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2x-2}=t} 3t^2 = 4t + 4 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 4 = 0 \Rightarrow (3t + 2)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = -\frac{2}{3} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = 3$ به دست آمد.

برای یافتن ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ ، کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^f x - \sqrt{\sin^f x} = \sin^f x - \sin^{\frac{f}{2}} x \\ &= \sin^f x (\sin^{\frac{f}{2}} x - 1) = \sin^f x (-\cos^{\frac{f}{2}} x) = -\sin^f x \cos^{\frac{f}{2}} x \end{aligned}$$

با توجه به فرمول $\sin^2 x$ ، داریم:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

پس ضابطه تابع $f \circ g$ به صورت زیر درمی آید:

$$f \circ g(x) = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

نکته:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{1-2x+2-2}{x+1} = \frac{-2x-2}{x+1} + \frac{1+2}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

طبق نکته داریم:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\text{در } (-1) \text{ ضرب می‌کنیم}} -1 < [x] - x \leq 0$$

$$\xrightarrow{+1} 0 < [x] - x + 1 \leq 1 \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} 1 \leq \frac{1}{[x] - x + 1}$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} \xrightarrow{-2} 1 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} - 2$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \geq 1 \Rightarrow \mathbf{R_{g \circ f} = [1, +\infty)}$$

ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ما داده شده و ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را می‌خواهند. برای این کار ابتدا ضابطه دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم سپس برای تعیین ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ یا همان $g^{-1}(f^{-1}(x))$ در ضابطه $g^{-1}(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان } 2} (y - 1)^2 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2; x \geq 1$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}; x > 0$$

بنابراین ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ برابر است با:

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$$

$$\xrightarrow[x-1 \geq 0]{x \geq 1} g^{-1} \circ f^{-1}(x) = x - 1$$

طبق تعریف، دامنه تابع $g \circ f$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنه تعریف دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده $D_{g \circ f}$ را مشخص کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} x \geq 0: |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x} \\ x < 0: |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{x(x - 4)} \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حالا دامنه تعریف تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x + |x|} \in \mathbb{R} - \{0, 4\}\}$$

$$\sqrt{x + |x|} = 4 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{2x} = 4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\sqrt{x + |x|} = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

پس دامنه $g \circ f$ برابر است با: $D_{g \circ f} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$

نکته: $0 \leq x - [x] < 1$
ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 4x = -x^2 + 4x - 4 + 4 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 = -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(2x - [2x] - 2)^2 + 4$$

طبق نکته داریم:

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \xrightarrow{-2} -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 1 < (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -4 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1$$

$$\xrightarrow{+4} 0 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 + 4 < 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq g \circ f(x) < 3 \Rightarrow R_{g \circ f} = [0, 3)$$

گام اول

الف) ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را باتوجه به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدوده x بر اساس ریشه عبارتهای داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.
ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشه عبارتهای درون قدر مطلق، $x = -1$ و $x = 3$ است. داریم:

$$x < -1 : f(x) = -2x + 6 - (-x - 1) = -2x + 6 + x + 1 = -x + 7$$

$$-1 \leq x \leq 3 : f(x) = -2x + 6 - (x + 1) = -3x + 5$$

$$x > 3 : f(x) = 2x - 6 - (x + 1) = x - 7$$

در بازه $x > 3$ تابع $f(x) = x - 7$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, \quad x > -4$$

در تست حاصل مقادیری از دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطه $f(x)$ و $g(x)$ ابتدا ضابطه توابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |(x+1)^2| \xrightarrow{(x+1)^2 \geq 0} (f \circ g)(x) = (x+1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (|x| + 1)^2$$

$$(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 - (|1 - \sqrt{2}| + 1)^2 =$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

هر یک از توابع $f + g$ ، $f \circ f$ ، $g \circ f$ و $f \circ g$ را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در $x = 0$ بحث می‌کنیم.
بررسی گزینه اول:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - 2x & , x < 0 \\ 1 + 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f + g)(x) = -\frac{1}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = 1$$

بنابراین تابع $f + g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه دوم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , f(x) < 0 \\ 2f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , x < 0 \\ 4x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = -\frac{1}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = 0 \rightarrow \text{در } x = 0 \text{ ناپیوسته است}$$

بنابراین تابع $f \circ f$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه سوم:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & , f(x) < 0 \\ 1 & , f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2(-\frac{1}{2}) & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x) = g \circ f(0) = 1$$

پس تابع $g \circ f$ در $x = 0$ پیوسته است.
بررسی گزینه چهارم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , g(x) < 0 \\ 2g(x) & , g(x) \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع $g(x)$ این تابع همواره نامنفی است پس تابع $f \circ g$ برای ضابطه بالا تشکیل نشده و داریم:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -4x & , x < 0 \\ 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ g(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g(x) = 2$$

بنابراین تابع $f \circ g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

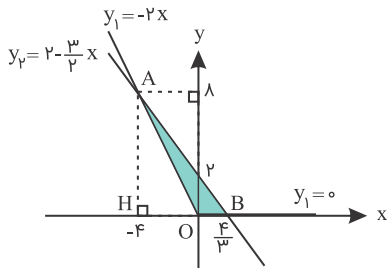
$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$2 - \frac{3}{4}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{4}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{4}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

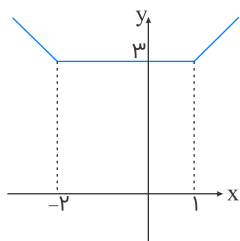
بنابراین ارتفاع مثلث ABC برابر ۸ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

ساده تر از این امکان ندارد. ضابطه $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبه $f(۸)$ کافی است در ضابطه داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم.

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸) = ۳ + \sqrt{۲ \times ۸} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷ \Rightarrow f(۸) = ۷$$

$$f(x) = |x + ۲| + |x - ۱| = \begin{cases} ۲x + ۱ & ; x > ۱ \\ ۳ & ; -۲ \leq x \leq ۱ \\ -۲x - ۱ & ; x < -۲ \end{cases}$$



باتوجه به نمودار تابع گلدانی $y = |x + ۲| + |x - ۱|$ ، در فاصله $(-\infty, -۲)$ تابع نزولی اکید است.

برای تعیین نقطه تلاقی دو تابع f و $f \circ g$ باید اول ضابطه $f \circ g$ مشخص شود. سپس معادله $f(x) = f \circ g(x)$ را حل کرده و نقطه تلاقی دو تابع که در واقع ریشه همین معادله است را به دست می آوریم.

$$f(x) = (۲x - ۳)^۲, \quad g(x) = x + ۲ \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = (۲g(x) - ۳)^۲ \\ = (۲(x + ۲) - ۳)^۲ = (۲x + ۴ - ۳)^۲ = (۲x + ۱)^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱$$

معادله $f(x) = f \circ g(x)$ را حل می کنیم:

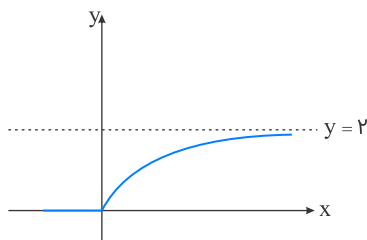
$$f(x) = f \circ g(x) \Rightarrow (۲x - ۳)^۲ = (۲x + ۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow ۱۶x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و $f \circ g$ در نقطه ای به طول $x = \frac{۱}{۲}$ با هم متقاطع اند.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + |x|}{|x+1| + 1} = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{2x}{x+2} & ; x > 0 \end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[0, 2)$ خواهد بود.

دامنه تابع $\{1\} - [-3, 3]$ است. اگر $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعه دامنه تابع باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

$$(1) : (k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 < 1 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in [-1, -\frac{1}{3})$$

$$(2) : (k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \\ k-2 > 1 \Rightarrow k > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

برای به دست آوردن $D_{f \circ g}$ اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطه $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ دامنه تابع $f \circ g$ را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_v^{(x^v+2x)} \Rightarrow x^v + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین $D_{f \circ g}$ می‌رویم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \mid \log_v^{(x^v+2x)} \leq 3\}$$

$$\log_v^{(x^v+2x)} \leq 3 \Rightarrow x^v + 2x \leq v^3 \Rightarrow x^v + 2x \leq 8 \Rightarrow x^v + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطه تابع $g \circ f(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جمله "مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع $g \circ f$ بالای محور x قرار بگیرد باید مقدار y تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادله $g \circ f(x) > 0$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطه $g \circ f(x)$ و حل نامعادله $g \circ f(x) > 0$:

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + 2, \quad f(x) = x^2 + 3x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{4}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2$$

$$g \circ f(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

بنابراین در بازه $(-4, 1)$ مقادیر تابع $g \circ f(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور x قرار می گیرد.

با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه $f(-x)$ را تشکیل می دهیم:

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x + \sqrt{x^2 + 4})$$

حاصل ضرب دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ برابر است با:

$$f(x)f(-x) = \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 4}) \frac{1}{4}(-x + \sqrt{x^2 + 4}) = \frac{1}{4}(x^2 + 4 - x^2) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

$$\Rightarrow f(x)f(-x) = 1$$

بنابراین اگر فرض کنیم $f(x) = \alpha$ باشد آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \alpha \Rightarrow f^{-1}(\alpha) = x \\ f(-x) = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -x \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}(\alpha) + f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = x - x = 0$$

اول ضابطه $f(\sqrt{x})$ را تعیین می کنیم. در تعیین ضابطه $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنه آن متفاوت با دامنه تابع $f(x)$ است.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

حالا ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow g(x) = 2, \quad x \in (0, +\infty)$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

گام اول

در ضابطه $g(x)$ ، به جای x ضابطه $f(x)$ را جایگذاری می کنیم.

گام دوم

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{2x-1}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}} \\ = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x \Rightarrow g(f(x)) = 2x$$

دامنه تابع $f \circ g$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

دامنه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطه گفته شده در گام اول، $D_{f \circ g}$ را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

$$-x^2 + x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow D_f = (-1, 2)$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2\}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{e}\right)^x > 0} \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2 \Rightarrow (e^{-1})^x < 2 \Rightarrow e^{-x} < 2 \Rightarrow -x < \ln 2$$

$$\xrightarrow{\div -1} x > -\ln 2 \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\ln 2, +\infty)$$

اگر دو تابع f و g که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بیان شده‌اند را داشته باشیم، پس $f \cap g$ زیرمجموعه‌ای از این توابع خواهد بود، بنابراین تابع است. همچنین $f - g$ نیز تابع خواهد بود. ترکیب دو تابع f و g یعنی $f \circ g$ نیز تابع است. رابطه $f \cup g$ ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

$f = \{(2, 3)\}$ تابع است

$g = \{(2, 4)\}$ تابع است

$f \cup g = \{(2, 3), (2, 4)\}$ تابع نیست

دو ضابطه $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. برای به دست آوردن ضابطه $f(x)$ از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض می کنیم $g(x)$ برابر t باشد. در این صورت x را بر حسب t به دست آورده و در نهایت $f(t)$ را مشخص می کنیم. حالا تابع $f(x)$ به صورت مستقل به دست آمده است.

$$g(x) = 2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{(t + 3)^2}{4} - 2(t + 3) + 5\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = (t + 3)^2 - 8(t + 3) + 20 = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 2t + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $t = x - 3$ ، x را بر حسب t به دست آورده و ضابطه $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x - 3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow[\substack{x-3=t \\ x=t+3}]{\substack{x-3=t \\ x=t+3}} f(t) = (t + 3)^2 - 4(t + 3) + 5$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

ضابطه $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطه $f(1 - x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(1 - x) = (1 - x)^2 + 2(1 - x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2$$

$$= x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(1 - x) = x^2 - 4x + 5$$

روش دوم: روش دیگر برای به دست آوردن $f(1 - x)$ از روی ضابطه $f(x - 3)$ این است که به جای x متغیر $4 - x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x - 3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x \rightarrow 4-x} f(4 - x - 3) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5$$

$$\Rightarrow f(1 - x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$$

ضابطه $f(x)$ و ضابطه $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ به ما داده شده است و ضابطه $g(x)$ را می‌خواهد. در این حالت برای پاسخ گویی به تست از تغییر متغیری به صورت زیر استفاده می‌کنیم. $f(x)$ را برابر t در نظر گرفته، x را بر حسب t به دست آورده و سپس $g(t)$ را بر حسب t تشکیل می‌دهیم. در نهایت برای تعیین ضابطه $g(x)$ ، x را به جای t جایگزین می‌کنیم.

$$gof(x) = \frac{1}{2}x, \quad f(x) = \frac{x}{2-x} \Rightarrow g(f(x)) = g\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{1}{2}x$$

طبق توضیحات گفته شده $\frac{x}{2-x}$ را برابر t فرض می‌کنیم:

$$\frac{x}{2-x} = t \Rightarrow x = 2t - tx \Rightarrow x + tx = 2t \Rightarrow x(1+t) = 2t \Rightarrow x = \frac{2t}{1+t}$$

پس $g(t)$ برابر است با:

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t}\right) = \frac{t}{1+t} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{1+x}$$

دو تابع $g(x)$ و $(fog)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(2x+1) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \quad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $2x+1 = t$ باشد، x را بر حسب t به دست آورده و در ضابطه (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$2x+1 = t \Rightarrow 2x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

$$f(2x+1) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(t) = \lambda \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \epsilon \left(\frac{t-1}{2}\right) + \omega$$

$$= 2(t-1)^2 + 3t - 3 + \omega$$

$$\Rightarrow f(t) = 2(t^2 - 2t + 1) + 3t + 2 = 2t^2 - 4t + 2 + 3t + 2 = 2t^2 - t + 4$$

بنابراین ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + 4$ به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ است.

با توجه به اعضای مجموعه A ، ابتدا تابع $f(x)$ را با مشخص کردن زوج مرتب های آن تشکیل می دهیم. برای تشکیل تابع $f(f(x))$ یا همان $f \circ f(x)$ ، مقدار تابع $f \circ f$ را در نقاط دامنه اش حساب می کنیم. دقت کنید که اگر $x \in D_f$ باشد اما $f(x) \notin D_f$ ، آن گاه x در ترکیب شرکت نمی کند. حالا تابع $f(x)$ را با زوج مرتب هایش تشکیل می دهیم:

$$f = \left\{ (x, 2x - 1), x \in A \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 2 - 1 = 1 \\ x = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 4 - 1 = 3 \\ x = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 6 - 1 = 5 \\ x = 4 \Rightarrow 2x - 1 = 8 - 1 = 7 \\ x = 5 \Rightarrow 2x - 1 = 10 - 1 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

تابع $f(f(x))$ را با رعایت شرط گفته شده تشکیل می دهیم:

$$x = 1 : f(f(1)) = f(1) = 1 \quad , \quad x = 2 : f(f(2)) = f(3) = 5$$

$$x = 3 : f(f(3)) = f(5) = 9 \quad , \quad x = 4 : f(f(4)) = f(7) \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$x = 5 : f(f(5)) = f(9) \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$

بنابراین تابع $f(f(x))$ دارای ۳ عضو دوتایی (زوج مرتب) است.

داریم $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$. ابتدا $g^{-1}(-9)$ را می یابیم. فرض می کنیم $g^{-1}(-9) = a$ باشد، پس $g(a) = -9$ و داریم:

$$g(x) = \frac{3-x}{2} \Rightarrow g(a) = \frac{3-a}{2} = -9 \Rightarrow 3-a = -18 \Rightarrow a = 21$$

پس کافی است $f^{-1}(21) = b$ را حساب کنیم. فرض می کنیم $f^{-1}(21) = b$ باشد، پس $f(b) = 21$ است و داریم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow f(b) = b^2 - 4b + 9 = 21 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (b-6)(b+2) = 0 \xrightarrow{b \geq 2} b = 6$$

پس $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = 6$ است.

$$g(x) = \frac{1-3x}{x+2}, \quad f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$$

$$g(f(x)) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)+2} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1-\frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-7x-7}{7} \Rightarrow g(f(x)) = -x-1$$

گام اول

با توجه به صورت سؤال $[x^2 + x] = -1$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدوده قابل قبول برای $x^2 + x$ به صورت $-1 \leq x^2 + x < 0$ است.

گام دوم

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$1) \quad x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \\ x^2 \text{ ضریب} = 1 > 0 \end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است، عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$2) \quad x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

پس $-1 < x < 0$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^0 < 1 \Rightarrow [x^0] = 0$$

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم هریک از زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده دو تابع f و g ، توابع f^{-1} و g^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها مشخص می‌کنیم، سپس تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا به سراغ تابع f^{-1} می‌رویم، سپس با خروجی‌هایی که به ما می‌دهد بررسی می‌کنیم که تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ تشکیل می‌شود یا خیر.

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 3)\}$$

$$g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, 5, 4\}$$

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(3)) = g^{-1}(2) = 3 \Rightarrow (3, 3) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 4 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(4) = 5 \Rightarrow (5, 5) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(4)) = g^{-1}(3) \Rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

بنابراین تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ به صورت $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ درمی‌آید.

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x > 0$ و $x < 0$ ، تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می‌کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه‌های جدید، ضابطه معکوس تابع را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x \neq 0 : y = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 : |x| = x \Rightarrow y = \sqrt{x} ; y > 0 \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow y = -\sqrt{-x} ; y < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{به توان } 2]{x, y > 0} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x > 0$$

$$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{به توان } 2]{x, y < 0} y^2 = -x \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

همچنین نقطه $(0, 0)$ باید در ضابطه وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطه معکوس تابع به صورت $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R}$ در می‌آید.

روش دوم:

اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه $f^{-1}(x)$ صدق می‌کند. نقطه $A(4, 2)$ در ضابطه $f(x)$ صدق می‌کند. پس نقطه $B(2, 4)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه‌های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر \mathbb{R} است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعه اعداد حقیقی یا همان \mathbb{R} باشد. تنها گزینه‌ای که تمام این ویژگی‌ها را دارد، گزینه $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R}$ است.

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند. دامنه تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x - f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

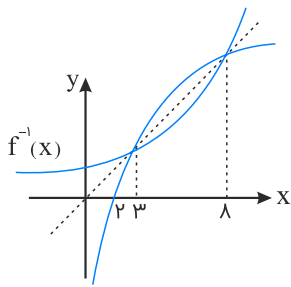
$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینه هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می‌گیرد و برعکس.

در بازه $[۳, ۸]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار

$y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و در نتیجه $x - f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت $f(x)$)

صحیح‌تر نامنفی می‌شود، بنابراین بازه $[۳, ۸]$ دامنه تعریف تابع داده شده است.



یک روش این است که از روی تابع اصلی، ضابطه وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سپس با توجه به این که اگر نقطه (α, β) در ضابطه اصلی صدق کند، نقطه (β, α) در وارون آن صدق می کند، گزینه درست را پیدا کنیم. روش اول:

$$۱) y = \sqrt{x}, x \geq 0, y \geq 0 \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0$$

$$۲) y = -\sqrt{-x}, x < 0 \Rightarrow y < 0 \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = -x$$

$$\Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = x|x|, x \in \mathbb{R}$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطه $(۴, ۲)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینه ۱ است که نقطه $(۲, ۴)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطه وارون در نظر گرفته شود.

داریم: $(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20))$ ، پس کافی است $f^{-1}(20)$ را یافته و در تابع g^{-1} قرار دهیم.
فرض کنیم $f^{-1}(20) = a$ باشد، پس $f(a) = 20$ است و داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \\ \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

بنابراین $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$. حال فرض می‌کنیم $g^{-1}(16) = b$ ، پس $g(b) = 16$ است. در نتیجه:

$$g(x) = \frac{9x + 6}{1 - x} \Rightarrow g(b) = \frac{9b + 6}{1 - b} = 16 \Rightarrow 9b + 6 = 16 - 16b \\ \Rightarrow 25b = 10 \Rightarrow b = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

$$g(x) = x^3 + x, \quad f(x) = \frac{2}{5}x - 4$$

اول $f^{-1}(8)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(8) = 30$$

حال داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(30) \\ g(x) = 30 \Rightarrow x^3 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 4 \Rightarrow yx - x = 2y + 4$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x+4}{x-1}$$

با مساوی قرار دادن ضابطه تابع با وارون آن نقطه تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 + 4x - 4x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +4 \end{cases}$$

اگر نمودار $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی انتقال دهیم، $f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به طرف y های منفی منتقل می‌کنیم، $g(x) = f(x) - 9$ به دست می‌آید.

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

$$(x+1)f(x) \geq 0$$

$$(x+1)f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, -1, 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$(x+1)f(x)$	$+$	$.$	$-$	$-$	$+$

دامنه تابع به صورت $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\}$ است که طبق گفته مسئله، دامنه تابع غیرنقطه‌ای به صورت $\mathbb{R} - (-3, 2)$ خواهد بود.

وقتی باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-1)$ برابر ۴ است.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 4$$

$$P(-1) = (-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow -a + 3 = 4 \\ \Rightarrow a = 3 - 4 = -1 \Rightarrow a = -1$$

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است، پس $p(4) = 3$

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است، پس $p(-2) = 1$

حال باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = 2$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^2) + 4p(-x) = p(2^2) + 4p(-2)$$

$$= p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7$$

نیمساز ناحیه دوم: $y = -x$; $x < 0$

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

راه حل اول: ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(16)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow y = f(3x - 4)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطه تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = f(3x - 4) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(3x - 4)) = f^{-1}(y) = 3x - 4$$

$$\Rightarrow 3x = f^{-1}(y) + 4 \Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) + 4}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x) + 4}{3}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(16)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(16)$ را حساب می کنیم:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 16 + 4 = 20$$

$$g^{-1}(16) = \frac{20 + 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

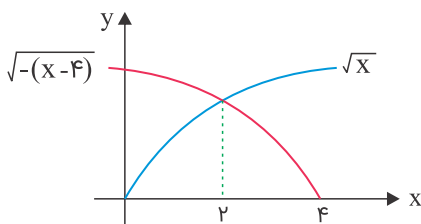
راه حل دوم: فرض می کنیم $g^{-1}(16) = a$ ، پس داریم: $g(a) = 16$

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow g(a) = f(3a - 4) = 16 \Rightarrow f^{-1}(16) = 3a - 4$$

$$f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20 = 3a - 4 \Rightarrow a = \frac{24}{3} = 8$$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}} \sqrt{-(x-4)}$$

حال دو نمودار را رسم می کنیم:

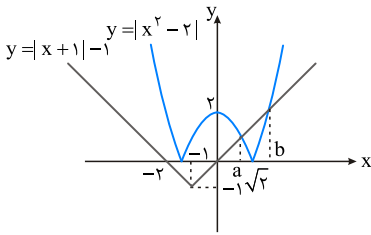


$$\sqrt{x} = \sqrt{-(x-4)} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x| = |-(x-4)| = |x-4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x - 4 \Rightarrow 0 = -4 \quad \times \\ x = -x + 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \quad \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین $x = 2$ محور تقارن دو نمودار است.

دو منحنی $y_1 = |x+1| - 1$ و $y_2 = |x^2 - 2|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a ، $0 < x < \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x + 1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} a = 1$$

برای یافتن b ، $x > \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{b > \sqrt{2}} b = 2$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+1}{2} = 1.5$$

گام اول

تابع دوضابطه‌ای است. برای محاسبهٔ $f(1)$ از ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ $f(5)$ از ضابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم.

گام دوم

$$x > 3 : f(x) = x - \sqrt{x+4} \Rightarrow f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$x \leq 3 : f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

پس مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ برابر است با:

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 2(2) + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 9$$

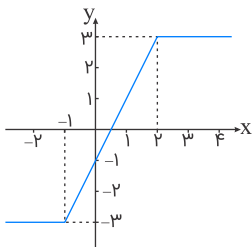
X	-1	2
X+1	-	+
X-2	-	+

$$x \leq -1 : f(x) = -x - 1 + x - 2 = -3$$

$$-1 < x \leq 2 : f(x) = x + 1 + x - 2 = 2x - 1$$

$$x > 2 : f(x) = x + 1 - x + 2 = 3$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصله $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

در توابع شامل قدر مطلق بهتر است ابتدا تکلیف قدر مطلق را مشخص کنیم. باتوجه به ریشه عبارت داخل قدر مطلق، ضابطه تابع را به صورت تفکیک شده به دست می‌آوریم. سپس هرکدام از ضابطه‌ها را که یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس پذیر بود انتخاب کرده و ضابطه تابع معکوس را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = 2x - |4 - 2x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \Rightarrow 4 - 2x < 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 2x - 4 \Rightarrow f(x) = 2x - 2x + 4 = 4 \\ x \leq 2 \Rightarrow 4 - 2x \geq 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 4 - 2x \Rightarrow f(x) = 2x - 4 + 2x = 4x - 4 \end{cases}$$

ضابطه $f(x) = 4$ یک‌به‌یک نیست، پس وارون ندارد؛ پس تابع فقط روی بازه $(-\infty, 2]$ معکوس پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow 4x \leq 8 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4$$

برد تابع f بازه $(-\infty, 4]$ به دست آمد. پس دامنه f^{-1} نیز بازه $(-\infty, 4]$ خواهد بود.

$$y = 4x - 4 \Rightarrow y + 4 = 4x \Rightarrow x = \frac{y + 4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 ; x \leq 4$$

الف) ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یعنی $f(g(x))$ ، با جایگذاری ضابطه $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می آید.
 ب) می خواهیم نمودار تابع $f \circ g(x)$ زیر محور x ها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادله $f \circ g(x) < 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{x-3}} - 2 = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} - 2 \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{9}{4} + \frac{1}{x} - \frac{4}{2} = \frac{1}{x^2} - x - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

حالا مجموعه جواب نامعادله $f \circ g(x) < 0$ را تعیین می کنیم:

$$f \circ g(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} - x - \frac{5}{4} < 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

حال $g^{-1} \circ f$ را حساب می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 4 \\ 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 4 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g^{-1}} 5 \end{array} \right\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

فرض می کنیم که $h = g^{-1} \circ f$ باشد. خواسته مسئله $h - f$ است که باید در دامنه مشترک، عرضها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{1, 4\}$$

$$h - f = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{2, -1\}$ است.

گام اول

به شرط‌های اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدار x و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت‌هایی که $2x + y \leq 7$ می‌شود را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسأله به x از یک مقدار می‌دهیم و مقادیر قابل قبول برای y را مشخص می‌کنیم.

$$1) \quad x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3, 4, 5$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی موردنظر را دارند:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$

$$2) \quad x = 2 \Rightarrow 2x = 4 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3$$

$$\xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3 \Rightarrow (2, 1), (2, 2), (2, 3) \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad x = 3 \Rightarrow 2x = 6 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1$$

در این حالت تنها زوج مرتب $(3, 1)$ عضو رابطه \mathbb{R} است.

به ازای مقادیر $x \geq 4$ ، هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی‌شود. بنابراین رابطه \mathbb{R} با زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده آن به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbb{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

پس مجموعه \mathbb{R} دارای ۹ عضو به صورت زوج مرتب است.

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x - 3 \geq 0$ و $x - 4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x - 3|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x - 4|}_{\text{منفی}} = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \times \\ x = -2 \times \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده در فاصله $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

گام اول

اگر ضابطه اول که بر روی ورودی اعمال می شود را $f(x)$ و ضابطه دوم را $g(x)$ نام گذاری کنیم، شکل داده شده به صورت زیر در می آید:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_x \rightarrow \underbrace{2x + A}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\sqrt{x} - 2x - 4}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

ورودی یا همان x برابر ۲ و خروجی یا همان $g(f(x))$ برابر -5 است. با توجه به ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ، ضابطه تابع $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم و مقدار A را محاسبه می کنیم.

گام دوم

به ازای $x = 2$ ، معادله $gof(x) = -5$ برقرار است. A را حساب می کنیم:

$$f(x) = 2x + A, \quad g(x) = \sqrt{x} - 2x - 4$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{2x + A} - 2(2x + A) - 4 = -5 \xrightarrow{x=2}$$

$$\sqrt{4 + A} - 2(4 + A) - 4 = -5 \xrightarrow{\sqrt{4+A}=t} t - 2t^2 + 1 = 0$$

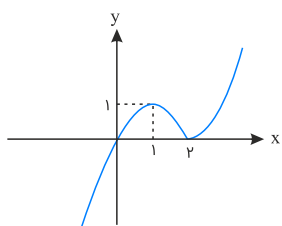
$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow (2t + 1)(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \text{ غ ق ق} \\ t = 1 \Rightarrow 4 + A = 1 \Rightarrow A = -3 \end{cases}$$

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطه تابع را به صورت تفکیک شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می‌کنیم $x \geq 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < 2$ باشد و ضابطه تابع را تعیین می‌کنیم.)
 ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.
 ج) باتوجه به این نکته که $D_{f^{-1}} = R_f$ ، دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطه آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \Rightarrow y = x(x-2) \\ x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow y = -x(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; x < 2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازه $[1, 2]$ است. برد تابع در این بازه $[0, 1]$ است. پس $D_{f^{-1}} = [0, 1]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدوده مشخص شده ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{+1} 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1 - y = (x-1)^2 \Rightarrow x-1 = \sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$$

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدر مطلق ابتدا باتوجه به ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق، ضابطه تابع را به صورت ساده شده می‌نویسیم.

ب) تعیین می‌کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطه تابع معکوس، x را برحسب y به دست آورده و در نهایت به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگزین می‌کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنه تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x$$

$$= \begin{cases} x < -4 : -(2x - 6) + (x + 4) + x = 10 \\ -4 \leq x \leq 3 : -(2x - 6) - (x + 4) + x = -2x + 2 \\ x > 3 : (2x - 6) - (x + 4) + x = 2x - 10 \end{cases}$$

تابع در بازه $[-4, 3]$ اکیداً نزولی است. ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y = -2x + 2 \Rightarrow y - 2 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

در ضابطه تابع اصلی وقتی $-4 \leq x \leq 3$ باشد، $-4 \leq y \leq 10$ است. پس دامنه تابع معکوس به صورت $[-4, 10]$ درمی‌آید. پس گزینه ۴ درست است.

گام اول

می‌دانیم اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع صدق کند، نقطه به مختصات $A'(\beta, \alpha)$ در ضابطه وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow (4, 2) \in f \Rightarrow (2, 4) \in f^{-1}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow (-4, -2) \in f \Rightarrow (-2, -4) \in f^{-1}$$

باتوجه به این دو مثال ضابطه وارون تابع به صورت $f^{-1}(x) = x|x|$ خواهد بود.

برای حل این تست از دو روش استفاده می‌کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطه تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست‌ها است. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطه مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می‌کنیم آیا با جابه‌جایی مؤلفه‌های اول و دوم، نقطه جدید در ضابطه تابع معکوس صدق می‌کند یا خیر.

روش اول:

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \Rightarrow -1 < y < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ ، $|x| < 1$ درمی‌آید

روش دوم:

نقطه $(0, 0)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می‌کند. از بین گزینه‌ها تنها معادله‌ای که $x = 0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطه $(0, 0)$ هم در ضابطه آن صدق کند، ضابطه $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

اگر $0 < x < 1$ باشد، $x^2 + x < 1$ خواهد بود، بنابراین:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

$$\Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

راه حل اول:

اگر تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5$ تبدیل می‌شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت y های منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطه $g(x) = f(x) - 2$ خواهد بود.

$$g(x) = f(x) - 2 = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 5 - 2$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 3 = -x^2 + 8x - 12$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y = x$ قرار گیرد.

$$g(x) > x \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 > x$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow \underbrace{(x-3)(x-4)}_{h(x)} < 0 \quad (*)$$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$h(x)$	$+$	$-$	$+$	

$$h(x) < 0 \Rightarrow x \in (3, 4)$$

راه حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم: $x = 4$ ، داریم: $0 < 0$ که غیرقابل قبول است، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $f(g(x))$ ، تابع $f(g(x))$ را بر حسب تابع $g(x)$ تشکیل می‌دهیم. سپس بدون این که ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین کنیم، x را برابر -2 در نظر گرفته و مقدار $g(-2)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = 2x^2 + 4, \quad f(g(x)) = 4x^2 + 6x \Rightarrow 2(g(x))^2 + 4 = 4x^2 + 6x$$

$$\xrightarrow{x=-2} 2(g(-2))^2 + 4 = 4(-2)^2 + 6(-2) = 4(4) + 6(-2) = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow 2(g(-2))^2 + 4 = 4 \Rightarrow 2(g(-2))^2 = 0 \Rightarrow (g(-2))^2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(3)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی‌تر می‌شود.) ضابطه $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حال ما مقدار $f(3)$ را می‌خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای x به دست آمده، مقدار $f(3)$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

$$g(x) = 2x - 1, \quad f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-3}$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

گزینه ۳

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می‌آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطه $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت‌ها تعیین می‌کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطه $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1)$$

$$\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2$$

پس رابطه $g(f(x)) = -2$ به ازای تمام x ‌های صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای \mathbb{R} برقرار است.

مجموعه جواب نامعادله $f(x) > \frac{7}{2}$ را به دست می آوریم.

$$f(x) > \frac{7}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} -x^2 + 4x + 12 > 7$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

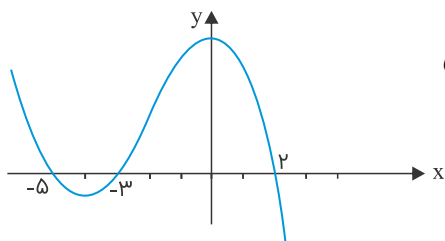
بنابراین بازه (a, b) به صورت $(-1, 5)$ در آمده و بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$b - a = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$$

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x - 2)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x - 2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

باتوجه به نمودار تابع $f(x - 2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم علامت باشند، قابل قبول است پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5, -3] \cup [0, 2]$

طبق صورت سؤال نتیجه می گیریم که $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ، بنابراین:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} - 1 = 0 \Rightarrow a = 7$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر با $P(-2)$ است، پس داریم:

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴, ۲) \in fog$ و $(۴, ۱) \in gof$ است. $(۴, ۲) \in fog$ یعنی $f(g(۴)) = ۲$ و $(۴, ۱) \in gof$ یعنی $g(f(۴)) = ۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $g(f(۴)) = ۱$ و $f(g(۴)) = ۲$:

$$\begin{aligned} f(g(۴)) = ۲ &\xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴) = ۳ \xrightarrow{(a,۳) \in g} a = ۴ \\ g(f(۴)) = ۱ &\xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵) = ۱ \xrightarrow{(b,۱) \in g} b = ۵ \end{aligned}$$

پس دوتایی مرتب (a, b) به صورت $(۴, ۵)$ درمی آید.

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-1} = \{(-۱, ۲), (۴, -۱), (-۲, ۳), (-۳, -۴)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x > ۰$ مثبت و به ازای مقادیر $x < ۰$ منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -۲ \Rightarrow \sqrt{-a} = ۲ \Rightarrow a = -۴$$

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتبها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آنها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع بودن در حل این گونه سؤالها فراموش نشود. این که زوج مرتبها نباید مؤلفه اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود. در رابطه داده شده دو زوج مرتب $(۳, ۲)$ و $(۳, a^۲ - a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهله اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a = -۱ \Rightarrow (-۱, ۵) \in f, (-۱, ۴) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳, ۲) \in f, (b, ۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f \text{ یک به یک است}} b = ۳$$

پس دوتایی (a, b) به صورت $(۲, ۳)$ درمی آید.

تست ضابطه $f(f(x))$ یا همان $f \circ f(x)$ را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطه $f(f(x))$ ، ابتدا باید ضابطه $f(x)$ را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه به آن، ضابطه $f \circ f(x)$ را تعیین کنیم. ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2 - |x - 2| = \begin{cases} x \geq 2 : x - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2 - x + 2 = 4 - x \\ x < 2 : x - 2 < 0 \Rightarrow f(x) = 2 + x - 2 = x \end{cases}$$

ضابطه $f(f(x))$ را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

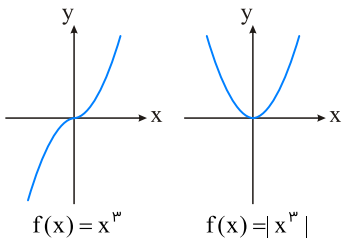
$$x \geq 2 : f(f(x)) = 2 - |4 - x - 2| = 2 - |2 - x|$$

$$\xrightarrow[2-x < 0]{x \geq 2} f(f(x)) = 2 + 2 - x = 4 - x = f(x)$$

$$x < 2 : f(f(x)) = 2 - |x - 2| \xrightarrow[x-2 < 0]{x < 2} 2 + x - 2 = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$$

در هر دو حالت ضابطه $f(f(x))$ برابر ضابطه $f(x)$ شد.

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ به سؤال پاسخ می دهیم. ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می کنیم.



با توجه به نمودار رسم شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک به یک هم نیست، در نتیجه وارون ناپذیر می شود؛ بنابراین فقط گزینه ۳ می تواند درست باشد.

$$f^{-1} = \{(۲, ۱), (\omega, ۲), (۴, ۳), (۶, ۴)\}$$

$$g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (\omega, ۶), (۳, ۱)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{g} ۳ \\ \omega \xrightarrow{f^{-1}} ۲ \xrightarrow{g} ۲ \\ ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۳ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۶ \xrightarrow{f^{-1}} ۴ \xrightarrow{g} ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(\omega, ۳), (۴, ۱), (۶, ۲)\}$$

حال اگر فرض کنیم $h = \text{gof}^{-1}$ باشد، خواسته مسئله $\frac{g}{h}$ است که باید دامنه‌های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h \cap D_g = \{\omega, ۴\}$$

$$\frac{g}{h} = \left\{ \left(\omega, \frac{۶}{۳} \right), \left(۴, \frac{۲}{۱} \right) \right\} = \{(\omega, ۲), (۴, ۲)\}$$

$$f(x) = ۲ - |x + ۱| = \begin{cases} x + ۳ & ; x \leq -۱ \\ -x + ۱ & ; x > -۱ \end{cases}$$

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} ۰ & ; x \leq ۰ \\ ۲x & ; x > ۰ \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{۲ - |x + ۱|}{x + |x|} = \begin{cases} \text{ن.ت} & ; x \leq ۰ \\ \frac{۱ - x}{۲x} & ; x > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} \quad ; x > ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} > -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y > -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \mathbf{R}_y = \left(-\frac{۱}{۲}, +\infty \right)$$

گام اول

در تابع f و g به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به ما داده شده و تابع $g \circ f^{-1}$ را می‌خواهند، پس ابتدا باید تابع f^{-1} را با زوج مرتب‌هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب‌های تابع f ، جای مؤلفه‌های اول و دوم را باهم عوض کنیم. پس با توجه به دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ و زوج مرتب‌های تابع $g(x)$ تابع $g \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

برای حل تست اول باید f^{-1} را مشخص کنیم:

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = \{2, 5, 3, -1\}$$

حالا بررسی می‌کنیم برای هر یک از اعضای $D_{f^{-1}}$ ، تابع $g \circ f^{-1}$ تعریف می‌شود یا خیر:

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g(f^{-1}(2)) = g(1) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \Rightarrow (5, 3) \in g \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 0 \Rightarrow g(f^{-1}(3)) = g(0) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 4 \Rightarrow g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \Rightarrow (-1, 1) \in g \circ f^{-1}$$

بنابراین تابع $g \circ f^{-1}$ به صورت $\{(5, 3), (-1, 1)\}$ درمی‌آید.

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(3) = f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \sqrt{a} = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(3) = 1$$

$$g(15) = f^{-1}(15) = b \Rightarrow f(b) = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} - 3)(\sqrt{b} + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \\ \sqrt{b} = -5 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(15) = 9$$

بنابراین داریم:

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

ضابطه $f(x)$ را داریم. باتوجه به آن حاصل $f(2x - 3)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس تابع $g(x)$ را تشکیل داده و با استفاده از ویژگی‌های جزء صحیح، برد آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - [x] \Rightarrow f(2x - 3) = 2x - 3 - [2x - 3] \\ \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{[x+k] = [x]+k} f(2x - 3) &= 2x - 3 - [2x] + 3 = 2x - [2x] \\ g(x) &= f(2x - 3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2(x - [x]) \\ &= 2x - [2x] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x] \end{aligned}$$

از ویژگی‌های جزء صحیح به خاطر داشته باشید: $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{p}]$
بنابراین تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x) = 2[x] - [x] - [x + \frac{1}{p}] = [x] - [x + \frac{1}{p}]$$

قسمت اعشاری عدد x را با p نشان می‌دهیم. باتوجه به مقدار p ، دو حالت برای $g(x)$ اتفاق می‌افتد:

$$g(x) = [x] - [x + \frac{1}{p}] = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq p < \frac{1}{2} \\ -1 & ; \frac{1}{2} \leq p < 1 \end{cases}$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر $\{-1, 0\}$ می‌شود.

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(1) = 8$ و $P(-\frac{1}{p}) = 5$ است. همچنین داریم:

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + R(x) = ((x-1)(2x+1))Q(x) + R(x) \quad ; R(x) = ax + b$$

بنابراین:

$$P(1) = R(1) = a + b = 8$$

$$P(-\frac{1}{p}) = R(-\frac{1}{p}) = -\frac{1}{p}a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -\frac{1}{p}a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{p}a = 3 \Rightarrow a = 2, b = 8 - 2 = 6$$

پس: $R(x) = 2x + 6$

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ ها}]{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت}} y_1 = -x^2 + 2x + 16$$

حال معادله جدید را با معادله قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطه برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_1 \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق.ق} \\ x = -2 \text{ (غ.ق.ق زیرا } x > 1) \end{cases}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16(1 + 4)} = 4\sqrt{5}$$

گام اول

فرض می‌کنیم $P(x) = x^2 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر است، پس با فرض اینکه $Q(x)$ خارج‌قسمت باشد، رابطه زیر را می‌توان نوشت:

$$P(x) = Q(x)(x^2 - 4)$$

گام دوم

روش اول:

عبارت $P(x)$ بر $(x^2 - 4)$ بخش‌پذیر است. بنابراین بر $(x - 2)(x + 2)$ بخش‌پذیر بوده و حاصل $P(x)$ به ازای $x = 2$ و $x = -2$ برابر صفر می‌شود. $P(2)$ و $P(-2)$ را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم و مقدار a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$P(2) = 2^2 + 4a(2^2) + 2b(2) + 1 = 0 \Rightarrow 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \Rightarrow 4b + 16a = -17 \quad (I)$$

$$P(-2) = (-2)^2 + 4a(-2)^2 + 2b(-2) + 1 = 0 \Rightarrow 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \Rightarrow 16a - 4b = -17 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow 4b + 16a = 16a - 4b \Rightarrow 8b = 0 \Rightarrow b = 0, \quad a = -\frac{17}{16} \Rightarrow a + b = -\frac{17}{16}$$

روش دوم:

عبارت $1 + 2bx + 4ax^2 + x^2$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر است. بنابراین به ازای $x^2 = 4$ برابر صفر است.

$$P(x) = x^2 + 4ax^2 + 2bx + 1 \Rightarrow P(x) = (x^2)^2 + 4a(x^2) + 2bx + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=4} (4)^2 + 4a(4) + 2bx + 1 = 0 \Rightarrow 16 + 16a + 2bx + 1 = 0 \Rightarrow 2bx + 16a + 17 = 0$$

حاصل عبارت فوق صفر شده است؛ پس داریم:

$$\begin{cases} 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 16a + 17 = 0 \Rightarrow a = \frac{-17}{16} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{-17}{16} + 0 = \frac{-17}{16}$$

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x - 15) > 0 \Rightarrow D_g = (\infty, 0) \cup (15, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{ x \mid x \in (-\infty, 0) \cup (15, +\infty), \log(x^2 - 15x) \leq 2 \right\}$$

$$\log(x^2 - 15x) \leq \log 100 \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x + 5) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, 20] (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**), (*)} x \in [-5, 0) \cup (15, 20]$$

دامنه تابع معکوس ($D_{f^{-1}}$) همان برد تابع اصلی (R_f) است. بنابراین برای تعیین دامنه تعریف تابع معکوس، باید برد تابع اصلی را به دست آوریم. بعد از تعیین $D_{f^{-1}}$ ، ضابطه تابع معکوس را مشخص می‌کنیم. برای یافتن ضابطه تابع معکوس از رابطه $y = f(x)$ را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $y = f^{-1}(x)$ به دست می‌آید.

$$x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x|$$

$$\xrightarrow{|x|=\pm x} \sqrt{x^2 + 1} > -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x^2+1}} f(x) > 0$$

$$\Rightarrow R_f = (0, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$$

دامنه تابع معکوس به صورت $x > 0$ در می‌آید.

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (y - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy = 1$$

$$\Rightarrow 2xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 0$$

گام اول

باتوجه به اینکه $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $f(6) = g(2a)$

گام دوم

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow g(2a) = \frac{2a}{2a-1} = f(6) = 3$$

$$\Rightarrow 2a = 3(2a-1) \Rightarrow 2a = 6a-3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

اصلاً نیازی به تعیین ضابطه $g(x)$ نداریم. با داشتن ضابطه دو تابع $f(x)$ و $f(g(x))$ ، ضابطه تابع $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ تشکیل می‌دهیم. سپس x را برابر ۱ قرار داده و مقدار $g(1)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f(g(x)) = f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{1+2}{1+1} \Rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1)+2 = 3g(1)-3$$

$$\Rightarrow g(1) = 3+2 = 5 \Rightarrow g(1) = 5$$

چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 2$ و $x + 3$ به ترتیب ۱ و -4 است، در نتیجه:

$$P(2) = 1, P(-3) = -4$$

باقی‌مانده $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را $ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$$P(x) = (x^2 + x - 6)q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} P(2) = 2a + b = 1 \\ P(-3) = -3a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \Delta a = \Delta \Rightarrow a = 1, b = -1$$

پس باقی‌مانده $x - 1$ خواهد بود.

ابتدا ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع $g \circ f$ را تعیین می‌کنیم.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2^{-x+[x]}$$

می‌دانیم به ازای هر x ، $0 \leq x - [x] < 1$ است، بنابراین:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < -x + [x] \leq 0$$

برد تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$-x + [x] = -1 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$-x + [x] = 0 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^0 = 1 \Rightarrow \mathbf{R}_{g \circ f} = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = \lambda \Rightarrow (f^{-1}(a), \lambda) \in g^{-1}$$

$$\Rightarrow (\lambda, f^{-1}(a)) \in g \Rightarrow g(\lambda) = f^{-1}(a) \quad (*)$$

$$g(x) = \sqrt{5x+9} \Rightarrow g(\lambda) = \sqrt{49} \Rightarrow g(\lambda) = 7$$

$$\xrightarrow{(*)} f^{-1}(a) = 7 \Rightarrow (a, 7) \in f^{-1} \Rightarrow (7, a) \in f \Rightarrow a = 3$$

ابتدا ضابطه $f(x)$ را برای دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می کنیم. برای هر کدام از این دو حالت ضابطه $f \circ f(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = |x| - x \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x - x = 0 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x - x = -2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$۱) x \geq 0 : f(x) = 0 \Rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$$

$$۲) x < 0 : f(x) = -2x \Rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = f(-2x)$$

$$\xrightarrow{x < 0 \Rightarrow -2x > 0} f(-2x) = 0 \Rightarrow f \circ f(x) = 0$$

بنابراین تابع $f \circ f(x)$ به ازای تمام مقادیر x برابر صفر می شود.

معکوس تابع نمایی $y = 2^x$ ، تابع لگاریتمی $y = \log_2^x$ است. نقطه برخورد این دو تابع با محورها را A و B نام گذاری کرده و فاصله دو نقطه را محاسبه می کنیم.

روش اول:

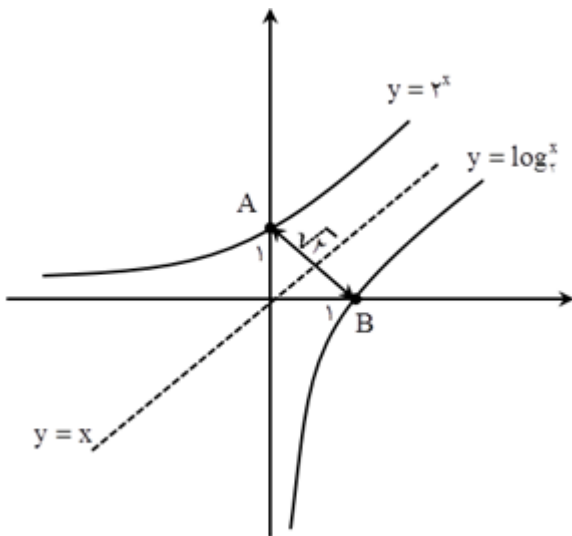
$$y = 2^x \xrightarrow[\text{برخورد با محور } y]{x=0} y = 2^0 = 1$$

پس نقطه برخورد تابع $y = 2^x$ با محور y ها نقطه $A(0, 1)$ است. نقطه برخورد تابع معکوس یا همان $y = \log_2^x$ با محور x ها نقطه $B(1, 0)$ است. فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

روش دوم:

با توجه به اینکه معکوس هر نمودار را می توانیم با رسم تقارن آن نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم، نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کرده و با ترسیم وارون آن نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس را به دست می آوریم.



ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون از روی ضابطه تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجه زوج، مثبت است}} x \geq 1$$

$$\Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2] \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$$

اکنون ضابطه تابع وارون را به دست می آوریم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-1 = (2-y)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x = 5 - 4y + y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

پس ضابطه تابع وارون به صورت $x \leq 2$; $y = x^2 - 4x + 5$ است.

توابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را تشکیل می دهیم و آن ها را برابر می گذاریم:

$$f \circ g(x) = f(x+4) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow (2x+7)(x+2) = (6x+7)(x+6)$$

$$2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 36x + 7x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -1 \end{cases}$$

نیمساز ناحیه چهارم: $y = -x$; $x > 0$

نمودار f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را قطع می کند، بنابراین:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\underline{x} \rightarrow \underline{f} \xrightarrow{f(x)} \underline{g} \xrightarrow{g(f(x))} 2x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطه f می‌شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحله دوم $f(x)$ وارد ضابطه g می‌شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = 2x$ است.

گام دوم

ضابطه $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطه $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = 3x + 4, \quad g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow 3f(x) = 2x - 4 \\ \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{2}{3}(5) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

گزینه ۳

بعضی از تست‌های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می‌توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می‌کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ \xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می‌گیریم}} 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ \xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می‌گیریم}} n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

پس حاصل عبارت داده‌شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

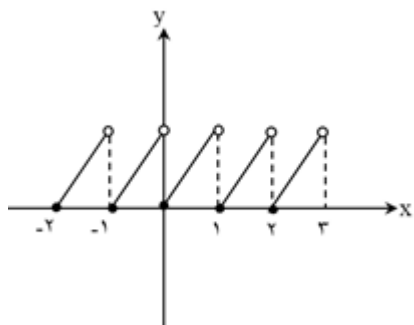
$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1 - 2n+4 = 3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره‌شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است. کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده‌شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان‌تر، n را ۳ در نظر می‌گیریم:

$$A = [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}] \\ = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$

برای رسم نمودار تابع، محدوده اولیه x را به پنج زیربازه زیر تقسیم می‌کنیم:



$$-2 \leq x < -1, -1 \leq x < 0, 0 \leq x < 1, 1 \leq x < 2, 2 \leq x < 3$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - (-2) = x + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - (-1) = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - (1) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - (2) = x - 2$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازه $\sqrt{3}$ تشکیل شده است. پس دوتایی مرتب (n, L) به صورت $(5, \sqrt{3})$ می‌شود.

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} \approx 1/7$ پس:

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 \times 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times 1 = -0/5$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}f(\sqrt{3})\right) = (-0/5)^2 - 2[-0/5] = 0/25 - 2(-1) = 2/25$$

چون $f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، بنابراین $f(-2) = 0$ است.

$$f(x) = x^6 + ax^3 - \lambda x \Rightarrow f(-2) = 16 - \lambda a + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda a = 32 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = x^6 + 4x^3 - \lambda x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x + 2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r} x^6 + 4x^3 - \lambda x \quad | \quad x + 2 \\ -(x^6 + 2x^3) \\ \hline 2x^3 - \lambda x \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -4x^2 - \lambda x \\ -(-4x^2 - 8x) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 2)(x^3 + 2x^2 - 4x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ برابر با $x = -1 - \sqrt{5}$ است.

چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^2 - 1$ برابر صفر است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

بنابراین داریم:

$$p(1) = 0, p(-1) = 0 \quad (*)$$

اکنون باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$$

$$\xrightarrow{x=2} Q(2) = p(2 - 1) + p(1 - 2) = p(1) + p(-1)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(2) = 0 + 0 = 0$$

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = 0 \Leftarrow$ غ.ق.ق \Leftarrow گزینه ۲ حذف می‌شود.

$x = 1 \Leftarrow$ غ.ق.ق \Leftarrow گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

از طرفی چون $x \neq 0$ است، پس گزینه ۴ قابل قبول است.

برای به دست آوردن برد تابع $g \circ f$ ابتدا باید ضابطه آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x], \quad g(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1-f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{1-x+[x]}{x-[x]} = \frac{1}{x-[x]} - 1$$

می‌دانیم $1 > x - [x] > 0$ ، از طرفی $x - [x]$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) > 0 \Rightarrow R_{g \circ f} = (0, +\infty)$$

با استفاده از ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم (x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض می‌کنیم). سپس معادله $f^{-1}(g(a)) = 6$ را حل کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow y + 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow \frac{g(a)+5}{2} = 6 \Rightarrow g(a) + 5 = 12 \Rightarrow g(a) = 7 \xrightarrow{(4,7) \in g} a = 4$$

با توجه به ضابطه $f(x)$ ، ابتدا $f(-۱۴۴)$ و سپس $f(f(-۱۴۴))$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + 2|x|} \Rightarrow f(-۱۴۴) = \sqrt{-۱۴۴ + 2|-۱۴۴|}$$

$$= \sqrt{-۱۴۴ + ۲۸۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \Rightarrow f(-۱۴۴) = ۱۲$$

حالا $f(۱۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(f(-۱۴۴)) = f(۱۲) = \sqrt{۱۲ + 2|۱۲|} = \sqrt{۱۲ + ۲۴} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

گام اول

دامنه تابع $g \circ f$ از رابطه $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 & (1) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2 - 1 + x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) : x \in \{0\}$$

گام اول

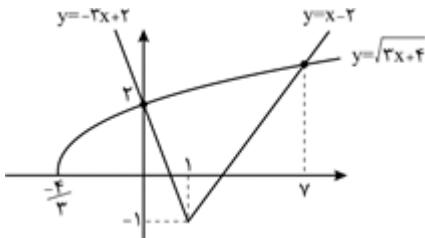
هر عبارت شامل قدر مطلق را می‌توان به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه قدر مطلق و مقادیر کوچکتر از آن به طور جداگانه بررسی کرد.

گام دوم

روش اول:

منحنی مربوط به دو تابع $y = \sqrt{3x+4}$ و $y = 2|x-1| - x$ را رسم می‌کنیم. مجموعه جواب ناحیه‌ای است که نمودار تابع $y = \sqrt{3x+4}$ بالای نمودار تابع $y = 2|x-1| - x$ قرار می‌گیرد. باتوجه به گام اول، ابتدا وضعیت قدر مطلق را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$y = 2|x-1| - x = \begin{cases} 2(x-1) - x & ; x \geq 1 \\ 2(-x+1) - x & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 1 \\ -3x+2 & ; x < 1 \end{cases}$$



همان‌طور که از روی نمودار مشخص است مجموعه جواب نامعادله داده شده بازه $(0, 7)$ است و طول وسط آن $\frac{7}{3}$ می‌شود. روش دوم:

عبارت رادیکالی $\sqrt{3x+4}$ روی بازه $[-\frac{4}{3}, +\infty)$ تعریف شده و $x=1$ ریشه عبارت درون قدر مطلق است، بنابراین مجموعه جواب نامعادله را در دو حالت $x \geq 1$ و $-\frac{4}{3} \leq x < 1$ به دست می‌آوریم:

$$x \geq 1: |x-1| = x-1 \Rightarrow \sqrt{3x+4} > 2(x-1) - x \Rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2$$

در بازه $[1, 2)$ این رابطه همواره برقرار است؛ زیرا روی این بازه $x-2 < 0$ و $\sqrt{3x+4} > 0$ است. به ازای $x \geq 2$ دو طرف نامساوی مثبت است بنابراین می‌توان دو طرف را به توان دو رساند، پس داریم:

$$\begin{aligned} 3x+4 &> (x-2)^2 \Rightarrow 3x+4 > x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 7x < 0 \\ \Rightarrow x(x-7) < 0 &\Rightarrow 0 < x < 7 \xrightarrow{x \geq 1} 1 \leq x < 7 \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < 1: |x-1| = -(x-1) = -x+1 &\Rightarrow \sqrt{3x+4} > 2(-x+1) - x \\ \Rightarrow \sqrt{3x+4} > -2x+2-x &\Rightarrow \sqrt{3x+4} > -3x+2 \end{aligned}$$

در محدوده $0 < x \leq -\frac{4}{3}$ نامعادله $\sqrt{3x+4} > -3x+2$ برقرار نیست پس جواب نامعادله را در محدوده $0 < x < 1$ بررسی می‌کنیم. باتوجه به اینکه به ازای $0 < x < 1$ ، $|-3x+2| > |\sqrt{3x+4}|$ است پس می‌توان دو طرف نامساوی را به

$$3x + 4 > (2 - 3x)^2 \Rightarrow 3x + 4 > 9x^2 - 12x + 4 \Rightarrow 9x^2 - 15x < 0$$

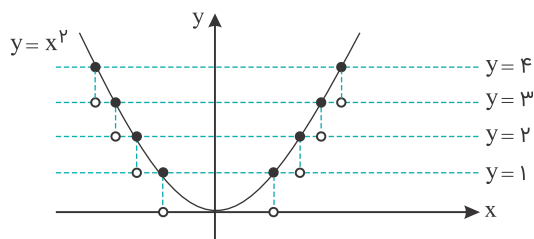
$$\Rightarrow 3x(3x - 5) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{5}{3} \xrightarrow{0 < x < 1} 0 < x < 1 \text{ (II)}$$

اجتماع دو بازه (I) و (II)، بازه $0 < x < 1$ می‌شود که طول وسط این بازه برابر $\frac{1}{2}$ است.

گزینه ۴

۱۳۰

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می‌کنیم. برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت‌هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می‌گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می‌کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $x \in (-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

گزینه ۲

۱۳۱

$$f(x) = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x - 1)^2 = -(x + 1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به بالا}} -(x + 1)^2 + 4$$

حال باید طول نقطه تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x - 1)^2 = -(x + 1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطه $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

تشکیل ضابطه $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|-x + 2| - x}$$

$$|-x + 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 : -x + 2 < 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ غ.ق.ق} \\ x \leq 2 : -x + 2 \geq 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x + 2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به بازه اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ ، به صورت $x \leq 1$ در می آید.

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفه اول آن‌ها با هم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم با هم برابر باشند.

$$A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$$

$$(3, m^2), (3, m + 2) \in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

مقادیر به دست آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, 4)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m = -1 \Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m = -1$ تنها مقدار قابل قبول برای m است.

$$f(۶) = f\left(-\frac{1}{۴}\right) = ۰$$

$$f(g(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۶ \\ g(x) = -\frac{1}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = ۶ \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{۴} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - ۶ = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t - ۳)(t + ۲) = ۰ \xrightarrow{t>۰} t = ۳ \xrightarrow{x=t^۲} x = ۹$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{۴} = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t + \frac{1}{۴} = ۰ \Rightarrow \left(t - \frac{1}{۲}\right)^۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{1}{۲} \xrightarrow{x=t^۲} x = \frac{1}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{1}{۴}$ قطع می‌کند.

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(۶) = f^{-1}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۲)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \\ \sqrt{a} = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۶) = ۴$$

$$g(۱۲) = f^{-1}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} + ۴)(\sqrt{b} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -۴ \text{ غ ق ق} \\ \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow g(۱۲) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$



۱ تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

- (۱) ۱۸۴۸
(۲) ۱۷۹۲
(۳) ۱۷۴۸
(۴) ۱۶۵۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

- (۱) ۱۰۵
(۲) ۱۲۵
(۳) ۱۳۵
(۴) ۱۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳ تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

- (۱) ۹۴۸
(۲) ۹۵۲
(۳) ۹۶۸
(۴) ۹۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۴ به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند باهم در مهمانی شرکت کنند؟

- (۱) ۸۴
(۲) ۸۷
(۳) ۹۱
(۴) ۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند کدام است؟

- (۱) ۱۸۰
(۲) ۲۱۶
(۳) ۲۴۰
(۴) ۳۶۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ اگر $\frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} = 26$ ، مقدار n کدام است؟

- (۱) ۵۲
(۲) ۵۳
(۳) ۵۴
(۴) ۵۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۷ در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو نفر مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۴
(۳) ۳۶
(۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۸ با جابه جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می توان تشکیل داد به طوری که رقم های ۲ ، یک درمیان قرار بگیرند؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۲
(۳) ۱۸
(۴) ۲۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۹ از ده پرسش موجود، به چند طریق می توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

- (۱) ۲۵
(۲) ۳۲
(۳) ۳۰
(۴) ۳۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۰ با ارقام ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ چند عدد سه رقمی با شرط " رقم یکان > رقم دهگان > رقم صدگان " می توان نوشت؟

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۱ حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

- (۱) ۳۶۰
(۲) ۵۴۰
(۳) ۷۲۰
(۴) ۱۴۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخهٔ مختلف موجود باشد؟

- (۱) ۱۲۶
(۲) ۱۴۰
(۳) ۱۵۴
(۴) ۱۶۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

از هریک از ۸ مدرسهٔ علاقمند، ۶ نفر برای بازی تنیس چهار نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟ (بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود)

- (۱) ۴۲۰۰
(۲) ۵۴۰۰
(۳) ۵۶۰۰
(۴) ۶۳۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

از هریک از ۶ منطقهٔ کشوری ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب نمود؟

- (۱) ۵۷۶۰۰
(۲) ۶۷۵۰۰
(۳) ۷۵۶۰۰
(۴) ۷۶۵۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

- (۱) ۷۲
(۲) ۸۴
(۳) ۹۶
(۴) ۱۰۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

از هریک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوه‌دو غیر هم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۶۰
(۲) ۳۲۰
(۳) ۴۸۰
(۴) ۶۴۰

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

از هر ۵ مدرسهٔ نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به طوری که هیچ دو نفر انتخاب‌شده از یک مدرسه نباشند؟

- (۱) ۱۳۵
(۲) ۲۷۰
(۳) ۳۲۰
(۴) ۶۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

با ارقام متمایز ۹, ..., ۴, ۳, ۲, ۱ به چند طریق می‌توان یک عدد چهاررقمی ساخت، به طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟

(۲) ۷۲۰

(۱) ۶۴۰

(۴) ۹۶۰

(۳) ۷۸۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

با ارقام ۹ و ... و ۳ و ۲ و ۱ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج‌رقمی ساخت به طوری که درست دو رقم آن زوج باشد؟

(۲) ۷۲۰۰

(۱) ۶۴۰۰

(۴) ۹۶۰۰

(۳) ۸۴۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل ۲ نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟

(۲) ۳۰

(۱) ۲۵

(۴) ۴۰

(۳) ۳۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گزینه ۱

۱

رقم ۵ می‌تواند در جایگاه‌های هزارگان، صدگان، دهگان یا یکان باشد.
اگر رقم ۵ در جایگاه هزارگان باشد:

$$\frac{1}{\downarrow} \frac{9}{\downarrow} \frac{8}{\downarrow} \frac{7}{\downarrow} : 9 \times 8 \times 7 = 504$$

۵ باشد

اگر رقم ۵ در یکی از جایگاه‌های صدگان، دهگان یا یکان باشد:

$$\frac{8}{\downarrow} \overbrace{1 \times 8 \times 7} : 8 \times 1 \times 8 \times 7 \times 3 = 1344$$

صفر نباید باشد
یک ۵ داشته باشد

پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$1344 + 504 = 1848$$

گزینه ۴

۲

برای توزیع کتاب دو حالت زیر را داریم:

(۱) یک نفر فقط یک کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام دو کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام دو کتاب می‌دهیم. سپس یک کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

یک کتاب دو کتاب دو کتاب

$$\binom{3}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 3 \times \frac{5!}{2!3!} \times 3 \times 1 = 90$$

(۲) یک نفر سه کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام یک کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام یک کتاب می‌دهیم. سپس سه کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

یک کتاب یک کتاب سه کتاب

$$\binom{3}{2} \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{3} = 3 \times 5 \times 4 \times 1 = 60$$

در انتها تعداد حالت‌های به‌دست‌آمده را باهم جمع می‌کنیم:

$$90 + 60 = 150$$

برای اینکه عددی بر ۵ بخش پذیر باشد، رقم یکان آن باید ۰ یا ۵ باشد؛ پس مسئله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:
حالت اول: اگر رقم یکان صفر باشد:

$$\frac{9}{\downarrow} \frac{8}{\downarrow} \frac{7}{\downarrow} \frac{1}{\downarrow} : 9 \times 8 \times 7 = 72 \times 7 = 504$$

صفر نباید باشد صفر باشد

حالت دوم: اگر رقم یکان ۵ باشد:

$$\frac{8}{\downarrow} \frac{8}{\downarrow} \frac{7}{\downarrow} \frac{1}{\downarrow} : 8 \times 8 \times 7 = 64 \times 7 = 448$$

صفر نباید باشد ۵ باشد

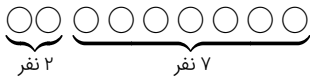
پس تعداد کل حالات $504 + 448 = 952$ است.

برای اینکه دو نفر مشخص باهم در مهمانی نباشند دو حالت زیر را داریم:
(۱) از آن دو نفر فقط یکی در مهمانی باشد.
(۲) هیچ کدام از آن دو نفر در مهمانی نباشند.
بنابراین داریم:

$$\binom{2}{1} \binom{7}{4} + \binom{2}{0} \binom{7}{5} = 2 \times \frac{7!}{4!3!} + 1 \times \frac{7!}{5!2!}$$

حالت اول حالت دوم

$$2 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{6} + \frac{7 \times 6^2}{2} = 70 + 21 = 91$$



گام اول

الف) در این تست یک کلمه ۶ حرفی با دو حرف تکراری داریم پس تعداد کل کلمه‌ها برابر $\frac{6!}{2!}$ می‌شود.

ب) می‌خواهیم Sها کنار هم نباشند. برای راحتی کار ابتدا حالت‌هایی که Sها کنار هم باشند را در نظر می‌گیریم، سپس آن را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

گام دوم

$$\text{تعداد کل کلمات} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

$$\text{تعداد کلماتی که دو حرف S کنار هم باشند} : \underline{SS} Y T E M \Rightarrow 5! = 120$$

$$\text{تعداد کلماتی که دو حرف S کنار هم نباشند} = 360 - 120 = 240$$

در حل تست به دو نکته زیر توجه کنید.

الف) $P(n, r)$ یعنی تبدیل r شیء از میان n شیء که از رابطه $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ محاسبه می‌شود.
 ب) $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ یعنی ترکیب r شیء از بین n شیء که از رابطه $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.
 $P(n, 4)$ و $C(n-1, 4)$ را جایگذاری کرده و مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} &= \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-4)! \times 4!}} = \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-5)! \times 4!}{(n-1)!}} \\ &= \frac{n! \times (n-5)! \times 4!}{(n-4)! \times (n-1)!} = \frac{n \times (n-1)! \times (n-5)! \times 24}{(n-4) \times (n-5)! \times (n-1)!} = 24 \\ &\Rightarrow \frac{24n}{n-4} = 24 \Rightarrow 24n = 24n - 104 \Rightarrow 2n = 104 \Rightarrow n = 52 \end{aligned}$$

گام اول

الف) ۵ نفر برای سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. دو نفر a و b را جدا کرده ایم. اگر قرار باشد بین دو نفر a و b فقط یک نفر سخنرانی کند، باید از ۳ نفر باقی مانده یک نفر انتخاب شود و بین این دو نفر قرار گیرد، یعنی انتخاب یک نفر از ۳ نفر باقی مانده.
 ب) در صورت تست اشاره نشده است که ابتدا شخص a سخنرانی می‌کند یا شخص b . پس در محاسبه تعداد حالت‌های ممکن باید جابه‌جایی این دو نفر را هم در نظر بگیریم (پس ۲! حالت برای جابه‌جایی a و b).
 ج) حالا a و b و فردی که بین آن‌ها قرار می‌گیرد را یک نفر فرض می‌کنیم که با دو نفر باقی مانده می‌توانند جابه‌جا شوند (۳! حالت داریم).

گام دوم

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل حالت ها} &= \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر بین } a, b} \times \underbrace{2!}_{\text{جابجایی } a, b} \times \underbrace{3!}_{\text{جابجایی ترکیب ۳ نفر با ۲ نفر دیگر}} = 3 \times 2 \times 6 = 36 \end{aligned}$$

گام اول

سه رقم ۲ و سه رقم غیر ۲ داریم (۶ و ۷ و ۵). اگر قرار باشد این ارقام به صورت یک‌درمیان کنار هم قرار بگیرند، دو حالت وجود دارد:
 حالت اول این است که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ شروع شود و حالت دوم این‌که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ تمام شود. در هرکدام از حالت‌ها سه رقم باقی مانده یعنی ۶ و ۷ و ۵ می‌توانند به ۳! حالت در جاهای خالی قرار گیرند.

گام دوم

حالت اول : ۲ ○ ۲ ○ ۲ ○

۶ = ۳ × ۲ × ۱ = تعداد حالت ها : ۵ و ۶ و ۷ در سه دایره باقی مانده

حالت دوم : ○ ۲ ○ ۲ ○ ۲

۶ = ۳ × ۲ × ۱ = تعداد حالت ها : ۵ و ۶ و ۷ در سه دایره باقی مانده

پس در مجموع ۱۲ عدد داریم که در آن ارقام ۲ به صورت یک‌درمیان قرار گرفته باشند.

گام اول

به کلمه "حداقل" در صورت تست خیلی توجه کنید. چون گفته شده حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول پاسخ داده شود، یعنی ۴ تا یا بیشتر. پس دو حالت می‌تواند رخ دهد:

یک حالت این است که از ۵ پرسش اول به ۴ پرسش و از ۵ پرسش دوم هم به ۴ پرسش پاسخ داده شود. حالت دوم این است که از ۵ پرسش اول، به هر ۵ پرسش و از ۵ پرسش دوم به ۳ پرسش پاسخ داده شود.

گام دوم

$$\begin{aligned} \text{تعداد حالت های پاسخگویی} &= \underbrace{\binom{5}{4} \times \binom{5}{4}}_{\text{از ۵ پرسش اول ۴ پرسش و از ۵ پرسش دوم ۴ پرسش}} + \underbrace{\binom{5}{5} \times \binom{5}{3}}_{\text{هر ۵ پرسش اول و از ۵ پرسش دوم ۳ پرسش}} \\ &= (5 \times 5) + (1 \times 10) = 25 + 10 = 35 \end{aligned}$$

گام اول

رقم صدگان باید از ارقام یکان و دهگان بزرگ تر باشد. پس ما نمی‌توانیم دو رقم ۱ و ۳ را در جایگاه صدگان به کار ببریم. برای هریک از ارقام ۵ و ۷ و ۹ که در جایگاه صدگان قرار می‌گیرند، حالت‌های موردنظر را به دست می‌آوریم.

گام دوم

- یک حالت $\Rightarrow 531$: رقم صدگان ۵
سه حالت $\Rightarrow 753, 751, 731$: رقم صدگان ۷
شش حالت $\Rightarrow 975, 973, 971, 953, 951, 931$: رقم صدگان ۹

$$\text{تعداد کل حالت ها} : 1 + 3 + 6 = 10$$

راه حل دوم: ابتدا سه رقم متمایز از بین این ۵ رقم انتخاب می‌کنیم که به $\binom{5}{3} = 10$ حالت امکان‌پذیر است. واضح است که با هر سه رقم متمایز، فقط یک عدد سه‌رقمی با شرط داده شده می‌توان نوشت، پس تعداد اعداد موردنظر ۱۰ است.

گام اول

الف) در این کلمه دو حرف یکسان A و دو حرف یکسان G مشاهده می‌شود. این حروف یکسان باید کنار هم باشند.
ب) با قرار دادن حروف یکسان در کنار هم ۶ حرف متمایز داریم. تعداد حالت‌های قرارگیری این ۶ حرف را در کنار هم حساب می‌کنیم.
ج) دقت کنید دو حرف یکسان در کنار هم فقط به یک حالت می‌توانند قرار بگیرند و دیگر بین آن‌ها جایابی نخواهیم داشت.

گام دوم

حروف ما به این صورت در می‌آیند :

LAAGGRNE

$$\text{تعداد حالت ها} = 6! = 720$$

تعداد انتخاب‌ها به صورت زیر است:

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \frac{8!}{4!4!} + \frac{8!}{5!3!} + \frac{8!}{6!2!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{8 \times 7 \times 6}{6} + \frac{8 \times 7}{2} = 70 + 56 + 28 = 154$$

گام اول

الف) بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود پس برای یک بازی ۲ نفر در مقابل ۲ نفر، باید از بین ۸ مدرسه دو مدرسه، انتخاب شود.
 ب) هر مدرسه ۶ دانش‌آموز برای بازی تنیس دارد. از بین این ۶ نفر باید ۲ نفر برای بازی انتخاب شود، یعنی برای هر یک از مدارس $\binom{6}{2}$ انتخاب داریم.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{8}{2}}_{\text{انتخاب ۲ مدرسه از ۸ مدرسه}} \times \underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{انتخاب ۲ دانش‌آموز از مدرسه اول}} \times \underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{انتخاب ۲ دانش‌آموز از مدرسه دوم}} = 28 \times 15 \times 15 = 6300$$

گام اول

الف) دانش‌آموزان باید دو به دو غیر هم‌منطقه‌ای باشند. بنابراین برای داشتن ۳ دانش‌آموز باید ۳ منطقه از بین ۶ منطقه کشوری انتخاب شود تا مطمئن باشیم دو دانش‌آموز هم‌منطقه‌ای نداریم.
 ب) هر منطقه ۱۵ دانش‌آموز دارد که هر کدام از این ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند انتخاب شوند.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{انتخاب ۳ منطقه از بین ۶ منطقه}} \times \underbrace{\binom{15}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1}}_{\text{هر کدام از ۱۵ دانش‌آموز این ۳ منطقه می‌توانند دعوت شوند}} = 20 \times 15 \times 15 \times 15 = 67500$$

گام اول

الف) عدد مورد نظر ما چهار رقم دارد.
 ب) ارقام به کار رفته در عدد باید متمایز باشند یعنی رقم تکراری نداشته باشیم.
 ج) فقط باید از ارقام فرد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ استفاده کنیم.
 د) این عدد چهار رقمی باید بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ باشد یعنی در جایگاه هزارگان نمی‌شود از رقم ۱ استفاده کرد.

گام دوم

پس تعداد ارقام چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ برابر است با:

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

↓ ↓

رقم ۱ به ارقام موجود اضافه می‌شود یک رقم از بین ۹، ۷، ۵ و ۳

ابتدا از میان پنج مدرسه A, B, C, D و E سه تا را انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{5}{3}$ حالت امکان‌پذیر است. حال از هر کدام از این سه مدرسه انتخابی، باید فقط یک نفر را انتخاب کنیم. چون از هر مدرسه چهار نفر به اردوگاه دعوت شده‌اند؛ پس برای انتخاب یک نفر از هر کدام از سه مدرسه، چهار حالت امکان‌پذیر است. یعنی با مشخص بودن مدارس، $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ حالت برای انتخاب دانش‌آموزان وجود دارد.

$$\binom{5}{3} \times 4^3 = 10 \times 64 = 640$$

اول ۳ تا از مدرسه‌ها را به $\binom{5}{3}$ طریق انتخاب می‌کنیم. بعد از هر مدرسه ۱ نفر برمی‌داریم.

$$\binom{5}{3} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

انتخاب سه رقم از بین ۱, ۳, ۵, ۷, ۹

$$\binom{4}{1} \times \binom{5}{3} \times 4! = 4 \times 10 \times 24 = 960$$

جایگشت ۴ رقم در کنار هم

انتخاب یک رقم از بین ۲, ۴, ۶, ۸

گام اول

الف) عدد ما پنج رقمی است پس به پنج رقم از بین نه رقم موجود نیاز داریم.
ب) در صورت تست گفته شده درست دو رقم زوج باشد یعنی برای تشکیل این عدد پنج رقمی، باید دو رقم از بین چهار رقم زوج و سه رقم از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم.

گام دوم

$$\text{تعداد اعداد پنج رقمی با دو رقم زوج} = \binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

حالت‌های مختلف قرار گرفتن ارقام

دو رقم از بین ارقام ۲ و ۴، ۶ و ۸ سه رقم از بین ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹

گام اول

دقت کنید که گفته شده حداقل ۲ نفر از بین ۳ نفر انتخاب شده، باید از رشته تجربی باشند. دو حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول این که ۲ نفر تجربی و یک نفر ریاضی باشند و حالت دوم این که هر سه نفر تجربی باشند.

گام دوم

تعداد حالت‌های انتخاب دانش‌آموزها با شرط انتخاب حداقل ۲ دانش‌آموز تجربی برابر است با:

$$\underbrace{\binom{5}{2} \times \binom{3}{1}}_{\text{دو دانش آموز تجربی و یک دانش آموز ریاضی}} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{هر سه تجربی}} = (10 \times 3) + 10 = 30 + 10 = 40$$



لرنیتو

۱ در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟ ($\log 2 = 0/3$, $\log 3 = 0/48$)

۲۴ (۲)

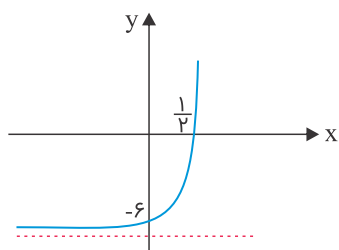
۲۰ (۱)

۳۲ (۴)

۳۰ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(2)$ ، کدام است؟



۲۳۴ (۱)

۱۰۸ (۲)

۷۲ (۳)

۱۸ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

 $\log_2^{(1+\sqrt{5})}$ (۲) $\log_2^{(-1+\sqrt{5})}$ (۱) $\log_2^{(3+\sqrt{5})}$ (۴) $\log_2^{(2+\sqrt{5})}$ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ اگر $\log_3^2 = \frac{5}{8}$ باشد، آنگاه \log_{18}^8 ، کدام است؟

 $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{15}{22}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{8}{11}$ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ ($\log 3 = 0.48$)

- (۱) ۳۶۰
(۲) ۳۰۰
(۳) ۲۷۰
(۴) ۲۴۰

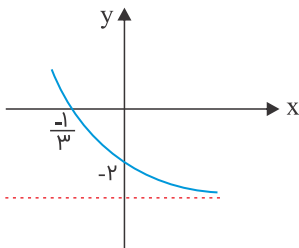
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

اگر $\log_4^3 = 0.8$ باشد، مقدار \log_{12}^6 ، کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{18}$
(۲) $\frac{8}{11}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{7}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟



- (۱) ۵۴
(۲) ۶۰
(۳) ۴۸
(۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

دو تابع f و g مفروض اند، در کدام گزینه دو تابع مساوی اند؟

- (۱) $f(x) = 2 \log x$ و $g(x) = \log x^2$
(۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x) = 1$
(۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = x$
(۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۰ اگر $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2$ ، عدد A کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۶
(۳) $8\sqrt{2}$
(۴) $12\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۱ اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$
(۲) $[-1, 0) \cup (0, 1]$
(۳) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$
(۴) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۲ اگر $2^{-x} < 0/000001$ و $\log 2 = 0/301$ ، کوچک ترین عدد x با دو رقم اعشاری کدام است؟

- (۱) ۱۹/۸۹
(۲) ۱۹/۹۱
(۳) ۱۹/۹۴
(۴) ۱۹/۹۷

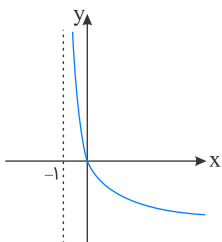
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{p}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول های ۱ و ۲ قطع می کند. $f(3)$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = \log_p^{U(x)}$ است. $U(x)$ کدام است؟



- (۱) $x + 1$
(۲) $(x + 1)^{-1}$
(۳) $x - 1$
(۴) $1 - x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۵ اگر $(\frac{125}{8})^{x^2} = (\frac{5}{4})^{2x-1}$ باشد، $\log_8^{(9x+1)}$ کدام است؟

- (۲) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{3}{2}$

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

(۲) ۸

(۱) ۶

(۴) ۲۴

(۳) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۷ تابع $f(x) = \log_3^{(ax+b)}$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{p}, +\infty)$ بامعنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آن گاه $f(-\frac{4}{q})$ کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۸ فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه $A(0, 4)$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۹ اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $-\frac{1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۰ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = A(2)^{Bx}$ و خط به معادله $4y = 5x$ در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-1}(10)$ کدام است؟

(۲) ۵

(۱) ۳

(۴) ۸

(۳) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱ تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_{\sqrt{b}}(bx-4)$ از دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد. a کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۲ اگر $\log_b^a = \frac{3}{2}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۳ از دو معادله دوجمله‌ای $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $1/2$
(۲) $1/4$
(۳) $1/5$
(۴) $1/6$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ نمودار یک تابع به صورت $f(x) = 3^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $y = x^2$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطه تلاقی تابع f با محور y ها، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$
(۲) $\frac{1}{9}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۵ اگر $1 = \log \frac{2}{x} + \log(x+1)$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه ۸ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۲۶ اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه ۸ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۷ از تساوی $\log_x^{(x^y+4)} = 1 + \log_x^5$ مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۸ از دو معادله $\log(y+2) = 1$ و $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۹ از دو معادله $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۰ از دو معادله $\log_3^x + \log_3^y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{2}{5}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۱ اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ مقدار y کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{5}$
(۲) $\frac{12}{5}$
(۳) ۱۵
(۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۲ از معادلات $2^x \times 8^y = 4$ و $\log x = \log 2 + \log y$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۳۳ اگر $\log_p^{(\Delta x+1)} + \log_p^x = 2$ عدد $\frac{4}{x}$ کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log_p x$ نسبت به هم چگونه اند؟

۳۴

- (۱) $f(x)$ بالاتر
(۲) $g(x)$ بالاتر
(۳) منطبق‌اند
(۴) فقط در یک نقطه متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

اگر $\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log (81)^K$ ، آنگاه لگاریتم $\frac{5}{K}$ در پایه ۲ کدام است؟

۳۵

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

۳۶

- (۱) $2k$
(۲) $4k$
(۳) $1 + k$
(۴) $2 + 4k$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a + b)$ کدام است؟

۳۷

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) صفر
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a + 1)$ در پایه ۴ کدام است؟

۳۸

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{5/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A} - 1)$ در پایه ۴ کدام است؟

۳۹

- (۱) -۳
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{2}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

اگر $3^a = A$ باشد، $\log_3 9A^2$ همواره کدام است؟

۴۰

- (۱) $2 + 2a$
(۲) $3 + 2a$
(۳) $2 + a^2$
(۴) $3 + a^2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۴۱ از معادله لگاریتمی $\log_3^{(x+2)} - \log_3^{(2x^2+1)} = 1$ مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه ۸، کدام است؟

$$(2) \quad -\frac{1}{2}$$

$$(4) \quad \frac{2}{4}$$

$$(1) \quad -\frac{2}{3}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴۲ نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است. b کدام می‌باشد؟

$$(2) \quad 2$$

$$(4) \quad 3$$

$$(1) \quad \frac{3}{2}$$

$$(3) \quad \frac{5}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۳ از تساوی $\log_x^{(3x+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)}$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴، کدام است؟

$$(2) \quad \frac{2}{3}$$

$$(4) \quad 2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۴ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ به کدام صورت بازه‌ها است؟

$$(2) \quad [-2, 0] \cup (3, 5)$$

$$(4) \quad (0, 5]$$

$$(1) \quad [-2, 0) \cup (3, 5]$$

$$(3) \quad [-2, 3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

۴۵ نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} + \frac{3}{4}$ در نقطه A متقاطع‌اند. فاصله نقطه A تا نقطه $(-\frac{1}{4}, 1)$ ، کدام است؟

$$(2) \quad \sqrt{2}$$

$$(4) \quad \sqrt{5}$$

$$(1) \quad 1$$

$$(3) \quad 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۶ کدام یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$$(2) \quad \log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$$

$$(4) \quad 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$$

$$(1) \quad \log(x-2) - \log x$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

از دو معادلهٔ دوجمله‌ای $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار y کدام است؟

۴۷

۲ (۲)

۱ (۱)

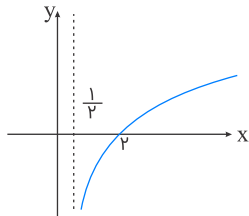
۴ (۴)

۳ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

شکل زیر، نمودار تابع $y = -1 + \log_b^{(2x+a)}$ است. این منحنی خط $y = 1$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۴۸



۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر $3^{x^2-2} = 81^x$ باشد، $\log_6^{(x-2)}$ کدام است؟

۴۹

 $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

۵۰

-۲ (۲)

-۳ (۱)

۳ (۴)

۱ (۳)

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

نمودارهای دو تابع $y = 3^x + \frac{1}{3}$ و $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ در نقطه A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطه A از نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟

۵۱

 $\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

 $\sqrt{5}$ (۴)

۲ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

از رابطه $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$ مقدار لگاریتم $(2x+5)$ در پایه ۴، کدام است؟

- (۱) ۰/۵
(۲) ۰/۷۵
(۳) ۱/۲۵
(۴) ۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می‌رسد؟
($\log 19 = 1/287$, $\log 2 = 0/301$)

- (۱) ۱۷
(۲) ۱۸/۵
(۳) ۲۱/۵
(۴) ۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

از رابطه $\log(2x-5) + \log(x+1) = \log(4x-1)$ مقدار لگاریتم $(2x+1)$ در پایه ۳، کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۱/۵
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

جمعیت شهری با نرخ زوال یک درصد در سال، کم می‌شود. با این روند با گذشت چند سال جمعیت این شهر، نصف جمعیت فعلی آن می‌شود؟ ($\log 99 = 1/995$, $\log 2 = 0/3$)

- (۱) ۵۰
(۲) ۶۰
(۳) ۶۴
(۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

اگر $\log 5 = 3k$ ، آنگاه $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

- (۱) $1 - 4k$
(۲) $2 - 5k$
(۳) $1 - 2k$
(۴) $1 - k$


کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $(1, 2]$
(۲) $[2, 10]$
(۳) $[1, 11)$
(۴) $(1, 11]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_p(x+b)^c$ ، از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، a کدام است؟ 

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶



گزینه ۲

۱

در هر روز غلظت محلول $\frac{۱۰۰ - ۴}{۱۰۰}$ یعنی $\frac{۹۶}{۱۰۰}$ غلظت روز قبل می‌شود، داریم:

$$a_n = a \left(\frac{۹۶}{۱۰۰} \right)^n$$

حال از معلومات سؤال نتیجه می‌گیریم که:

$$a \left(\frac{۹۶}{۱۰۰} \right)^n = \frac{۱}{۳} a \Rightarrow n \log \left(\frac{۹۶}{۱۰۰} \right) = -\log ۳ \Rightarrow n (\log ۲^۵ \times ۳ - \log ۱۰^۲) = -\log ۳$$

$$\Rightarrow n (۵ \log ۲ + \log ۳ - ۲) = -\log ۳ \Rightarrow n (۱/۵ + ۰/۴۸ - ۲) = -۰/۴۸ \Rightarrow n = \frac{-۰/۴۸}{-۰/۰۲} = ۲۴$$

بنابراین پس از گذشت ۲۴ روز، غلظت محلول $\frac{۱}{۳}$ غلظت اولیه می‌شود.

گزینه ۱

۲

باتوجه به شکل، دو نقطه $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و $(۰, -۶)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(۰, -۶) : f(۰) = -۶ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳} \right)^{۰+b} = -۶ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳} \right)^b = ۳$$

$$\Rightarrow ۳^{-b} = ۳ \Rightarrow -b = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$\left(\frac{۱}{۲}, ۰ \right) : f \left(\frac{۱}{۲} \right) = ۰ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳} \right)^{\frac{۱}{۲}a-1} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳} \right)^{\frac{۱}{۲}a-1} = ۹$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۳} \right)^{\frac{۱}{۲}a-1} = ۳^۲ \Rightarrow ۳^{-\frac{۱}{۲}a+1} = ۳^۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}a + ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳} \right)^{-۲x-1} \Rightarrow f(۲) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳} \right)^{-۴-1} = -۹ + ۳^۵$$

$$= -۹ + ۲۴۳ = ۲۳۴$$

$$f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \xrightarrow{f^{-1}(2)=?} \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 2 \xrightarrow{t=2^x} t - \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 1 = 2t$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 + 4 = 8 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2} \\ t = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$t = 2^x \Rightarrow x = \log_2 t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2(2 + \sqrt{2}) \\ x = \log_2(2 - \sqrt{2}) < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق } < 0$$

جواب $x = \log_2(2 - \sqrt{2})$ غیرقابل قبول است، زیرا $2 - \sqrt{2} < 0$ می‌باشد.

نکته:

$$1) \log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b} (x > 0, x \neq 1)$$

$$2) \log_a^{b^n} = n \log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\begin{aligned} \log_{18}^{\lambda} &= \frac{\log_{\lambda}^{\lambda}}{\log_{\lambda}^{18}} = \frac{\log_{\lambda}^{\lambda}}{\log_{\lambda}^2 + \log_{\lambda}^9} = \frac{3 \log_{\lambda}^{\lambda}}{\log_{\lambda}^2 + \log_{\lambda}^{3^2}} \\ &= \frac{3 \log_{\lambda}^{\lambda}}{\log_{\lambda}^2 + 2 \log_{\lambda}^3} = \frac{3 \left(\frac{5}{\lambda}\right)}{\frac{5}{\lambda} + 2} = \frac{15}{\frac{5}{\lambda} + 2} = \frac{15}{\frac{5 + 2\lambda}{\lambda}} = \frac{15}{\frac{5 + 2\lambda}{\lambda}} = \frac{15\lambda}{5 + 2\lambda} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

مقدار اولیه عنصر ۲۴ گرم است. همچنین پس از گذشت ۳۰ روز، $\frac{1}{10}$ باقی مانده را از دست می‌دهد، پس هر ماه مقدار عنصر $\frac{9}{10}$ برابر می‌شود. پس از گذشت n ماه داریم:

$$f(n) = 24 \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

طبق مفروضات مسئله داریم:

$$8 = 24 \left(\frac{9}{10}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین \log_{10} می‌گیریم:

$$\begin{aligned} n(\log(\frac{9}{10})) &= \log(\frac{1}{3}) \Rightarrow n(\log 9 - \log 10) = \log(\frac{1}{3}) \\ \Rightarrow n(2 \log 3 - \log 10) &= -\log 3 \Rightarrow n(2 \times 0.48 - 1) = -0.48 \\ \Rightarrow n(0.96 - 1) &= -0.48 \Rightarrow 0.04n = 0.48 \Rightarrow n = 12 \end{aligned}$$

پس ۱۲ ماه یعنی $12 \times 30 = 360$ روز زمان نیاز است. (یک ماه را برابر ۳۰ روز در نظر گرفتیم).

نکته:

$$1) \log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$2) \log_a^{b^n} = n \log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\begin{aligned} \log_6^3 &= 0.8 \Rightarrow \frac{\log 3}{\log 6} = 0.8 \Rightarrow \frac{\log 3}{\log 2 \cdot 3} = 0.8 \\ \Rightarrow \frac{1 \log 3}{2 \log 2} &= 0.8 \Rightarrow \frac{\log 3}{\log 2} = 1.6 \Rightarrow \log 3 = 1.6 \log 2 \quad (*) \end{aligned}$$

سپس باتوجه به (*) مقدار \log_{12}^6 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \log_{12}^6 &= \frac{\log 6}{\log 12} = \frac{\log 2 \times 3}{\log 2^2 \times 3} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2^2 + \log 3} = \frac{\log 2 + \log 3}{2 \log 2 + \log 3} \\ &= \frac{\log 2 + 1.6 \log 2}{2 \log 2 + 1.6 \log 2} = \frac{(1 + 1.6) \log 2}{(2 + 1.6) \log 2} = \frac{2.6}{3.6} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

توجه کنید که برای به دست آوردن رابطه (*)، می‌توانستیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\text{نکته: } \log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m} \log_a^b$$

$$\log_6^3 = \log_{2 \cdot 3}^3 = \frac{1}{2} \log_3^3 = 0.8 \Rightarrow \log 3 = 1.6 \log 2$$

باتوجه به شکل، دو نقطه $(-\frac{1}{3}, 0)$ و $(0, -2)$ در تابع f صدق می‌کنند. بنابراین:

$$(0, -2) : f(0) = -2 \Rightarrow -4 + 2^b = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$(-\frac{1}{3}, 0) : f(-\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow -4 + 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow a = -3$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -4 + 2^{-3x+1}$$

$$f(-\frac{5}{3}) = -4 + 2^{-3 \times (-\frac{5}{3})+1} = -4 + 2^{5+1} = -4 + 2^6 = 60$$

الف) می‌دانیم:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}, \log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a, \log_a a = 1$$

ب) در تابع لگاریتمی $y = \log_b^a$ ، همواره باید $a > 0$ و $b \neq 1$ باشد.

ابتدا با حل معادله لگاریتمی داده شده، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow \log(x - 3)(x + 2) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow \log \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)} = \log(2x - 5) \Rightarrow \log(x + 2) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

به ازای $x = 7$ تمام لگاریتم‌ها تعریف شده پس این مقدار قابل قبول است. حال مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴ را به ازای $x = 7$ حساب می‌کنیم:

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_4 \sqrt[3]{7+1} = \log_4 \sqrt[3]{8} = \log_4 \sqrt[3]{2^3} = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی باشند باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱) D_f = D_g$$

$$۲) \forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

حالا این دو شرط را برای هر زوج تابع $f(x)$ و $g(x)$ در گزینه های داده شده بررسی می کنیم.
بررسی گزینه اول:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt[2]{\log x} \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) = \log x^{\sqrt{2}} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه دوم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{x^{\sqrt{2}}}}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه سوم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{2}} \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) = x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه چهارم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

هر دو تابع به ازای مقادیر مثبت برابر ۱ و به ازای مقادیر منفی برابر -۱ می شوند، پس برابرند.

برای محاسبه A کافی است سمت چپ تساوی را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۲ بنویسیم. در این صورت در دو طرف تساوی پایه ها با هم مساوی بوده و در نتیجه توان ها نیز باید مساوی باشد.

$$\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{(2^2)^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}{2^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{2^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}{2^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{2}\sqrt{2}-2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{12\sqrt{2}} = 2^A \Rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)} = \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 2^x}$$

برای یافتن دامنه تعریف تابع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2^{\frac{1}{x}} - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \geq 2^x$$

اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{x} \geq x \Rightarrow x - \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0$$

X	-1	0	1
$\frac{x^2-1}{x}$	-	+	-
	o	o	o

پس دامنه تعریف تابع عبارت است از: $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

برای تعیین محدوده x ، از دو طرف نامعادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم. هم چنین در ساده کردن نامعادله داده شده از ویژگی $\log a^n = n \log a$ استفاده می‌کنیم.

$$2^{-x} < 0.000001 \Rightarrow 2^{-x} < 10^{-6} \xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم}} \log 2^{-x} < \log 10^{-6}$$

$$\xrightarrow{\log a^n = n \log a} -x \log 2 < -6 \log 10 \xrightarrow{\log 10=1} -x \log 2 < -6 \xrightarrow{\times(-1)} x \log 2 > 6$$

در صورت سؤال $\log 2 = 0.301$ فرض شده است. بنابراین داریم:

$$x(0.301) > 6 \Rightarrow x\left(\frac{301}{1000}\right) > 6 \Rightarrow x > \frac{6000}{301} \Rightarrow x > 19.933$$

پس کوچک ترین مقدار x با دو رقم اعشار برابر ۱۹/۹۴ است.

ابتدا نقاط مشترک دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x^y - x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0) \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(2, 2) \end{cases}$$

$$A \in f \Rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2 \Rightarrow A + B = -1 \quad (1)$$

$$B \in f \Rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 \Rightarrow 2A + B = -2 \quad (2)$$

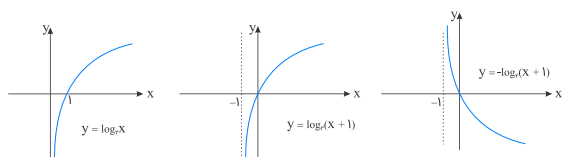
رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} A = -1, B = 0$$

تابع به فرم $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ خلاصه می‌شود.

$$f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 8 = 6$$

به کمک انتقال و قرینۀ نمودار تابع \log_p^x ، به راحتی به جواب می‌رسیم.



$$y = -\log_p^{(x+1)} = \log_p^{(x+1)^{-1}} \Rightarrow U(x) = (x+1)^{-1}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{x^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3x^2} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-3x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{2x-1} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-3x^2} \Rightarrow -3x^2 = 2x - 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{ق.ق} \\ x = \frac{1}{3} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

به ازای $x = -1$ عبارت $\log_{\lambda}^{(9x+1)}$ تعریف نشده است.
برای $x = \frac{1}{3}$ داریم:

$$\log_{\lambda}^{(9x+1)} = \log_{\lambda}^{(9 \times \frac{1}{3} + 1)} = \log_{\lambda}^4 = \log_{2^2}^4 = \frac{2}{3}$$

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقادیر a و b را محاسبه می کنیم.

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times b^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{32} \Rightarrow 2b^2 = 32 \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b>0} b = 4$$

بنابراین ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$ در می آید. مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ برابر است با:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 2^3 = \frac{3}{2} \times 8 = 3 \times 4 = 12$$

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس $ax + b > 0$ بوده و $x > -\frac{b}{a}$ می‌شود. از طریق مقایسه با مقادیر قابل قبول برای x ، رابطه بین a و b مشخص می‌شود.

ب) $f(4) = 2$ است. با حل دو معادله و دو مجهول داده شده مقادیر a و b مشخص شده و در نهایت $f(-\frac{4}{9})$ حساب می‌شود.

$$x > -\frac{b}{a}, x \in (-\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \quad (I)$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow \log_3^{(4a+b)} = 2 \Rightarrow 4a + b = 3^2 = 9 \Rightarrow 4a + b = 9$$

$$\xrightarrow{(I)} 4(2b) + b = 9 \Rightarrow 8b + b = 9 \Rightarrow 9b = 9 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{(I)} a = 2$$

پس ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \log_3^{(2x+1)}$ به دست آمد. حالا $f(-\frac{4}{9})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-\frac{4}{9}) = \log_3^{(-\frac{4}{9}+1)} = \log_3^{\frac{5}{9}} = \log_3^{3^{-2}} = -2 \log_3^3 = -2$$

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} \times 2^{\frac{x}{2}} + 4 \xrightarrow{2^{\frac{x}{2}}=t} t^2 = \sqrt{2}t + 4 \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \text{ غق} \end{cases}$$

$$2^{\frac{x}{2}} = t \xrightarrow{t=2\sqrt{2}} 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2^3 = 8$$

$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

برای حل تست گام های زیر را برمی داریم:
 الف) مختصات دو نقطه A و B را در ضابطه تابع $f(x)$ قرار داده و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.
 ب) با مشخص شدن ضابطه $f(x)$ ، حاصل $f(-1)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = a(b)^x - 1 \xrightarrow{A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \frac{1}{2} = a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{b} \quad (I)$$

$$f(x) = a(b)^x - 1 \xrightarrow{B(1, 11)} 11 = ab - 1 \Rightarrow ab = 12 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{3}{2}\sqrt{b} \times b = 12 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow \sqrt{b^3} = 8$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} b^3 = 64 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{(II)} 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

پس ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = 3(4)^x - 1$ در می آید. $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = 3(4)^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

نقاط برخورد در ضابطه توابع $f(x) = A(2)^{Bx}$ و $4y = 5x$ صدق می کند.

$$4y = 5x \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow (2, \frac{5}{2}) \\ x = 4 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow (4, \frac{5}{2}) \end{cases}$$

$$f(x) = A(2)^{Bx} \Rightarrow \begin{cases} (2, \frac{5}{2}) : \frac{5}{2} = A(2)^{B \times 2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2A(2)^{2B} \\ (4, \frac{5}{2}) : \frac{5}{2} = A(2)^{B \times 4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2A(2)^{2B} = A(2)^{4B} \Rightarrow 2^{2B+1} = 2^{4B} \Rightarrow 2B + 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} = A(2)^{2B} \xrightarrow{B=\frac{1}{2}} \frac{5}{2} = A(2)^1 \Rightarrow A = \frac{5}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{4}(2)^{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{5}{4}(2)^{\frac{x}{2}} = 10 \Rightarrow (2)^{\frac{x}{2}} = 8 = 2^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(10) = 6$$

مختصات دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند؛ بنابراین مختصات این دو نقطه را در ضابطه تابع جایگذاری کرده و مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

$$f(2) = 6 \Rightarrow a + \log_2^{(2b-4)} = 6 \Rightarrow \log_2^{(2b-4)} = 6 - a$$

$$\Rightarrow 2^{6-a} = 2b - 4 \quad (1)$$

$$f(12) = 10 \Rightarrow a + \log_2^{(12b-4)} = 10 \Rightarrow \log_2^{(12b-4)} = 10 - a$$

$$\Rightarrow 12b - 4 = 2^{10-a} \quad (2)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{2^{6-a}}{2^{10-a}} = \frac{2b-4}{12b-4} \Rightarrow 2^{-4} = \frac{2b-4}{12b-4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{2(b-2)}{4(3b-1)} \Rightarrow 3b-1 = 8(b-2) \Rightarrow 3b-1 = 8b-16$$

$$\Rightarrow 5b = 15 \Rightarrow b = 3 \xrightarrow{(2)} 2^{10-a} = 3 \cdot 2 = 2^5 \Rightarrow 10 - a = 5 \Rightarrow a = 5$$

با استفاده از دو ویژگی $\log ab = \log a + \log b$ و $\log_b^a = \frac{m}{n} \log_b^a$ ، عبارت لگاریتمی را ساده کرده و با توجه به فرض $\log_b^a = \frac{3}{2}$ مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2} = \log_{\sqrt{b}}^a + \log_{\sqrt{b}}^{b^2} = \log_{b^{\frac{1}{2}}}^a + \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{b^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_b^a + \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_b^b$$

$$= 2 \log_b^a + 4 \log_b^b = 2 \left(\frac{3}{2} \right) + 4(1) = 3 + 4 = 7$$

$$3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y} \Rightarrow 2x+y = 2+x-y \Rightarrow 2y = 2-x \quad (1)$$

$$\log(x+2y) = 1 + \log y \Rightarrow \log(x+2y) - \log y = \log 10$$

$$\log \frac{(x+2y)}{y} = \log 10 \Rightarrow \frac{x+2y}{y} = 10 \Rightarrow x+2y = 10y \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)} x+2y = 10 \times (2y) \xrightarrow{(1)} x+2-2x = 10(2-x) \Rightarrow x = \frac{8}{9} = 1/6$$

نقاط مشترک دو تابع $C(1, 1)$ و $D(3, 9)$ است.

$$C \in f \Rightarrow 3^{A+B} = 1 \Rightarrow A + B = 0$$

$$D \in f \Rightarrow 3^{3A+B} = 9 \Rightarrow 3A + B = 2$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2A = 2 \Rightarrow A = 1, B = -1$$

$$f(x) = 3^{x-1} \Rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

با استفاده از ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ ، معادله لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به دست می آوریم:

$$\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1 \Rightarrow \log \frac{2}{x}(x+1) = 1 \Rightarrow \frac{2(x+1)}{x} = 10$$

$$\Rightarrow 2(x+1) = 10x \Rightarrow 2x + 2 = 10x \Rightarrow 8x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

برای محاسبه \log_8^x از ویژگی $\log_b^a = \frac{m}{n} \log_b^a$ استفاده می کنیم.

$$\log_8^x = \log_8^{\frac{1}{4}} = \log_{2^3}^{\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3} \log_2^{\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}$$

با استفاده از فرضیات بیان شده در صورت سؤال، مقدار a^3 را به دست می آوریم.

$$\log_{\sqrt[3]{a}}^a = \frac{4}{3} \Rightarrow \log_{a^{\frac{1}{3}}}^a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} \log_{a^{\frac{1}{3}}}^a = \frac{4}{3} \Rightarrow 3 \log_{a^{\frac{1}{3}}}^a = \frac{4}{3} \Rightarrow \log_{a^{\frac{1}{3}}}^a = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^{\frac{c}{a}}} a = 3^{\frac{4}{9}} \Rightarrow a^3 = (3^{\frac{4}{9}})^3 = 3^4 = 81$$

با استفاده از ویژگی $\log_b^a = \frac{m}{n} \log_b^a$ حاصل لگاریتم $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n} \log_b^a$ را در مبنای ۸ حساب می کنیم:

$$\log_8^{(a^3+7)} = \log_8^{(81+7)} = \log_8^{88} = \log_{2^3}^{88} = \frac{4}{3} \log_2^8 = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \log_x^{(x^2+4)} &= 1 + \log_x^{\omega} \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^x + \log_x^{\omega} \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^{\omega x} \\ \Rightarrow x^2 + 4 &= \omega x \Rightarrow x^2 - \omega x + 4 = 0 \\ \Rightarrow (x - 4)(x - 1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

حال مقدار لگاریتم ۴ در پایه ۲ را حساب می‌کنیم:

$$\log_2^4 = \log_2^{2^2} = 2 \log_2^2 = 2$$

با استفاده از معادله $\log(y + 2) = 1$ به آسانی مقدار y را حساب می‌کنیم.

$$\log(y + 2) = 1 \Rightarrow \log_{10}^{(y+2)} = 1 \Rightarrow y + 2 = 10 \Rightarrow y = 8$$

y را در معادله دوم قرار داده و مقدار x را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \log(y - x) + \log(4x + y) &= 2 \Rightarrow \log(8 - x) + \log(4x + 8) = 2 \\ \xrightarrow{\log a + \log b = \log ab} \log_{10}^{(8-x)(4x+8)} &= 2 \Rightarrow (8 - x)(4x + 8) = 10^2 = 100 \\ \Rightarrow -4x^2 + 24x + 64 &= 100 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 &= 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

معادله توانی را با استفاده از تغییر متغیر $2^x = t$ حل می‌کنیم. توجه داشته باشید که مقدار 2^x همیشه مثبت است.

$$\begin{aligned} 4^x + 2^x &= 72 \Rightarrow (2^2)^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x = 72 \xrightarrow{2^x=t} t^2 + t = 72 \\ \Rightarrow t^2 + t - 72 &= 0 \Rightarrow (t + 9)(t - 8) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t = -9 & \text{غ.ق.ق} \\ t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

حال که مقدار x را به دست آوردیم آن را در معادله لگاریتمی قرار داده و با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، مقدار y را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \log(x + 1) + \log(2y + x^2) &= 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y + 9) = 2 \\ \xrightarrow{\log a + \log b = \log ab} \log_{10}^{4(2y+9)} &= 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} 4(2y + 9) = 10^2 = 100 \\ \Rightarrow 2y + 9 &= 25 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8 \end{aligned}$$

با استفاده از ویژگی $\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$ ، معادله لگاریتمی را ساده کرده و مقدار xy را حساب می‌کنیم.

$$\log_3^x + \log_3^y = 2 \Rightarrow \log_3^{xy} = 2 \xrightarrow{\log_b^a=c \Rightarrow a=b^c} xy = 3^2 = 9$$

مقادیر $x^2 + y^2$ و xy را داریم. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و با توجه به این که x و y هر دو مثبت هستند، حاصل $x + y$ را محاسبه می‌کنیم.

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \xrightarrow{\frac{xy=9}{x^2+y^2=46}} (x + y)^2 = 46 + 18 = 64$$

$$\xrightarrow[\text{عدد جلوی لگاریتم}]{x, y > 0} x + y = \sqrt{64} \log_6^{(x+y)} = \log_6^8 = \log_6^{2^3} = \frac{3}{2} \log_6^2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

گام اول

(الف) در صورت سؤال دو معادله یکی به صورت نمایی و دیگری لگاریتمی داده شده است. در معادله نمایی تنها مجهول x و در معادله لگاریتمی x و y مجهول است. پس ابتدا معادله نمایی را حل کرده و x را محاسبه می‌کنیم. سپس با جایگذاری x در معادله لگاریتمی مقدار y را هم به دست می‌آوریم.

(ب) برای حل معادله نمایی دو طرف را به دو عدد توان دار با پایه ۲ تبدیل کرده و با مساوی قرار دادن توان‌ها مقدار x را حساب می‌کنیم.

گام دوم

$$4\sqrt{2} = 4^x \Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = (2^2)^x \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

حال با داشتن مقدار x و حل معادله لگاریتمی مقدار y را محاسبه می‌کنیم:

$$1 + \log \sqrt{x+1} = \log y \xrightarrow{x=\frac{5}{4}} 1 + \log \sqrt{\frac{5}{4}+1} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log \sqrt{\frac{9}{4}} = \log y$$

$$\Rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 \left(\frac{3}{2}\right) = \log 15 = \log y \Rightarrow y = 15$$

دو معادله نمایی و لگاریتمی داده شده را ساده می‌کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم. برای حل از دو ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ و $a^n \times a^m = a^{m+n}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2^x \times 8^y = 4 \Rightarrow 2^x \times (2^3)^y = 2^2 \Rightarrow 2^x \times 2^{3y} = 2^2 \Rightarrow x + 3y = 2 \\ \log x = \log 2 + \log y \Rightarrow \log x = \log 2y \Rightarrow x = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y + 3y = 2 \Rightarrow 5y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{5} \xrightarrow{x=2y} x = \frac{4}{5}$$

با استفاده از ویژگی‌های $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$ و $\log_b^a + \log_b^c = \log_b^{ac}$ می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{5}}^{(\Delta x + 1)} + \log_{\sqrt{5}}^x = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^{(\Delta x + 1)x} = 2 \Rightarrow (\Delta x + 1)x = 2^2 = 4 \Rightarrow \Delta x^2 + x = 4$$

$$\Rightarrow \Delta x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow (\Delta x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$x = -1$ به این دلیل قابل قبول نیست که عدد جلوی لگاریتم نباید منفی شود. اگر $x = \frac{4}{5}$ باشد، مقدار $\frac{4}{x}$ برابر ۵ به دست می‌آید.

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را ساده می‌کنیم تا بتوانیم به آسانی با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$f(x) = \log_{\sqrt{5}}^{\frac{1}{x}} = \log_{\sqrt{5}}^{x^{-1}} = -\log_{\sqrt{5}}^x, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \log_{\sqrt{5}}^{\frac{x}{4}} = \log_{\sqrt{5}}^{x \cdot \frac{1}{4}} = -\log_{\sqrt{5}}^{\frac{x}{4}}, \quad D_g = (0, +\infty)$$

مشاهده می‌کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ضابطه‌های برابر و دامنه تعریف یکسان دارند. پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی هستند و نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق اند.

با استفاده از ویژگی $\log A^n = n \log A$ ، ابتدا مقدار K را محاسبه می‌کنیم.

$$\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log (\lambda 1)^K \Rightarrow \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log (3^4)^K = \log 3^{4K}$$

$$\xrightarrow{\log A^n = n \log A} \log 3 + \frac{1}{4} \log 3 = 4K \log 3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right) \log 3 = 4K \log 3$$

$$\Rightarrow 4K = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow K = \frac{5}{16} \text{ یا } \frac{5}{K} = 16$$

اکنون حاصل لگاریتم $\frac{5}{K}$ در پایه ۲ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{2}}^{\frac{5}{K}} = \log_{\sqrt{2}}^{\frac{5}{16}} = \log_{\sqrt{2}}^{2^4} = 4 \log_{\sqrt{2}}^2 = 4 \times 1 = 4$$

با استفاده از ویژگی $\log_b^{a^n} = n \log_b^a$ تغییراتی در عبارت $2 \log(1 + \sqrt{5})$ ایجاد می‌کنیم.

$$2 \log(1 + \sqrt{5}) = \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \log(6 + 2\sqrt{5})$$

برای محاسبه حاصل عبارت داده شده از ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ استفاده می‌کنیم.

$$A = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 \xrightarrow{\log 2 = k} A = 4k$$

در معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر α و β ریشه های معادله باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

هم چنین از ویژگی های لگاریتم داریم:

$$\log a + \log b = \log ab$$

پس حاصل $a + b$ و $a \times b$ را به دست می آوریم:

$$x^2 - 10x + 0/1 = 0 \xrightarrow{\text{a و b ریشه های معادله}} \begin{cases} S = a + b = -\left(\frac{-10}{1}\right) = 10 \\ P = a \times b = \frac{0/1}{1} = 0/1 \end{cases}$$

حاصل عبارت لگاریتمی را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \log a + \log b - \log(a + b) &= \log ab - \log(a + b) \\ &= \log 0/1 - \log 10 = \log 10^{-1} - \log 10 = -\log 10 - \log 10 = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

ابتدا از معادله نمایی داده شده مقدار a را حساب می کنیم.

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^a = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

با دانستن مقدار a محاسبه لگاریتم داده شده کار چندان سختی نیست.

$$\log_f^{(fa+1)} = \log_f^{f\left(\frac{3}{4}\right)+1} = \log_f^{3+1} = \log_f^4 = 1$$

$$\begin{aligned} A &= \log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{\frac{0/25}{25}} \xrightarrow{\sqrt[3]{\frac{0/25}{25}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}} \log_{\frac{1}{2^3}}^{2 \times 2^{-\frac{1}{3}}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2^3}}^{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\frac{3}{3}} = \frac{1}{9} \\ \log_{\frac{1}{8}}^{A-1} &\xrightarrow{A=\frac{1}{9}} \log_{\frac{1}{8}}^{9-1} = \log_{\frac{1}{8}}^8 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$k = \log_{\sqrt{3}}^9 A^{\sqrt{3}} = \log_{\sqrt{3}}^9 + \log_{\sqrt{3}}^A^{\sqrt{3}} = \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}^9} + \log_{\sqrt{3}}^A^{\sqrt{3}} \Rightarrow k = 9 \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + 9 \log_{\sqrt{3}}^A$$

$$\xrightarrow{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=1} k = 9 + 9 \log_{\sqrt{3}}^A$$

از آنجا که $A = 3^a$ ، مقدار k برابر است با:

$$\Rightarrow k = 9 + 9 \log_{\sqrt{3}}^{3^a} = 9 + 9a \log_{\sqrt{3}}^3 = 9 + 9a$$

$$\log_{\sqrt{3}}^{(\sqrt{3}^x + 1)} - \log_{\sqrt{3}}^{(x+2)} = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}^x + 1}{x+2}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}^x + 1}{x+2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}^x - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow x = -1, \frac{10}{4}$$

چون باید $0 < \sqrt{3}^x - 1$ باشد، بنابراین جواب $x = \frac{10}{4}$ قابل قبول است.

$$\log_{\lambda}^{(\sqrt{3}^x - 1)} = \log_{\lambda}^{(\frac{10}{4} - 1)} = \log_{\lambda}^{\frac{1}{2}} = b \Rightarrow \lambda = \lambda^b \Rightarrow \sqrt{3}^2 = \sqrt{3}^b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

نکته: هر نقطه روی نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $(\alpha, -\alpha)$ است.

$$\begin{cases} y(-1) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{(-a+b)} = 0 \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{(a+b)} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\log_x^{(\sqrt{3}x+\lambda)} + \log_x^{(x-6)} = 2 \Rightarrow \log_x^{(\sqrt{3}x+\lambda)(x-6)} = 2 \Rightarrow x^2 = \sqrt{3}x^2 - 10x - 4\lambda \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \lambda)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{\lambda} = \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ x = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد.
ب) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید نامنفی باشد.

گام دوم

باتوجه به دو قسمت گام اول، مجموعه جواب را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$I) x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ یا } x < 0$$

$$II) 1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \log(x^2 - 3x) \Rightarrow \log 10 \geq \log(x^2 - 3x)$$

$$\Rightarrow 10 \geq x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده برابر $[-2, 0) \cup (3, 5]$ است.

گزینه ۲

با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع مختصات نقطه تقاطع یعنی نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = 4^x \\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{4} \Rightarrow 4^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \xrightarrow{(*)} x = \frac{1}{2}$$

جایگذاری در یکی از توابع $y = 2 \Rightarrow A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$

$$\Rightarrow \text{فاصله} = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

حل معادله (*):

$$4^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{3}{4}, \quad a = 4^x$$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow a^2 - \frac{3}{4}a - 1 = 0 \Rightarrow (a - 2)\left(a + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{4} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

برای آنکه دو تابع برابر باشند، باید دامنه‌های یکسانی داشته باشند. در این تست کافی است دامنه تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ را پیدا کنیم و با دامنه تک‌تک گزینه‌ها مقایسه کنیم.

$$y = \log \frac{x-2}{x} \Rightarrow \text{دامنه: } \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{یا} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۱: } y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \text{دامنه: } \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 2$$

$$\text{گزینه ۲: } y = \log \frac{x^2-4}{x(x+2)} = \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} > 0$$

در گزینه ۲ باید $x \neq -2$ باشد، پس دامنه آن با دامنه تابع اولیه مغایرت دارد.

$$\text{گزینه ۳: } y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 2, 0$$

$$\text{گزینه ۴: } y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \sqrt{\frac{x-2}{x}} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{یا} \\ x < 0 \end{cases}$$

بنابراین فقط دامنه گزینه ۴ با دامنه تابع اولیه برابر است.

معادلات نمایی و لگاریتمی را به صورت ساده شده می‌نویسیم (از معادله لگاریتمی y را بر حسب x به دست می‌آوریم) با حل دستگاه دو معادله و دومی مجهول حاصل x و y را تعیین می‌کنیم.

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 + \log x$$

$$\Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y = 9x \quad (1)$$

$$2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1 = 2^0 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \xrightarrow{(1)} 3x + 18x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$y = 9x \Rightarrow y = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

راه حل اول:

$$y = -1 + \log_b^{(2(x+\frac{a}{2}))}$$

تابع به اندازه $\frac{1}{2}$ نسبت به نمودار $y = \log x$ انتقال افقی به سمت راست داشته است. پس:

$$\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$y = -1 + \log_b^{(2x-1)}$$

به علاوه مقدار تابع در $x = 2$ صفر است:

$$y(2) = -1 + \log_b^2 = 0 \Rightarrow \log_b^2 = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$y = -1 + \log_3^{(2x-1)} \xrightarrow{y=1 \text{ برخورد با } y=1} -1 + \log_3^{(2x-1)} = 1$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2x-1)} = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5$$

راه حل دوم: (برای به دست آوردن a و b)

$$y = -1 + \log_b^{(2x+a)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + a > 0 \Rightarrow x > -\frac{a}{2} \\ \text{طبق نمودار: } x > \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1$$

$$(2, 0) \Rightarrow -1 + \log_b^2 = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$3^{x^2-2} = 81^x \Rightarrow 3^{x^2-2} = 3^{4x} \Rightarrow x^2 - 2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 6 \Rightarrow (x-2)^2 = 6 \Rightarrow x-2 = \sqrt{6}$$

حاصل $\log_6^{(x-2)}$ را می‌خواهیم:

$$\log_6^{(x-2)} = \log_6^{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

نمودارهای دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس:

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{-a+b} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow 3^{-a+b} = 9 = 3^2 \Rightarrow -a + b = 2 \quad (*)$$

از طرفی $f(2) = \frac{1}{3}$ ، بنابراین:

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a + b = -1 \quad (**)$$

از حل دستگاه معادلات $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 1 \Rightarrow f(x) = 3^{-x+1}$$

حال برای محاسبه $f^{-1}(27)$ ، کافی است معادله $f(x) = 27$ را حل کنیم:

$$3^{-x+1} = 27 = 3^3 \Rightarrow -x + 1 = 3 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f^{-1}(27) = -2$$

دو تابع در نقطه A متقاطع هستند؛ بنابراین در این نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. با مساوی قرار دادن ضابطه دو تابع نقطه برخورد را تعیین می‌کنیم.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} = 3^x + \frac{1}{3} \Rightarrow (3^{-\frac{1}{2}})^{2x} = 3^x + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3^{-x} = 3^x + \frac{1}{3} \xrightarrow{3^{-x}=t} t = \frac{1}{t} + \frac{1}{3} \xrightarrow{\times t} t^2 = 1 + \frac{1}{3}t$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3t^2 = 3 + \lambda t \Rightarrow 3t^2 - \lambda t - 3 = 0$$

$$\Delta = (-\lambda)^2 - 4(3)(-3) = 64 + 36 = 100$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\lambda + 10}{6} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow 3^{-x} = 3 \Rightarrow x = -1 \\ t_2 = \frac{\lambda - 10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 3$$

بنابراین نقطه برخورد دو تابع نقطه A(-1, 3) است.
فاصله نقطه (-1, 3) از نقطه (-1, 1) برابر با 2 = 3 - 1 است.

$$\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1) \Rightarrow \log(x+2)(2x-1) = \log(4x+1)$$

$$\Rightarrow (x+2)(2x-1) = (4x+1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 4x - 2 = 4x + 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +\frac{3}{2} \end{cases}$$

x = 3/2 قابل قبول است.

$$\log_f^{(2x+5)} = \log_f^{(3+5)} = \log_{f^2}^{2^3} = \frac{3}{2} = 1/5$$

اگر باد اولیه قایق را x در نظر بگیریم آنگاه در روز n ام باد قایق (0/95)^n خواهد بود.

$$x(0/95)^n = \frac{x}{2} \Rightarrow \left(\frac{95}{100}\right)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{19}{20}\right)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow n(\log 19 - \log 20) = \log 2 \Rightarrow n = \frac{0/301}{1/301 - 1/287} = 21/5$$

$$\log(2x - 5) + \log(x + 1) = \log(4x - 1) \Rightarrow \log(2x - 5)(x + 1) = \log(4x - 1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 5x - 5 = 4x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & (\text{ق.ق}) \\ x = -\frac{1}{2} & (\text{ق.ق.غ}) \end{cases}$$

$$\log_3^{(2x+1)} = \log_3^{(2 \times 4 + 1)} = \log_3^9 = 2$$

اگر جمعیت اولیه x نفر باشد، سال اول $\frac{99}{100}x$ و سال دوم $\left(\frac{99}{100}\right)^2 x$ و سال n ام $\left(\frac{99}{100}\right)^n x$ نفر خواهد بود.

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n x = \frac{1}{2}x \Rightarrow \left(\frac{100}{99}\right)^n = 2$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{100}{99}\right)^n = \log 2 \Rightarrow n(\log 100 - \log 99) = \log 2$$

$$\Rightarrow n = \frac{0.3}{2 - 1.995} = 60$$

یک رابطه فوق العاده مهم در مبحث لگاریتم وجود دارد که قبل از حل سؤال، ابتدا آن را بیان می کنیم:

$$\log 10 = 1 \Rightarrow \log 2 \times 5 = 1 \Rightarrow \log 2 + \log 5 = 1$$

پس همواره به خاطر داشته باشید که مجموع $\log 2$ و $\log 5$ برابر یک است. یعنی اگر در سؤالی یکی از این دو مورد داده شد، دیگری را هم به صورت غیر مستقیم به ما داده اند.

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{1/6} &= \log \sqrt[3]{\frac{16}{10}} = \log \sqrt[3]{\frac{8}{5}} = \log \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \log 2 - \log \sqrt[3]{5} = \log 2 - \log 5^{\frac{1}{3}} \\ &= \log 2 - \frac{1}{3} \log 5 \xrightarrow{\frac{\log 5 = 3k}{\log 2 = 1 - 3k}} \log \sqrt[3]{1/6} = 1 - 3k - \frac{1}{3}(3k) = 1 - 3k - k = 1 - 4k \end{aligned}$$

در حل تست به دو نکته زیر توجه داشته باشید:
الف) دامنه تعریف تابع $y = \log g(x)$ به صورت $g(x) > 0$ است.
ب) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است.

$$y = \log(x-1) \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (I)$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)} \Rightarrow 1 - \log(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log(x-1) \leq 1 \\ \Rightarrow \log(x-1) \leq \log 10 \Rightarrow 0 < x-1 \leq 10 \Rightarrow 1 < x \leq 11 \quad (II)$$

دامنه تعریف تابع اصلی اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است:

$$(I) \cap (II) : D_f = (1, 11]$$

چون تابع از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقاط در تابع صدق می‌کند، داریم:

$$(5, 11) \in f \Rightarrow 11 = a + \log_r^{(15+b)^r}$$

$$(21, 15) \in f \Rightarrow 15 = a + \log_r^{(63+b)^r}$$

$$\begin{cases} 11 = a + \log_r^{(15+b)^r} \\ 15 = a + \log_r^{(63+b)^r} \end{cases} \Rightarrow \times(-1) \begin{cases} -11 + a = -\log_r^{(15+b)^r} \\ 15 - a = \log_r^{(63+b)^r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = \log_r^{(63+b)^r} - \log_r^{(15+b)^r} \Rightarrow r = r \log_r^{(63+b)} - r \log_r^{(15+b)}$$

$$\Rightarrow r = r(\log_r^{(63+b)} - \log_r^{(15+b)}) \Rightarrow r = \log_r^{\frac{63+b}{15+b}} \Rightarrow \frac{63+b}{15+b} = r$$

$$\Rightarrow 63 + b = r \cdot 15 + rb \Rightarrow rb = 3b \Rightarrow b = 1$$

$$11 = a + \log_r^{(15+b)^r} \xrightarrow{b=1} 11 = a + \log_r^{(16)^r}$$

$$\Rightarrow 11 - a = \lambda \Rightarrow a = 3$$



۱ فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدامیک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$
 (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲ اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3} - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (\sqrt{3} + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، A کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $\sqrt{3}$
 (۳) 2 (۴) $\sqrt{3} + 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۳ طول یک مستطیل ۲ واحد کمتر از $1/5$ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

- (۱) ۵۲ (۲) ۵۶
 (۳) ۶۰ (۴) ۶۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{2x-1}{x+1} < -1$ ، کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(4, +\infty)$
 (۳) $\mathbb{R} - [-4, 0]$ (۴) $\mathbb{R} - [-4, -1]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ حاصل عبارت $(2 - \sqrt{3})^{-1} + \frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}}$ ، کدام است؟

- (۱) $1 + 2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$
 (۳) $1 + \sqrt{3}$ (۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = (x - 1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

- (۱) $(5, -7)$
(۲) $(5, -9)$
(۳) $(2, 5)$
(۴) $(1, 5)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{x+1}{2x-1} < 1$ ، کدام است؟

- (۱) $(0/6, 1/5)$
(۲) $(0/8, 1/2)$
(۳) $(1, 2)$
(۴) $(0/8, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{3}$
(۲) $-1 + \sqrt{2}$
(۳) $1 - \sqrt{2}$
(۴) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ حاصل عبارت $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) ۲
(۳) $1 + \sqrt{3}$
(۴) $2\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۲ جواب نامعادله $1 \leq 3x - 2 \leq -1$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$
 (۲) $-1 \leq x \leq 1$
 (۳) $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$
 (۴) $-2 \leq x \leq 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۳ نمودار تابع $y = 4 - |x|$ در بازه (a, b) بالاتر از خط به معادله $2y + x = 5$ قرار دارد. بزرگ ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۵
 (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۴ نمودار تابع $y = 4 - |x|$ در بازه (a, b) بالاتر از خط به معادله $2y + x = 5$ قرار دارد، بزرگ ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۵
 (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۵ مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$
 (۲) $(0, 3)$
 (۳) $(1, 2)$
 (۴) $(1, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۶ اگر $4 = \left(\frac{3}{2x} - 5x\right)$ باشد، حاصل $\left(\frac{9}{4x^2} + 25x^2\right)$ ، کدام است؟

- (۱) ۲۴
 (۲) ۲۹
 (۳) ۳۱
 (۴) ۳۲

قلمچی علوم انسانی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۵

۱۷ حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt{12}$ ، کدام است؟

- (۱) $6\sqrt[6]{2}$
 (۲) $3\sqrt[6]{32}$
 (۳) $2\sqrt[3]{9}$
 (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ ، در بازه (a, b) پایین تر از خط به معادله $y = 2$ است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟

- (۱) $a < -1$
(۲) $a > 1$
(۳) $a > 2$
(۴) $1 < a < 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

اگر عبارت $(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $\{a : 1 < a < 5\}$
(۲) $\{a : a < 1\}$
(۳) \emptyset
(۴) \mathbb{R}

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل کشور ۱۳۹۱

در کدام بازه از مقادیر x ، نمودار تابع $f(x) = 5 - |x - 1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد؟

- (۱) $(-\frac{4}{3}, 1)$
(۲) $(-\frac{2}{3}, 1)$
(۳) $(-\frac{4}{3}, 2)$
(۴) $(-\frac{2}{3}, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

مجموعه جواب نامعادلات $x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3$ به کدام صورت است؟

- (۱) $[-4, 2]$
(۲) $[-6, 8]$
(۳) $[-6, 2]$
(۴) $[-2, 6]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x - 1}{x + 1} > 2x$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x : x < -1\}$
(۲) $\{x : x > -1\}$
(۳) $\{x : -1 < x < 1\}$
(۴) $\{x : -2 < x < -1\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل کشور ۱۳۸۴

۲۴ تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x - 1| < 2\}$ ، همواره چگونه است؟

- (۱) منفی
(۲) مثبت
(۳) صعودی
(۴) نزولی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۵ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{2x - 3}{x + 1} < 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-6, 4]$
(۲) $\mathbb{R} - [-4, 6]$
(۳) $x > 4$
(۴) $x < -6$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $(2m - 1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟

- (۱) $-2 < m < 2/5$
(۲) $-2 < m < 3/5$
(۳) $-1 < m < 3/5$
(۴) $-1 < m < 2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۷ مجموعه جواب نامعادله $2x - 5 < |x - 4|$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $(1, 5)$
(۲) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$
(۳) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$
(۴) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۸ اگر $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2} - 4}$ و $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2} + 4}$ باشند حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ ، کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) $6\sqrt{2}$
(۴) $7\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۹ مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| - 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-2, 1)$
(۲) $(-1, 1)$
(۳) $(-1, 2)$
(۴) $(1, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۰ به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m - 1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

- (۱) $m < -2$
(۲) $m > 2/5$
(۳) $1 < m < 2$
(۴) $1 < m < 2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x+1}{x-3} < 3$ به کدام صورت است؟ ۳۱

- (۱) $x < \frac{1}{2}$
 (۲) $x < 3$
 (۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$
 (۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x ها است؟ ۳۲

- (۱) $1 < m < 5$
 (۲) $2 < m < 5$
 (۳) $2 < m < 7$
 (۴) $2 < m < 6$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $\frac{\sqrt{x-8}}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت بازه، کدام است؟ ۳۳

- (۱) $(-4, 2) \cup (2, 3)$
 (۲) $(2, 4)$
 (۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$
 (۴) $(-1, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}$ باشد، حاصل $(1+A^{-1})^{1/3}$ کدام است؟ ۳۴

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۵
 (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4/5}$ باشد، حاصل $(2A)^{-1/3}$ کدام است؟ ۳۵

- (۱) ۰/۲۵
 (۲) ۰/۵
 (۳) ۰/۷۵
 (۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ به صورت کدام بازه است؟ ۳۶

- (۱) $(1, \frac{3}{2})$
 (۲) $(1, \frac{5}{3})$
 (۳) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$
 (۴) $(\frac{5}{3}, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵



گزینه ۱

۱

سه نقطه داده شده را در معادله سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (0, 5) : c = 5 \\ (-2, 5) : 4a - 2b + 5 = 5 \Rightarrow 4a - 2b = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \\ (1, 11) : a + b + 5 = 11 \Rightarrow a + b = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = 2x^2 + 4x + 5$ است. هرکدام از گزینه‌ها که در معادله سهمی صدق کند جواب مسئله است:

$$\text{گزینه ۱} : (-1, 3) \Rightarrow 2(-1)^2 + 4(-1) + 5 = 3 \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه ۲} : (-1, 4) \Rightarrow 2(-1)^2 + 4(-1) + 5 \neq 4 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۳} : (2, 9) \Rightarrow 2(2)^2 + 4(2) + 5 \neq 9 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۴} : (2, 15) \Rightarrow 2(2)^2 + 4(2) + 5 \neq 15 \quad \times$$

گزینه ۱

۲

باتوجه به اینکه حاصل عبارت داده شده برابر $\sqrt[3]{A}$ است، ابتدا طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم. دو عبارت $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ مزدوج یکدیگر هستند. دو عبارت هم‌توان از آن‌ها جدا کرده و با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم و در نهایت مقدار A را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{A} &= (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} A = (2 - \sqrt{3})^2 \times (2 + \sqrt{3})^2 \times \sqrt{2} \\ &= (2 - \sqrt{3})^2 (2 + \sqrt{3})^2 (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = [(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})]^2 \sqrt{2 - \sqrt{3}} \sqrt{2} \\ &= (4 - 3)^2 \sqrt{2(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow A = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

عرض مستطیل را x فرض می‌کنیم؛ پس طول آن برابر $۲ - \frac{۳}{۲}x$ است. داریم:

$$\text{مساحت مستطیل} = ۱۹۲ \Rightarrow x\left(\frac{۳}{۲}x - ۲\right) = ۱۹۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x^2 - ۲x = ۱۹۲$$

$$\xrightarrow{\times 2} ۳x^2 - ۴x - ۳۸۴ = ۰ \xrightarrow{x > 0} x = \frac{۲ + \sqrt{۱۱۵۶}}{۳} = \frac{۲ + ۳۴}{۳} = ۱۲ \quad (*)$$

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل} = ۲\left(\frac{۳}{۲}x - ۲\right) + x = ۲\left(\frac{۳}{۲}(۱۲) - ۲\right) + ۱۲ = ۵۶$$

(*)

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \begin{cases} 1) -1 < \frac{2x-1}{x+1} \\ 2) \frac{2x-1}{x+1} < 3 \end{cases}$$

هر دو معادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$1) \frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{3x}{x+1}}_{p(x)} > 0$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
p(x)	$\frac{+}{\infty}$	ن	-	$\frac{+}{\infty}$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \text{ (I)}$$

$$2) \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-4}{x+1}}_{q(x)} < 0$$

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
q(x)	$\frac{-}{\infty}$	+	ن	$\frac{-}{\infty}$

$$\Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \text{ (II)}$$

حال اشتراک دو جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} x < -4 \text{ یا } x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$$

راه حل تستی: (عددگذاری)

حذف گزینه "۴":

$$x = 0 \Rightarrow -1 < \frac{-1}{1} < 3 \quad \times$$

حذف گزینه‌های "۱" و "۲":

$$x = -5 \Rightarrow -1 < \frac{-11}{-4} < 3 \Rightarrow -1 < \frac{11}{4} < 3 \quad \checkmark$$

ابتدا هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3}$$

$$= \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \sqrt{3}-1 \quad (1)$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{2}+\sqrt{3} \quad (2)$$

باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1 + \sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{2}+2\sqrt{3}+1$$

نمودار $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار $y = 4x^2$ قرار دارد، پس:

$$(x-1)^2 > 4x^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |x-1| > 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) x-1 > 2x^2 \\ \text{یا} \\ 2) x-1 < -2x^2 \end{cases}$$

دو نامعادله فوق را حل می‌کنیم:

$$1) x-1 > 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \xrightarrow{a>0, \Delta < 0} \text{غ ق ق}$$

$$2) x-1 < -2x^2 \Rightarrow \underbrace{2x^2 + x - 1}_{p(x)} < 0 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow x = -1, \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
p(x)	+	0	0	+

$$\Rightarrow x \in (-1, \frac{1}{2})$$

برای اینکه $b - a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a, b) = (-1, \frac{1}{2})$ ، در نتیجه:

$$b - a = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

راه حل اول:

$$\text{رأس سهمی : } A(-1, 9) \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \quad (*)$$

حال نقاط $A(-1, 9)$ و $(3, 1)$ را در معادله سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(-1, 9) : a - b + c = 9 \xrightarrow{(*)} a - 2a + c = 9 \Rightarrow -a + c = 9 \\ (3, 1) : 9a + 3b + c = 1 \xrightarrow{(*)} 9a + 6a + c = 1 \Rightarrow 15a + c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow 16a = -8 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \xrightarrow{(*)} b = -1$$

$$a - b + c = 9 \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 + c = 9 \Rightarrow c = \frac{17}{2}$$

بنابراین معادله سهمی به صورت زیر است:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$$

هرکدام از گزینه‌ها که در معادله سهمی صدق کند، جواب مسئله است:

گزینه ۱:

$$(5, -7) \Rightarrow -\frac{1}{2}(25) - 5 + \frac{17}{2} \neq -7 \quad \times$$

گزینه ۲:

$$(5, -9) \Rightarrow -\frac{1}{2}(25) - 5 + \frac{17}{2} = -9 \quad \checkmark$$

گزینه ۳:

$$(2, 5) \Rightarrow -\frac{1}{2}(4) - 2 + \frac{17}{2} \neq 5 \quad \times$$

گزینه ۴:

$$(1, 5) \Rightarrow -\frac{1}{2} - 1 + \frac{17}{2} \neq 5 \quad \times$$

راه حل دوم: حالت کلی معادله سهمی به رأس (α, β) به صورت زیر است:

$$y = k(x - \alpha)^2 + \beta$$

بنابراین داریم:

$$\text{رأس سهمی : } A(-1, 9) \Rightarrow y = k(x + 1)^2 + 9$$

اکنون نقطه $(3, 1)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$k(3 + 1)^2 + 9 = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 9$$

$$y(\omega) = -9$$

گزینه ۱

نمودار $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ قرار دارد، بنابراین:

$$|2x^2 - 4| < 2x$$

$$\Rightarrow -2x < 2x^2 - 4 < 2x \xrightarrow{\div 2} -x < x^2 - 2 < x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $x^2 - 2 < x$ و $-x < x^2 - 2$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^2 - 2 > -x \Rightarrow \underbrace{x^2 + x - 2}_{p(x)} > 0$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
p(x)	+	0	-	0
		$\frac{+}{\infty}$		$\frac{+}{\infty}$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1 \quad (1)$$

$$x^2 - 2 < x \Rightarrow \underbrace{x^2 - x - 2}_{q(x)} < 0$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
q(x)	+	0	-	0
		$\frac{+}{\infty}$		$\frac{+}{\infty}$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow (a, b) = (1, 2)$$

بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$2 - 1 = 1$$

$$1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \begin{cases} 1) \frac{x+1}{2x-1} > 1 \\ 2) \frac{x+1}{2x-1} < 3 \end{cases}$$

ابتدا هردو نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$1) \frac{x+1}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} = \underbrace{\frac{-x+2}{2x-1}}_{p(x)} > 0$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
p(x)	-	+	-	-

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \quad (\text{I})$$

$$2) \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} = \underbrace{\frac{-5x+4}{2x-1}}_{q(x)} < 0$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
q(x)	-	+	-	-

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > \frac{4}{5} \quad (\text{II})$$

حال اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} \frac{4}{5} < x < 2 \Rightarrow x \in (0.8, 2)$$

راه تستی (عددگذاری):

حذف گزینه "۳":

$$x = 1 \Rightarrow 1 < \frac{2}{1} < 3$$

حذف گزینه "۱" و "۲":

$$x = 1/5 \Rightarrow 1 < \frac{2/5}{2} < 3$$

ابتدا هر عبارت را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \times \frac{5 + \sqrt{6}}{5 + \sqrt{6}}$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{25 - 6} = \frac{19(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad (1)$$

$$2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt[4]{9} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1 \quad (2)$$

بنابراین طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{2} - 1$$

برای اینکه حاصل عبارت را به دست آوریم ابتدا فرض می‌کنیم $A = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ که عبارتی مثبت است، باشد. باتوجه به عبارت‌های زیر رادیکال‌ها اگر A^2 را به دست آوریم، به راحتی عبارت‌ها ساده می‌شوند. پس ابتدا A^2 سپس A را حساب می‌کنیم. پس از تعیین A ، حاصل عبارت $A\sqrt{2\sqrt{2}}$ را مشخص می‌کنیم.

$$A = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} A^2 = (2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} + (2 + \sqrt{3})$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{4 - 3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2 + 2 = 6 \Rightarrow A^2 = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6}$$

با معلوم شدن مقدار A ، حاصل عبارت اصلی را به دست می‌آوریم:

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{6} \times \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

برای به دست آوردن محدوده x ، موانعی که در اطراف آن وجود دارد را مرحله به مرحله حذف می‌کنیم تا جواب نامعادله به دست آید:

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

الف) داریم:

$$2y + x = 5 \Rightarrow 2y = 5 - x \Rightarrow y = \frac{5 - x}{2}$$

ب) چون می‌خواهیم نمودار تابع $y = 4 - |x|$ بالای خط به معادله $2y + x = 5$ قرار بگیرد، ابتدا باید مجموعه جواب نامعادله $4 - |x| > \frac{5 - x}{2}$ را تعیین کنیم.

$$4 - |x| > \frac{5 - x}{2} \xrightarrow{\times 2} 8 - 2|x| > 5 - x \Rightarrow x - 2|x| > -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : x - 2x > -3 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \\ x < 0 : x + 2x > -3 \Rightarrow 3x > -3 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow x \in (-1, 3) \Rightarrow (a, b) = (-1, 3) \Rightarrow b - a = 3 + 1 = 4$$

ابتدا معادله خط را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$2y + x = 5 \Rightarrow 2y = -x + 5 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

نمودار تابع $y = 4 - |x|$ بالای خط $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ قرار دارد پس باید نامعادله $4 - |x| > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ برقرار باشد. جواب نامعادله را در دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می‌کنیم.

$$x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow 4 - x > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x < 4 - \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x < \frac{3}{2} \Rightarrow x < 3 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 3 \quad (\text{I})$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow 4 + x > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x > -\frac{3}{2} \xrightarrow{\div \frac{3}{2}} x > -1 \xrightarrow{x < 0} -1 < x < 0 \quad (\text{II})$$

مجموعه جواب کل، اجتماع دو بازه (I) و (II) بوده که برابر $(-1, 3)$ می‌شود. $b - a$ برابر است با:

$$b - a = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$$

برای حل تست گام‌های زیر را برمی‌داریم:
الف) باتوجه به کتاب درسی، داریم:

$$|a| < k \Rightarrow -k < a < k$$

ب) نامعادله را در دو مرحله ($a < k$ و $-k < a$) حل کرده و بین مجموعه جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2x < x$$

$$۱) x^2 - 2x > -x \Rightarrow x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < 0 \quad (\text{I})$$

$$۲) x^2 - 2x < x \Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x-3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3 \quad (\text{II})$$

نامعادله‌های ۱ و ۲ باید هم‌زمان برقرار باشند، پس بین دو مجموعه جواب به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) : 1 < x < 3 \Rightarrow x \in (1, 3)$$

راه حل اول:

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ابتدا طرفین تساوی $\Delta x - \frac{3}{2x} = 4$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow (\Delta x)^2 - 2 \times (\Delta x) \times \left(\frac{3}{2x}\right) + \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 2\Delta x^2 - 15 + \frac{9}{4x^2} = 16 \Rightarrow 2\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} = 16 + 15$$

$$\Rightarrow 2\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} = 31$$

راه حل دوم:

$$2\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} = (\Delta x)^2 + \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = \left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 + 2 \times (\Delta x) \times \left(\frac{3}{2x}\right)$$

$$= \left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 + 15 \xrightarrow{\Delta x - \frac{3}{2x} = 4} \left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 + 15 = 4^2 + 15 = 16 + 15 = 31$$

تمامی عبارت‌ها را بر اساس توان‌هایی از ۲ و ۳ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{2^2 \times 3} \times \sqrt[4]{2 \times 3^3} \times \sqrt[3]{2 \times \sqrt[2]{2 \times 3}} \\ &= \left((2)^{\frac{2}{6}} \times (3)^{\frac{1}{6}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}\right) \\ &= 2^{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)} \times 3^{\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right)} = 2^1 \times 3^1 = 6 \end{aligned}$$

گام اول

الف) نمودار تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در صورتی پایین خط $y = 2$ قرار می‌گیرد که نامعادله $\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2$ برقرار باشد.
 ب) با تعیین علامت، محدودهٔ جواب نامعادله را تعیین کرده، آن را با بازهٔ (a, b) مطابقت داده و مقدار $b - a$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x - 2x^2 - 8}{x^2 + 4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4} < 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + 4 > 0} x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow x \in (-2, 4)$$

بنابراین بازهٔ (a, b) به صورت $(-2, 4)$ در آمده و حاصل $b - a$ برابر است با:

$$b - a = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

گزینه ۳

اگر قرار باشد عبارت درجه دو به فرم $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور x ها قرار داشته باشد دو شرط زیر هم زمان برقرار باشد:

- ۱) $a > 0$
- ۲) $\Delta < 0$

مجموعه جواب هر دو نامعادله را تعیین کرده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$$

$$۱) a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (I)$$

$$۲) \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 - 4(a - 1)(a) < 0 \Rightarrow 8 - 4a^2 + 4a < 0$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4a - 8 > 0 \xrightarrow{\div 4} a^2 - a - 2 > 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) > 0 \Rightarrow a < -1 \text{ یا } a > 2 \quad (II)$$

اشتراک مجموعه جواب‌های (I) و (II) برابر است با:

$$(I) \cap (II) : a > 2$$

عبارت درجه دو در صورتی به ازای هر مقدار x منفی است که اولاً ضریب x^2 منفی باشد، ثانیاً معادله ریشه نداشته و $\Delta < 0$ باشد. مجموعه جواب نامعادله‌های گفته شده را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$f(x) = (a-1)x^2 + (a-1)x + 1$$

$$1) a-1 < 0 \Rightarrow a < 1 \quad (I)$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-1-4) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \Rightarrow 1 < a < 5 \quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب (I) و (II) هیچ اشتراکی وجود ندارد، بنابراین مجموعه جواب قابل قبول برای a مجموعه \emptyset است.

گام اول

الف) باتوجه به ریشه‌های قدر مطلق $|2x|$ و $|x-1|$ ، عبارت درون قدر مطلق‌ها را در سه محدوده $x < 0$ ، $0 \leq x \leq 1$ و $x > 1$ تعیین علامت می‌کنیم.

ب) جواب سؤال بازه‌ای است که روی آن $f(x) > g(x)$ باشد که در هر یک از سه محدوده مشخص شده به صورت جداگانه تعیین می‌شود.

ج) اجتماع بازه‌های به دست آمده جواب سؤال خواهد بود.

گام دوم

$$1) x < 0 \Rightarrow |2x| = -2x \text{ و } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > |2x| \Rightarrow 5 - (1-x) > -2x \Rightarrow x+4 > -2x \Rightarrow 3x > -4$$

$$\Rightarrow x > -\frac{4}{3} \xrightarrow{x < 0} x \in \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$2) 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow |2x| = 2x \text{ و } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > |2x| \Rightarrow 5 - (1-x) > 2x \Rightarrow x+4 > 2x \Rightarrow x < 4 \xrightarrow{0 \leq x \leq 1} x \in [0, 1]$$

$$3) x > 1 \Rightarrow |2x| = 2x \text{ و } |x-1| = x-1$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 5 - |x-1| > 2x \Rightarrow 5 - (x-1) > 2x \Rightarrow 5 - x + 1 > 2x \Rightarrow 3x < 6$$

$$\Rightarrow x < 2 \xrightarrow{x > 1} x \in (1, 2)$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ درمی‌آید.

روش اول:

این نامعادله را در دو حالت حل می کنیم. یک بار $x \geq 0$ و بار دیگر $x < 0$ فرض می شود. مجموعه جواب نامعادله را در هر یک از حالت ها به دست آورده و چون هر دوی آن ها برای ما قابل قبول است بین آن ها اجتماع می گیریم.

$$1) \quad x \geq 0 \Rightarrow |x| = x : x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3 \xrightarrow{|x|=x} x + x \leq \frac{1}{4}x + 3 \\ \Rightarrow 2x \leq \frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{4}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 4 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x \leq 4$$

$$2) \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x : x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3 \xrightarrow{|x|=-x} x - x \leq \frac{1}{4}x + 3 \\ \Rightarrow \frac{1}{4}x + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -12 \xrightarrow{x < 0} -12 \leq x < 0$$

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = [-12, 0) \cup [0, 4] = [-12, 4]$$

روش دوم:

اگر $|x| \leq a$ ، آنگاه $-a \leq x \leq a$ ، بنابراین می توان نوشت:

$$x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3 \\ |x| \leq -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow -(-\frac{1}{4}x + 3) \leq x \leq -\frac{1}{4}x + 3 \\ x \leq -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{4}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 4 \\ x \geq -(-\frac{1}{4}x + 3) \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}x - 3 \Rightarrow \frac{1}{4}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -12$$

بنابراین $-12 \leq x \leq 4$ بوده و مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-12, 4]$ به دست می آید.

گزینه ۱

با ایجاد تغییراتی در نامعادله سعی می کنیم به نامعادله ای به صورت $Q(x) > 0$ برسیم. $Q(x)$ را تعیین علامت کرده و محدوده ای که مثبت باشد را به عنوان جواب در نظر می گیریم.

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x(x+1)}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0 \\ \Rightarrow \frac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-(2x^2+x+1)}{x+1} > 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{2x^2+x+1}{x+1} < 0$$

عبارت $2x^2 + x + 1$ همواره مثبت است، چون در این عبارت درجه دو مقدار $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است پس مخرج باید منفی باشد. داریم:

$$x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow \{x : x < -1\}$$

روش اول:

ابتدا با استفاده از تعریف نامعادله قدرمطلق $|u| < a$ ، دامنه تعریف تابع را به طور دقیق مشخص می‌کنیم:

$$|u| < a \Rightarrow -a < u < a$$

سپس مشخص می‌کنیم در محدوده به دست آمده، تابع $f(x)$ چه وضعیتی دارد.

$$|x - 1| < 2 \Rightarrow -2 < x - 1 < 2 \xrightarrow{+1} -1 < x < 3 \Rightarrow D_f = (-1, 3)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4$$

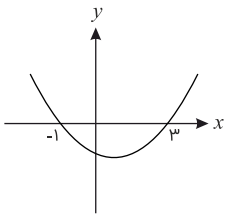
در محدوده $(-1, 3)$ ، وضعیت $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$-1 < x < 3 \Rightarrow -2 < x - 1 < 2 \Rightarrow (x - 1)^2 < 4 \Rightarrow (x - 1)^2 - 4 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

پس در دامنه مشخص شده تابع $f(x)$ همواره منفی است.

روش دوم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

با رسم نمودار تابع $f(x)$ وضعیت آن را در بازه داده شده بررسی می‌کنیم.در بازه $(-1, 3)$ نمودار $f(x)$ همواره زیر محور x ها قرار دارد پس مقدار آن همواره منفی است.

روش سوم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

$$|x - 1| < 2 \Rightarrow -2 < x - 1 < 2 \xrightarrow{+1} -1 < x < 3 \Rightarrow D_f = (-1, 3)$$

تابع $f(x)$ را تعیین علامت کرده و وضعیت آن را روی دامنه تعریف شده یعنی بازه $(-1, 3)$ مشخص می‌کنیم:تابع $f(x)$ روی دامنه تعریف شده در صورت تست همواره منفی است.

x		-1	3
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

دو طرف نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-6}{x+1}}_{p(x)} < 0$$

X	$-\infty$	-6	-1	$+\infty$
p(x)		-	۰	+ ت.ن -

$$p(x) < 0 \Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (1)$$

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{x-4}{x+1}}_{q(x)} > 0$$

X	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
q(x)		+ ت.ن -	۰	+

$$q(x) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب مسئله است که اجتماع دو بازه $(-\infty, -6)$ و $(4, +\infty)$ می‌باشد که به صورت $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

مسئله را با این شرط که ضریب x^2 مخالف صفر است، حل می‌کنیم. ($2m - 1 \neq 0$)
 شرط اینکه معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد این است که $\Delta > 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(2m - 1)(m - 2) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2m - 7)(m + 1)}_{P(m)} < 0 \Rightarrow m = -1, \frac{7}{2}$$

m		-1		$\frac{7}{2}$		
P(m)		+		-		+

$$P(m) < 0 \Rightarrow -1 < m < \frac{7}{2}$$

یکبار فرض می‌کنیم $x \geq 0$ باشد و بار دیگر $x < 0$. در هر دو حالت مجموعه جواب نامعادله را تعیین کرده و سپس بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$(x - 4)x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x - 1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5 \quad (\text{I})$$

باتوجه به محدوده اولیه ($x \geq 0$) این جواب قابل قبول است.

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$(x - 4)(-x) < 2x - 5 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

x	$1 - \sqrt{6}$	$1 + \sqrt{6}$
$x^2 - 2x - 5$	+	-

$$x < 1 - \sqrt{6} \text{ یا } x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x < 0} x < 1 - \sqrt{6} \quad (\text{II})$$

اجتماع دو مجموعه جواب (I) و (II) برابر است با:

$$(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$$

طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

با استفاده از اتحاد مزدوج و با در نظر گرفتن $A = \alpha^2 + \beta^2$ و $B = \alpha\beta$ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$$

مقادیر α و β را در عبارت به دست آمده جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[4]{3\sqrt{2} - 4} \right)^4 + \left(\sqrt[4]{3\sqrt{2} + 4} \right)^4 + \left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2} - 4)} \right)^2 \left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2} + 4)} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt[4]{3\sqrt{2} - 4} \right)^4 + \left(\sqrt[4]{3\sqrt{2} + 4} \right)^4 + \left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)} \right)^2 \\ &= 3\sqrt{2} - 4 + 3\sqrt{2} + 4 + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

نامعادله داده شده به صورت زیر می‌شود:

$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq 2$ و $x < 2$ حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad x \geq 2 & \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2 \\ 2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 & \Rightarrow 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1 \\ \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 & \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \\ \Rightarrow -1 < x < 2 & \xrightarrow{x \geq 2} \text{هیچ مقداری نمی‌تواند داشته باشد} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad x < 2 & \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) \\ 2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 & \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \\ \Rightarrow (x - 2)(x - 1) < 0 & \Rightarrow 1 < x < 2 \xrightarrow{x < 2} 1 < x < 2 \end{aligned}$$

اجتماع دو مجموعه جواب به دست آمده؛ یعنی بازه $(1, 2)$ ، مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > 2x + 1 - |x - 2|$ می‌شود.

عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه x مثبت است که دو شرط $a > 0$ و $\Delta < 0$ همزمان برقرار باشد. مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$1) a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$f(x) = (m - 1)x^2 + 6x + 2m + 1$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow 6^2 - 4(m - 1)(2m + 1) < 0$$

$$\Rightarrow 36 - 4(m - 1)(2m + 1) < 0 \xrightarrow{\div 4} 9 - (m - 1)(2m + 1) < 0$$

$$\Rightarrow 9 - 2m^2 + m + 1 < 0 \Rightarrow -2m^2 + m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - m - 10 > 0 \Rightarrow (2m - 5)(m + 2) > 0$$

$$\Rightarrow m > \frac{5}{2} \text{ یا } m < -2 \quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) : m > \frac{5}{2} \Rightarrow m > 2/5$$

راه حل اول:

با عددگذاری داریم:

$$x = 1 \xrightarrow{\substack{\text{با جایگذاری} \\ \text{در نامعادله}}} -1 < \frac{3(1) + 1}{(1) - 3} < 3 \Rightarrow -1 < -2 < 3 \quad \times$$

بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

راه حل دوم:

گام اول

نامعادله را به نامعادله‌ای به فرم $-a < u < a$ تبدیل می‌کنیم تا از ویژگی‌های نامعادلات قدر مطلق استفاده کنیم.

گام دوم

$$-1 < \frac{3x + 1}{x - 3} < 3 \xrightarrow{-1} -2 < \frac{3x + 1 - x + 3}{x - 3} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x + 4}{x - 3} < 2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2(x + 2)}{x - 3} \right| < 2 \xrightarrow{\div 2} \left| \frac{x + 2}{x - 3} \right| < 1 \Rightarrow |x + 2| < |x - 3|$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^2 + 4x + 4 < x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 10x < 5 \xrightarrow{\div 10} x < \frac{1}{2}$$

اگر سهمی پایین محور x ها باشد، باید $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد. پس:

$$y = (1 - m)x^2 + 2(m - 3)x - 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(m - 3)^2 + 4(1 - m) = 4(m^2 - 6m + 9) + 4 - 4m < 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m - 5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (1)$$

$$a = 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (2)$$

اشتراک (1) و (2) برابر بازه $(2, 5)$ است.

راه حل تستی:

$$x = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} \frac{13}{4} > 3 \quad \checkmark$$

$x = 3$ در نامعادله صدق می کند، پس گزینه های 1 و 4 حذف می شوند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} 4 > 0 \Rightarrow \text{گزینه 2 هم حذف می شود}$$

راه حل تشریحی:

$$\frac{7x - 8}{(x - 2)(x + 1)} - \frac{x}{x - 2} > 0 \Rightarrow \frac{(7x - 8) - x(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{-(x - 2)(x - 4)}{(x - 2)(x + 1)} = -\frac{x - 4}{x + 1} > 0$$

x	-1	2	4
$\frac{x - 4}{x + 1}$	$-$	$+$	$-$

$$\Rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

$$A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} (12)^{-1/5} = \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}} (12)^{-1/5} = \sqrt[5]{\sqrt{3^5}} \times \frac{1}{\sqrt{12^3}}$$

$$A = \sqrt[5]{3^5} \times \frac{1}{12\sqrt{12}} = \sqrt{3} \times \frac{1}{24\sqrt{3}} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = 24 \Rightarrow (1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}} = (1 + 24)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[5]{2^2 \times (2^4)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{4}{5}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{10}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}} \\
 &= (2^{\frac{10}{5}})^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} = 2^2 = 4 \\
 \Rightarrow (2A)^{-\frac{1}{5}} &= (2 \times 4)^{-\frac{1}{5}} = 8^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 &\Rightarrow \left(\frac{2-x}{2x-3} \right)^2 > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} x^2 - 4x + 4 > 4x^2 - 12x + 9 \\
 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 &\Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4(3)(5) = 4 \\
 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} &\Rightarrow x_{1,2} = 1, \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

x	1	$\frac{5}{3}$
$3x^2 - 8x + 5$	+ 0 -	- 0 +

مقدار $x = \frac{3}{2}$ که در این بازه قرار دارد، غیرقابل قبول است (ریشهٔ مخرج است)، پس مجموعه جواب صحیح این نامعادله به صورت زیر است:

$$x = \left(1, \frac{5}{3}\right) - \frac{3}{2}$$

نکته: گزینه‌های ۱ و ۳ را نیز می‌توان به عنوان جواب‌های درست در نظر گرفت ولی باتوجه به گزینه‌های موجود کامل‌ترین جواب گزینهٔ ۲ است. در غیر این صورت گزینه‌های ۱ و ۳ هم صحیح خواهند بود.



۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

- (۱) -۱۱۲
(۲) -۹۶
(۳) -۸۴
(۴) -۷۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲ تعداد نقاط ناپیوسته نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+4}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{x+5}$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳ تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$ در بازه $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $-\frac{1}{3}$
(۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $+\infty$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۰
(۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & ; x < 1 \\ x^2 + 2a & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) -۳
(۳) -۲
(۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\infty$
(۲) -۱
(۳) صفر
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$; $|x| \leq 2$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ فقط یک مجانب قائم $x = 2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن، کدام است؟

- (۱) $y = -1$
(۲) $y = -\frac{1}{2}$
(۳) $y = \frac{1}{2}$
(۴) $y = \frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) $-\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ به ازای یک مقدار a ، چند جمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی ماندهٔ $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

- (۱) -۱۰
(۲) -۸
(۳) ۴
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ پیوسته است؟

۱۲

(۲) ۱

(۱) ۱/۵

(۴) -۱/۵

(۳) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

۱۳

(۲) $-\frac{6}{17}$ (۱) $-\frac{4}{17}$ (۴) $-\frac{6}{11}$ (۳) $-\frac{5}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

فرض کنید باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

۱۴

(۲) ۱

(۱) ۷

(۴) -۱

(۳) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$ دارای خط‌های مجانب $y = -1$ ، $x = -2$ و $x = 1$ است. $f(-1)$ کدام است؟

۱۵

(۲) ۱/۵

(۱) ۱/۲۵

(۴) -۱/۵

(۳) ۱/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ ، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

۱۶

(۲) -۱

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

(۳) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

۱۷

(۲) -۱/۲

(۱) -۱/۵

(۴) -۵/۶

(۳) -۵/۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ کدام است؟

- (۱) $-x + 4$ (۲) $x + 3$
(۳) $2x + 6$ (۴) $2x - 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{18}$
(۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{5}{36}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$ ، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر
(۳) 1 (۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$
(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \sin(x - [x])\pi$ روی بازه $(2, 6)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1
(۳) 2 (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1-x}{x-\sqrt{x}}$ مفروض اند، تعداد مجانب‌های نمودار تابع $(f+g)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1
(۳) 2 (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^6 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ است، a کدام است؟

۲۴

- (۱) -۴
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$ کدام است؟

۲۵

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) $+\infty$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

در تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$ کدام است؟

۲۶

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) $-\infty$
(۴) موجود نیست

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$ و $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$ مفروض اند. اگر A و B محل تلاقی مجانب های منحنی تابع $(g-f)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت OAB کدام است؟

۲۷

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

تابع f با ضابطه $f(x) = (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right]$ روی بازه $(0, 9)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۲۸

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} & ; x < -1 \\ ax+1 & ; x \geq -1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} پیوسته است؟

۲۹

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{5}{4}$
(۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} \right)$ کدام است؟

(۲) $-\frac{2}{4}$
(۴) $-\frac{2}{3}$

(۱) $-\frac{4}{5}$
(۳) $\frac{2}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۱ اگر $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^-} (g \circ f)(x)$ کدام است؟

(۲) -1
(۴) 2

(۱) -3
(۳) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$ ، خط مجانب افقی خود را در نقطه A قطع می‌کند، فاصله نقطه A از خط مجانب قائم کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$
(۴) 2

(۱) $\frac{1}{2}$
(۳) 1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۳ تابع با ضابطه $f(x) = [x^2 - 3]$ روی بازه $[2, 2+k]$ پیوسته است، بیشترین مقدار k کدام است؟

(۲) $\sqrt{5} - 2$
(۴) $\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{2} - 1$
(۳) $\sqrt{3} - 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۴ یک همسایگی به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن، زیر مجموعه $\left\{ x : \left| \frac{x-3}{2x-1} \right| > 1 \right\}$ است. a کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{11}{6}$

(۱) $-\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۳۵ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; |x| \geq 1 \\ x[x] & ; |x| < 1 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

(۲) -1
(۴) 2

(۱) -2
(۳) 1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

۳۶

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟

۳۷

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) صفر
(۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

در همسایگی محذوف به صورت $\{3\} - (a + 5, 3a - 7)$ شعاع همسایگی کدام است؟

۳۸

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

۳۹

- (۱) -۳
(۲) -۲
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

حد عبارت $\left[\frac{1}{x} \right]$ در کدام حالت متناهی نیست؟

۴۰

- (۱) $x \rightarrow 0^-$
(۲) $x \rightarrow 0^+$
(۳) $x \rightarrow -\infty$
(۴) $x \rightarrow +\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۴۱

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x > 2 \\ ax-1 & ; x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۴۲

(۱) $1/5$ (۲) 2

(۳) $2/5$ (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

فاصله نقطه تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله $y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۴۳

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2

(۳) $\sqrt{5}$ (۴) 5

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ فقط از چپ پیوسته است؟

۴۴

(۱) -12 (۲) -6

(۳) 6 (۴) 12

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ کدام بیان درست است؟

۴۵

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۴۶

(۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -1

(۳) $\sqrt{2}$ (۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + 3x}{ax^2 + 4x - 1}$ ، $a \neq 0$ فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطه تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4})$
 (۳) $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$ (۴) $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4})$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

با کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ; x \geq -1 \\ \frac{1}{x^2+ax} & ; x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته است؟

- (۱) $\{1, \sqrt{2}\}$ (۲) $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$
 (۳) \emptyset (۴) \mathbb{R}

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱
 (۳) ۱ (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل کشور ۱۳۸۷

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱
 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل کشور ۱۳۸۷

اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{[4 \cos^2 \pi x] - 12x}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) -۲۰ (۲) -۱۶
 (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

- (۱) $\frac{-1}{2}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) هیچ مقدار a

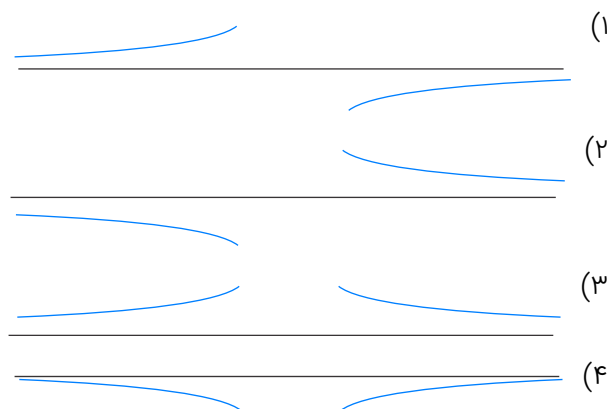
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

حد عبارت $\left[\frac{\sin x}{x}\right] + 2\left[\frac{x}{\sin x}\right]$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱ چگونه است؟

- (۱) در -۱ ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته (۲) در -۱ ناپیوسته، در ۱ پیوسته
(۳) در -۱ پیوسته، در ۱ پیوسته (۴) در -۱ پیوسته، در ۱ ناپیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$$

تابع با ضابطه

۵۷

در $x = 1$ پیوسته است؟

- (۱) هر مقدار a (۳)
 (۲) -3 (۴)
 (۳) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

و اگر $f(x) = [x] + [-x]$ کدام

۵۸

است؟

- (۱) ۱ (۳)
 (۲) ۲ (۴)
 (۳) ۳
 (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 2^a$$

اگر a باشد، آنگاه a کدام است؟

۵۹

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۳)
 (۲) $-\frac{1}{4}$ (۴)
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & ; x < 2 \end{cases}$$

با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a

۶۰

کدام است؟

- (۱) -1 (۳)
 (۲) ۱ (۴)
 (۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۶۱

- (۱) -1 (۳)
 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۴)
 (۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۲ اگر $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، آنگاه نقطه تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(-1, 1)$
(۳) $(-2, 2)$ (۴) $(0, 1)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶۳ تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2} x$ ، در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (۱) فقط در اعداد زوج پیوسته (۲) فقط در اعداد فرد پیوسته
(۳) همواره ناپیوسته (۴) همواره پیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۶۴ حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ ، وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) $-\infty$ (۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) ۱ (۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۵ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۶ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۷ به ازای مقداری از a ، چند جمله‌ای $f(x) = x^6 + ax^3 - 8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{3}$ (۲) $1 - \sqrt{5}$
(۳) $-1 - \sqrt{3}$ (۴) $-1 - \sqrt{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$ ، در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

حد عبارت $\sin \frac{x}{2} [\cos \frac{x}{2}] - \cos x [\sin 2x]$ ، وقتی $x \rightarrow \pi$ ، کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{12}$

(۲) $-\frac{5}{12}$

(۳) $\frac{5}{12}$

(۴) $\frac{7}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ ، در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} & ; x \neq 2 \\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در $x = 2$ چگونه است؟

(۱) از چپ پیوسته

(۲) پیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته

(۴) از راست پیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

حد عبارت $[\tan^2 x] \cos 3x + [\sin(x - \frac{\pi}{3})]$ ، وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ ، کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$
 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱
 (۳) ۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۷۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است)

- (۱) -۱ (۲) ۱
 (۳) ۰ (۴) همواره ناپیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۷۷ حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

- (۱) -۲۴ (۲) -۱۸
 (۳) -۱۲ (۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲
 (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{12}$
 (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right)$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) $-\frac{3}{2}$
(۳) ۱
(۴) $-\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) π
(۴) 2π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۲ به ازای مقادیری از a و b ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < 1 \\ ax + b & ; |x| \geq 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} پیوسته است. a کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$
(۲) -۱
(۳) $-\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۳ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۴ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ کدام بیان درست است؟

- (۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$
(۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$
(۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = -\infty$
(۴) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = +\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$
(۲) $-\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

۸۶

(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{4}$

(۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

۸۷

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۱، پیوسته است؟

۸۸

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & ; x > 2 \\ ax - 1 & ; x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۸۹

(۱) هر مقدار حقیقی a

(۲) هیچ مقدار a

(۳) فقط $a = -2$

(۴) فقط $a = 2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3x}{\cos x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin 5x - a & ; \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ بر روی بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

۹۰

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۹۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۹۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) $+\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۹۳ حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر -2 است. $m+n$ کدام است؟

- (۱) ۳/۵
(۲) ۴
(۳) ۴/۵
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۹۴ به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = x + a$ از نقطه تلاقی مجانب‌های تابع $y = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 2}$ می‌گذرد؟

- (۱) -۴
(۲) -۲
(۳) ۲
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۹۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$
(۲) $-\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$ کدام است؟

- (۱) -۸
(۲) صفر
(۳) ۴
(۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۹۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x)$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۹۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{8}$
(۴) $\frac{1}{3}$

(۱) $-\frac{1}{6}$
(۳) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۹۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$ از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$
(۴) ۱

(۱) $-\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۰۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

(۲) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{3}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۰۱ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ ، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$
(۴) ۳

(۱) -۲
(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۰۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر x ، بازه $(x + 1, 2x - 1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

(۲) $\{2\}$

(۱) \emptyset

(۴) $1/5 < x < 2$

(۳) $2 < x < 2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

خط به معادله $y = \frac{3}{2}$ y مجانب افقی نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{Ax^3 + 1}{(A-1)x^3 + 16}$ است. معادله مجانب قائم نمودار f کدام است؟

$$x = -2 \quad (2)$$

$$x = -4 \quad (1)$$

$$x = 4 \quad (4)$$

$$x = 2 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & ; x < 1 \\ x^2 + ax & ; x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟

$$1/25 \quad (2)$$

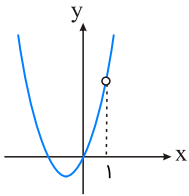
$$0/5 \quad (1)$$

$$2/5 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{fx^3 + ax + b}{x-1}$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



$$(0, -4) \quad (1)$$

$$(-4, 0) \quad (2)$$

$$(-4, 1) \quad (3)$$

$$(4, 0) \quad (4)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2^{(1+x)} & ; x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟

$$-1/5 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه $x = -2$ کدام است؟

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۰۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right]$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) $+\infty$
(۴) $-\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۰۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5 - x}}$ کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) -۲
(۳) ۲
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۱۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3 - x}}{x^2 + x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{4}$
(۲) $-\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۱۱ اگر $f(x) = \frac{x + 11}{x^2 - 3x - 4}$ و $g(x) = \frac{3}{x - 4}$ ، نقطهٔ تلاقی مجانب های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$
(۲) $(-1, 2)$
(۳) $(4, -1)$
(۴) $(4, 0)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۱۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۱۱۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \tan x)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۱۱۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) & ; \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi \end{cases}$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) صفر
 (۳) $-\frac{1}{2}$
 (۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۱۱۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \\ ax - a + 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) هر مقدار a
 (۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & ; x \geq -1 \\ 2x+1 & ; x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد؟

- (۱) $\{0\}$
 (۲) $\{2\}$
 (۳) \emptyset
 (۴) \mathbb{R}

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۱۸ به ازای کدام مقادیر a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & ; x \geq a \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cos 4x & ; |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 0$ پیوسته است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

- (۱) -۱
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) همواره ناپیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

گزینه ۱

۱

راه حل اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{(2 - \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(3x+2)(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{(2 - \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} (-(3x+2)(2 + \sqrt{x})(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)) \\ &= -14 \times 4 \times 2 = -112 \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{14}{\frac{1}{2 \times 2}} = -14 \times 4 = -112$$

گزینه ۲

۲

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ 1 + \sqrt{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \\ x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-4, +\infty) - \{-2\}$$

بنابراین تنها در $x = -2$ ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش ۱ نقطه است.

$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} + 1 \right]$$

$$= \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 = 2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1$$

عبارت خطی $x - \frac{1}{3}$ در نقاط صحیح کننده $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3} \right\}$ از بازه $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right)^+} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 [(-2)^+] + 1 = 2(-2) + 1 = -3$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^-} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^- \right] + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad f\left(\frac{5}{3}\right) = 3$$

پس f در $\frac{5}{3}$ پیوستگی راست و در $\frac{5}{3}$ پیوستگی چپ دارد. در نهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش ۳ نقطه است.

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} 2^{1-2n} = \frac{1}{2^{-1+2n}} \rightarrow 0 \\ 2^{2n+1} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

راه حل اول:

با استفاده از قاعده پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

راه حل دوم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n} - 1)}{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} - 1}{2^{4n} + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^{4n} + 3) - 4}{(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\frac{4}{2^{4n} + 3}}_0 = 1$$

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} \omega^{-2n+1} = \frac{1}{\omega^{2n-1}} \rightarrow 0 \\ \omega^{2n} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{2n} - \omega^{-2n+1}}{2 \times \omega^{2n} + \omega^{-2n+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{2n} - \omega^{-2n+1}}{2 \times \omega^{2n} + \omega^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{2n}}{2 \times \omega^{2n}} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{2n} - \omega^{-2n+1}}{2 \times \omega^{2n} + \omega^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{-2n+1}(\omega^{4n-1} - 1)}{\omega^{-2n+1}(2 \times \omega^{4n-1} + 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{4n-1} - 1}{2 \times \omega^{4n-1} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\omega^{4n-1}} \left(1 - \frac{1}{\omega^{4n-1}}\right)}{\cancel{\omega^{4n-1}} \left(2 + \frac{1}{\omega^{4n-1}}\right)} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{\omega^{4n-1}} \rightarrow 0$$

گام اول

الف) برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ از ضابطه پایین که در آن $x \geq 1$ است، استفاده می‌کنیم.

ب) برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ از ضابطه بالا که $x > 1$ است، بهره می‌بریم.

گام دوم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2a = (1)^2 + 2a = 2a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax - 1 = a(1) - 1 = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2a + 1 - (a - 1) = -1$$

$$\Rightarrow 2a + 1 - a + 1 = -1 \Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{\overbrace{[(-2)^-]}^{-3} + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{0}{0^-} = 0$$

$$f(x) = [x] \sin \pi x ; x \in [-2, 2]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما از آنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.
 پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطه ناپیوستگی داریم.
 کلید سنجش صفر نقطه است.

از آنجاکه تابع فقط یک مجانب قائم دارد، پس $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج است؛ بنابراین:

$$2x^2 + bx + c = 2(x - 2)^2 \Rightarrow 2x^2 + bx + c = 2x^2 - 4x + 8 \Rightarrow b = -4, c = 8$$

پس $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 - 4x + 8}$ است، همچنین $f(3) = 6$ ، بنابراین:

$$f(3) = \frac{9a + 21}{18 - 12 + 8} = \frac{9a + 21}{4} = 6 \Rightarrow 9a + 21 = 24 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{مجانِب افقی: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7x}{2x^2 - 4x + 8} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$$

پس باید رفع ابهام انجام دهیم. می‌دانیم $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. از طرفی می‌دانیم اگر x به سمت صفر میل کند، $\sin x$ هم‌ارز با x می‌شود، پس نتیجه می‌گیریم که $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ به علاوه هم‌ارزی زیر را داریم:

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{1 \pm u} \sim 1 \pm \frac{u}{n}$$

پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{2}x} - \sqrt{1-\frac{1}{2}x}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}\left(\left(1+\frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \left(1-\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}} = -2 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$$

حال کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} &\times \frac{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x\sqrt{1+\cos x}}{(-x)\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} = \frac{4\sqrt{2}}{-1(2\sqrt{2})} = -2 \end{aligned}$$

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} - 1 &= 0 \Rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر با $P(-2)$ است، پس داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x \\ \Rightarrow P(-2) &= 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10 \end{aligned}$$

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ مه‌مه}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin^2 x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1) \cancel{(\sin x - 1)}}{-\cancel{(\sin x - 1)}(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{2 \sin x + 1}{\sin x + 1} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = 2$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجه صورت و مخرج کسری یکی باشد. بنابراین $n = 3$ است. همچنین طبق قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

حال $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) (4x^2 - 4x - 2)}{\left(x - \frac{1}{2}\right) (2x^2 + 7x + 4)} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = -\frac{6}{17}$$

$$\frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{-4x^3 + 2x^2} \bigg| \frac{x - \frac{1}{2}}{4x^2 - 4x - 2}$$

$$\frac{-4x^2 + 1}{4x^2 - 2x}$$

$$\frac{-4x^2 + 1}{-2x + 1}$$

$$\frac{2x - 1}{2x - 1}$$

○

$$\frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{-2x^3 + x^2} \bigg| \frac{x - \frac{1}{2}}{2x^2 + 7x + 4}$$

$$\frac{4x^2 - 2}{-4x^2 + 7x}$$

$$\frac{4x - 2}{4x - 2}$$

$$\frac{-4x + 2}{-4x + 2}$$

○

روش دوم: هوییتال

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{17}{2}} = -\frac{6}{17}$$

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است، پس $p(4) = 3$.

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است، پس $p(-2) = 1$.

حال باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = 2$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} p(x^2) + 4p(-x) &= p(2^2) + 4p(-2) \\ &= p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$$

$y = -1$ مجانب افقی تابع است، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + bx + c}$$

همچنین $x = 1$ و $x = -2$ مجانب‌های قائم‌تابع و در نتیجه ریشهٔ مخرج هستند، پس مخرج به صورت $2(x-1)(x+2)$ است. بنابراین تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2(x-1)(x+2)} = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + 2x - 4} \Rightarrow f(-1) = \frac{-2 - 3}{2 - 2 - 4} = \frac{-5}{-4} = 1/25$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)[x] & ; -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & ; x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x-1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x = 0$ و $x = 2$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2-1)[2^-] = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 + 2a + b = 1 \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0-1)[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow b = 0 \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{(\text{I}), (\text{II})} a = -\frac{3}{2}$$

راه حل اول: با استفاده از هوییتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{3}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4-3}{2}}{\frac{8-3}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

راه حل دوم: ابهام $\frac{0}{0}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - \sqrt{3x+1} + 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{4x^2 - 3x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-5)(2x + \sqrt{3x+1})}{(x-1)(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-5)(2x + \sqrt{3x+1})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(4x+1)}$$

$$= \frac{-3 \times 4}{2 \times 5} = \frac{-12}{10} = -\frac{6}{5}$$

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(1) = 8$ و $P(-\frac{1}{2}) = 5$ است. همچنین داریم:

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + R(x) = ((x-1)(2x+1))Q(x) + R(x) \quad ; R(x) = ax + b$$

بنابراین:

$$P(1) = R(1) = a + b = 8$$

$$P(-\frac{1}{2}) = R(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -\frac{1}{2}a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2, b = 8 - 2 = 6$$

$$\text{پس: } R(x) = 2x + 6$$

با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[p]{x^p - 1}}{fx^n - 1^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{fx^n} = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{fx} = \frac{a}{f} = \frac{1}{f} \Rightarrow a = \frac{p}{f}$$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{p}{f}x - \sqrt[p]{x^p - 1}}{fx - 1^p} = \frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{p}{f}x - \sqrt[p]{x^p - 1}}{fx - 1^p} \times \frac{\frac{f}{q}x^p + \frac{p}{f}x\sqrt[p]{x^p - 1} + (\sqrt[p]{x^p - 1})^p}{\frac{f}{q}x^p + \frac{p}{f}x\sqrt[p]{x^p - 1} + (\sqrt[p]{x^p - 1})^p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{\lambda}{p\gamma}x^p - x^p + 1}{(fx - 1^p)\left(\frac{f}{q}x^p + \frac{p}{f}x\sqrt[p]{x^p - 1} + (\sqrt[p]{x^p - 1})^p\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cancel{(x - p)} \left(\frac{\lambda}{p\gamma}x^p - \frac{x}{q} - \frac{1}{p} \right)}{f\cancel{(x - p)} \left(\frac{f}{q}x^p + \frac{p}{f}x\sqrt[p]{x^p - 1} + (\sqrt[p]{x^p - 1})^p \right)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{f \times (f + p \times p + f)} = \frac{p}{f\lambda} = \frac{1}{p\lambda}$$

$$\frac{\frac{\lambda}{p\gamma}x^p - x^p + 1}{\frac{\lambda}{p\gamma}x^p - \frac{x}{q} - \frac{1}{p}}$$

$$= \frac{-\frac{\lambda}{p\gamma}x^p + \frac{\lambda}{q}x^p}{-\frac{1}{q}x^p + 1}$$

$$= \frac{+\frac{1}{q}x^p - \frac{1}{p}x}{-\frac{1}{p}x + 1}$$

$$= \frac{+\frac{1}{p}x - 1}{0}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{p}{f}x - \sqrt[p]{x^p - 1}}{fx - 1^p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{p}{f} - \frac{1}{p}(px)(x^p - 1)^{-\frac{1}{p}}}{f}$$

$$= \frac{\frac{p}{f} - p \times \frac{1}{f}}{f} = \frac{f - p}{f} = \frac{1}{p\lambda}$$

چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^2 - 1$ برابر صفر است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

بنابراین داریم:

$$p(1) = 0, p(-1) = 0 \quad (*)$$

اکنون باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$$

$$\xrightarrow{x=2} Q(2) = p(2 - 1) + p(1 - 2) = p(1) + p(-1)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(2) = 0 + 0 = 0$$

حد تابع در بی نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(a + 2)}{2x} \\ \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}} &\rightarrow \frac{a + 2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \xrightarrow{\text{در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \times \frac{3x - \sqrt{4x^2 + 5}}{3x - \sqrt{4x^2 + 5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 4x^2 - 5}{2(x+1)(-3 - \sqrt{4x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-5(x-1)(x+1)}{12(x+1)} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

اگر قرار باشد تابع $f(x)$ در نقاطی ناپیوسته باشد، باید دنبال نقاطی باشیم که در آن $[x]$ ناپیوسته است. در تابع $y = [x]$ نقاط $x \in \mathbb{Z}$ نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ هستند. (در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ خود تابع $y = [x]$ همواره ناپیوسته است، اما ممکن است تابع $f(x)$ در این نقاط پیوسته باشد. پس باید نقاط $x \in \mathbb{Z}$ در بازه $(2, 6)$ را مورد بررسی قرار دهیم.) پس برای تعیین تعداد نقاط ناپیوستگی، نقاط $x = 3$ و $x = 4$ و $x = 5$ را مورد بررسی قرار می دهیم. بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sin(x - [x])\pi = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sin(x - 2)\pi = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(3 - 3)\pi = \sin 0 = 0$$

$$f(3) = \sin(3 - 3)\pi = \sin 0 = 0$$

بنابراین تابع در $x = 3$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sin(x - [x])\pi = \sin(4 - 3)\pi = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(4 - 4)\pi = \sin 0 = 0$$

$$f(4) = \sin(4 - 4)\pi = \sin 0 = 0$$

تابع در $x = 4$ هم پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \sin(x - [x])\pi = \sin(5 - 4)\pi = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(5 - 5)\pi = \sin 0 = 0$$

$$f(5) = \sin(5 - 5)\pi = \sin 0 = 0$$

تابع در $x = 5$ هم پیوسته است. ثابت شد تابع در کلیه نقاط مشکوک به ناپیوستگی پیوسته است بنابراین تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ برابر صفر می شود.

ابتدا ضابطه $f + g$ را به ساده‌ترین شکل می‌نویسیم (بین دو عبارت کسری مخرج مشترک گیری کرده و آن را ساده می‌کنیم). برای یافتن مجانب افقی حد تابع را وقتی $x \rightarrow +\infty$ به دست می‌آوریم. باتوجه به وجود \sqrt{x} در دو ضابطه دامنه تعریف به صورت $(0, +\infty)$ بوده و $x \rightarrow -\infty$ مفهومی ندارد. مجانب قائم هم ریشه مخرج کسر است (البته در صورت وجود و داشتن شرایط لازم).

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1-x}{x-\sqrt{x}} = \frac{(x+1)(x-\sqrt{x}) + (1-x)(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} \\ &= \frac{x^2 - x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - x^2}{x^2 - x} = \frac{-2x\sqrt{x} + 2x}{x^2 - x} \\ &= \frac{-2x(\sqrt{x}-1)}{x(x-1)} = \frac{-2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{-2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

مجانب افقی تابع را تعیین می‌کنیم:

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{x}} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$1 + \sqrt{x}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود پس مخرج کسر فاقد ریشه و در نتیجه تابع فاقد مجانب قائم است. بنابراین تابع $f + g$ در مجموع ۱ مجانب دارد.

گام اول

وقتی باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-1)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 4$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow -a + 3 = 4 \\ &\Rightarrow a = 3 - 4 = -1 \Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

ابتدا ضابطه $g(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم. برای این کار کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f(x)$ را جایگزین کنیم. در ادامه حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (حد توان تابع $g(f(x))$ را وقتی $x \rightarrow 1^+$ تعیین کرده، سپس حاصل حد تابع $g(f(x))$ را به دست می‌آوریم).

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 2 \frac{2x+5}{x^2 - 4x + 3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+5}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+5}{(x-3)(x-1)} = \frac{7}{(-2)(0^+)} = -\infty \end{aligned}$$

و حالا محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = \lim_{f(x) \rightarrow -\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{f(x)} = 2^{-\infty} = 0$$

ابتدا حد تابع $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ را وقتی $x \rightarrow 0^-$ به دست می آوریم. اگر حاصل حد تابع محاسبه شده در قسمت قبل را L در نظر بگیریم، باید $\lim_{x \rightarrow L} f(x)$ را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{0 - 1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پس باید حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - |x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0 \end{aligned}$$

ضابطه $g - f$ را بعد از مخرج مشترک گیری و ساده کردن صورت و مخرج تشکیل می دهیم. مجانب قائم تابع ریشه مخرج کسر و مجانب افقی حاصل حد تابع وقتی $x \rightarrow \infty$ است. محل برخورد مجانب ها (همان نقاط A و B) را در دستگاه مختصات مشخص کرده و مساحت مثلث OAB را محاسبه می کنیم.

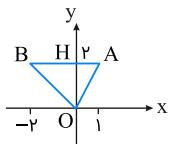
$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{x^2(x+2) - x(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 + x}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x^2 + x}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\text{مجانِب افقی: } y = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{مجانِب قائم: } (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

بنابراین محل برخورد مجانب ها نقاط $A(1, 2)$ و $B(-2, 2)$ است. این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کرده و مساحت مثلث OAB را محاسبه می کنیم:



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

گام اول

الف) نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ نقاطی هستند که در آن عبارت $\frac{1}{3}x - 1$ برابر یک عدد صحیح شود. (اصولاً نقاطی که در آن عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد صحیح شود، نقاط ناپیوستگی تابع جزء صحیح محسوب می شوند).

ب) $\frac{1}{3}x - 1$ را برابر عدد صحیح K فرض کرده و مشخص می کنیم در چه نقاطی از بازه $(0, 9)$ برابر عدد صحیح می شود. سپس در آن نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

گام دوم

$$\frac{1}{3}x - 1 = K \Rightarrow \frac{1}{3}x = K + 1 \Rightarrow x = 3k + 3, x \in (0, 9)$$

x یک عدد مضرب ۳ به دست می آید. در بازه $(0, 9)$ دو عدد مضرب ۳ وجود دارد، $x = 3$ و $x = 6$. پیوستگی تابع را در این نقاط بررسی می کنیم:

بررسی پیوستگی تابع در $x = 3$:

تابع $f(x)$ قطعاً در $x = 3$ پیوسته است. زیرا در ضابطه تابع عامل صفر کننده $(x - 3)$ وجود دارد که باعث می شود بدون توجه به مقادیری که تابع جزء صحیح به خود می گیرد، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر صفر شود. در نتیجه تابع در این نقطه پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x = 6$:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (x - 3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (6 - 3)[1^-] = 3 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (x - 3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (6 - 3)[1^+] = 3 \times 1 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$$

تابع در $x = 6$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)$ در بازه $(0, 9)$ تنها در ۱ نقطه ناپیوسته است.

گزینه ۲

برای این که تابع در \mathbb{R} پیوسته باشد، باید در $x = -1$ که مرز ضابطه های تابع است نیز پیوسته باشد. پس پیوستگی تابع را در نقطه ای به طول $x = -1$ بررسی می کنیم. حد چپ تابع در نقطه ای به طول $x = -1$ برابر $\frac{1}{4}$ و مهم است. بنابراین برای به دست آوردن حد چپ صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کرده و با ساده کردن آن حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} \times \frac{2 + \sqrt{3-x}}{2 + \sqrt{3-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(4 - 3 + x)}{(x+1)(2 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+1)}{(x+1)(2 + \sqrt{3-x})} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{4}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} ax + 1 = -a + 1, f(-1) = -a + 1$$

طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow -a + 1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -a = -\frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

وقتی $x \rightarrow -4$ ، حاصل حد $\infty - \infty$ بوده و مبهم است.

برای رفع ابهام ابتدا با مخرج مشترک گیری میان دو کسر، عبارت را به ساده ترین شکل ممکن در آورده سپس حد آن را وقتی $x \rightarrow -4$ محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} &= \frac{x+19}{(x+4)(x-1)} + \frac{3}{x+4} \\ &= \frac{x+19+3(x-1)}{(x+4)(x-1)} = \frac{x+19+3x-3}{(x+4)(x-1)} = \frac{4x+16}{(x+4)(x-1)} \\ &= \frac{4(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{4}{x-1} \end{aligned}$$

حالا حاصل عبارت ساده شده را وقتی $x \rightarrow -4$ حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{-4-1} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

ضابطه $\text{gof}(x)$ یا همان $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. حد تابع $g(f(x))$ را وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، به دست می آوریم. دقت کنید اگر در محاسبه حد به عدد $a^{-\infty}$ که در آن $a > 1$ است برخوردیم حاصل برابر صفر می شود.

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = \frac{2\left(2^{\frac{1}{x}}\right) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{gof}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\left(2^{\frac{1}{x}}\right) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{gof}(x) = \frac{2\left(2^{-\infty}\right) - 3}{\left(2^{-\infty}\right) + 1} = \frac{(2 \times 0) - 3}{0 + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

ابتدا با به دست آوردن حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ، معادلهٔ مجانب افقی تابع را تعیین می‌کنیم. در ادامه محل برخورد مجانب افقی و نمودار تابع یا همان نقطهٔ A را تعیین کرده و در نهایت فاصلهٔ آن را از مجانب قائم (ریشهٔ مخرج کسر) محاسبه می‌کنیم.

$$\text{مجانِب افقی: } y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow y = 2$$

معادلهٔ $f(x) = 2$ را حل کرده و مختصات نقطهٔ A را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = 2 \Rightarrow \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 2(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{8 - 6}{1} = 2$$

پس مختصات نقطهٔ برخورد برابر $A(2, 2)$ شد. اکنون مجانب قائم را تعیین کرده و فاصلهٔ نقطهٔ A از آن را به دست می‌آوریم:

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(2, 2)$ از خط $x = 1$ برابر است با:

$$d = |2 - 1| = 1$$

در تابع به فرم $y = [f(x)]$ هر جا حاصل $f(x)$ برابر عدد صحیح شود، تابع در آن نقاط ناپیوسته است. بنابراین در بازهٔ $[2, 2+k)$ حاصل عبارت جبری $x^2 - 3$ نباید برابر یک عدد صحیح شود. (البته در نقطهٔ شروع بازه در صورتی که تابع از راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی‌شود.)
ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = [x^2 - 3] = [x^2] - 3$$

سپس بررسی می‌کنیم عبارت $[x^2]$ در اولین نقطه‌ای که بعد از $x = 2$ برابر یک عدد صحیح می‌شود کدام نقطه است. آن نقطه را برابر $2+k$ قرار داده و در نهایت مقدار k را محاسبه می‌کنیم.

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{اولین عدد صحیح بعد از ۴}} x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

پس تابع $f(x)$ به ازای $x = \sqrt{5}$ ناپیوسته می‌شود. $2+k$ را برابر $\sqrt{5}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$2+k = \sqrt{5} \Rightarrow k = \sqrt{5} - 2$$

گام اول

الف) همسایگی مورد نظر زیر مجموعه ای از نامعادله داده شده است. پس ابتدا باید محدوده قابل قبول که از حل نامعادله به دست می آید را تعیین کنیم.

ب) توجه کنید که $x = \frac{1}{p}$ ریشهٔ مخرج کسر بوده و به ازای آن کسر "تعریف نشده" می شود. پس در نهایت باید از محدودهٔ جواب خارج کنیم.

گام دوم

$$\left| \frac{x-3}{2x-1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|x-3|}{|2x-1|} > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2}} |x-3| > |2x-1|$$

دو طرف نامعادله دارای مقادیر نامنفی هستند. پس با خیال راحت آن ها را به توان دو می رسانیم:

$$\begin{aligned} |x-3|^2 &> |2x-1|^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 > 4x^2 - 4x + 1 \\ \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 < 0 &\Rightarrow (3x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

با خارج کردن $x = \frac{1}{p}$ از محدودهٔ جواب، مقادیری که x می تواند بپذیرد به صورت زیر خواهد بود:

$$x \in \left(-2, \frac{4}{3}\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$$

همسایگی با بیشترین شعاع ممکن خواسته شده است. پس بازه $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ را که بزرگ تر است، انتخاب کرده و مرکز همسایگی را به دست می آوریم:

$$a = \frac{-2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

مرز ضابطه ها خیلی شفاف مشخص نشده است. باتوجه به نامعادلات قدر مطلق، ضابطه ها را با مرز شفاف آن یک بار دیگر می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ x[x] & , \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R} پیوسته باشد، باید در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد. می دانیم خط $x = 3$ بالای خط $x = 1$ قرار دارد، بنابراین باید برای به دست آوردن نقطه برخورد آن با محور عرض ها از ضابطه $f(x) = ax + b$ استفاده کرد. بررسی پیوستگی تابع در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] \Rightarrow a + b = 1 \times 0 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (\text{I})$$

بررسی پیوستگی تابع در $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} ax + b = -a + b, \quad f(-1) = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = (-1)[-1^+] = (-1)(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow -a + b = 1 \quad (\text{II})$$

از دو رابطه (I) و (II) نتیجه می شود:

$$\begin{cases} a + b = 0 & \xrightarrow{(+)} 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \xrightarrow{(\text{I})} a = -\frac{1}{2} \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax + b = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \xrightarrow{x=3} f(3) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

گام اول

الف) شرط پیوستگی در نقطه ای به طول $x = 0$ عبارت است از:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

ب) در این تست $f(0) = a$ است پس برای این که تابع پیوسته باشد باید $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} = a$ باشد.

گام دوم

با به دست آوردن حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، شرط پیوستگی را بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \rightarrow \text{وجود ندارد}$$

بنابراین به ازای هیچ مقدار a تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته نیست.

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x \rightarrow 0^-$ عبارت $x^3 - x$ به سمت 0^+ میل می کند یا 0^- . برای این کار از تغییر متغیر $x^3 - x = t$ استفاده می کنیم. با تعیین محدوده t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه های داده شده به دست می آوریم.

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow x^3 > x \Rightarrow x^3 - x > 0 \xrightarrow{x^3 - x = t} t > 0 \Rightarrow t \rightarrow 0^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ با همان $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ باید از ضابطه بالا که مربوط به x های مثبت است، استفاده کنیم:

$$t \rightarrow 0^+ \Rightarrow t > 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{1-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1-t} = \sqrt{1-0} = 1$$

گام اول

در همسایگی محذوف داده شده عدد ۳ حذف شده است پس عدد ۳ مرکز همسایگی است.

گام دوم

عدد ۳ مرکز همسایگی است.

$$3 = \frac{3a - 7 + a + 5}{2} \Rightarrow 6 = 4a - 2 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس همسایگی محذوف به صورت $\{3\} - (-1, 7)$ در می آید. بنابراین، شعاع همسایگی برابر است با:

$$\text{شعاع همسایگی} = \frac{7 - (-1)}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

گام اول

الف) $x \rightarrow 2^-$ یعنی $x < 2$ است، باتوجه به این نکته تعیین می‌کنیم علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است یا منفی سپس آن را از قدر مطلق خارج می‌کنیم.

ب) وقتی $x \rightarrow 2^-$ حاصل صورت و مخرج کسر برابر صفر حدی می‌شود. پس برای رفع ابهام می‌توانیم هم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و هم از قاعده هوییتال استفاده کنیم.

گام دوم

$$\left. \begin{aligned} x^2 - x - 2 &= (x - 2)(x + 1) \\ x \rightarrow 2^- &\Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x^2 - x - 2| = -(x - 2)(x + 1)$$

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-x^2 + x + 2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{(4x^2 - x^2 - 12)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x - 2)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x + 2)} \\ &= \frac{-(2 + 1)(4 + 4)}{3(2 + 2)} = \frac{-3 \times 8}{3 \times 4} = -2 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب درسی)

در این روش حاصل حد را با استفاده از قاعده هوییتال به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 1)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \\ \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 12}}} &= \frac{-4 + 1}{2 - \frac{2}{\sqrt{4 + 12}}} = \frac{-3}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2 \end{aligned}$$

نکته: اگر عبارت داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می‌توان نتیجه گرفت جزء صحیح با عبارت داخل آن هم‌ارز است.
بررسی گزینه اول:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left(\frac{1}{x} \right) = 1$$

بررسی گزینه دوم:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{1}{x} \right) = 1$$

بررسی گزینه سوم:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

پس حاصل حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$ متناهی نیست.

بررسی گزینه چهارم:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = (+\infty)(0) = 0$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ است، پس باید مخرج کسر در همسایگی $x = 2$ مثبت و به ازای $x = 2$ صفر شود. یعنی معادله $x^2 + ax + b = 0$ باید ریشه مضاعف $x = 2$ داشته باشد و در نتیجه:

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

با مقایسه دو عبارت $x^2 + ax + b$ و $x^2 - 4x + 4$ نتیجه می‌شود که $a = -4$ و $b = 4$ ، پس $a + b = 0$.

برای پیوستگی این تابع در \mathbb{R} ، بایستی در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(۲) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} (ax - ۱) = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x+۲}} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳(x-۲)(x + \sqrt{x+۲})}{(x - \sqrt{x+۲})(x + \sqrt{x+۲})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳(x-۲)(x + \sqrt{x+۲})}{x^۲ - x - ۲} = \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳(x-۲)(x + \sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳(x + \sqrt{x+۲})}{x+۱} = \frac{۳(۲+۲)}{۲+۱} = ۴$$

ضمناً برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از قاعده هوییتال نیز می‌توانید استفاده کنید:

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x+۲}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow ۲^+} \frac{۳}{1 - \frac{1}{۲\sqrt{x+۲}}} = \frac{۳}{1 - \frac{1}{۴}} = ۴$$

حال برای پیوستگی f در $x = ۲$ ، مقدار تابع را برابر حد آن قرار می‌دهیم:

$$۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجه صورت کوچکتر یا مساوی درجه مخرج باشد، مجانب افقی دارد.
 ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به شرط آنکه تابع حداقل در یک بازه یک طرفه آن نقطه تعریف شده و دارای حد نامتناهی باشد.
 ج) فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از نقطه $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$BA = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

گام دوم

$$y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow D = [0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

درجه مخرج بزرگتر از درجه صورت است، پس تابع مجانب افقی دارد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

برای به دست آوردن ریشه‌های مخرج کسر، آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ و $x = 1$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع در این نقاط نیز بررسی شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{1 - 1}{1 - 3 + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - 3} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 - 3} = -\frac{1}{2} \neq \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4 - 6 + 2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{0} = +\infty$$

بنابراین فقط خط $x = 2$ مجانب قائم تابع است.

محل تلاقی مجانب قائم و افقی، نقطه $A(2, 0)$ است، فاصله این نقطه از مبدأ مختصات $(0, 0)$ برابر است با:

$$OA = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

مقدار تابع: $f(-2) = a$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^2}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x + 2)} \\ &= - \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 2x + 4) = -(4 + 4 + 4) = -12 \end{aligned}$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -12$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینه ۴ درست است.

تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \cos^2 x = a \cos^2 \frac{\pi}{4} = a \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}a = 2 \Rightarrow \sqrt{2}a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به شرط آنکه تابع حداقل در یک بازه یک طرفه آن‌ها تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.
 ب) یک تابع گویا که درجه صورت کوچک‌تر یا مساوی درجه مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

گام دوم

چون $a \neq 0$ است؛ پس منحنی حتماً یک مجانب افقی دارد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x}{ax^2 + 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

پس $y = \frac{1}{a}$ مجانب افقی تابع است. بنا بر صورت سؤال تابع باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد. مخرج تابع، چندجمله‌ای درجه دوم است، برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه دارد، معادله $\Delta = 0$ را حل می‌کنیم.

$$ax^2 + 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 16 - 4(a)(-1) = 0 \Rightarrow 16 + 4a = 0$$

$$\Rightarrow 4a = -16 \Rightarrow a = -4$$

$$\xrightarrow{a=-4} -4x^2 + 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین خط $y = -\frac{1}{4}$ مجانب افقی تابع و خط $x = \frac{1}{2}$ مجانب قائم تابع می‌باشد. محل برخورد این دو مجانب نقطه $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ است.

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ ، ابتدا لازم است حد چپ و راست تابع را در این نقطه به دست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + ax = 1 - a$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+a}$$

باتوجه به گام اول داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{1}{-1+a} = 1 - a$$

$$\Rightarrow -(1-a)(1-a) = 1 \Rightarrow -(1-a)^2 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \quad (*)$$

معادله (*) فاقد ریشه حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر \emptyset می‌شود.

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از روابط مثلثاتی و قاعده هوییتال می‌توان رفع ابهام کرد.
روش اول:
با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}}{\cos x} = -\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

طبق قاعده هوییتال، اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعده هوییتال را تا جایی که ابهام برطرف شود، به کار می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(1 + \tan^2 x)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4})}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-(1 + 1)}{1} = -2$$

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطه $x = 2$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} &\times \frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{(2 - x)(x + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{(2 - x)(x + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{x + \sqrt{2x}} = \frac{-2}{2 + 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

باتوجه به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = 2$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

ابتدا تعیین می کنیم حاصل $[f \cos^2 \pi x]$ وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ برابر چه عددی می شود. با توجه به این که حاصل حد برابر $\frac{1}{6}$ است، مقادیر a و b و در نهایت مقدار $a + b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \rightarrow \frac{1}{6}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{6} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos \pi x < \cos \frac{\pi}{6}$$

دقت کنید که در ناحیه اول مثلثاتی با افزایش مقدار x ، مقدار $\cos x$ کاهش پیدا می کند. چون πx از $\frac{\pi}{6}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $\cos \pi x$ از مقدار $\cos \frac{\pi}{6}$ کمتر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos \pi x < \frac{\sqrt{3}}{2} &\xrightarrow{\text{به توان } 2} \cos^2 \pi x < \frac{3}{4} \Rightarrow \\ f \cos^2 \pi x < 3 \Rightarrow f \cos^2 \pi x \rightarrow 3^- \Rightarrow [f \cos^2 \pi x] = 2 \end{aligned}$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ برابر صفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{1}{6}$ است، اگر وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ مخرج کسر عددی غیر از صفر باشد حاصل حد برابر صفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{1}{6}$ داده شده پس باید وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} ax + b = 0 \Rightarrow \frac{a}{6} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = -6b \quad (I)$$

با فرض $a = -6b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{2 - 12x}{ax + b} = \frac{0}{0} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{2 - 12x}{-6bx + b} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{2(1 - 6x)}{b(-6x + 1)} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 4 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} a = -6b = -6 \times 4 = -24$$

بنابراین $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -24 + 4 = -20$$

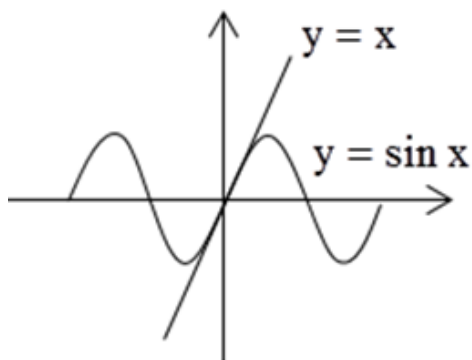
حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 1$ محاسبه می کنیم. برای این که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد، باید رابطه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$ برقرار باشد. این رابطه را بررسی کرده و مقداری از a را تعیین می کنیم که به ازای آن تابع پیوسته باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{x - 1} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{-(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt[3]{(1 - \sqrt{x})^2(1 + \sqrt{x})}} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = 1$ فاقد حد است بنابراین به ازای هیچ مقدار a در $x = 1$ پیوسته نیست.

در مورد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، رابطه زیر برقرار است:
 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. با استفاده از تساوی داده شده می توان گفت $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود و تابع $\frac{x}{\sin x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود.
 با استفاده از نمودار دو تابع نیز می توان دریافت که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = 0$$



همان طور که مشاهده می کنید اگر $x > 0$ باشد نمودار $y = x$ بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد و اگر $x < 0$ باشد نمودار $y = x$ پایین تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد.

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = [1^+] = 1$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0$$

بنابراین حد عبارت داده شده وقتی $x \rightarrow 0$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] + 2 \left[\frac{x}{\sin x} \right] = 0 + 2(1) = 0 + 2 = 2$$

تابع دارای مجانب افقی $y = ۲$ است. تابع $g(x) = f(x) - ۲$ را تشکیل می‌دهیم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{۲x^۲ - x - ۲}{x^۲ + ۲x} - ۲ = \frac{-۵x - ۲}{x^۲ + ۲x}$$

x	$-\infty$	-۲	$-\frac{۲}{۵}$	۰	$+\infty$
g(x)		+ ∞	- ∞	+ ∞	-

باتوجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow g(x) < ۰ \Rightarrow f(x) - ۲ < ۰ \Rightarrow f(x) < ۲$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow g(x) > ۰ \Rightarrow f(x) - ۲ > ۰ \Rightarrow f(x) > ۲$$

پس در شاخه $+\infty$ تابع $f(x)$ زیر خط $y = ۲$ و در شاخه $-\infty$ تابع $f(x)$ بالای خط $y = ۲$ قرار دارد.

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

گام دوم

ابتدا باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، محدوده دو ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & ; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

اکنون حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2(1) = 2$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

باتوجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ است، تابع در $x = 1$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x = 2(-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

$$f(-1) = 2(-1) = -2$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ پیوسته است.

گام اول

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ و } \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ می‌دانیم:}$$

گام دوم

وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ ، حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

الف) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases}$$

ضابطه تابع شامل یک عبارت قدر مطلق است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$\begin{array}{c|cc} & -2 & 1 \\ \hline x^2 + x - 2 & + & - & + \end{array}$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x \leq -2 \\ \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} & ; -2 < x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

اکنون باتوجه به قسمت الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x - 2) = -1 - 2 = -3$$

باتوجه به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطه $x = 1$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته نخواهد بود.

ابتدا تعیین می‌کنیم مقادیر $f(x)$ به ازای $x \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ چند است:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

ضابطه $g(x)$ را با توجه به مقادیر $f(x)$ تشکیل داده و بررسی می‌کنیم در بازه $[-4, 4]$ تابع در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1 ; x \in \mathbb{R}$$

در تمام نقاط بازه $[-4, 4]$ تابع $g(x) = -1$ (چون یک تابع ثابت است) پیوسته است. پس تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه برابر صفر است.

با استفاده از نسبت های مثلثاتی کمان $\alpha + \beta$ ، حاصل $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم تا عبارت مثلثاتی فرم ساده تری به خود بگیرد. سپس با از بین رفتن عامل صفرکننده در صورت و مخرج، حاصل حد را محاسبه می‌کنیم و در نهایت مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \cos(x + \frac{\pi}{4}) &= \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{4}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} = 2^a \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همه نقاط این مجموعه پیوسته باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازه $x > 2$ و $x < 2$ به صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطه $x = 2$ بررسی کنیم. باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax + b = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + bx - 1 = 4 + 2b - 1 = 3 + 2b$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 2a + b = 3 + 2b = 5$$

داریم:

$$3 + 2b = 5 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$2a + b = 5 \Rightarrow 2a + 1 = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

گام اول

می‌دانیم: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. باتوجه به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x (\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2})} = -1$$

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجه صورت کوچکتر یا مساوی درجه مخرج باشد، مجانب افقی دارد.
 ب) در توابع کسری ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به شرط آنکه تابع حداقل در یک بازه یک طرفه آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{2x+1} \\ g(x) &= \frac{2x-1}{x+2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+3}{2g(x)+1}$$

$$= \frac{\frac{2x-1}{x+2} + 3}{2 \frac{2x-1}{x+2} + 1} = \frac{\frac{2x-1+3x+6}{x+2}}{\frac{4x-2+x+2}{x+2}} = \frac{5x+5}{5x}$$

باتوجه به قسمت "الف" از گام اول، تابع دارای یک مجانب افقی است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+5}{5x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{5x} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ مجانب افقی}$$

همچنین خط $x = 0$ مجانب قائم تابع است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+5}{5x} = \frac{5}{0} = +\infty$$

نقطه $(0, 1)$ محل تلاقی این دو مجانب است.

گزینه ۱

اگر $x = 2k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin \frac{\pi}{2}x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k \in \mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و در نتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است. حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x = 2k + 1$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطه فردی مانند $x = 1$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2}x = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2}x = (-1)^0 \sin \frac{\pi}{2} = (1)(1) = 1$$

$$f(1) = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$ در اعداد فرد ناپیوسته است

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

می‌دانیم: $[۲^-] = ۱$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2(1)}{2-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x(x-2)} + \frac{2}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{1 - \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = -\frac{1}{4}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همه نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کافی است شرط پیوستگی را در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} = \frac{0}{0}$$

با تغییر متغیر $t = x - \frac{\pi}{2}$ و با استفاده از هم‌ارزی $\sin u \sim u$ $u \rightarrow 0$ ، رفع ابهام می‌کنیم.

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow 2x - \pi = 2t$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 2t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(2t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{2t} = -1$$

تابع $f(x)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a = -1$$

چون $f(x)$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-2) = 0$ است.

$$f(x) = x^6 + ax^3 - \lambda x \Rightarrow f(-2) = 16 - 8a + 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 8a = 2\lambda \Rightarrow a = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow f(x) = x^6 + \frac{\lambda}{4}x^3 - \lambda x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x + 2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r} x^6 + \frac{\lambda}{4}x^3 - \lambda x \Big| x + 2 \\ -(x^6 + 2x^3) \\ \hline \frac{\lambda}{4}x^3 - \lambda x \\ -(\frac{\lambda}{4}x^3 + \frac{\lambda}{2}x^2) \\ \hline -\frac{\lambda}{2}x^2 - \lambda x \\ -(-\frac{\lambda}{2}x^2 - \lambda x) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 2)(x^3 + \frac{\lambda}{2}x^2 - \lambda x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x(x^2 + \frac{\lambda}{2}x - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ برابر با $x = -1 - \sqrt{5}$ است.

باتوجه به ضابطه تابع f ، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = 6 - [2^-] = 6 - 1 = 5 \\ f(2) = a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x = 2$ پیوسته باشد، باید $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، پس باتوجه به مقادیر به دست آمده در بالا، از آنجاکه

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \text{ بنابراین تابع } f \text{ در } x = 2, \text{ به ازای هیچ مقداری برای } a \text{ پیوسته نیست.}$$

تذکر:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} [a^-] = a - 1 \\ [a^+] = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{}} [\cos (\frac{\pi}{\sqrt{}})^+] - \cos \pi [\sin (\sqrt{\pi})^+]$$

$$= 1 \times [0^-] - (-1)[0^+] = 1 \times (-1) - 0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{}} [\cos (\frac{\pi}{\sqrt{}})^-] - \cos \pi [\sin (\sqrt{\pi})^-]$$

$$= 1 \times [0^+] - (-1)[0^-] = 0 + (-1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{(\sqrt{x+1})(x+2)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3(x-2) - 4(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(x+2)(x-2)} \right)$$

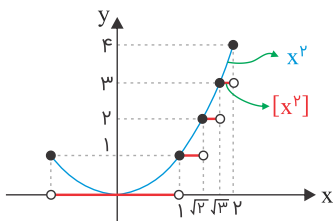
$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-5(x+2)}{(\sqrt{x+1})(x+2)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-5}{(\sqrt{x+1})(x-2)} \right) = -\frac{5}{12}$$

گام اول

تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ مقداری صحیح باشد، ناپیوسته است.

گام دوم

بهترین راه برای تشخیص نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, 2]$ ، رسم نمودار این تابع در بازه موردنظر است:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در نقاط $x = 1$ ، $x = \sqrt{2}$ ، $x = \sqrt{3}$ ، $x = 2$ و $x = -1$ ناپیوسته است؛ بنابراین تابع در بازه $[-1, 2]$ دارای پنج نقطه ناپیوستگی است.

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{-2} = -2$$

$$f(2) = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ حد دارد، در صورتی که $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

حد عبارت داده شده را در دو حالت $x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-$ و $x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] \cos 3x + [\tan^2 x] = [\sin(\circ^+)] \cos \pi + [(\sqrt{3^+})^2] = [\circ^+] \cos \pi + [3^+] = (\circ)(-1) + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] \cos 3x + [\tan^2 x] = [\sin(\circ^-)] \cos \pi + [(\sqrt{3^-})^2] = [\circ^-] \cos \pi + [3^-] = (-1)(-1) + 2 = 3 \end{cases}$$

حد راست و چپ تابع در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ موجود و برابر است، بنابراین حد تابع برابر ۳ است.

گزینه ۱

گام اول

حاصل حد مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x - 2$ ، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6 - x^2 - x}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-(x-2)(x+3)}{x(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)}{x} = \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

در مرحله اول صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج کسر ضرب می کنیم تا عبارت را به ساده ترین شکل ممکن به دست آوریم.

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x^2 - 2x} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{-2x}$$

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |x|}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

راه حل دوم: (فراتر از کتاب)

برای به دست آوردن حاصل حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

با استفاده از هم ارزی حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{-2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{1} \left| x + \frac{2}{2} \right|}{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x + 1}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-2x} = -1 \end{aligned}$$

گام اول

اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، در این صورت حاصل $[x] + [-x] = -1$ است.

گام دوم

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t) \Rightarrow a = -1$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+8)(x+2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(2 + \sqrt[3]{x})(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+8)(x+2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(x+8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6} = \frac{-6 \times 12}{6} = -12 \end{aligned}$$

راه حل دوم: (فراتر از کتاب)
با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{3 \times 4}} = -6 \times 2 = -12$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} &\times \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})}{4 - (2 + \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})}{2 - \sqrt{3-x}} \times \frac{2 + \sqrt{3-x}}{2 + \sqrt{3-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})(2 + \sqrt{3-x})}{4 - 3 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})(2 + \sqrt{3-x}) = 1(2+2)(2+2) = 16 \end{aligned}$$

راه حل دوم: (فراتر از کتاب)
استفاده از قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 5}{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}} = \frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = 16$$

با استفاده از اتحاد $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 - \sqrt[3]{x+6})(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})}{\sqrt{(x-2)^2} (4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)}{(x-2)(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} = -\frac{1}{4+4+4} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

روش دوم: (هوپیتال - فراتر از کتاب)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} = \frac{0}{0} \\ \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} &\xrightarrow{x-2 > 0} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{3}(x+6)^{-\frac{2}{3}}}{1} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}(2+6)^{-\frac{2}{3}}}{1} = -\frac{1}{3 \times 4} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x-2)}{(x-1)} = \frac{-(-1-2)}{-1-1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 + \cos \pi x)(1 - \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

تابع f به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & ; -1 < x < 1 \\ ax + b & ; (x \geq 1) \vee (x \leq -1) \end{cases}$$

تابع $x[x]$ در فاصله $(-1, 1)$ و تابع $ax + b$ در هر فاصله‌ای پیوسته است، پس فقط کافی است که تابع f در 1 و -1 پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x]) = 0$$

در $x = 1$ پیوسته است، پس $a + b = 0$ یا $a = -b$ است. از طرفی f در -1 پیوسته است؛ پس:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x[x]) = (-1)[(-1)^+] = (-1)(-1) = 1$$

$$\Rightarrow -a + b = 1 \xrightarrow{b=-a} -a - a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

گام اول

تابع در $x = 0$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ است.

گام دوم

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} \Rightarrow a = 1 + \sqrt{1-0} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a = 2$$

می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ و $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{1 + \sqrt[3]{\cos x}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{1 + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2})^-}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{1 + \sqrt[3]{\cos x}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{1 + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2})^+}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{\sin x}{1 + \sqrt[3]{\cos x}} = \frac{\frac{-\sqrt[3]{3}}{2}}{1 + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2})^\pm}} = \frac{-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{0^\pm} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^3 x}{\sqrt{1 + \sin^3 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^3 x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^3 x}{|\sin x + \cos x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\sin x + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^3 x (\sin x + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^3 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}$$

راه حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x} + 2 \left| x + \frac{1}{4} \right|)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x} - 2(x + \frac{1}{4})) = -\frac{1}{4}$$

راه حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{4x^2 + x})(\sqrt{x} - \sqrt{4x^2 + x})}{\sqrt{x} - \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + x)}{\sqrt{x} - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x} - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x} - 2x} = -\frac{1}{4}$$

با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |2x|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = 3\end{aligned}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همه نقاط این بازه پیوسته باشد.
ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطه داده شده روی بازه $[1, +\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطه $x = 6$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(6) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a + \frac{3}{4}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = 6$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه \mathbb{R} پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازه $x > 2$ و $x < 2$ به صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است؛ بنابراین کافی است پیوستگی تابع را فقط در نقطه $x = 2$ بررسی کنیم. باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + ax - 5 = 2^2 + 2a - 5 = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = 2a - 1$$

$$f(2) = 2a - 1$$

به ازای هر مقدار حقیقی a ، تساوی $2a - 1 = 2a - 1$ برقرار است.

گام اول

الف) برای اینکه تابع $f(x)$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، باید بر روی تمام نقاط این بازه پیوسته باشد. نقطه مرز ضابطه‌ها، یعنی $x = \frac{\pi}{3}$ نقطه‌ای است که پیوستگی در مورد آن باید بررسی شود.
 ب) شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{3}$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

گام دوم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{-\sin\left(\frac{3\pi}{3} - 3x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$

$$\xrightarrow{x - \frac{\pi}{3} = t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(3t)}{\sin t} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \sin \Delta x - a = \sin \frac{\Delta\pi}{3} - a = 1 - a$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - a$$

شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 1 - a = -3 \Rightarrow a = 4$$

گام اول

الف) وقتی $x \rightarrow 3^+$ حد عبارت صورت برابر ۱- است. پس حد عبارت مخرج باید برابر 0^+ شود تا حاصل حد برابر $-\infty$ شود. حد عبارت مخرج وقتی $x \rightarrow 3^+$ در صورتی 0^+ می‌شود که $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج باشد (حاصل حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 3^+$ و $x \rightarrow 3^-$ باید برابر 0^+ شود).
 ب) مخرج باید به صورت $2(x-3)^2$ باشد تا بتوان گفت $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج است.

گام دوم

$$2(x-3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 18 \end{cases} \Rightarrow a + b = -12 + 18 = 6$$

فرض کرده و عبارت را بر حسب $\tan x$ به دست می آوریم و حاصل حد را وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ محاسبه می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = -2$$

باتوجه به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جمله صورت بر بزرگ‌ترین جمله مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m + 3 = n - 2$
بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

و همچنین:

$$m + 3 = n - 2 \xrightarrow{m = -\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} + 3 = n - 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2}$$

بنابراین داریم:

$$m + n = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

گام اول

الف) یک تابع گویا زمانی مجانب افقی دارد که درجه صورت کوچکتر یا مساوی درجه مخرج باشد.
 ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به شرط آنکه تابع حداقل در یک بازه یک طرفه آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

$$y = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{1, -2\}$$

معادله مجانب‌های قائم و افقی تابع را نوشته و نقطه تقاطع آن‌ها را به دست می‌آوریم. درجه صورت و مخرج باهم مساوی‌اند پس تابع دارای مجانب افقی است. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ مجانب افقی}$$

اکنون باتوجه به قسمت "ب" از گام اول، ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$x = 1$ و $x = -2$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع نیز در آن‌ها برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x + 2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} = \frac{2(-2)^2 - 2(-2)}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{8 + 4}{4 - 4} = +\infty$$

بنابراین تابع فقط دارای یک مجانب قائم به معادله $x = -2$ است.

(توجه کنید که می‌توانستیم ابتدا تابع را ساده کنیم سپس ریشه‌های مخرج را به دست آوریم)

محل تلاقی دو مجانب $x = -2$ و $y = 2$ نقطه $(-2, 2)$ است. با جایگذاری مختصات این نقطه در معادله خط داده شده، مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$y = x + a \xrightarrow{(-2, 2)} 2 = -2 + a \Rightarrow a = 4$$

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

باتوجه به گام اول داریم:

$$\sqrt{4x^2 + 9x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{4} \left| x + \frac{9}{8} \right| = 2 \left(x + \frac{9}{8} \right) = 2x + \frac{9}{4}$$

چون $x \rightarrow +\infty$ ، می‌توان در مخرج کسر از عبارت \sqrt{x} در برابر $3x$ صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \left(2x + \frac{9}{4} \right)}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x - \frac{9}{4}}{3x} = -\frac{1}{3}$$

الف) برای به دست آوردن حاصل حد ابتدا عبارت $x(x + \sqrt{x^2 - \lambda})$ را در مزدوج عبارت $x + \sqrt{x^2 - \lambda}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.
 ب) چون $x \rightarrow -\infty$ ، در عبارت کسری به دست آمده، برای محاسبه حد حاصل تقسیم جملات پرتوان را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - \lambda}) &\times \frac{x - \sqrt{x^2 - \lambda}}{x - \sqrt{x^2 - \lambda}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + \lambda)}{x - \sqrt{x^2 - \lambda}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{x - \sqrt{x^2 - \lambda}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{2x} = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

گام اول

حاصل حد $\infty - \infty$ و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام و به دست آوردن حاصل حد، از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$n = 3 \Rightarrow \text{عدد فرد} \Rightarrow \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a}(x + \frac{b}{na})$$

$$\sqrt[3]{\lambda x^3 + 2x^2} \sim \sqrt[3]{\lambda}(x + \frac{2}{3\lambda}) = 2(x + \frac{1}{12}) = 2x + \frac{1}{6}$$

حالا حاصل حد را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{\lambda x^3 + 2x^2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \frac{1}{6} - 2x) = \frac{1}{6}$$

گزینه ۲

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگترین درجه صورت کسر با بزرگترین درجه مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگترین درجه x در صورت کسر ۱ است، پس $n = 1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی که $x \rightarrow +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a}|x + \frac{b}{2a}|$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{1}|x + (\frac{-3}{2})|}{ax - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{2x - \sqrt{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x^2 + 3x}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{-6(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \frac{-3}{-6(-2-2)} = \frac{-3}{(-6)(-4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

گام اول

الف) نمودار تابع از نقطه $(۲, ۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند.
ب) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

گام دوم

باتوجه به قسمت الف) از گام اول داریم:

$$f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} \xrightarrow{f(2)=1} 1 = \frac{2a + 1 + 5}{4} \Rightarrow 2a + 6 = 4$$

$$\Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

باتوجه به قسمت ب) از گام اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{4x^2 + 9} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + 2x}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{3x - 2} = \frac{1}{3}$$

گام اول

می‌دانیم: $\sqrt{x^2 + 5} \sim x$ $x \rightarrow \infty$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجه بزرگ‌ترین جمله صورت و بزرگ‌ترین جمله مخرج با هم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرایب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{ax^n + 4}$$

$$\xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{ax + 4} = \frac{-1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4}$$

اکنون حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} \times \frac{3 + \sqrt{x^2 + 5}}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - x^2 - 5}{2(2 - x)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{2(2 - x)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + x}{2(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \frac{2 + 2}{2(3 + \sqrt{4 + 5})} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جمله صورت بر بزرگ‌ترین جمله مخرج به دست می‌آید.

از طرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجه صورت و بزرگ‌ترین درجه مخرج کسر با هم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n = 2$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{3x^2} = \frac{a}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a ، حاصل $f(-1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{3(-1)^2 - 1} = \frac{2 + 3 + 1}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x + 1 < 3 < 2x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 < 3 \Rightarrow x < 2 \\ 2x - 1 > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

برای یافتن مجانب افقی تابع، حاصل حد تابع را وقتی $x \rightarrow \infty$ میل می کند، به دست می آوریم. برای این کار نسبت ضرایب پرتوانترین جملات در صورت و مخرج کسر را تعیین می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{مجانب افقی } y &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^3 + 1}{(A-1)x^3 + 16} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^3}{(A-1)x^3} = \frac{A}{A-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow A = 3 \end{aligned}$$

پس معادلهٔ مجانب قائم برابر است با:

$$2x^3 + 16 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -16 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$$

تابع در $x = 1$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x = 1$ برابرند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{a+3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1+a$$

$$\Rightarrow 1+a = \sqrt{a+3} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a + 3 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \quad \checkmark \\ a = -2 \quad \times \end{cases}$$

به ازای $a = -2$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{3}{4})$ را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{ax+3} = \sqrt{x+3}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{3}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4}+3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

باتوجه به نمودار $f(0) = 0$ است، پس داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{0+b}{0-1} = 0 \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow b = 0$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x = 1$ تعریف نشده است، چون $x = 1$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x \rightarrow 1$ باید برابر صفر باشد که تابع به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ دربیاید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} 4x^3 + ax + b = 0 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین داریم: $(a, b) = (-4, 0)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \psi^+} f(x) = a \log_{\psi}^f = \psi a \\ \lim_{x \rightarrow \psi^-} f(x) = \psi a + 1 \end{cases} \Rightarrow \psi a + 1 = \psi a \Rightarrow a = -1$$

$$x < \psi : f(x) = ax + \psi^{x-\psi} = -x + \psi^{x-\psi}$$

$$f(\psi) = -\psi + \psi^{-1} = -\psi + \frac{1}{\psi} = -1/5$$

ابتدا حاصل حد تابع $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2}$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر -1 قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم. وقتی $x \rightarrow +\infty$ عبارت $x^2 - 4$ مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشی کرد. برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2}$$

برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ ، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow |x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x^2 - 4)}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-2-2}{-2-1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

ابتدا وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، حاصل $\left[\frac{1}{x}\right]$ را به دست می آوریم. با داشتن مقدار $\left[\frac{1}{x}\right]$ حاصل حد را محاسبه می کنیم.

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = [0^-] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x}\right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

حاصل حد، وقتی $x \rightarrow 1$ ، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{5-x}}{2 + \sqrt{5-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(2 + \sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(2 + \sqrt{5-x})}{(x-1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2 + \sqrt{5-x})}{1 + \sqrt{x}} = \frac{-(2+2)}{1+1} = -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}$$

حاصل حد، وقتی $x \rightarrow -1$ ، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} \times \frac{2x - \sqrt{3-x}}{2x - \sqrt{3-x}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x)^2 - (\sqrt{3-x})^2}{(x^2 + x)(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3 + x}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x-3}{x(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \frac{-4-3}{(-1)(-2-2)} = \frac{-7}{(-1)(-4)} = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

ابتدا ضابطه تابع $f - g$ را به ساده‌ترین شکل ممکن به دست می‌آوریم (مخرج مشترک گیری کرده و عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم).
مجانِب افقی حاصل حد تابع است وقتی $x \rightarrow \infty$ میل می‌کند. مجانِب قائم هم ریشه‌های مخرج کسر است. با تعیین مجانِب ها، محل برخورد آن‌ها نیز مشخص می‌شود.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{x+11}{x^2 - 3x - 4} - \frac{3}{x-4} \\ &= \frac{x+11}{(x-4)(x+1)} - \frac{3}{x-4} = \frac{x+11 - 3(x+1)}{(x-4)(x+1)} = \frac{x+11 - 3x - 3}{(x-4)(x+1)} \\ &= \frac{-2x+8}{(x-4)(x+1)} = \frac{-2(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{-2}{x+1} \end{aligned}$$

تعیین مجانِب های افقی و قائم:

$$\text{مجانِب افقی: } y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{مجانِب قائم: } x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

پس محل برخورد مجانِب های تابع نقطه $(-1, 0)$ است.

وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-$ ، حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. برای رفع ابهام می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را ساده کرد و یا اینکه از روش‌های دیگری مانند هسپیتال استفاده کرد.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\cot x = \frac{1}{\tan x}} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\tan x + 1}{\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-1} = -1$$

گام اول

الف) وقتی $x \rightarrow 0^-$ یعنی $x < 0$ است و در نتیجه x در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار می‌گیرد پس علامت $\sin x$ منفی می‌شود.
ب) می‌دانیم وقتی $x \rightarrow 0$ هم ارزی $x \sim \sin x$ برقرار است.

گام دوم

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم قرار دارد}} \sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$$

بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

گام اول

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر حدى شده و در نتیجه حد دارى ابهام $\frac{0}{0}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده شده را ساده کرده و حد آن را به دست می آوریم:

$$1) \sin^2 x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \\ = (\sin x - \cos x)^2 \Rightarrow 1 - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2 = (\cos x - \sin x)^2$$

$$2) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{(1 - \tan x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2 \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = \frac{3\pi}{4}$ به دست آورده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} a \sin^2 x = a \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = a \sin^2 \frac{3\pi}{4} = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

شرط پیوستگی تابع در نقطه $x = 1$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

بنابراین داریم:

$$f(1) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{1} = 2$$

پس به ازای هر مقدار a ، تابع در $x = 1$ پیوسته است.

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ دارای حد است در صورتی که:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = -1$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+a)^2 = (-1+a)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x+1) = -2+1 = -1$$

باتوجه به گام اول در صورتی حد تابع در نقطه $x = -1$ موجود است که تساوی $(-1+a)^2 = -1$ برقرار باشد اما این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست؛ بنابراین مجموعه مقادیر a برابر \emptyset می‌شود.

شرط پیوستگی در نقطه a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{1}{a} \\ f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1 - \frac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{4-a}{4}$$

$$\Rightarrow 4 = 4a - a^2 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

برای اینکه تابع در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد باید حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد، بنابراین داریم:

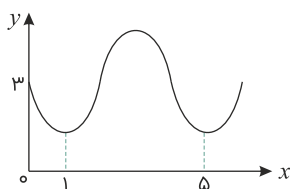
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cos 4x = [1^-] \times 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

۱ در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ مقدار $f(-\frac{1}{p}f(x))$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) صفر
(۴) تعریف نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

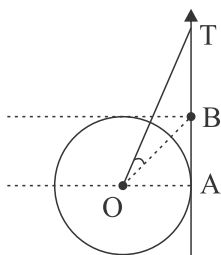
۲ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می‌باشد. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) ۲/۵
(۳) ۳
(۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

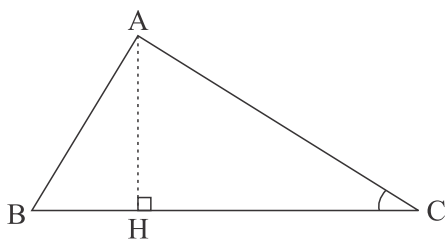
۳ باتوجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر $BT = 2$ باشد، مقدار $\tan(\widehat{TOB})$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{1}{4}$
(۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) $-\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{1}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟



- (۱) ۴۸
(۲) ۵۶
(۳) ۶۴
(۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 (۲) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 (۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 (۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

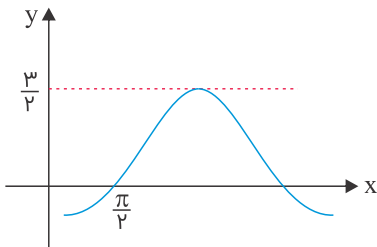
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر انتهای کمان α در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$
 (۲) $-\frac{3}{5}$
 (۳) $\frac{3}{5}$
 (۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

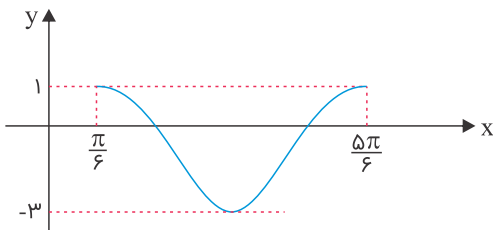
شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. مقدار a ، کدام است؟



- (۱) -1
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازهٔ تناوب است. مقادیر b و c ، کدام‌اند؟



- (۱) $b = 3, c = -1$
 (۲) $b = 3, c = -2$
 (۳) $b = \frac{3}{2}, c = -2$
 (۴) $b = \frac{3}{2}, c = -1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$ ، در بازهٔ $[0, \frac{\pi}{4}]$ ، کدام است؟

- (۱) 2
 (۲) 3
 (۳) 4
 (۴) 5

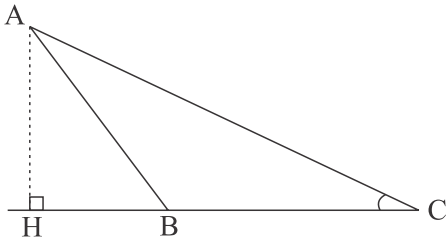
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ حاصل عبارت $\tan(285) \tan(-165) - \sin(1095) \cos(255)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند).

- (۱) $\sin^2(15)$
 (۲) $\cos^2(15)$
 (۳) $-\sin^2(15)$
 (۴) $-\cos^2(15)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟



- (۱) $3/25$
 (۲) $3/5$
 (۳) $3/6$
 (۴) $3/75$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲ اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ برابر ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، $\tan(\alpha + \beta)$ ، کدام است؟

- (۱) 1
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) -3
 (۴) -1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ ، در بازه $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱) 5π
 (۲) 6π
 (۳) $\frac{9\pi}{2}$
 (۴) $\frac{11\pi}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

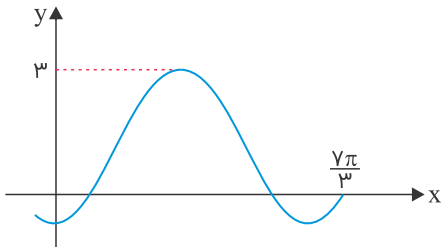
۱۴ اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$
 (۲) $-\frac{3}{5}$
 (۳) $\frac{3}{5}$
 (۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ است. مقدار b ، کدام است؟

۱۵



(۱) ۲

(۲) ۱

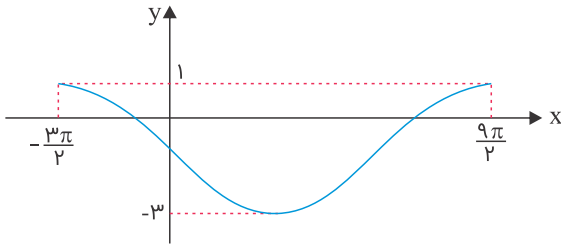
(۳) -۱

(۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

۱۶



(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

حاصل عبارت $\tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(840^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

۱۷

(۲) صفر

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۴) ۲

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱۸

(۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ ، کدام است؟

۱۹

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) -۲

(۴) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۰ نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۱ ساده‌شده عبارت $(\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) \cos 50^\circ$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin 20^\circ$
(۲) $\cos 20^\circ$
(۳) $2 \sin 20^\circ$
(۴) $2 \cos 20^\circ$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۲ اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چقدر است؟

- (۱) $1/5$
(۲) $1/8$
(۳) $2/4$
(۴) $2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۳ اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$ باشد، آنگاه $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$
(۲) $-\frac{1}{5}$
(۳) $\frac{1}{5}$
(۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi$
(۲) $2k\pi$
(۳) $\frac{k\pi}{2}$
(۴) $(2k+1)\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۵ با کدام ضابطهٔ $f(x)$ ، همواره تساوی $(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟

- (۱) $\sin \pi x$
(۲) $\cos \pi x$
(۳) $\sin 2\pi x$
(۴) $\cos 2\pi x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) $1/2$
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$
(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
(۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$
(۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، بزرگ‌ترین مربع ممکن را می‌سازیم، اندازه ضلع مربع کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3} - 3$
(۲) $\sqrt{3} - 1$
(۳) $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$
(۴) $2(\sqrt{3} - 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر α زاویه منفرجه و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) -۷
(۲) $-\frac{1}{7}$
(۳) $\frac{1}{7}$
(۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$
(۲) $\frac{7\pi}{2}$
(۳) 2π
(۴) 3π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

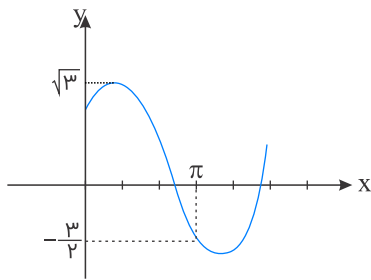
مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$
(۲) 3π
(۳) 4π
(۴) 5π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. کدام است b ؟

۳۲



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

۳۳

$$2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

اگر مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ باشد، اندازه قطر کوچک آن کدام است؟

۳۴

$$3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{6} \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

۳۵

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

۳۶

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

۳۷

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ کدام است؟

۳۸

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

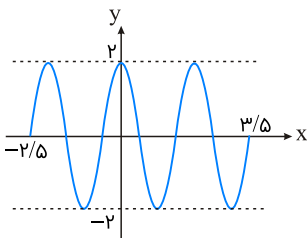
$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin\left(\frac{1}{p} + bx\right)$ است. a, b کدام است؟

۳۹



$$2 \quad (1)$$

$$2/5 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$3/5 \quad (4)$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

۴۰

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{\lambda} \quad (1)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{\lambda} \quad (4)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{\lambda} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۴۱

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۴۲

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۴۳

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$
(۲) 3π
(۳) $\frac{7\pi}{2}$
(۴) 4π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x + \sin^4 x = 1$ کدام است؟

۴۴

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$
(۲) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$
(۳) $k\pi - \frac{\pi}{6}$
(۴) $\frac{k\pi}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

معادلهٔ $x \sin x - 1 = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۴۵

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^6 x - \cos^6 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

۴۶

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

اگر $\tan \alpha = 2$ و $\tan \beta = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(\alpha - \beta)$ کدام است؟

۴۷

- (۱) -۳
(۲) -۲
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $x \neq 0$ کدام است؟

۴۸

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

۴۹

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

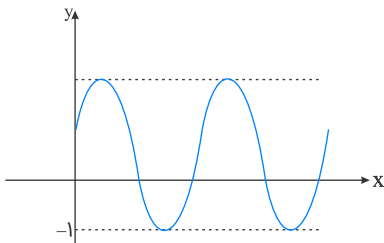
$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{4}{3})$ است. $a + b$ کدام است؟

۵۰



$$3 \quad (۱)$$

$$4 \quad (۲)$$

$$5 \quad (۳)$$

$$6 \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟

۵۱

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

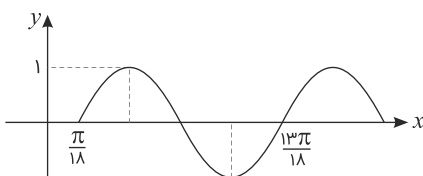
$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{2})$ است. $a + b$ کدام است؟

۵۲



$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$2 \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در معادله مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ مجموع تمام جواب ها در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

۵۳

$$\frac{5\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (1)$$

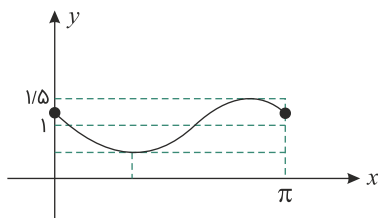
$$\frac{7\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟

۵۴



$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $1 = \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8})$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

۵۵

$$\frac{5\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (1)$$

$$\frac{7\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ ، با فرض $\tan 20^\circ = \frac{3}{4}$ ، کدام است؟

۵۶

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

۵۷

$$\sqrt{6} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

ساده‌شده کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$ کدام است؟

۵۸

$$8 \sin^{-2} 2\theta \quad (2)$$

$$8 \cos^{-2} 2\theta \quad (1)$$

$$16 \sin^{-4} 2\theta \quad (4)$$

$$16 \cos^{-4} 2\theta \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$
 (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$ ، کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در دوزنقه متساوی‌الساقین، با زاویه ۶۰ درجه، قاعده کوچکتر برابر ساق آن است. اگر محیط این دوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) $24\sqrt{3}$ (۲) $27\sqrt{3}$
 (۳) ۴۸ (۴) ۵۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π
 (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

اندازه دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۴
 (۳) ۶۴ (۴) ۷۲

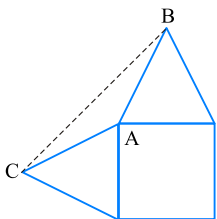
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۵ اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
 (۲) $-\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۶ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC، چند واحد مربع است؟



- (۱) $\sqrt{3} - 1$
 (۲) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 (۳) ۱
 (۴) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۷ دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۸ حاصل عبارت $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۹ اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$
 (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{4}{3}$
 (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۰ از رابطه $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
 (۲) $\frac{2}{9}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{4}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۱ اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۲) $-\frac{3}{8}$
(۴) $\frac{3}{4}$

- (۱) $-\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{3}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

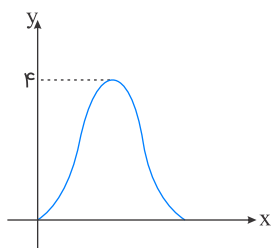
۷۲ خلاصه شده $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$ کدام است؟

- (۲) $\sin 2\alpha$
(۴) صفر

- (۱) $-\sin 2\alpha$
(۳) $\cos 2\alpha$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۷۳ شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2}x)$ در بازه $(0, 4)$ است. b کدام است؟



(۱) -۲

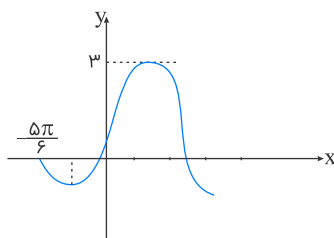
(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۴ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



(۱) $1/5$

(۲) ۲

(۳) $2/5$

(۴) $1 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۵ اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

(۲) $-5/2$

(۴) $5/48$

(۱) $-1/23$

(۳) $5/27$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۶ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

- (۱) $-\cos^2 x$
 (۲) $-\cos x$
 (۳) $\cos^2 x$
 (۴) $\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۷ اگر $a + b = \frac{\pi}{2}$ حاصل $(\tan a + \tan b)$ کدام است؟

- (۱) $\sin b$
 (۲) $\cos a$
 (۳) $\frac{1}{\sin a}$
 (۴) $\frac{1}{\cos b}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۷۸ حاصل $(\tan 20^\circ + \tan 35^\circ) \sin 110^\circ$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cos 15^\circ$
 (۲) $\sin 55^\circ$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) ۱

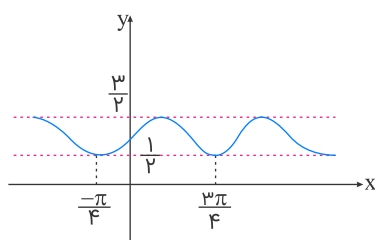
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۷۹ حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



- (۱) ۱
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) ۲
 (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۱ اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right)$ کدام است؟

- (۱) $\sin x$
 (۲) $\cos x$
 (۳) $-\sin x$
 (۴) $-\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{3}{2}$

(۱) $-\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

(۲) $\frac{2k\pi}{5}$
(۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

(۱) $\frac{k\pi}{5}$
(۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

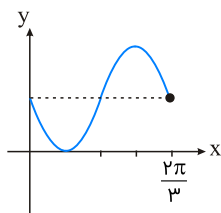
جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

(۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
(۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$
(۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟



- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۱
(۴) ۲

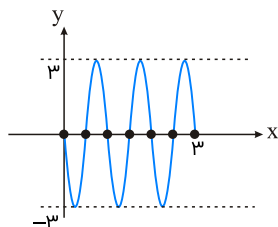
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $1 + \cos x = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

- (۱) مربع
(۲) مستطیل
(۳) مثلث قائم‌الزاویه
(۴) مثلث متساوی‌الساقین

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. کدام است ab ؟



(۱) ۶-

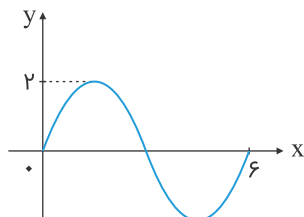
(۲) ۳-

(۳) ۴/۵

(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



(۱) ۴/۳

(۲) ۵/۳

(۳) ۷/۳

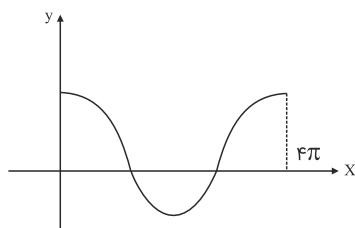
(۴) ۸/۳

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟



(۱) -۱/۲

(۲) ۱/۲

(۳) ۱

(۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ به کدام صورت است؟

(۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $0 = 3 \cot x \sin(\pi + x) + 2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $0 = 1 - 2 \sin(\pi - x) + \sin(x + \pi) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos \frac{4\pi}{3} = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) (\sin x - \tan x)$ ، کدام است؟

$$k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟

$$\{7, 9\} \quad (۱)$$

$$\{1, 4, 7\} \quad (۳)$$

$$\{1, 3, 5\} \quad (۲)$$

$$\{1, 5, 9\} \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $0 = \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin \frac{5\pi}{6}$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۹۷ در معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع
(۲) مثلث قائم‌الزاویه
(۳) ذوزنقه
(۴) مستطیل

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۹۸ مجموع جواب‌های معادله $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8\pi}{3}$
(۲) $\frac{10\pi}{3}$
(۳) 3π
(۴) $\frac{11\pi}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۹۹ مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازه $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{4}$
(۲) $\frac{9\pi}{4}$
(۳) $\frac{5\pi}{2}$
(۴) $\frac{11\pi}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۰۰ جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$
(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
(۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$
(۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۱ اگر $2 = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$ باشد، $\tan x$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۲ اگر $\tan \beta = \frac{1}{4}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{45}$
(۲) $\frac{5}{6}$
(۳) $\frac{5}{75}$
(۴) $\frac{5}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۰۳ اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - b\right)$ کدام است؟

(۱) $\sin 4a$

(۲) $\cos 4a$

(۳) $\sin^2 2a$

(۴) $\cos^2 2a$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۰۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^3 x \sin(\pi - x) - \sin^3 x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{4}$

(۲) $\frac{k\pi}{2}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۰۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan^3 x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$

(۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

(۳) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$

(۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۰۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

(۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

(۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

(۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۰۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

(۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

(۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۰۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۲) 9π

(۱) 8π

(۴) 11π

(۳) 10π

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

(۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار کسر $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{3}{4}$

(۴) $-\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

اگر $\frac{2}{3} = \cos(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x + \frac{\pi}{3})$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{9}$

(۱) $-\frac{2}{9}$

(۴) $\frac{2}{9}$

(۳) $\frac{1}{9}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

گزینه ۱

۱

گام اول

تابع $\sqrt{\sin \pi x - 1}$ در صورتی تعریف شده است که $\sin \pi x - 1 \geq 0$ باشد و چون همواره $\sin \pi x \leq 1$ برقرار است پس باید $\sin \pi x = 1$ باشد. در این حالت $x = 2k + \frac{1}{2}$ می شود که یک عدد غیر صحیح است، بنابراین حاصل $[x] + [-x]$ برابر عدد -1 می شود.

گام دوم

حالا سراغ محاسبه مقدار $f(x)$ و هم چنین مقدار $f(-\frac{1}{p}f(x))$ می رویم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1} = -1 + 0 = -1$$

$$f(-\frac{1}{p}f(x)) = f(-\frac{1}{p}(-1)) = f(\frac{1}{p}) = [\frac{1}{p}] + [-\frac{1}{p}] + \sqrt{\sin \frac{\pi}{p} - 1}$$

$$= 0 - 1 + \sqrt{1 - 1} = -1 + 0 = -1$$

گزینه ۲

۲

در $x = 0$ مقدار تابع برابر است با $y = 3$ ؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a = 3$. به سادگی نتیجه می شود که به ازای $x = \frac{25}{3}$ مقدار تابع برابر است با $y = 2/5$.

$$T = \frac{2\pi}{|\pi b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \checkmark, b = \frac{1}{4} \times, y = 3 + \sin(\frac{-\pi}{4}x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{25}{3}} y = 3 + \sin(\frac{-25}{4}\pi) \Rightarrow y = 3 + \sin(-4\pi - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 2/5$$

گزینه ۳

۳

به دست آوردن $\tan(\widehat{TOB}) = \tan \alpha$ از روی شکل کار آسانی نیست؛ بنابراین از تساوی زیر استفاده می کنیم:

$$\tan \alpha = \tan((\alpha + 45) - 45) = \frac{\tan(\alpha + 45) - \tan 45}{1 + \tan(\alpha + 45) \tan 45} = \frac{\tan(\alpha + 45) - 1}{1 + \tan(\alpha + 45)} = \frac{3 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{توجه کنید که } \tan(\alpha + 45) = \frac{AT}{OA} = \frac{3}{1} = 3 \text{ است.}$$

نکته:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

داریم:

$$1 + \cot^2 C = 1 + \frac{\cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2 C + \cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{1}{\sin^2 C} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \sin^2 C = \frac{4}{9} \xrightarrow{C < 90^\circ} \sin C = \frac{2}{3}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = \frac{96 \times 2}{3} = 64$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos 2x \Rightarrow x = 2k\pi \pm 2x ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}} x = \frac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$A = \sin\left(\frac{13\pi}{6} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$$

$$= -\left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)$$

همچنین $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و از طرفی می‌دانیم $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ پس:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha < 90^\circ} \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1} \sin \alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

پس A برابر است با:

$$A = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{باتوجه به نمودار } b < 0} a - b = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{2}b = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

دوره تناوب را باتوجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -3, c = -1 \\ b = 3, c = -1 \end{cases}$$

فقط حالت $b = 3, c = -1$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینه ۱ صحیح است.

$$4 \sin(3x) \cos(3x) = 1 \Rightarrow 2 \sin(3x) \cos(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(6x) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{36} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین معادله چهار جواب دارد.

$$\tan(285^\circ) = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot(15^\circ)$$

$$\tan(-165^\circ) = -\tan(165^\circ) = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan(15^\circ)$$

$$\sin(1095^\circ) = \sin(1080^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin(15^\circ)$$

$$\begin{aligned} \tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) &= -\cot(15^\circ) \tan(15^\circ) + \sin^2(15^\circ) \\ &= -1 + \sin^2(15^\circ) = -\cos^2(15^\circ) \end{aligned}$$

$$\sin C = \frac{5}{13} \xrightarrow{\cos C > 0} \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} \\ \tan C = \frac{AH}{CH} = \frac{AH}{9} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AH}{9} \Rightarrow AH = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} = 3/75$$

داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

از آنجا که $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ هستند، داریم:

$$S = \tan \alpha + \tan \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = -1$$

$$\tan(3x) \tan x = 1 \xrightarrow{\tan x \neq 0} \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{8}$$

$$\xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x = \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 6\pi$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10} \xrightarrow{\text{انتهای کمان } \alpha \text{ در ربع دوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{2}{100}} = -\frac{\sqrt{98}}{10}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$= \cos \frac{3\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{3\pi}{4} \sin \alpha = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{98}}{10}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{196}}{20} - \frac{2}{20} = \frac{14 - 2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

نکته:

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \beta$$

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = a + b \cos x$$

باتوجه به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = 3 \xrightarrow{\text{باتوجه به نمودار}} \begin{matrix} b < 0 \\ a - b = 3 \end{matrix} \quad (1)$$

$$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) : 0 = a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = a + b\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} a - b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -2$$

دوره تناوب را با توجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{9\pi}{\nu} - \left(-\frac{3\pi}{\nu}\right) = \frac{12\pi}{\nu} = 6\pi$$

$$\Rightarrow T = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = 0$ نزولی است، بنابراین $a, b < 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

$$\begin{aligned} & \tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(140^\circ) \\ &= \tan(360^\circ - 60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(360^\circ + 120^\circ) \sin(180^\circ - 20^\circ) \\ &= \tan(-60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(180^\circ - 60^\circ) \sin(180^\circ - 20^\circ) \\ &= (-\tan(60^\circ))(-\cos(30^\circ)) + (-\tan(60^\circ)) \sin(20^\circ) \\ &= (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad (x \neq k\pi \text{ زیرا غیرقابل قبول زیرا}) \end{cases}$$

گزینه ۱

گام اول

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} \text{ می‌دانیم:}$$

گام دوم

با استفاده از فرمول‌های کمان 2α ، رابطه $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ را ساده کرده و مقدار خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -2$$

گزینه ۴

گام اول

الف) وقتی تعداد نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x خواسته شده است، در واقع باید تعداد ریشه‌های معادله $y = 0$ را تعیین کنیم. پس باید تعداد ریشه‌های معادله $y = 0$ را در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ به دست آوریم.
 ب) معادله $\sin \alpha = 0$ یک معادله خاص بوده و در آن $\alpha = k\pi$ است.
 ج) مقادیر k را به نحوی تعیین می‌کنیم که ریشه‌های معادله حتماً در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ قرار بگیرند.

گام دوم

$$y = 0 \Rightarrow 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \xrightarrow[\alpha = k\pi]{\sin \alpha = 0} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}$$

توجه داشته باشید که به ازای $k \geq 3$ یا $k \leq -3$ مقادیری که برای x به دست می‌آید در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ نیست. پس پنج مقدار برای x به دست آمده و نمودار تابع در پنج نقطه محور x را قطع می‌کند.

می‌دانیم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

باتوجه به گام اول، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \tan 70^\circ + \tan 10^\circ &= \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 70^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin(10^\circ + 70^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} \\ &= \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 10^\circ\right)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) &= \frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 40^\circ\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 20^\circ\right)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 2(20^\circ)}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ \end{aligned}$$

$$\text{الف) } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{ب) } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

باتوجه به صورت سؤال و قسمت (الف) از گام اول، مقدار $\tan \alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan \alpha = 5(1 - \tan \alpha) \Rightarrow 1 + \tan \alpha = 5 - 5 \tan \alpha \Rightarrow 6 \tan \alpha = 4$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اکنون باتوجه به قسمت (ب) از گام اول مقدار $\tan 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$$\text{الف) } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$\text{ب) } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

ابتدا باتوجه به قسمت (الف) از گام اول، مقدار $\tan \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

اکنون باتوجه به فرمول کمان $(\alpha - \beta)$ در قسمت (ب) از گام اول، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

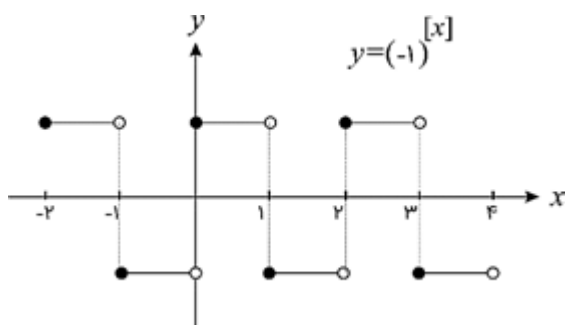
با استفاده از رابطه $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ معادله مثلثاتی را ساده می‌کنیم و جواب کلی معادله مثلثاتی را به دست می‌آوریم.

$$\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0 \Rightarrow \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi \\ \cos x = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

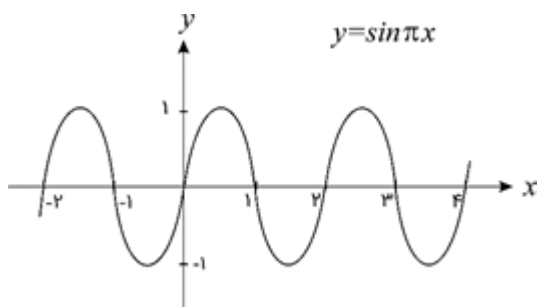
الف) می‌دانیم به ازای هر x دلخواه $|f(x)| \geq 0$ است.
 ب) $xy \geq 0$ همواره برقرار است هرگاه، x و y در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشد.

باتوجه به گام اول، نامساوی $(-1)^{[x]}f(x) \geq 0$ زمانی برقرار است که دو تابع $y = (-1)^{[x]}$ و $y = f(x)$ در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشند. ابتدا نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:



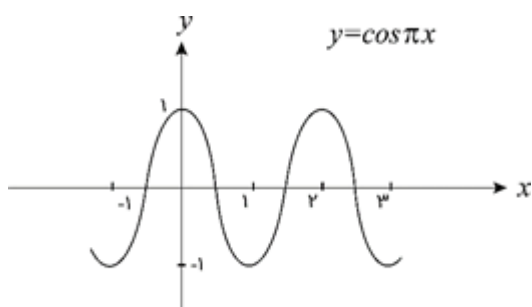
اکنون با رسم نمودار هریک از گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدامیک از آن‌ها در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است.

گزینه ۱:

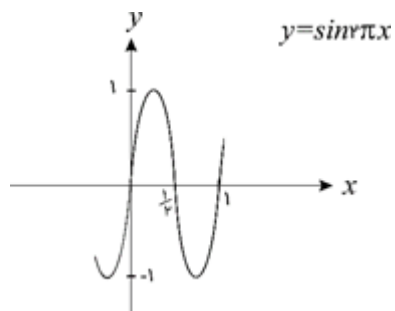


همان‌طور که مشاهده می‌شود، این تابع در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است، پس این گزینه جواب سؤال خواهد بود.

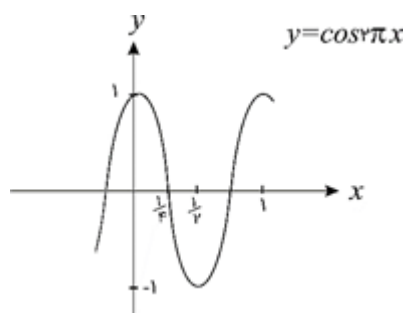
گزینه ۲:



باتوجه به نمودار فوق، این تابع در بازه‌های زیادی از جمله در بازه $(\frac{1}{p}, 1)$ با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت نیست.



مقدار تابع در بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ منفی است در حالی که تابع $y = (-1)^{[x]}$ در این بازه دارای علامت مثبت است.
گزینه ۴:



با مقایسه نمودار بالا با نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ ، این گزینه هم جواب سؤال نیست.

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(3\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta}$$

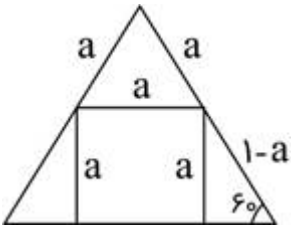
باتوجه به اینکه مقدار $\tan \theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos \theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر ساده‌شده برحسب $\tan \theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0/2 + 1}{2(0/2)} = \frac{1/2}{0/4} = 3$$

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a}{1-a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2a = \sqrt{3} - \sqrt{3}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow a = 2\sqrt{3} - 3$$

گزینه ۳

۲۹

گام اول

الف) $\sin \alpha$ را داریم، با استفاده از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می توانیم $\cos \alpha$ را محاسبه کنیم.
 ب) α زاویه ای منفرد است پس در ناحیه دوم مثلثاتی قرار داشته و مقدار $\cos \alpha$ منفی است. در محاسبه $\cos \alpha$ از روی $\sin \alpha$ به این نکته توجه داشته باشید.

ج) با داشتن $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مقدار $\tan \alpha$ را محاسبه کرده و در نهایت $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را به دست می آوریم.

گام دوم

ابتدا $\cos \alpha$ و به دنبال آن $\tan \alpha$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} &\xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5} \\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

حالا حاصل $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را محاسبه می کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$$

از اتحادهای $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ و $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 - \underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2} \sin 2x} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) (\sin x + \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ \sin x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi & (1) \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

مجموعه جواب در بازه‌های داده شده $\left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها $\frac{5\pi}{2}$ است.

$$f \sin x \sin\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow f \sin x(-\cos x) = 1$$

$$\Rightarrow -f \times \frac{1}{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{2}{f} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} & (1) \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} & (2) \end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c|c|c} k & 1 & 2 \\ \hline x & \pi - \frac{\pi}{12} & 2\pi - \frac{\pi}{12} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|c|c} k & 0 & 1 \\ \hline x & \frac{7\pi}{12} & \pi + \frac{7\pi}{12} \end{array} \quad (2)$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{7\pi}{12} = 4\pi + \pi = 5\pi$$

باتوجه به نمودار تابع $f(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ است، پس:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow a + b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a - b\sqrt{3} = -\sqrt{3} \quad (1)$$

باتوجه به نمودار تابع $b > 0$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{3}$ است، پس:

$$a + |b| = \sqrt{3} \xrightarrow{b > 0} a + b = \sqrt{3} \quad (2)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-2 \begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = -2\sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -b(2 + \sqrt{3}) = -(3 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

با استفاده از روابط زیر معادله مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) \Rightarrow \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x\right) = 1 + \cos x$$

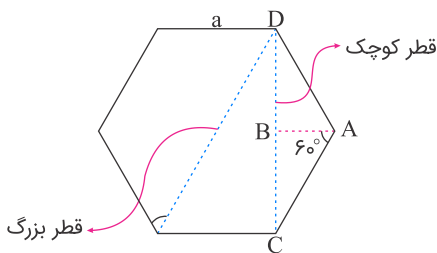
$$\Rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x - \sin x = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است. پس مساحت آن برابر است با:

$$S = 6 \times \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 9\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = 2BC = 2AC \sin 60^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

(الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{3}$ است.

(ب) طول قطر بزرگ آن $2a$ است.

(پ) مساحت آن $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ است.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ و } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ می‌دانیم}$$

وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ ، حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

می‌دانیم $\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ و $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ است. از رابطه داده شده مقدار $\cos x$ را حساب کرده و با استفاده از فرمول $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ، حاصل $\cos 2x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حالا حاصل $\cos 2x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

با استفاده از روابط زیر معادله مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} + \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{(1 + \tan x)^2 - (1 - \tan x)^2}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\tan x + \tan^2 x - 1 + 2\tan x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = \frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3} \xrightarrow{\div 2} \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$$

با توجه به رابطه $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ داریم:

$$\tan 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

ابتدا معادله مثلثاتی داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x) \Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cot x \sin x + \cot x \tan x$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 x - 2 = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{4 + 8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{2} \text{ غ.ق.ق} \\ \cos x = \frac{4 - \sqrt{64}}{8} = \frac{4 - 8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{\tau} + b\pi x\right) = a \cos b\pi x$$

ماکزیمم تابع برابر با ۲ است؛ بنابراین: $|a| = 2$
از طرفی $y(0) = 2$ پس:

$$y(0) = a \times \cos 0 = a \Rightarrow a = 2$$

همچنین نمودار تابع در بازه $[-2/5, 3/5]$ سه بار تکرار شده است، در نتیجه:

$$3T = 3/5 - (-2/5) = 6 \Rightarrow T = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

که هر دو مقدار قابل قبول است. با توجه به گزینه‌ها، $a \cdot b = 2$ است.

به فرمول های 2α توجه کنید:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{\cos 2x}{\cos 2x}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1 \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

می‌دانیم: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با توجه به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x (\cos x + \sin x)} \\ &= \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2})} = -1 \end{aligned}$$

اگر $x \in [-1, 1]$ ، آنگاه:

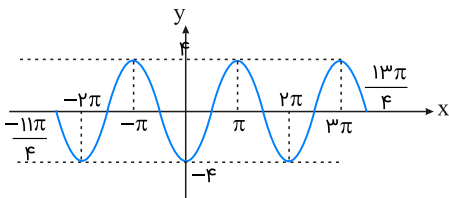
$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3\pi \leq -3\pi x \leq 3\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{\pi}{4} + 3\pi \Rightarrow \frac{-11\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{13\pi}{4}$$

حال با در نظر گرفتن $\frac{\pi}{4} - 3\pi x = \theta$ ، ضابطه تابع مفروض سؤال، به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -4 \cos \theta ; \quad \frac{-11\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{13\pi}{4}$$

که شکل آن به صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta = -\pi$ ، $\theta = \pi$ و $\theta = 3\pi$ ، بیشترین مقدار خود را دارد.

می‌دانیم:

$$(\sin^{\nu} \alpha + \cos^{\nu} \alpha)^{\nu} = \sin^{\nu} \alpha + \cos^{\nu} \alpha + \nu \sin^{\nu} \alpha \cos^{\nu} \alpha$$

$$\Rightarrow 1 = \sin^{\nu} \alpha + \cos^{\nu} \alpha + \frac{1}{\nu} \sin^{\nu} \nu \alpha$$

$$\Rightarrow \sin^{\nu} \alpha + \cos^{\nu} \alpha = 1 - \frac{1}{\nu} \sin^{\nu} \nu \alpha$$

حال از رابطه $\sin^{\nu} \alpha + \cos^{\nu} \alpha = 1 - \frac{1}{\nu} \sin^{\nu} \nu \alpha$ کمک می‌گیریم:

$$\sin^{\nu} x + \cos^{\nu} x = \frac{1}{\nu} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\nu} \sin^{\nu} \nu x = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \sin^{\nu} \nu x = 1$$

$$\Rightarrow \sin \nu x = \pm 1 \Rightarrow \nu x = k\pi \pm \frac{\pi}{\nu} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\nu} \pm \frac{\pi}{\nu}$$

جواب‌های موجود در بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\left\{ \frac{\pi}{\nu}, \frac{3\pi}{\nu}, \frac{5\pi}{\nu}, \frac{7\pi}{\nu} \right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها 4π است.

گزینه ۲

۴۴

راه‌حل اول:

$$\sin \nu x \sin \nu x + \sin^{\nu} x = 1 \Rightarrow \sin \nu x \sin \nu x = 1 - \sin^{\nu} x$$

$$\Rightarrow (\nu \sin x \cos x)(\nu \sin^{\nu} x \cos^{\nu} x) = \cos^{\nu} x$$

$$\Rightarrow (\nu \sin x \cos x)(\nu \sin^{\nu} x \cos^{\nu} x) = \cos^{\nu} x$$

$$\Rightarrow (\cos^{\nu} x)(\lambda \sin^{\nu} x \cos^{\nu} x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos^{\nu} x)(\lambda \sin^{\nu} x(1 - \nu \sin^{\nu} x) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos^{\nu} x)(-1 \nu \sin^{\nu} x + \lambda \sin^{\nu} x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos^{\nu} x)(-(\nu \sin^{\nu} x - 1)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{\nu} & (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nu \sin^{\nu} x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^{\nu} x = \frac{1}{\nu} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{\nu} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} x = (\nu k + 1) \frac{\pi}{\nu}$$

راه‌حل دوم:

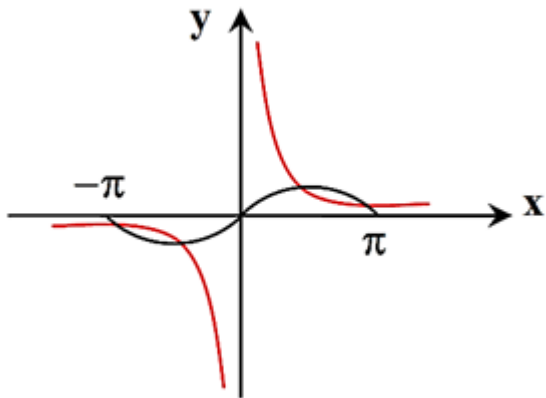
$$\sin \nu x \sin \nu x = 1 - \sin^{\nu} x \Rightarrow \frac{1}{\nu} (\cos(-\nu x) - \cos \nu x) = \cos^{\nu} x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\nu} \cos \nu x - \frac{1}{\nu} \cos \nu x = \frac{1 + \cos \nu x}{\nu} \Rightarrow \cos \nu x = -1$$

$$\Rightarrow \nu x = (2k + 1)\pi \Rightarrow x = (2k + 1) \frac{\pi}{\nu}$$

$$x \sin x - 1 = 0 \Rightarrow x \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{x}$$

کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{x}$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست بیاوریم. برای این منظور هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



باتوجه به شکل، واضح است که معادله داده شده در بازه $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ ریشه حقیقی است.

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادله مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^f x - \cos^f x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \sin^2 x - \cos^2 x$$

ب) با دانستن رابطه $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می‌آوریم.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$$

$$\sin^f x - \cos^f x = -\cos 2x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}} -\cos 2x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \alpha = 2, \tan \beta = \frac{1}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -3$$

گام اول

الف) معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ را به معادله مثلثاتی $\cos 3x = -\cos x$ تبدیل می‌کنیم.
ب) به جای $\cos x$ عبارت $\cos(\pi - x)$ را قرار داده و جواب کلی معادله مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ هر دو جواب به دست آمده را شامل می‌شود.

نکته:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1 \xrightarrow{\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \text{ غ ق ق} \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $\sin x \neq 0$ ، بنابراین جواب $x = k\pi$ غیر قابل قبول است.

کمترین مقدار تابع -1 است؛ پس:

$$1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

تابع در دوره تناوب رسم شده است، پس:

$$2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

باتوجه به نمودار a و b هم علامت است؛ پس:

$$a + b = 5 \text{ یا } -5$$

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ عبارت داده شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

گام اول

الف) تابع در بازه بین $\frac{\pi}{18}$ و $\frac{13\pi}{18}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.
 ب) دوره تناوب تابع $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.
 ج) داریم:

$$y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) = a + 2 \sin bx$$

باتوجه به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینه نمودار رسم شده خواهد بود.
 د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{18}, 0\right)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

همچنین باتوجه به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \xrightarrow{b > 0} b = 3$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$0 = a - 2 \cos\left(3 \times \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{2}\right) = a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = a + 2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

نکته: از فرمول های کمان $(\alpha + \beta)$ می دانیم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

معادله مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow \sin 2x \sin x + \sin 2x \cos x = \cos 2x \cos x - \cos 2x \sin x$$

$$\Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

با توجه به فرمول های کمان $(\alpha + \beta)$ داریم:

$$\sin(2x + x) = \cos(2x + x) \Rightarrow \sin 3x = \cos 3x$$

$$\frac{\div \cos 3x}{\cos 3x \neq 0} \rightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 1 \Rightarrow \tan 3x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{4}$$

جواب معادله مثلثاتی $\tan x = \tan \alpha$ از رابطه $x = k\pi + \alpha$ به دست می آید.

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

جواب های معادله در بازه $[0, \pi]$ به صورت زیر است:

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, \quad k = 2 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{12}$$

$$\text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

دوره تناوب تابع برابر π و ماکزیم مقدار آن $1/5$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad (\text{I})$$

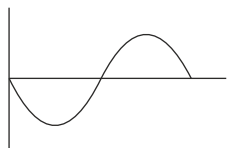
$$\text{ماکزیم تابع} = 1 + |a| = 1/5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{5} \quad (\text{II})$$

از طرفی عرض نقطه تماس نمودار با محور y ها بزرگتر از یک است.

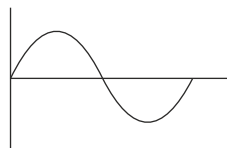
$$x = 0 : y = 1 + a \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 1 - \frac{a}{2} > 1 \Rightarrow \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a < 0 \xrightarrow{(\text{II})} a = -\frac{1}{5}$$

باتوجه به اینکه ضریب \sin در تابع منفی است و باتوجه به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = 2$ قابل قبول است.

$$a + b = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$



نمودار $y = -\sin x$



نمودار $y = -\sin(-x)$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

باتوجه به اینکه $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ داریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x \in \left\{ \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

در فرض تست مقدار $\tan 20^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویه 20° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan 20^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ} = \frac{\sin(270^\circ - 20^\circ) + \sin(720^\circ - 20^\circ)}{\cos(540^\circ + 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{-\cos 20^\circ + \sin(-20^\circ)}{\cos(180^\circ + 20^\circ) - (-\sin 20^\circ)} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div \cos 20^\circ} A = \frac{\frac{-\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} - \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{-\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

نکته: $-\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha - \sin \alpha$

$$\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\frac{1}{4}}$$

$$= -4\sqrt{2} \sin(-30^\circ) = -4\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

راه حل اول:

ابتدا حاصل $1 + \tan^2 \theta$ و $1 + \cot^2 \theta$ را بر حسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ به دست می‌آوریم:

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

می‌دانیم $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ و $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ است پس:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^4 \theta \sin^4 \theta} = \frac{1}{(\cos \theta \sin \theta)^4} \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

بنابراین:

$$\frac{1}{(\cos \theta \sin \theta)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta$$

راه حل دوم: (عددگذاری)

در صورتی که $\theta = \frac{\pi}{4}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{(1 + (\tan \frac{\pi}{4})^2)(1 + (\cot \frac{\pi}{4})^2)}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{(1+1)(1+1)}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 16$$

با جایگذاری $\theta = \frac{\pi}{4}$ در گزینه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تنها در گزینه "۴" صدق می‌کند:

$$16 \sin^{-4} 2\theta = 16 \left(\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)\right)^{-4} = 16$$

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan 15^\circ$ داده شده است، سعی می‌کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویه 15° به دست آوریم.

گام دوم

$$A = \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(540^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 15^\circ\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 15^\circ\right)}{\sin(3\pi - 15^\circ) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 15^\circ\right)} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

برای این که در کسر داده شده $\tan 15^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$A = \frac{\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{1/28}{-0/72} = -\frac{128}{72} = -\frac{16}{9}$$

نکته:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

با استفاده از گام اول، معادله داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم رابطه $\cos x = \cos \alpha$ هنگامی برقرار است که $x = 2k\pi \pm \alpha$ باشد، جواب معادله مثلثاتی داده شده، برابر است با:

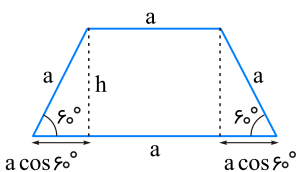
$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق} \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$(P \text{ محیط}) P = 3a + 2a \cos 60^\circ + a \Rightarrow 30 = 5a \Rightarrow a = 6$$

$$S = \frac{(a + 2a)h}{2} = \frac{3a \times a \sin 60^\circ}{2} \xrightarrow{a=6} S = \frac{3\sqrt{3} \times 6^2}{4} = 27\sqrt{3}$$



$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

در اینجا نیازی به محاسبه جواب‌های کلی معادله مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصله داده شده، مشخص کنیم.

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a, b و c، اگر زاویه بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

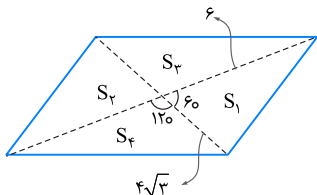
$$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \alpha$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 18$$

$$S_3 = S_4 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin(120^\circ) = 18$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 \times 18 = 72$$



نکته:

$$۱) \sin x - \cos x = \sqrt{۲} \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$$

$$۲) \cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \sin x$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{۴} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right) = \sqrt{۲} \sin\left(\left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right) - \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲} \sin(\alpha) \quad (*) \end{aligned}$$

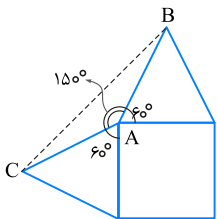
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow ۱ - \cos^۲ \alpha = \sin^۲ \alpha \Rightarrow \sin^۲ \alpha = ۱ - \frac{۲}{۹} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع (ناحیه) چهارم}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\xrightarrow{(*)} \sqrt{۲} \sin(\alpha) = \sqrt{۲} \times -\frac{\sqrt{۲}}{۳} = \frac{-۲}{۳}$$

گزینه ۳

۶۶



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = \frac{1}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{1}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{1}{۲} = ۱$$

گزینه ۱

۶۷

داریم:

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^۲ \alpha - \cos^۲ \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-\cos ۲\alpha}{\frac{1}{۲} \sin ۲\alpha} = -۲ \cot ۲\alpha$$

بنابراین $\tan \alpha - \cot \alpha = -۲ \cot ۲\alpha$ پس:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -۲ \cot(۲\pi x)$$

دوره تناوب تابع $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $\frac{\pi}{|۲\pi|}$ است، یعنی $\frac{1}{۲}$.

$$\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{17\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

حاصل عبارت برابر است با:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

گام اول

الف) با در نظر گرفتن $\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$ معادله را برحسب $\tan\frac{x}{2}$ به دست می‌آوریم. معادله به یک معادله درجه دو برحسب $\tan\frac{x}{2}$ تبدیل و با حل معادله درجه دو، حاصل $\tan\frac{x}{2}$ را تعیین می‌کنیم.
ب) با استفاده از فرمول کمان $\tan 2x$ ، ابتدا $\tan x$ و سپس $\tan 2x$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} - 1 = \tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

محاسبه $\tan x$:

$$\tan x = \frac{2 \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2(1 \pm \sqrt{5})}{1 - \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2} = -2$$

محاسبه $\tan 2x$:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \Delta x \cos 3x - \cos \Delta x \sin 3x = \sin(\Delta x - 3x) = \sin 2x = \frac{2}{3}$$

مقدار $\cos 4x$ را می‌خواهیم. می‌دانیم:

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\frac{3}{4}$$

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را خلاصه کرده و سپس با استفاده از فرمول کمان های 2α ، حاصل تست را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) &= \cos \alpha (-\sin \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha = \\ -\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha &= -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha \end{aligned}$$

ماکزیمم برابر ۴ است.

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0, \quad f(\pi) = 4 \Rightarrow a + b \cos \pi = 4 \Rightarrow a - b = 4$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{\nu} - x\right) = a + b \sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{5\pi}{6}$ صفر است. پس:

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 2a$$

بنابراین: $y = a + 2a \sin x$. به علاوه با توجه به اینکه $y(0) > 0$ می‌باشد، پس $a > 0$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = 1$ باشد.

$$\max = 3 \Rightarrow a + 2a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 + 2 \sin x$$

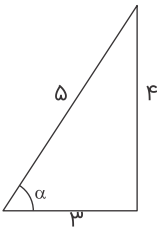
$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{\nu} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\nu} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{\nu} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{\nu}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{\nu} - \alpha\right) = -\cot \alpha$$

اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل: } \cos \alpha (-\sin \alpha) - (-\cot \alpha) &= -\frac{3}{5} \left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} \end{aligned}$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right)$$

$$= \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times |\cos x| \times \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد آنگاه $\cos x < 0$ است، پس $|\cos x| = -\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \times (-\cos x) \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

گزینه ۴

۷۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

گام دوم

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos a \cos b} = \frac{\cos a}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\cos b}$$

گام اول

می‌دانیم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ (الف)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \text{ (ب)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \text{ (ج)}$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sin 110^\circ (\tan 20^\circ + \tan 35^\circ) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 20^\circ\right) \left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}\right) \\ &= \cos 20^\circ \left(\frac{\sin 20^\circ \cos 35^\circ + \sin 35^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ}\right) = \frac{\sin(20^\circ + 35^\circ)}{\cos 35^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\cos 35^\circ} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 35^\circ\right)}{\cos 35^\circ} = \frac{\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = 1 \end{aligned}$$

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(3\pi - \frac{\pi}{6})$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{20\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطه $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

باتوجه به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{3}{2}$ ، مینیمم تابع $\frac{1}{2}$ و دوره تناوب π است. پس:

$$\begin{cases} 1 + \frac{|a|}{2} = \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

باتوجه به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{2}$ و $2b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته

$$\text{جواب } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ دارد، در نتیجه } a + b = 2 \text{ یا } a + b = -2 \text{ صحیح است.}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) \\ &= \frac{1}{|\cos x|} \left(2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x \right) = \frac{1 - \sin^2 x}{|\cos x|} = \frac{\cos^2 x}{|\cos x|} \end{aligned}$$

چون $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ است، یعنی x در ناحیه سوم قرار دارد و در نتیجه $|\cos x| = -\cos x$ است. پس:

$$A = \frac{\cos^2 x}{-\cos x} = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{11\pi}{4} &= \tan \left(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(3\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1 \\ \sin \frac{15\pi}{4} &= \sin \left(\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{13\pi}{4} &= \cos \left(\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ A &= \tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$$

برای آنکه کسر صفر شود باید صورت آن صفر باشد.

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} & \checkmark \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-2x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi & \times \end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $x = 2k\pi + \pi$ مخرج یعنی $1 + \cos x$ صفر می‌شود؛ بنابراین جواب کلی همان $x = \frac{2k\pi}{5}$ است.

با توجه به رابطه $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ معادله را ساده می‌کنیم. هم چنین می‌دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ است.

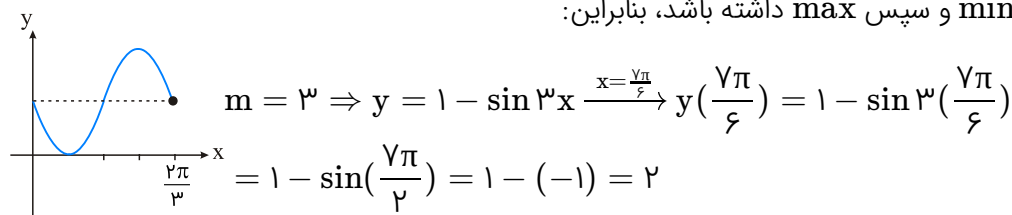
$$\begin{aligned} 2 \tan x \cos^2 x = 1 &\Rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\cos x \neq 0} 2 \sin x \cos x = 1 \\ \Rightarrow \sin 2x = 1 &\xrightarrow{\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{3} \quad \text{طبق نمودار}$$

$$T = \frac{2\pi}{|m|} \quad \text{از روی ضابطه}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

چون باتوجه به نمودار تابع باید ابتدا \min و سپس \max داشته باشد، بنابراین:



ابتدا معادله مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x) = 0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازه $[0, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases}$$

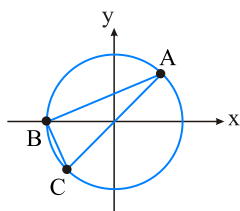
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x = 0$ و $x = 2\pi$ عبارت $1 - \cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, x = \pi$ را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\widehat{AC} = \pi \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$$



بنابراین مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.

گام اول

الف) دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.
 ب) به ازای هر مقدار دلخواه x و a همواره داریم: $-1 \leq \sin ax \leq 1$

گام دوم

تابع $y = a \sin(b\pi x)$ در بازه $[0, 3]$ ، سه نوسان کامل انجام داده است؛ بنابراین طول این بازه سه برابر دوره تناوب تابع است، پس:

$$3T = 3 \Rightarrow 3T = 3 \Rightarrow T = 1$$

بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow 1 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، داریم:

$$-1 \leq \sin(b\pi x) \leq 1 \Rightarrow -a \leq a \sin(b\pi x) \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a$$

طبق نمودار تابع $y_{\max} = 3$ و $y_{\min} = -3$ و نمودار تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است بنابراین $a = -3$ خواهد بود.
 از طرفی، به ازای مقادیر کوچک بزرگتر از صفر، حاصل تابع باید منفی شود و چون $a = -3$ شد پس مقدار $\sin b\pi x$ باید مثبت باشد؛ بنابراین داریم: $b = 2$
 در نتیجه:

$$ab = (-3) \times 2 = -6$$

دوره تناوب تابع به معادله $y = A \sin(Bx + D) + E$ برابر است با $\frac{2\pi}{|B|}$ ، پس:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \quad (*)$$

همچنین با توجه به نمودار $T = 6$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \quad (1)$$

با فرض $b = \frac{1}{3}$ و اگر A عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادله $y = A \sin(Bx + D) + E$ برابر با $A + E$ است، پس:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow \text{Max}(y) = a \quad (**)$$

همچنین با توجه به نمودار $\text{Max}(y) = 2$ ، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = 2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{7}{3}$ نیز قابل قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

باتوجه به نمودار رسم شده مشخص است دوره تناوب تابع برابر با 4π است. دوره تناوب تابع $y = \frac{1}{\nu} + 2 \cos mx$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|m|}$ به دست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

با فرض $m = \frac{1}{2}$ تست را حل می‌کنیم (اگر $m = -\frac{1}{2}$ هم فرض شود تأثیری در جواب تست ندارد چون تابع $\cos mx$ یک تابع زوج است).

$$\begin{aligned} m = \frac{1}{2} \Rightarrow y &= \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \Rightarrow f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

برای حل سؤال به دو رابطه زیر توجه کنید:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k\pi}{3}$ را شامل شود به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

برای ساده تر شدن معادله مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

اگر در حل معادله مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطه $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، معادله مثلثاتی را برحسب $\cos x$ بازنویسی می کنیم.

$$2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \sin x + 3 \cot x (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطه $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، معادله مثلثاتی را برحسب $\cos x$ مرتب می کنیم.

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x = 3\cos x &\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x \\ \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x = 3\cos x &\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \\ \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \text{ ق.ق.غ} \end{cases} \end{aligned}$$

معادله $\cos x = \cos \alpha$ دارای جواب $x = 2k\pi \pm \alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادله $\cos x = A$ به ازای $A > 1$ و $A < -1$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos x = \frac{1}{2}$ برابر است با:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

برای حل معادله مثلثاتی از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \cot x$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$(\sin x - \tan x) \cot x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

جواب های معادله $\cos x = \cos \alpha$ از رابطه $x = 2k\pi \pm \alpha$ به دست می آید.

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

گام اول

می‌دانیم: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

گام دوم

باتوجه به گام اول، معادله را برحسب $\sin x$ نوشته و حل می‌کنیم. جواب معادله را با $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ مطابقت داده و مقادیر i را مشخص می‌کنیم.

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \end{cases}$$

باتوجه به جواب‌های به دست آمده مقادیر i برابر است با:

$$i = \{1, 5, 9\}$$

گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم:

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، معادله را ساده کرده سپس حل می‌کنیم:

$$\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = \frac{1}{2} - \cos x \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos x \sin x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

گام اول

مجموعه جواب‌های معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ است.

گام دوم

جواب‌های معادله مثلثاتی را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$2\cos^2 x + \cos x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

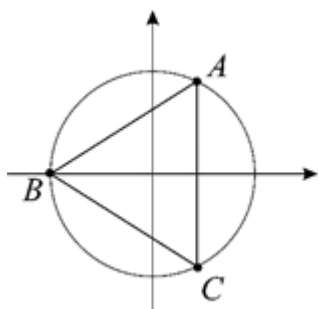
$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos x\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x_3 = \pi$$

جواب‌ها را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$$



بنابراین مثلث $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است.

گام اول

داریم: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

گام دوم

با استفاده از رابطه گام اول، معادله مثلثاتی داده شده را برحسب $\cos x$ مرتب می‌کنیم:

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2 - 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس هر دو مقدار به دست آمده، قابل قبول است. باتوجه به آن‌ها جواب‌های معادله را در بازه $[\pi, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos \pi \Rightarrow x_2 = \pi$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned}\sin^2 x - \cos^2 x &= (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از فرمول کمان‌های 2α داریم:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$$

بنابراین معادلهٔ مثلثاتی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$2 \sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازهٔ $[0, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x = \frac{7\pi}{12}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

بنابراین مجموع تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi + \frac{18\pi}{12} = 2\pi + \frac{6\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\tan x = \frac{1}{\tan 3x} = \cot 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \xrightarrow{\div \cos x} \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = 2$$

$$\tan x - 1 = 2 \tan x + 2 \Rightarrow \tan x = -3$$

گام اول

اگر $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، می توان نتیجه گرفت $\alpha = \beta + \frac{\pi}{4}$ است. با معلوم بودن مقدار $\tan \beta$ ، حاصل $\tan \alpha$ را به دست می آوریم.

گام دوم

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \tan(\beta + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan \beta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \beta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

پس حاصل $\sin 2\alpha$ برابر است با:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 3}{1 + (3)^2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \text{ می‌دانیم:}$$

باتوجه به گام اول و باتوجه به اینکه $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ است عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Lambda \cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) &= \Lambda \cos a \cos b \sin a \sin b \\ &= 2(2 \sin a \cos a)(2 \sin b \cos b) = 2 \sin 2a \sin 2b \end{aligned}$$

داریم:

$$a + b = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times 2} 2a + 2b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2b = \frac{\pi}{2} - 2a$$

بنابراین:

$$\sin 2b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = \cos 2a$$

پس می‌توان نوشت:

$$2 \sin 2a \sin 2b = 2 \sin 2a \cos 2a = \sin 2(2a) = \sin 4a$$

دانستن روابط زیر به ساده شدن معادله مثلثاتی کمک بسیاری می‌کند:

$$\sin(3\pi - x) = \sin x, \cos(\pi + x) = -\cos x, \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos 3x \sin(3\pi - x) - \sin 3x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos 3x \sin x - \sin 3x(-\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x = 0 \Rightarrow \sin(x + 3x) = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0$$

$$\xrightarrow{\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi} 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

نکته:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

از نکته بالا می‌توان فهمید $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ بنابراین:

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

گام اول

می‌دانیم:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، کسر داده شده را ساده کرده و سپس حل می‌کنیم:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

می‌دانیم:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

باتوجه به گام اول می‌توان نوشت:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$$

بنابراین داریم:

$$2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x \Rightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

به ازای $k \in \mathbb{Z}$ ، مجموعه $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ جواب‌های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ را نیز شامل می‌شود؛ بنابراین جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی داده شده به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ است.

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos x \sin x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$\sin 5x + \sin 7x = 1 + \cos \pi \Rightarrow \sin 5x + \sin 7x = 0$$

بنابراین:

$$\sin 5x = -\sin 7x = \sin(-7x)$$

$$\begin{cases} 5x = 2k\pi - 7x \Rightarrow 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} & (1) \\ 5x = 2k\pi + \pi + 7x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi & (2) \end{cases}$$

جواب‌های معادله (۱) عبارت‌اند از:

$$0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{18\pi}{9}$$

جواب‌های این معادله یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{2\pi}{9}$ است که مجموع جملات برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{n=10} S_{10} = \frac{10}{2}(0 + \frac{18\pi}{9}) = 10\pi$$

از طرفی معادله (۲) در این بازه فقط دارای جواب π است؛ بنابراین مجموع جواب‌های معادله در این بازه 11π است.

می‌دانیم $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ است. هم‌چنین جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ از رابطه $x = k\pi + \alpha$ به دست می‌آید.

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{(\cos \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \alpha \sin \beta)^2}{(\sin \alpha \cos \beta)^2 - (\cos \alpha \sin \beta)^2}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$= \frac{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}$$

با استفاده از دستورهایی مجموع و تفاضل دو کمان برای کسینوس، خواهیم داشت:

$$= \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)} = \cot(\alpha + \beta) \cot(\alpha - \beta)$$

باید $\cot(\alpha - \beta)$ و $\cot(\alpha + \beta)$ را بیابیم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 135^\circ \Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = \cot \frac{3\pi}{4} = -1 \\ \tan(\alpha - \beta) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot(\alpha - \beta) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس:

$$\cot(\alpha + \beta) \cot(\alpha - \beta) = (-1) \left(\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

از فرمول $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ استفاده می‌کنیم.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2 \cos x \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \cos x \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$



منبع: کنکور سراسری

۱ اگر A و B دو مجموعه غیرتهی با شرط $A \subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

$$A - B' = A \quad (۲)$$

$$B - A' = A \quad (۱)$$

$$B \cap A' = \emptyset \quad (۴)$$

$$A \cap B' = \emptyset \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۲ فرض کنید A و B دو مجموعه غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعه مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟

$$A - B' = \emptyset \quad (۲)$$

$$A \subset B' \quad (۱)$$

$$(A \cup B)' = \emptyset \quad (۴)$$

$$A \cap B' = A \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳ اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\dots, \{7, 9, 11\}, \{3, 5\}, \{1\}$. در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

$$۱۵۸۹ \quad (۲)$$

$$۱۵۶۳ \quad (۱)$$

$$۱۶۵۱ \quad (۴)$$

$$۱۶۳۹ \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدر نسبت دنباله هندسی، کدام است؟

$$\frac{۳}{۲} \quad (۲)$$

$$\frac{۴}{۳} \quad (۱)$$

$$\frac{۹}{۴} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\dots, \{2, 3, 4\}, \{1\}$. در دسته نهم واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر، کدام است؟

$$۷۲ \quad (۲)$$

$$۷۱ \quad (۱)$$

$$۷۴ \quad (۴)$$

$$۷۳ \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۶ اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ آن گاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$
 (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$
 (۳) $[-1, 1]$
 (۴) \emptyset

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۷ اگر $A_n = \left(\frac{-2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ به صورت بازه باشد، مجموعه $(A_3 \cup A_6) - A_3$ برابر کدام بازه است؟

- (۱) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
 (۲) $\left[\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
 (۳) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
 (۴) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۸ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$
 (۲) $\frac{7}{4}$
 (۳) $\frac{9}{4}$
 (۴) $\frac{7}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۹ مجموعه‌های $A = \{2\}$ و $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟

- (۱) $A \in B$
 (۲) $A \in C$
 (۳) $B \in C$
 (۴) $A \subset C$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۰ در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

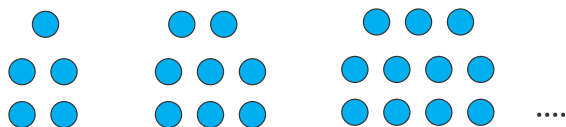
- (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۱ اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n, 2^m \leq 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$ آنگاه مجموعه $(A_6 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴



۳۴ (۱)

۳۶ (۲)

۳۸ (۳)

۴۰ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ...؛ مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام، کدام است؟

۱۷۵۰ (۲)

۱۷۰۰ (۱)

۱۸۵۰ (۴)

۱۸۰۰ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

باتوجه به دنباله حسابی، مجموع $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$ کدام است؟

۰/۱۸ (۲)

۰/۱۵ (۱)

۰/۲۵ (۴)

۰/۲۴ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

در دو دنباله حسابی به صورت‌های ... ۲, ۷, ۱۲, ... و ... ۸, ۱۱, ۱۴, ... چند عدد سه‌رقمی مشترک وجود دارد؟

۵۹ (۲)

۵۸ (۱)

۶۱ (۴)

۶۰ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در دنباله‌های حسابی ... ۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ... و ... ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ... چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰، موجود است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ...؛ جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟

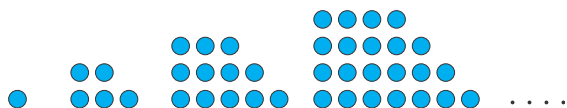
۴۱۹ (۲)

۴۱۵ (۱)

۴۲۳ (۴)

۴۲۱ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱



۱۱۷ (۱)

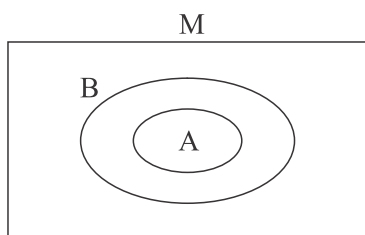
۱۲۰ (۲)

۱۲۳ (۳)

۱۲۵ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

برای بررسی مسئله، بهتر است نمودار ون زیر را برای مجموعه‌های A و B فرض کنیم:



گزینه "۱" به صورت زیر ساده می‌شود:

$$B - A' = A \Rightarrow B \cap A = A$$

باتوجه به شکل کاملاً درست است.

گزینه "۲" عبارت است از:

$$A - B' = A \Rightarrow A \cap B = A$$

بنابراین این گزینه درست است.

گزینه "۳" به صورت زیر است:

$$A \cap B' = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset$$

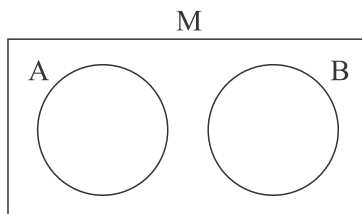
چون $A \subset B$ ، پس کاملاً درست است.

گزینه "۴" عبارت است از:

$$B \cap A' = \emptyset \Rightarrow B - A = \emptyset$$

نادرست می‌باشد، پس جواب مسئله گزینه "۴" است.

نمودار ون را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



گزینه "۱" درست است، زیرا همان طور که در شکل دیده می‌شود، A زیرمجموعه B' است. گزینه "۲" را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A - B' = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

که کاملاً درست است.

گزینه "۳" را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$A \cap B' = A \Rightarrow A - B = A$$

بنابراین باتوجه به شکل درست است.

گزینه "۴" به صورت زیر است:

$$(A \cup B)' = \emptyset \Rightarrow A' \cap B' = \emptyset$$

باتوجه به شکل نادرست است.

از آنجا که تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته است، پس تعداد کل جملات ۴۰ دسته اول برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + 40 = \frac{40 \times 41}{2} = 820$$

همچنین جمله عمومی اعداد طبیعی فرد متوالی به صورت $a_n = 2n - 1$ است، پس:

$$a_{820} = 2(820) - 1 = 1639$$

راه حل اول:

جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی با قدر نسبت d و جمله اول a_1 برابر است با:

$$\underbrace{a_1 + 2d}_{t_1}, \underbrace{a_1 + 6d}_{t_2}, \underbrace{a_1 + 15d}_{t_3}$$

t_1, t_2, t_3 سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند، پس داریم:

$$t_2^2 = t_1 t_3 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 15d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 17a_1d + 30d^2$$

$$\Rightarrow 6d^2 - 5a_1d = 0 \Rightarrow d(6d - 5a_1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (در گزینه‌ها نیست)} \\ 6d - 5a_1 = 0 \Rightarrow d = \frac{5}{6}a_1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$t_1 = a_1 + 2d = a_1 + 2\left(\frac{5}{6}a_1\right) = \frac{8}{3}a_1$$

$$t_2 = a_1 + 6d = a_1 + 6\left(\frac{5}{6}a_1\right) = 6a_1$$

در نتیجه قدر نسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{6a_1}{\frac{8}{3}a_1} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

راه حل دوم:

نکته: اگر جملات a_n, a_m, a_k از یک دنباله حسابی غیرثابت، به ترتیب جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت

$$r = \frac{k - m}{m - n} \text{ دنباله هندسی برابر است با:}$$

a_3, a_7, a_{16} جملات یک دنباله هندسی هستند، پس طبق نکته داریم:

$$r = \frac{16 - 7}{7 - 3} = \frac{9}{4}$$

{۱} : دسته اول

{ $\underbrace{۲}_{۱+۱}$, ۳, $\underbrace{۴}_{۲^۲}$ } : دسته دوم

{ $\underbrace{۵}_{۲^۲+۱}$, ۶, ۷, ۸, $\underbrace{۹}_{۳^۲}$ } : دسته سوم

⋮

{ $\underbrace{۵۰}_{۷^۲+۱}$, ..., $\underbrace{۶۴}_{۸^۲}$ } : دسته هشتم

{ $\underbrace{۶۵}_{۸^۲+۱}$, ..., $\underbrace{۸۱}_{۹^۲}$ } : دسته نهم

$$\Rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{۸۱ + ۶۵}{۲} = \frac{۱۴۶}{۲} = ۷۳$$

ابتدا با توجه به تعریف مجموعه A_i ، مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_5 و A_7 را به صورت بازه‌ای مشخص می‌کنیم. برای به دست آوردن اشتراک دو مجموعه که به صورت بازه‌ای مشخص شده‌اند، ابتدای بازه، بزرگ‌ترین عدد ابتدای دو مجموعه و انتهای بازه، کوچک‌ترین عدد انتهای دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود. تست را با استفاده از رسم نمودار هم حل می‌کنیم تا اگر در مشخص کردن مجموعه‌ها به مشکل برخوردید، مشکلاتان به راحتی حل شود.

$$A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$$

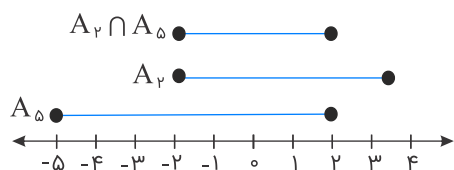
$$A_1 = \left[-1, \frac{9-1}{2}\right] = [-1, 4]$$

$$A_2 = \left[-2, \frac{9-2}{2}\right] = \left[-2, \frac{7}{2}\right]$$

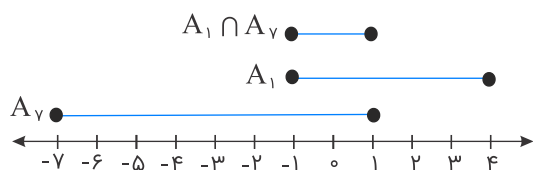
$$A_5 = \left[-5, \frac{9-5}{2}\right] = [-5, 2]$$

$$A_7 = \left[-7, \frac{9-7}{2}\right] = [-7, 1]$$

$$A_2 \cap A_5 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \cap [-5, 2] = [-2, 2]$$



$$A_1 \cap A_7 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$



$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

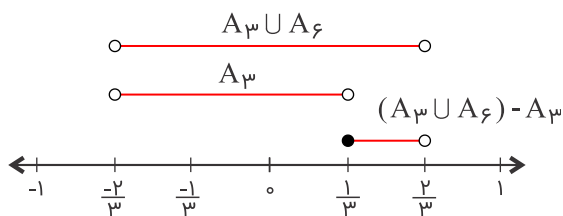
ابتدا با توجه به رابطه $A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ مجموعه‌های A_3, A_6 را به صورت بازه‌های تعیین می‌کنیم. (برای بدست آوردن A_3, A_6 و برای به دست آوردن A_6 ، $n = 6$ در نظر گرفته می‌شود.) در ادامه برای تعیین بازه $A_3 \cup A_6$ ، ابتدای بازه کوچک‌ترین عضو ابتدای A_3 و A_6 و انتهای آن بزرگ‌ترین عضو انتهای A_3 و A_6 در نظر گرفته می‌شود.

$$A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right) \Rightarrow \begin{cases} A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

$$A_3 \cup A_6 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

در صورتی که تعیین اجتماع و اشتراک بازه‌ها برای شما دشوار بود می‌توانید از رسم نمودار هم به شکل زیر استفاده کنید:



جمله اول دنباله حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه به اینکه $a_{12} = a_1 + 11d$ و $a_5 = a_1 + 4d$ ، داریم $a_n = a_1 + (n-1)d$ از طرفی می‌دانیم که اگر x, y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $y^2 = x \cdot z$ ؛ پس باتوجه به فرض سؤال داریم:

$$a_5^2 = a_2 \cdot a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d) \times (a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d (*)$$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_2 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنباله هندسی، از تقسیم دو جمله متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنباله هندسی مورد نظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

بررسی گزینه اول: $\{2\} \in B$ است، پس $A \in B$ یک نتیجه گیری درست است.
 بررسی گزینه دوم: مجموعه C فقط دو عضو به صورت $\{2, 5, \{2\}\}$ و 2 دارد و $\{2\} \notin C$ ، پس $A \in C$ یک نتیجه گیری نادرست است و همین گزینه جواب سؤال می شود.

بررسی گزینه سوم: مجموعه C عضوی به صورت $\{2, 5, \{2\}\}$ دارد، پس $B \in C$ یک گزاره درست است.
 بررسی گزینه چهارم: $2 \in C$ است؛ بنابراین $\{2\}$ یک زیرمجموعه تک عضوی برای مجموعه C محسوب می شود پس $A \subset C$ یک نتیجه گیری درست است.

اگر قدرنسبت این تصاعد را q در نظر بگیریم، می توانیم سه جمله متوالی آن را $a, \frac{a}{q}, aq$ در نظر بگیریم. طبق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{q} + a + aq = 19 & (*) \\ \left(\frac{a}{q}\right)(a)(aq) = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a^3 = 6^3 \Rightarrow a = 6 & (**) \end{cases}$$

$$(*), (**) \Rightarrow \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \xrightarrow{\times q} 6 + 6q + 6q^2 = 19q$$

$$\Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow q = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(6)(6)}}{2(6)} = \frac{13 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3}{4} \\ q = \frac{4}{3} \end{cases}$$

در حالتی که $q = \frac{3}{4}$ ، از آنجا که $a = 6$ ، جمله ها به صورت $6, 6\left(\frac{3}{4}\right) = 9, \frac{6}{3} = 4$ درمی آیند.

در حالتی که $q = \frac{4}{3}$ ، از آنجا که $a = 6$ ، جمله ها به صورت $6, 6\left(\frac{4}{3}\right) = 8, \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ درمی آیند.

پس در هر دو حالت، تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد برابر است با: $9 - 4 = 5$.

در حل تست به نکات زیر توجه کنید:

الف) با توجه به مجموعه A_n ، ابتدا مجموعه‌های A_1 ، A_4 و A_6 را با اعضای آن مشخص می‌کنیم.

ب) نامعادله قدر مطلق $|x| \leq a$ ، به صورت $-a \leq x \leq a$ در نظر گرفته می‌شود.

ج) در تعیین اعضا حواستان باشد که هر دو نامعادله $2^m \leq 2n$ و $|m| \leq n$ باید هم زمان برقرار باشد.

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq 1, 2^m \leq 2\}$$

$$|m| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-1, 0, 1\}$$

$$2^m \leq 2 \Rightarrow m \leq 1 \Rightarrow A_1 = \{-1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq 4, 2^m \leq 8\}$$

$$|m| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq m \leq 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$$

$$2^m \leq 8 \Rightarrow 2^m \leq 2^3 \Rightarrow m \leq 3 \Rightarrow A_4 = \{-4, -3, \dots, 2, 3\}$$

$$A_6 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq 6, 2^m \leq 12\}$$

$$|m| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq m \leq 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-6, -5, \dots, 5, 6\}$$

$$2^m \leq 12 \Rightarrow m \leq 3 \Rightarrow A_6 = \{-6, -5, \dots, 1, 2, 3\}$$

تعیین اعضای مجموعه $(A_6 - A_4) \cup A_1$:

$$A_6 - A_4 = \{-6, -5, \dots, 1, 2, 3\} - \{-4, -3, \dots, 1, 2, 3\} = \{-6, -5\}$$

$$(A_6 - A_4) \cup A_1 = \{-6, -5\} \cup \{-1, 0, 1\} = \{-6, -5, -1, 0, 1\}$$

بنابراین مجموعه $(A_6 - A_4) \cup A_1$ دارای ۵ عضو است.

راه حل اول:

تعداد دایره‌ها تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، بنابراین داریم:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد دایره‌ها	۵	۸	۱۱

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{12} = 5 + 11 \times 3 = 38$$

راه حل دوم:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 + 2 \times 2 \\ a_2 &= 2 + 2 \times 3 \\ a_3 &= 3 + 2 \times 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = n + 2 \times (n+1) = 3n + 2$$

بنابراین با یک دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = 3n + 2$ مواجه هستیم. جمله دوازدهم دنباله برابر است با:

$$a_{12} = 3(12) + 2 = 38$$

دسته سوم دسته دوم دسته اول
 \downarrow \downarrow \downarrow
 ۱ ۲ ۳ , ...

پس تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل جملات ۲۹ دسته اول} &= ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۹ \\ &= \frac{۲۹(۲۹+۱)}{۲} = \frac{۲۹ \times ۳۰}{۲} = ۴۳۵ \end{aligned}$$

پس اولین جمله دسته سی ام، برابر با جمله ۴۳۶ ام دنباله اعداد طبیعی فرد است. دنباله اعداد طبیعی فرد، یک دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = 2n - 1$ است، بنابراین:

$$a_{۴۳۶} = ۲ \times ۴۳۶ - ۱ = ۸۷۱ = b_1$$

دسته سی ام، جمله دارد، بنابراین جمله آخر این دسته برابر است با:

$$b_{۳۰} = b_1 + ۲۹d \xrightarrow[d=۲]{b_1=۸۷۱} ۸۷۱ + ۲۹ \times ۲ = ۹۲۹$$

(توجه کنید که جملات هر دسته، یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۲ هستند)، بنابراین:

$$b_1 + b_{۳۰} = ۸۷۱ + ۹۲۹ = ۱۸۰۰$$

$$S = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$$

$$3S = \frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \dots + \frac{20-17}{17 \times 20}$$

$$3S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

دقت کنید که دومین عدد هر پرانتز با اولین عدد پرانتز بعدی ساده می‌شوند:

$$3S = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{100} = 0/15$$

$$\begin{cases} ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \dots & d_1 = ۵ \\ ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, \dots & d_2 = ۳ \end{cases}$$

اولین جمله مشترک دو دنباله ۱۷ است. همچنین قدرنسبت دنباله جملات مشترک ک.م.م d_1 و d_2 یعنی $۱۵ = ۳ \times ۵$ است؛ بنابراین جمله عمومی دنباله جملات مشترک عبارت است از:

$$a_n = ۱۷ + ۱۵(n - 1) = ۱۵n + ۲$$

حال باید تعداد n ‌هایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $۱۰۰ \leq a_n \leq ۹۹۹$:

$$\begin{aligned} ۱۰۰ \leq ۱۵n + ۲ \leq ۹۹۹ &\Rightarrow ۹۸ \leq ۱۵n \leq ۹۹۷ \\ \Rightarrow ۶/\dots \leq n \leq ۶۶/\dots &\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{۷, ۸, \dots, ۶۶\} \end{aligned}$$

بنابراین تعداد جملات موردنظر برابر است با:

$$۶۶ - ۷ + ۱ = ۶۰$$

جمله‌های مشترک تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن ک.م.م قدرنسبت دو دنباله است.

$$۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \dots \Rightarrow d_1 = ۷$$

$$۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \dots \Rightarrow d_2 = ۵$$

اولین جمله مشترک بین دو دنباله، ۳۷ است.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \xrightarrow{d=[۷,۵]=۳۵} a_n = ۳۷ + ۳۵(n - 1) = ۳۵n + ۲$$

$$۱۰۰ \leq a_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ \Rightarrow ۲/\dots \leq n < ۸/\dots$$

$$۳ \leq n \leq ۸ \Rightarrow n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

پس ۶ عدد با این شرایط داریم.

در دسته اول ۱، دسته دوم ۲ و ... و در دسته بیستم، ۲۰ عدد داریم پس در کل به اندازه $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۰ = \frac{۲۰}{۲}(۱ + ۲۰) = ۲۱۰$ عدد فرد داریم؛ بنابراین جمله آخر در دسته بیستم، ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی $(۲n - 1)$ است.

$$۲ \times ۲۱۰ - ۱ = ۴۱۹$$

الگوی داده شده را به صورت زیر تقسیم بندی می کنیم:

طبق شکل داریم:

$a_1 = 1^2 + 0$, $a_2 = 2^2 + (0 + 1)$, $a_3 = 3^2 + (0 + 1 + 2)$, ...
 $\Rightarrow a_n = n^2 + (0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1))$

بنابراین در شکل نهم تعداد دایره ها برابر است با:

$$9^2 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 8) = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 81 + 36 = 117$$



۱ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x = 1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ و $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲ کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \frac{2}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳ اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۳
(۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطهٔ $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱
(۳) صفر (۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

خط مماس بر نمودار $y = \frac{1}{\sin x}$, $0 < x < \pi$ در نقطه‌ای به طول x_0 واقع بر آن، موازی خط به معادله $3y - 2x = 5$ است، x_0 کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$
 (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12$ بیان شده است، k کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
 (۳) ۴ (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

به ازای کدام مقدار a خط به معادله $y = -3x + 2$ بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$ مماس است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر
 (۳) ۱ (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(2) - f'(5)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(-2, 1)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ ، مینیمم (۲) $-\frac{4}{3}$ ، ماکزیمم
 (۳) $\frac{4}{3}$ ، مینیمم (۴) $\frac{4}{3}$ ، ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x}{1-x^2}$ بر کدام بازه صعودی است؟

- (۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-\infty, -2)$
 (۳) $(0, 2)$ (۴) $(-2, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

خط گذرا از دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ در نقطه $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x}$ وقتی $x \rightarrow 3$ ، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) -۲۱
(۲) -۱۸
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

- (۱) -۸
(۲) -۶
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -۶
(۲) -۴
(۳) ۳
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{4}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) ۲/۵
(۲) ۳
(۳) ۳/۵
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله $y = (x-2)^2$ روی بازه $[0, 2]$ است، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{28}{27}$
(۲) $\frac{10}{9}$
(۳) $\frac{32}{27}$
(۴) $\frac{11}{9}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۸ اگر $f(x) = x^2 - 2x + 4$ و $g(x) = x^3 + x$ ، کمترین مقدار تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) ۲۱
(۲) ۲۴
(۳) ۲۷
(۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۹ مشتق راست تابع با ضابطه $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطه $x = -3$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{3}$
(۲) -5
(۳) -4
(۴) $\frac{7}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲۰ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۱ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = 3$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۲ مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3$ در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$
(۲) $-\frac{5}{4}$
(۳) $-\frac{5}{2}$
(۴) $-\frac{15}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطه $f(x) = ||x| - 1|$ بر روی \mathbb{R} کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۴ به ازای کدام مقدار k ، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه $[1, 3]$ قرینه یکدیگرند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۵ خط $y = -1$ بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + a$ مماس است. a کدام است؟

- (۱) $-\frac{9}{8}$
(۲) $-\frac{7}{8}$
(۳) $\frac{7}{8}$
(۴) $\frac{9}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۲۶ بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن ۶ باشد، کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) ۴
(۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۲۷ بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه $[-2, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$
(۲) $\frac{5}{12}$
(۳) $\frac{7}{12}$
(۴) $\frac{5}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۹ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$
(۴) $\frac{10}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳۰ به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ ، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۱ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۲ در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه $a + \frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به $a + h$ تغییر کند، کدام حالت است؟

- (۱) h
(۲) $2h$
(۳) $3h$
(۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۳ مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ ، بر روی \mathbb{R} کدام است؟

- (۱) -1
(۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) صفر
(۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۴ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - [x]}{x^3 - x - 6} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در بازه $(2, 3)$ پیوسته است؟

- (۱) $\frac{1}{11}$
(۲) $\frac{1}{9}$
(۳) $\frac{1}{8}$
(۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۵ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ ، با بیشترین شیب ممکن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$
(۲) $-\frac{5}{3}$
(۳) $-\frac{7}{3}$
(۴) $-\frac{8}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۶ کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = 1 - \cos^2 x - \sin x$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{4}$
(۴) صفر

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

۳۷ اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟

- (۱) $25\sqrt{2}$
(۲) ۳۶
(۳) $28\sqrt{2}$
(۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۸ ماکزیمم تابع با ضابطه $f(x) = -|x| \cos x$ ، در بازه $[-1, 1]$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\cos 1$
(۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۳۹ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} & ; x \geq 1 \\ ax^2 + bx & ; x < 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} مشتق پذیر است. b کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۳
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۴۰ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ بر روی دامنه خود، کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۱ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می کند؟

- (۱) -۴
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۴۲ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، مشتق اول و دوم تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه $x = 0$ چگونه است؟

- (۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم دارد.
 (۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.
 (۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد.
 (۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۴۳ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'$ (۱) کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) ۲
 (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۴۴ کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است؟

- (۱) مینیمم مطلق دارد.
 (۲) ماکزیمم مطلق دارد.
 (۳) دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.
 (۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۴۵ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

- (۱) $-x + \sqrt{1+x^2}$
 (۲) $x - \sqrt{1+x^2}$
 (۳) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
 (۴) $\sqrt{1+x^2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۶ اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۷ اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -2$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $2 - f(x_0)$
 (۲) $2 + f(x_0)$
 (۳) ۲
 (۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازه $[2/25, 2/56]$ ، از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{93}$ (۲) $\frac{2}{93}$
 (۳) $\frac{1}{62}$ (۴) $\frac{1}{31}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = \sqrt{2}$ ، چقدر کمتر است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{18}$
 (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})$ و $f'_-(\sqrt{2})$ ، از راست به چپ کدام است؟ (با تغییر)

- (۱) $f'_-(\sqrt{2})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{2})$ وجود ندارد.
 (۲) $f'_-(\sqrt{2})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{2}) = 2$
 (۳) $f'_-(\sqrt{2}) = 3$ و $f'_+(\sqrt{2})$ وجود ندارد.
 (۴) $f'_-(\sqrt{2}) = 3$ و $f'_+(\sqrt{2}) = 2$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

خط به معادله $y = 3x - 2$ در نقطه $x = 2$ ، بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶
 (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ ، چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{36}$ (۲) $\frac{1}{18}$
 (۳) $\frac{5}{72}$ (۴) $\frac{1}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۳ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$ و $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ ، آنگاه $(g \circ f)'(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۴ نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^2(x - 2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی‌الاضلاع (۲) فقط متساوی‌الساقین
 (۳) فقط قائم‌الزاویه (۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۸

۵۵ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x] + |x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$
 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - 2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۷ تابع با ضابطه $f(x) = |x|x^2 - 1$ با دامنه $[-2, 2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴
 (۳) ۵ (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۸ مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $2\sqrt{3}$
 (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۵۹ اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطه $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه گوشه‌ای (زاویه‌دار) آن عمود برهم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{1\}$
 (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) \emptyset

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۶۰ نقطه $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله نقطه M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه $x=7$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{15}{8}$
 (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۶۱ تابع با ضابطه $y = x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟

- (۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.
 (۲) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.
 (۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر
 (۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۶۲ اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{x}$ (۲) $\frac{3}{x^2}$
 (۳) $\frac{1}{3x}$ (۴) $\frac{x-3}{x^2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۶۳ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x^2}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x-1| & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است. a کدام است؟

۶۴

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

۶۵

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{12} & ; x = 0 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} پیوسته است. b کدام است؟

۶۶

- (۱) ± 1
(۲) ± 2
(۳) ± 3
(۴) ± 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1, 4]$ کدام است؟

۶۷

- (۱) ۰/۲۵
(۲) ۰/۵
(۳) ۰/۴۵
(۴) ۰/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۶۸

- (۱) $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$
(۲) $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$
(۳) $\{0, 1\}$
(۴) $\{\frac{2}{3}, 2\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

۶۹

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر می باشد. b کدام است؟

۷۰

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۷۱

- (۱) $\{-2, 2\}$
(۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$
(۳) $\{-2, 0, 2\}$
(۴) $\{-7, 0, 1\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

اگر $a > 0$ و ثابت و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{3a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}$ کدام است؟

۷۲

- (۱) $4a$
(۲) $3a$
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

تابع f با ضابطه زیر، در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۷۳

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x+1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2x+2 & ; 1 \leq x < 2 \\ x^2+2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

- (۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
(۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
(۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر
(۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

۷۴

- (۱) $\frac{7}{48}$
(۲) $\frac{5}{24}$
(۳) $\frac{7}{24}$
(۴) $\frac{7}{16}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

با شرط $x \leq 1$ در تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ و $g(x) = x^3 + x$ بیشترین مقدار $g \circ f$ کدام است؟

۷۵

(۲) ۱۰

(۱) ۹

(۴) ۳۰

(۳) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ کدام است؟

۷۶

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) مشتق ندارد.

(۳) ۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۷۷

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ (۱) $\frac{2}{1}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$ (۳) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < 1 \\ x^2 - x & ; x \geq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است؟

۷۸

(۲) ۱

(۱) -۱

(۴) هیچ مقدار a (۳) هر مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

۷۹

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1}$ و دامنه $[0, 1]$ ، خط مماس بر نمودار آن، موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۸۰

(۲) -۱/۵

(۱) -۲

(۴) -۰/۵

(۳) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۱ به ازای کدام مقادیر a ، تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ دارای ماکزیمم نسبی است؟

(۱) $|a| > 2$

(۲) $a < 0$

(۳) $a > 0$

(۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۸۲ اگر $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۸۳ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو $0/44$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

(۱) $\frac{1}{30}$

(۲) $\frac{1}{24}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۵ بیشترین مساحت از مستطیل‌هایی که دو رأس آن بر روی نیم‌بیضی به معادله $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور x ها باشند، کدام است؟

(۱) ۶

(۲) $3\sqrt{5}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۸۶ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12-x}$ در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

(۱) $8\sqrt{2}$

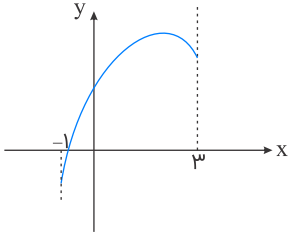
(۲) $8\sqrt{3}$

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^2 + ax + b}$ است. مقدار ماکزیمم مطلق تابع کدام است؟



(۱) $1 + \sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $1 + 2\sqrt{2}$

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$ ، چقدر کمتر است؟

(۲) ۰/۰۴

(۱) ۰/۰۳

(۴) ۰/۰۶

(۳) ۰/۰۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

خط به معادله $y = 2x - 5$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله $y = ax^2 + bx + 1$ مماس است، a کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ ، کدام است؟

(۲) -۳۲

(۱) -۳۶

(۴) -۱۸

(۳) -۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^3 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$ ، اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۲ حد عبارت $\frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$ وقتی $x \rightarrow 2$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{4}$
 (۳) $-\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۳ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور x ها انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه $A(1, 5)$ و $B(7, -2)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹
 (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۹۴ اگر $f(x) = 1 - |x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطه $y = f(f(x))$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
 (۳) ۳ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۹۵ مشتق چپ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۹۶ از تساوی $y = \sqrt[3]{x}$ ، مقدار $y''y^5$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{9}x$ (۲) $-\frac{1}{3}x$
 (۳) $-\frac{2}{9}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۹۷ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) صفر
 (۳) ۱ (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

(۱) ۱

(۲) $1/5$

(۳) ۲

(۴) $2/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۹۹ اگر $f(x) = |x - 2| + \sqrt{2x}$ باشد، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰۰ کدام یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟

(۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$

(۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$

(۴) $p(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(۳) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۰۱ در تابع با ضابطه $f(x) = (x + 2)\sqrt{4x + 1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چقدر بیشتر است؟

(۱) ۰/۱۰

(۲) ۰/۱۵

(۳) ۰/۲۰

(۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۰۲ در تابع با ضابطه $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) ۳

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰۳ در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\sqrt[3]{2}$

(۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه a می‌باشد. a کدام است؟

(۲) ۱۲/۲۵

(۱) ۱۱/۷۵

(۴) ۱۳/۵

(۳) ۱۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط به معادله $x - 3y = 2$ عمود است. این خط مماس، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

(۲) (۱, ۴)

(۱) (۱, ۳)

(۴) (۲, -۴)

(۳) (۲, -۶)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ در بازه $(1, 4)$ قرار می‌گیرد؟

(۲) $-3 < a < 2/5$

(۱) $-3 < a < 1/5$

(۴) $-5 < a < 2/5$

(۳) $-5 < a < 1/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

(۲) $2 - \sqrt{2}$

(۱) $3 - \sqrt{2}$

(۴) $3 - 2\sqrt{2}$

(۳) $2 - 2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{3}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر بیشتر است؟

(۲) $\frac{11}{540}$

(۱) $\frac{7}{540}$

(۴) $\frac{11}{270}$

(۳) $\frac{7}{270}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۱۰ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱
(۳) ۱ (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۱۱ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} & ; x > 3 \\ ax - 3a - \frac{3}{\lambda} & ; x \leq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲
(۳) هیچ مقدار a (۴) هر چه باشد

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۱۲ فاصله نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه اول کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱۳ اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ ، آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) -۰/۲ (۲) -۰/۱
(۳) ۰/۱ (۴) ۰/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۱۴ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴/۵
(۳) ۶ (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۱۵ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x = 5$ تا $x = 9$ کدام است؟

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵
(۳) ۰/۶ (۴) ۰/۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۱۶ اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^{\Delta}$ ، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

- (۱) $4g''(0)$
 (۲) $5g''(0)$
 (۳) $4g''(0) + 20$
 (۴) $5g''(0) + 20$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱۷ اگر $g(x) = \sqrt{2x}$ و $f(x) = (x^2 - x)$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۶
 (۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۸ کمترین فاصله نقطه $A(4, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 9}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
 (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) ۳
 (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۱۹ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x| + 3})$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
 (۲) $\frac{1}{12}$
 (۳) $-\frac{1}{6}$
 (۴) $-\frac{1}{12}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

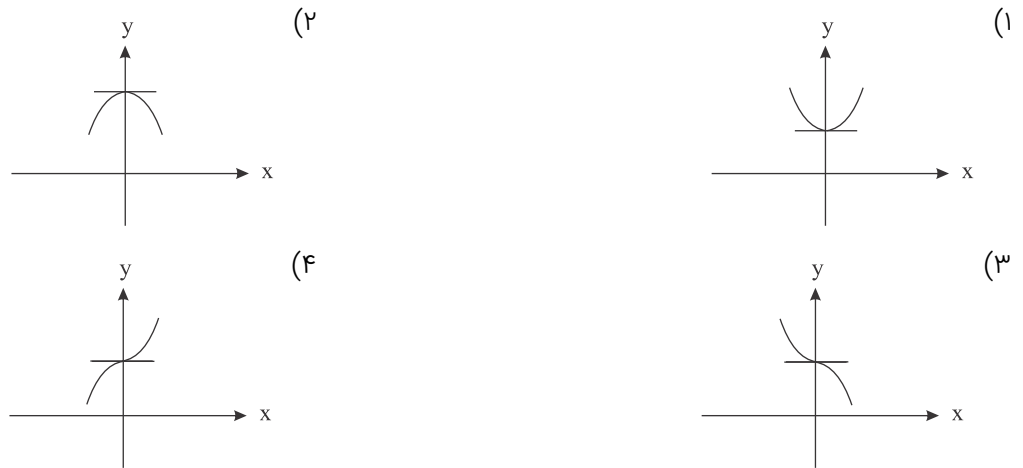
فلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

۱۲۰ تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ با ضابطه در کدام بازه مشتق پذیر است؟

- (۱) $[0, 1]$
 (۲) $(-1, 0)$
 (۳) $[1, +\infty)$
 (۴) $(-\infty, -1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ در نزدیکی نقطه $x = 0$ چگونه است؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

تابع f در نقطه c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

- (۱) مثبت
(۲) منفی
(۳) نامنفی
(۴) نامثبت

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

اگر $1 = f'(-1) = -g'(1) = -g(1) = 2h'(0) = h(0)$ مقدار مشتق تابع fogoh در صفر کدام است؟

- (۱) -2
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

کوتاهترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 7}$ کدام است؟

- (۱) 4
(۲) $4/5$
(۳) 5
(۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

برد تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه $[-3, 1]$ کدام است؟

- (۱) $[-8, 17]$
(۲) $[-8, 24]$
(۳) $[-3, 17]$
(۴) $[-3, 24]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۲۶ مجموعه طول نقاط ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ کدام است؟

- (۱) $\{-\sqrt{3}\}$ (۲) $\{\sqrt{3}\}$
 (۳) $\{-\sqrt{3}, 1\}$ (۴) $\{\sqrt{3}, 1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۲۷ در تابع با ضابطه $f(x) = x|x - 4|$ ، فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲۸ تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} مشتق‌پذیر از مرتبه دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(4 - x^2)$ است. اگر $f'(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2
 (۳) 2 (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۲۹ کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $-\frac{1}{6}$
 (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۳۰ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه $[6, 5]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

- (۱) $4 + \sqrt{2}$ (۲) $3 + 2\sqrt{2}$
 (۳) $2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (۴) $2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳۱ خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - x^2$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه دیگر (A) قطع می‌کند. عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2
 (۳) 2 (۴) 3

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۳۲ دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصل ضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

$$\begin{aligned} (۲) & -\frac{۱}{۲} \\ (۴) & \frac{۳}{۲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) & -\frac{۳}{۲} \\ (۳) & \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۳۳ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۳x + |x|$ و $g(x) = \frac{۳}{۴}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$ در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

$$(۲) -\frac{۱}{۲}$$

$$(۱) -\frac{۱}{۴}$$

$$(۴) \text{ هیچ مقدار } a$$

$$(۳) \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۳۴ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; \text{ گویا } x \\ ۰ & ; \text{ گنگ } x \end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟

$$(۲) ۲$$

$$(۱) ۱$$

$$(۴) \text{ هیچ نقطه}$$

$$(۳) \text{ بی‌شمار}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۳۵ ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $y = -x + \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲}$ کدام است؟

$$(۲) \frac{۱}{۳}$$

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$(۴) \text{ فاقد ماکزیمم}$$

$$(۳) \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۳۶ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{۴} + h) - f(\frac{1}{۴})}{h}$ کدام است؟

$$(۲) ۲$$

$$(۱) ۱$$

$$(۴) ۴$$

$$(۳) ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳۷ بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟

$$(۲) ۹۶۸$$

$$(۱) ۹۵۸$$

$$(۴) ۹۸۸$$

$$(۳) ۹۷۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۳۸ تابع f روی بازه (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

- (۱) هر نقطه بحرانی، نقطه اکسترمم نسبی است.
- (۲) هر نقطه اکسترمم نسبی، نقطه بحرانی است.
- (۳) در هر نقطه بحرانی، مشتق تابع صفر است.
- (۴) در هر نقطه اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۳۹ مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ ، کدام است؟

- (۱) -18 و 24
- (۲) -45 و 27
- (۳) -36 و 27
- (۴) -27 و 36

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 5$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \alpha$ است. α کدام است؟

- (۱) $2/5$
- (۲) $1 + \sqrt{3}$
- (۳) 3
- (۴) 4

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۴۱ دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(4, 7)$ و خط به معادله $y = x - 1$ در صفحه محوره‌های مختصات مفروض‌اند. نقطه M بر روی خط مفروض؛ با کدام طول انتخاب شود به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

- (۱) -1
- (۲) صفر
- (۳) 1
- (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۴۲ تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است. کدام بیان نا درست است؟

- (۱) اگر c نقطه اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.
- (۲) اگر c نقطه اکسترمم نسبی باشد، آنگاه c نقطه بحرانی است.
- (۳) اگر c نقطه بحرانی باشد، آنگاه c نقطه اکسترمم نسبی است.
- (۴) اگر c نقطه اکسترمم مطلق باشد، آنگاه c نقطه بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۴۳ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد. α کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۴۴ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h)+3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $x^2 f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۴۵ اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ ، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۴۶ بزرگ‌ترین حجم مخروط، از بین مخروط‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر واحد باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{81}$
(۲) $\frac{\pi}{12}$
(۳) $\frac{3\pi}{32}$
(۴) $\frac{4\pi}{27}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۱۴۷ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) x
(۴) $\frac{1}{2}x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۴۸ کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(1, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = x\sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{11}$
(۲) $3\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{3}$
(۴) $5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۴۹ در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $h + 2$ تغییر کند برابر $\frac{h}{9}$ است. کدام است؟

- (۱) $1/5$
 (۲) ۲
 (۳) $2/5$
 (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵۰ به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $(m + 2)y = mx$ ، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{1 + x^2}$ است؟

- (۱) $m > -1$
 (۲) $m < -1$
 (۳) $m > 1$
 (۴) $m < 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۵۱ مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(x-1) \cdot \sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$
 (۲) $\frac{1}{8}$
 (۳) $\frac{3}{40}$
 (۴) $\frac{5}{16}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۵۲ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۸
 (۲) ۲۴
 (۳) ۲۷
 (۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵۳ در تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0/1$ ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 3$ چقدر بیشتر است؟

- (۱) $0/31$
 (۲) $0/42$
 (۳) $0/62$
 (۴) $0/91$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۵۴ اگر $x - [x] = f(x)$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه تابع $g \circ f$ از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

- (۱) دارای ماکسیمم - دارای مینیمم
 (۲) دارای ماکسیمم - فاقد مینیمم
 (۳) فاقد ماکسیمم - دارای مینیمم
 (۴) فاقد ماکسیمم - فاقد مینیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۵۵ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو متغیر $0/21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{42}$
 (۲) $\frac{1}{21}$
 (۳) $\frac{3}{42}$
 (۴) $\frac{2}{21}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۵۶ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x + \frac{1}{3}] + [x]$ روی بازه $(0, 3)$ در چند نقطه، مشتق ناپذیر است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۵۷ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

- (۱) $a > 0$ یا $a < -2$
 (۲) $a > 2$ یا $a < 0$
 (۳) $0 < a < 2$
 (۴) $-2 < a < 0$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۵۸ مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ روی بازه $[-1, 3]$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{3}$
 (۲) $-\frac{10}{3}$
 (۳) $-\frac{8}{3}$
 (۴) $-\frac{7}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵۹ اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

- (۱) -۲
 (۲) -۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶۰ در تابع با ضابطه $f(x) = |x| \cdot [x]$ ، مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ در نقطه $x = 2$ ، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ ، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

مشتق عبارت $\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$ به ازای $x = -8$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{1}{5}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ کدام است؟

- (۱) $-1 + \sqrt{5}$
(۲) $1 + \sqrt{5}$
(۳) $-1 + \sqrt{3}$
(۴) $1 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟

(۱) -۴

(۲) ۴ و -۱۲

(۴) ۱۲

(۳) -۴ و ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۶۸ مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶۹ تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترم نسبی کدام وضع را دارد؟

(۲) ماکسیم نسبی

(۱) مینیم نسبی

(۴) فاقد اکسترم نسبی

(۳) مینیم نسبی و ماکسیم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۷۰ اگر تابع f در $x = 4$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۱۷۱ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در نقطه $x = \alpha$ مشتق ندارد، مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) -۱

(۴) تعریف نشده

(۳) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷۲ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

اگر c طول نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f روی دامنهٔ آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطهٔ c ، کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) پیوسته
(۲) مشتق‌پذیر
(۳) خط مماس افقی
(۴) اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1]$
(۲) $[0, 2]$
(۳) $[1, 2]$
(۴) $(1, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

مشتق تابع $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطهٔ $x = -3$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

بیشترین مساحت زمینی مستطیل‌شکل که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است، طول طناب چند متر است؟

- (۱) ۶۸
(۲) ۷۰
(۳) ۷۱
(۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

گزینه ۱

۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

گام دوم

باتوجه به مشخص بودن مقادیر $f(1)$ و $f'(1)$ ، مقدار $g(1)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(1)$ ذکر نشده صفر بودن $f(1)$ است).

$$y'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{(-4)g(1) - 0}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{-4g(1)}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{-4}{g(1)} \Rightarrow g(1) = -\frac{4}{3}$$

گزینه ۳

۲

نقطه $A(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ را بر روی منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ در نظر می‌گیریم. فاصله مبدأ مختصات از نقطه A برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\frac{2}{\alpha^2} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}$$

برای مینیمم کردن فاصله OA ، ابتدا معادله $(OA)'_{\alpha} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(OA)'_{\alpha} = \frac{2\alpha - \frac{16\alpha^3}{\alpha^4}}{2\sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}}$$

$$(OA)'_{\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha - \frac{16}{\alpha^3} = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{16}{\alpha^3} \Rightarrow \alpha^6 = 8 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$$

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ ، به ازای $\alpha = \sqrt{2}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^4}} = \sqrt{2 + \frac{4}{4}} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

طبق تعریف مشتق، حد خواسته شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ است یعنی:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

به ازای $x = -1$ عبارت $(x^2 - x - 2)$ برابر صفر می شود و تابع $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 7x}$ نیز در $x = -1$ بیوسته است؛ بنابراین برای محاسبه مشتق در نقطه $x = -1$ ، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $(x^2 - x - 2)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و در نهایت مقدار آن را به ازای $x = -1$ به دست آوریم:

$$x = -1 : f'(x) = (2x - 1) \sqrt[3]{x^2 - 7x} \Rightarrow f'(-1) = (-2 - 1) \sqrt[3]{(-1)^2 - 7(-1)} = (-3) \sqrt[3]{8} = -3 \times 2 = -6$$

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x = 0$ ، در معادله آن به دست می آید.
ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.
ج) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ابتدا معادله خط مماس را می نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow y' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

$$y'(1) = \frac{2 + 3}{2\sqrt{1 + 3}} = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{4} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{5}{4}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow y(1) = 2$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادله خط مماس در نقطه $(1, 2)$ برابر است با:

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + 2 \Rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

با جایگذاری $x = 0$ در معادله خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{5}{4}(0) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{3}{4}$ است.

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازه I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در این صورت c طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.
 ب) نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$y = x^f + \frac{f}{3}x^3 - fx^2 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادله $y' = 0$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y'' = 4x^2 + 4x^2 - 4x \xrightarrow{y''=0} 4x(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'		-	+	-	+
y		↘	↗	↘	↗
		min	max	min	

بنابراین طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع برابر صفر است.

گام اول

- (الف) شیب دو خط موازی باهم برابر است.
 (ب) شیب خطی به معادله $y = ax + b$ برابر a است.
 (ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

ابتدا با استاندارد کردن معادله خط داده شده، شیب آن را تعیین می‌کنیم:

$$3y - 2x = 5 \Rightarrow 3y = 2x + 5 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه x_0 برابر شیب خط داده شده است، بنابراین:

$$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$x_0 = \text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } x_0 = y'(x_0) = -\frac{\cos x_0}{\sin^2 x_0} = \frac{2}{3}$$

x_0 را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که معادله $-\frac{\cos x_0}{\sin^2 x_0} = \frac{2}{3}$ برقرار باشد. با جایگذاری گزینه‌ها، فقط به ازای $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ معادله برقرار است. روش دیگر برای یافتن x_0 ، حل معادله مثلثاتی است. داریم:

$$\frac{-\cos x_0}{\sin^2 x_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{\cos x_0}{1 - \cos^2 x_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x_0 = -3\cos x_0 \Rightarrow 2\cos^2 x_0 - 3\cos x_0 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x_0 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 & \text{غ ق ق} \\ \cos x_0 = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

از بین گزینه‌ها $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ جواب معادله است.

روش اول:

حد داده شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - \lambda}{h} = 12 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4 + 4h + h^2) + 2k + kh - 2k - \lambda}{h} = 12$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda + \lambda h + 2h^2 + kh - \lambda}{h} = 12 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + \lambda h + kh}{h} = 12$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2h + \lambda + k = 12 \Rightarrow \lambda + k = 12 \Rightarrow k = 4$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

حد داده شده را با استفاده از قاعده هوییتال حل می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - \lambda}{h} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \times 2(1)(2+h) + k}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda + 4h + k}{1} = 12 \Rightarrow \lambda + k = 12 \Rightarrow k = 4$$

در صورتی که خط بر منحنی مماس باشد، معادله تلاقی دو منحنی، ریشه مضاعف دارد:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2 + a}{x - 2} \\ y = -3x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + a}{x - 2} = -3x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + a = -3x^2 + \lambda x - 4 \Rightarrow 4x^2 - \lambda x + (a + 4) = 0$$

برای به دست آوردن ریشه مضاعف، $\Delta = 0$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-\lambda)^2 - 4(4)(a + 4) = 0 \Rightarrow 64 - 16a - 64 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right] (x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

$$2 < 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x}} \quad (\text{I})$$

$$5 > 4 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{x}{4}\right] (x^2 - 9x), \quad \left[\frac{5}{4}\right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{(\text{I})} f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\xrightarrow{(\text{II})} f'(5) = 1$$

پس $f'(2) - f'(5) = \frac{1}{4}$ است.

نقطه $(1, -2)$ اکسترم نسبی تابع $f(x)$ است پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^2 \xrightarrow{x=1, y=-2} -2 = a + b \quad (I)$$

می‌دانیم هر نقطه اکسترم نسبی، یک نقطه بحرانی تابع است بنابراین $x = 1$ در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یعنی $f'(1) = 0$ است:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} -a + 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (II)$$

با جایگذاری رابطه (II) در رابطه (I) داریم:

$$a + b = -2 \xrightarrow{a=2b} 2b + b = -2 \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow b = \frac{-2}{3}$$

$$\xrightarrow{a=2b} a = -\frac{4}{3}$$

بنابراین:

$$f(x) = -\frac{4}{3x} - \frac{2}{3}x^2, \quad f'(x) = \frac{4}{3x^2} - \frac{4}{3}x$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f'(x)$ ، نوع اکسترم نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

x	1
f'(x)	+ 0 -
f(x)	↗ ↘

max

بنابراین به ازای $a = -\frac{4}{3}$ ، نقطه $(1, -2)$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

گزینه ۲

۱۱

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > 0$ باشد.

گام دوم

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط \mathbb{R} به جز دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ تعریف شده است. داریم:

$$y = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{(1-x^2) - (-2x)x}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}$$

تابع y' به ازای تمام نقاط عضو دامنه تعریف تابع y ، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ کدام از دو مقدار $x = \pm 1$ درون بازه نباشد، با توجه به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازه $(-\infty, -2)$ صعودی است.

گام اول

الف) معادله خط گذرا از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطه $x = 3$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 3)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow f(3) = 1$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده شده را به دست می‌آوریم.
روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} - \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} - (f(x) + 5) \frac{(f(x) - f(3))}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} - (f(x) + 5)(f'(3)) = - (f(3) + 5)f'(3) = -6 \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \frac{f^2(3) + 4f(3) - 5}{3 - 3} = \frac{1 + 4 - 5}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f'(x)f(x) + 4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3) + 4f'(3)}{-1} \\ &= \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)(1) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1 - 2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \end{aligned}$$

حد داده شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x = 2$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x = 2$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$f'(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \times \left(\frac{-1}{2 \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} (2x-3)^2} \right) \Rightarrow f'(2) = 12 \times \frac{-1}{2 \times \sqrt{\frac{2+2}{4-3}} (4-3)^2} = -21$$

هنگامی که $x = 1$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ در نتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیر صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{a+b} - 2 = 0 \Rightarrow a+b = 4$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{4\sqrt{a+b}} = \frac{3}{2} \xrightarrow{a+b=4} a = 12 \Rightarrow b = -8$$

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \rightarrow \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجه صورت و بزرگ‌ترین درجه مخرج کسر با هم برابر است.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2 + 15x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \sqrt{4} \left| x + \frac{15}{8} \right| = -2 \left(x + \frac{15}{8} \right)$$

دقت کنید که چون $x \rightarrow -\infty$ بود، قرینه عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد

باتوجه به قسمت ب) از گام اول، $n = 1$ است. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 15}{3x - (-2(x + \frac{15}{8}))} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 15}{3x + 2x + \frac{15}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 15}{5x + \frac{15}{4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 3$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{4x + 15}{2\sqrt{4x^2 + 15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{24 + 15}{2\sqrt{36 + 45}}}$$

$$= \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = \frac{-5}{\frac{5}{6}} = -6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -6$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{9x^2 - 4x^2 - 15x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{5x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{x} = -\frac{9+9}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

گزینه ۳

۱۶

باتوجه به عبارت $f(2) = 9$ و $f'(2) = \frac{3}{2}$ می‌شود.

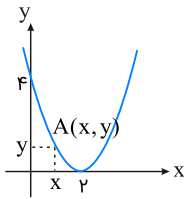
$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + x \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \Rightarrow g'(2) = \sqrt{f(2)} + 2 \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}$$

$$\Rightarrow g'(2) = \sqrt{9} + 2 \times \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

گزینه ۳

۱۷

نقطه $A(x, y)$ روی منحنی $y = (x-2)^2$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x, (x-2)^2)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S = xy \xrightarrow{y=(x-2)^2} S = x(x-2)^2 ; 0 < x < 2$$

$$S'_x = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(x-2+2x) = (x-2)(3x-2)$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow (x-2)(3x-2) = 0 \xrightarrow{x \neq 2} 3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید:

$$S_{\max} = x(x-2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)^2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنهٔ تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x - 2, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 4 = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	\nearrow	

$$g(x) = x^3 + x, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq 3 \Rightarrow g(f(x)) \geq g(3)$$

$$\Rightarrow (g \circ f)_{\min} = g(3) = 3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$$

باتوجه به اینکه ضابطهٔ تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \rightarrow (-3)^+$ داریم:

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow [x] = -3, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-3 + x)\sqrt[3]{9x} = (x - 3)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{9x^2}}(x - 3)$$

$$\Rightarrow f'_+(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{9}{3\sqrt[3]{729}}(-6) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -3 - 2 = -5$$

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y = |f(x)|$ ، ریشه‌های ساده دو معادله $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ خواهد بود.

$$f(x) = |x^3 - x| \xrightarrow{f(x)=0} x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)(x^3 - x)}{|x^3 - x|} \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ دارای شش نقطه بحرانی $x = 0, x = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $x = -1$ و $x = 2$ است

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است. چون $x \rightarrow +\infty$ ، برای یافتن حد کافی است بزرگترین جمله صورت را بر بزرگترین جمله مخرج تقسیم کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{4}}} = -\frac{3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

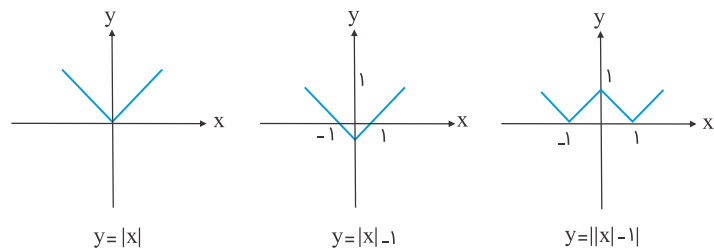
$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x)'(x^2 - x)^3 - ((x^2 - x)^3)'(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6}$$

$$= \frac{(2x + 2)(x^2 - x)^3 - (3(2x - 1)(x^2 - x)^2)(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6}$$

$$f'(2) = \frac{6 \times 1 - 3 \times 3 \times 4 \times 1}{64} = -\frac{15}{4}$$

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



باتوجه به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ ، نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های ساده عبارت داخل قدر مطلق نیز مشتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلق دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x| - 1|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$۱) |x| : x = 0$$

$$۲) ||x| - 1| : |x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تابع در سه نقطه $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ مشتق‌ناپذیر است.

برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[1, 3]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ تعریف نشده باشد. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + k \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

چون $[1, 3] \notin 0$ پس تنها نقطه $x = 2$ قابل قبول است؛ همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی‌اند. بنابراین داریم:

$$f(1) = 1 - 3 + k = k - 2$$

$$f(2) = 8 - 12 + k = k - 4$$

$$f(3) = 27 - 27 + k = k$$

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر k و کمترین مقدار آن برابر $k - 4$ است. این دو مقدار قرینه یکدیگرند؛ پس:

$$k = -(k - 4) \Rightarrow k = -k + 4 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

گام اول

خط بر یک منحنی مماس است در صورتی که معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف داشته باشد.

گام دوم

با مساوی قرار دادن معادله خط و منحنی، معادله تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

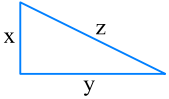
$$2x^2 - x + a = -1 \Rightarrow 2x^2 - x + a + 1 = 0$$

می‌دانیم معادله درجه دو در صورتی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ شود:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(a + 1) = 0 \Rightarrow 1 - 8(a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 8(a + 1) = 1 \Rightarrow a + 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x ، y و z به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x + z = 6 \Rightarrow z = 6 - x$$

از طرفی طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = z^2 \xrightarrow{z=6-x} x^2 + y^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - 12x \Rightarrow y = \sqrt{36 - 12x} \Rightarrow y = 2\sqrt{9 - 3x}$$

اکنون مساحت مثلث را به صورت تابعی بر حسب x می‌نویسیم:

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(2\sqrt{9 - 3x}) = x\sqrt{9 - 3x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادله $S'_x = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = \sqrt{9 - 3x} - \frac{3x}{2\sqrt{9 - 3x}} = \frac{2(9 - 3x) - 3x}{2\sqrt{9 - 3x}} = \frac{18 - 9x}{2\sqrt{9 - 3x}}$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow 18 - 9x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{y=2\sqrt{9-3x}} y = 2\sqrt{9-6} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده شده برابر است با:

$$S_{\max} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

چون $3 \notin [-2, 2]$ ، پس مقدار تابع را به‌ازای $x = -1, -2, 2$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

باتوجه به مقادیر به‌دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y = 10$ است.

برابر $f'(4)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کافی است $f'(4)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) + 2(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(5 - 8) + 2(1 + 2)}{(5 - 8)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ موجود است هرگاه:
اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.
ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطه $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \sqrt[3]{(2+6)^2} = a + b \Rightarrow \sqrt[3]{8^2} = a + b \Rightarrow a + b = 4 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطه $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (2x+6)^{\frac{2}{3}} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \times \frac{2}{3} \times (2x+6)^{-\frac{1}{3}} & ; x > 1 \\ a & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2x+6}} & ; x > 1 \\ a & ; x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2+6}} = a \Rightarrow a = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

با جایگذاری در رابطه (I) داریم:

$$a + b = 4 \xrightarrow{a = \frac{2}{3}} \frac{2}{3} + b = 4 \Rightarrow b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

خط $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y = 2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow \text{مشتق} = \text{شیب خط مماس} \Rightarrow 4x - 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x = 2$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 - 6 + 6 = 8 \Rightarrow \text{نقطه تماس } (2, 8)$$

نقطه تماس در معادله خط مماس باید صدق کند:

$$y = 5x + a \xrightarrow{(2,8)} 8 = 5(2) + a \Rightarrow a = -2$$

باتوجه به وجود عبارت $[x]$ در ضابطه تابع $f(x)$ ، ابتدا بازه $[-1, 2]$ را به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و ضابطه تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \sin \pi x$$

باتوجه به اینکه ضابطه تابع $f(x)$ در بازه $[0, 1]$ به صورت خط افقی $y = 0$ است پس هر $x \in [0, 1]$ می‌تواند یک نقطه بحرانی تابع $f(x)$ باشد، همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ یعنی $x = -1, 2$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 2]$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.
ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطه $a + \frac{h}{\nu}$ یعنی محاسبه $f'\left(a + \frac{h}{\nu}\right)$ ، پس ابتدا ضابطه $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a + \frac{h}{\nu}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 4$$

$$a + \frac{h}{\nu} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'\left(a + \frac{h}{\nu}\right) = 6\left(a + \frac{h}{\nu}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a + h$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{[3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2] - (3a^2 + 4a - 2)}{h} \\ &= \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 4a + 4h - 2 - 3a^2 - 4a + 2}{h} = \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4 \end{aligned}$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq 0$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R} برابر صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - [x]}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - x - 6} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3x^2 - 1} = \frac{1}{12 - 1} = \frac{1}{11}$$

$$f(2) = a \Rightarrow a = \frac{1}{11}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4x - 1$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیمم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^2 + 4x - 1$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2, \quad f(2) = \frac{10}{3} \Rightarrow A \left(2, \frac{10}{3} \right)$$

$$\text{مماس : شیب خط مماس : } m = f'(2) = -4 + 8 - 1 = 3$$

$$\text{عرض از مبدأ : } y - \frac{10}{3} = 3(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{10}{3} - 6 = \frac{-8}{3}$$

از آنجایی که $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$ ، داریم $-1 \leq t \leq 1$ و در نتیجه:

$$y = t^2 - t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$y' = 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-1}{4}$ است.

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y ، به صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 50$$

$$\Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$$

$$\Rightarrow f = 3x + 4y = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$ ، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = 3 + 4\left(\frac{-2x}{2\sqrt{50 - x^2}}\right) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 = \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x > 0} 9(50 - x^2) = 16x^2$$

$$\Rightarrow 450 - 9x^2 = 16x^2 \Rightarrow 25x^2 = 450 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18}$$

$$y = \sqrt{50 - x^2} = \sqrt{50 - 18} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$f_{\max} = 3x + 4y = 3(3\sqrt{2}) + 4(4\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

می‌دانیم به ازای $-1 \leq x \leq 1$ همواره $\cos x > 0$ است؛ از طرفی به ازای هر x ، $|x| \geq 0$ است بنابراین به ازای $x \in [-1, 1]$ نامساوی $-|x| \cos x \leq 0$ برقرار است.

می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازه $[-1, 1]$ به ازای $x = 0$ ، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه \mathbb{R} مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > 1$ و $x < 1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx = a + b \\ f(1) &= \frac{2 \times 1}{1} = 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)} a + b = 2 \quad (\text{I})$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{3}{2}} & ; x > 1 \\ 2ax + b & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= -(1)^{-\frac{3}{2}} = -1 \\ f'_-(1) &= 2a + b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{f'_+(1) = f'_-(1)} 2a + b = -1 \quad (\text{II})$$

دو رابطه I و II را به صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = 3 \Rightarrow a = -3 \xrightarrow{(I)} -3 + b = 2 \Rightarrow b = 5$$

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

حال ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

معادلهٔ $f'(x) = 0$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x = 0$ تعریف نشده است اما $x = 0$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن برابر صفر است.

$$f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$$

حال $f(4)$ و $f'(4)$ را به دست آورده و معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$f(4) = \frac{5 \times 4 - 4}{\sqrt{4}} = \frac{16}{2} = 8$$

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - 4)}{x} \Rightarrow f'(4) = \frac{10 - \frac{1}{4}(16)}{4} = \frac{3}{2}$$

معادلهٔ خط مماس:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4)$$

$$\xrightarrow[\text{عرض از مبدأ}]{x=0} y - 8 = \frac{3}{2}(-4) \Rightarrow y - 8 = -6 \Rightarrow y = 2$$

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:
 $f'_+(0) = f'_-(0)$

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:
 $f''_+(0) = f''_-(0)$

گام دوم

ابتدا ضابطه معکوس تابع $f(x)$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $(f^{-1})'(x)$ و $(f^{-1})''(x)$ در نقطه $x = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف مثبت)}} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} ; x \geq 0$$

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow y = -\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف منفی)}} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{2}} ; x < 0$$

پس ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & ; x \geq 0 \\ -x^{\frac{1}{2}} & ; x < 0 \end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$$

همچنین داریم:

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & ; x > 0 \\ -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'_+(0) = (f^{-1})'_-(0) = 0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$(f^{-1})''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & ; x > 0 \\ \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (f^{-1})''_+(0) &= -\frac{1}{4} \\ (f^{-1})''_-(0) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f^{-1})''_+(0) \neq (f^{-1})''_-(0)$$

بنابراین تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق دوم ندارد.

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f(x)$ در $x = 2$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$g(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$$

طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'(g(1)) = g'(1) \times f'(2) = \frac{4}{3} g'(1)$$

از طرفی:

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=1} g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

در نتیجه:

$$(f \circ g)'(1) = \frac{4}{3} g'(1) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$$

عبارت $x^2 - 3$ روی بازه $[-1, 1]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x \in [-1, 1] : |x^2 - 3| = -(x^2 - 3) = 3 - x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = x |x^2 - 3| = x(3 - x^2) = 3x - x^3$$

با حل معادله $f'(x) = 0$ ، نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \xrightarrow{f'(x)=0} 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$		\searrow	\nearrow	\searrow

تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 1]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-1) = -2$ مینیمم مطلق تابع و $f(1) = 2$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x = -1$ و $x = +1$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکسترم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینه سوم نادرست است.

اگر $y = f(u)$ باشد به طوری که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

باتوجه به گام اول و با فرض اینکه $u = x + \sqrt{1+x^2}$ است، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u}$$

$$\begin{aligned} y = f(x + \sqrt{1+x^2}) &\Rightarrow y' = (x + \sqrt{1+x^2})' f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

راه حل اول:

$$f'_-(3) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

تابع f در $x = 3$ پیوستگی چپ ندارد و در نتیجه $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ وجود ندارد.

راه حل دوم:

بدون توجه به تعریف مشتق، حد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3+h)^2}{|1-(3+h)|} [3+h] - \frac{27}{2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3+h)^2}{|-2-h|} \times 2 - \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \times 2 - \frac{27}{2} = \frac{-9}{2} = +\infty \end{aligned}$$

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ب) تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و باهم برابر باشد.

وقتی $h \rightarrow 0^-$ ، حاصل حد داده شده $\frac{0}{0}$ و مبهم می‌شود. با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 - (-1)f'(x_0 - h)}{1} = \lim_{h \rightarrow 0^-} f'(x_0 - h) = f'_-(x_0)$$

چون تابع در x_0 مشتق‌پذیر است، پس داریم:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -2$$

بنابراین حاصل حد داده شده برابر -2 می‌شود.

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

باتوجه به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2/56) - f(2/25)}{2/56 - 2/25} = \frac{\sqrt{2/56} - \sqrt{2/25}}{0/31} = \frac{1/6 - 1/5}{0/31} = \frac{0/1}{0/31} = \frac{10}{31}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x = 2/25 \text{ در نقطه آنی آهنگ} = f'(2/25) = \frac{1}{2\sqrt{2/25}} = \frac{1}{2 \times 1/5} = \frac{1}{3}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(2/25) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{31 - 30}{93} = \frac{1}{93}$$

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

باتوجه به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازه } [0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{9+16} - \sqrt{16}}{3} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{16}}{3} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

$f'_+(\sqrt{2})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{2}$ و $f'_-(\sqrt{2})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{2}$ است.

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه $\sqrt{2}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - [2(\sqrt{2})^2](\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} x^3 - [2x^2]x = (\sqrt{2})^3 - \underbrace{[2(\sqrt{2}^+)^2]}_{4^+} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} x^3 - [2x^2]x = (\sqrt{2})^3 - \underbrace{[2(\sqrt{2}^-)^2]}_{4^-} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، در نتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را بدست می‌آوریم:

$$x \rightarrow \sqrt{2}^+ \Rightarrow x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow 2x^2 > 4 \Rightarrow [2x^2] = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow f'_+(x) = 3x^2 - 4$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4 = 3(2) - 4 = 6 - 4 = 2$$

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) مختصات نقطهٔ تماس، هم در معادلهٔ خط مماس و هم در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y = 3x - 2$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(2) = 3$ است. با جایگذاری $x = 2$ در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس نیز برابر است با:

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f(x) - 4)}{x - 2} \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}_{f(2)} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}}_{f'(2)} = f(2) \times f'(2) = 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{0/5}{2/25} = \frac{1}{4/5}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = \frac{10}{45} - \frac{1}{4} = \frac{40 - 45}{180} = \frac{-5}{180} = \frac{-1}{36}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{1}{36}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2)$$

ب) می‌دانیم:

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1))$$

با استفاده از ضابطه تابع $f(x)$ ، مقادیر $f(1)$ و $f'(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{5 - x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{5 - 1} = 2$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{5 - x^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{5 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

پس مقدار $(g \circ f)'(1)$ برابر است با:

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1)) \xrightarrow{f(1)=2} (g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(2) = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادله $y' = 0$ به دست می‌آید، لذا:

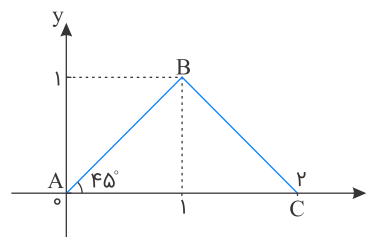
$$f(x) = x^2(x - 2)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x - 2)^2 + 2(x - 2)(x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x - 2)(x - 2 + x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1, 2$$

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad C \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$



$$\Rightarrow AB = BC$$

باتوجه به شکل و اینکه $AB = BC$ ، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

تابع در $x = 1$ پیوستگی راست دارد. مشتق تابع را در همسایگی راست بررسی می‌کنیم.

$$x > 1 : f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^2 + x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 1}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2}$$

تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

(۱) در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

(۲) مشتق چپ و راست در نقطه $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(-\frac{1}{2}x^2 + bx + c\right) = -\frac{1}{2}(-2)^2 + b(-2) + c = -2 - 2b + c$$

$$f(-2) = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \Rightarrow -2b + c = 5 \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-2) = f'_+(-2)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} \Rightarrow f'_-(-2) = \frac{-2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-2) = 2 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \xrightarrow{(*)} -2\left(-\frac{7}{3}\right) + c = 5$$

$$\Rightarrow c = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$$

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^2 - 1|$ روی بازه $[-2, 2]$ ، ضابطه تابع را ساده تر می کنیم. برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، کافی است نقاطی که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد را بیابیم.

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & ; x \geq 1, x \leq -1 \\ -x(x^2 - 1) & ; -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x \geq 1, x \leq -1 \\ -x^3 + x & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته است، پس ضابطه $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & ; x > 1, x < -1 \\ -3x^2 + 1 & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

اکنون ریشه های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1, x < -1 : 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1 < x < 1 : -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

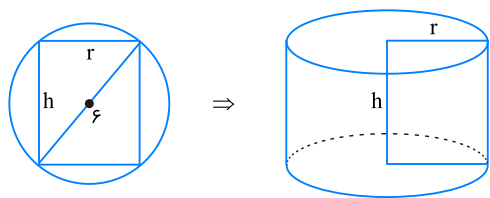
دقت کنید که در ضابطه اول، چون ریشه های به دست آمده در محدوده تعریف شده برای x قرار نمی گیرند پس قابل قبول نیستند. بررسی می کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف نشده است:

$$x = 1 : f'_+(1) = 3 - 1 = 2, f'_-(1) = -3 + 1 = -2 \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

$$x = -1 : f'_+(-1) = -3 + 1 = -2, f'_-(-1) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

همچنین تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-2, 2]$ بحرانی است.

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۶ نقطه بحرانی $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$ است.



می‌دانیم قطر مستطیل محاط درون دایره، برابر با قطر دایره است پس طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$h^2 + r^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = 36 \Rightarrow r = \sqrt{36 - h^2}$$

حجم استوانه حاصل از دوران مستطیل برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi(36 - h^2)h = 36\pi h - \pi h^3$$

می‌خواهیم حجم استوانه بیشترین مقدار باشد پس ابتدا معادله $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = 36\pi - 3\pi h^2$$

$$V'_h = 0 \Rightarrow 36\pi - 3\pi h^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\pi h^2 = 36\pi \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

گام اول

الف) نکته: در توابع دارای عبارت قدر مطلق، ریشه ساده عبارت درون قدر مطلق نقطه گوشه‌ای (زاویه‌دار) یا مشتق‌ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x) = |x|(x+a)$ نقطه $x=0$ تابع، نقطه $x=0$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطه $x=0$ برابر $f'_+(0)$ و شیب مماس چپ در نقطه $x=0$ برابر $f'_-(0)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطه $x=0$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(0) \cdot f'_+(0) = -1$

گام دوم

$$x > 0: |x| = x \Rightarrow f(x) = x(x+a) = x^2 + ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_+(0) = 2(0) + a = 0 + a = a$$

$$x < 0: |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)(x+a) = -x^2 - ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x - a \Rightarrow f'_-(0) = -2(0) - a = 0 - a = -a$$

$$f'_+(0) f'_-(0) = -1 \Rightarrow a(-a) = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

گام اول

الف) فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبدأ مختصات از رابطه $T = \sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید.
 ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطه T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y = \sqrt{x + 8}$ را جایگزین می‌کنیم تا T بر حسب متغیر x به دست آید.

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{y=\sqrt{x+8}} T = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+8})^2} = \sqrt{x^2 + x + 8}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x = 7$ حساب می‌کنیم:

$$T' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 8}}$$

$$\Rightarrow T'(7) = \frac{2(7) + 1}{2\sqrt{7^2 + 7 + 8}} = \frac{14 + 1}{2\sqrt{49 + 7 + 8}} = \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{2 \times 8} = \frac{15}{16}$$

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است.
 ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad ; \quad 0 \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(0) = f'_+(0)$.

گام دوم

چون $x^2 \geq 0$ همواره برقرار است پس $D_f = \mathbb{R}$.
 اکنون ضابطه تابع را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می کنیم:

$$y = x\sqrt{x^2} = x|x| = \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x^2 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x^2 \end{cases}$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x = 0$ پیوسته است.

باتوجه به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق پذیری تابع را بررسی می کنیم:

$$y' = \begin{cases} 2x & ; \quad x > 0 \\ -2x & ; \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_-(0) = y'_+(0) = 0$$

پس تابع در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.

می‌دانیم $fog(x) = f(g(x))$ و $(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ است.

با داشتن ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، ابتدا ضابطه $fog(x)$ را تعیین کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{(g(x))^3 - 2}{1 + (g(x))^3} = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1 + (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x}$$

$$\Rightarrow y = fog(x) = \frac{x-3}{x}$$

ضابطه y' را به دست می‌آوریم:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = y' = \frac{x - (x-3)}{x^2} = \frac{x - x + 3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = 2(x-1)(x^{\frac{2}{3}}) + (x-1)^2 \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \Rightarrow y' = \frac{6(x-1)x + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow 2(x-1)(3x + (x-1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

باتوجه به گزینه‌ها $x = \frac{1}{4}$ جواب مسئله است.

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است در صورتی که:
اولاً در این نقطه پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی:

$$f'_-(1) = f'_+(1)$$

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(-(x - 1)) = -(x - 1)^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 0$$

همچنین داریم:

$$f'_-(x) = 2(x - 1) \Rightarrow f'_-(1) = 0$$

$$f'_+(x) = -2(x - 1) \Rightarrow f'_+(1) = 0$$

بنابراین تابع به ازای $a = 0$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است.

$f'_+(1)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ و $f'_-(1)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$.

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطه $x = 1$ ، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطه تابع و مشتق آن را به ازای $x > 1$ و $x < 1$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1 \\ x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1 \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + x - 1 & ; x > 1 \\ x^{\frac{3}{2}} - x + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 & ; x > 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

با جایگذاری $x = 1$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$ ، مقدار $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$f'_-(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$f(0) = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+a} - b}{x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{0+a} - b = 0 & (1) \\ \text{HOP : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}}}{1} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = \pm 2 \xrightarrow{(1)} b = \pm 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(4 - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2} - 1)}{3} = \frac{\frac{31}{4} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\text{اختلاف: } \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x = 2$ ریشه عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x < 2 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است پس ضابطه تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ -\sqrt[3]{x^2} - \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ \frac{-5x+4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases}$$

ریشه معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 : 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \text{ غ.ق.ق} \\ x < 2 : -5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x = 0$ ریشه مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف نشده است؛ از طرفی به ازای $x = 2$ داریم:

$$f'_+(2) = \frac{10-4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f'_-(2) = \frac{-10+4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{4} \Rightarrow f'(2) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به صورت $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$ است.

زمانی تابع f روی \mathbb{R} مشتق‌پذیر است که در $x = 2$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = 2$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & ; x \geq 2 \\ -2x + a & ; x < 2 \end{cases}$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$(1) : 6 + b = 5 \Rightarrow b = -1$$

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f'_+(1) = -3$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_-(1) = 2 + a$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -3 = 2 + a \Rightarrow a = -5$$

چون تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - 5 = (1)^2 - 5(1) + b \Rightarrow b = 2$$

گام اول

نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه به گام اول، نقاطی از دامنه تابع f که در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف‌نشده است را می‌یابیم.

$$f(x) = (x^2 - 2\lambda)\sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 2\lambda) = \frac{6x^2 + x^2 - 2\lambda}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 2\lambda}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 7x^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow 7x^2 = 2\lambda \Rightarrow x^2 = \frac{2\lambda}{7} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{7}}$$

به‌ازای $x = 0$ ، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و در نتیجه این تابع تعریف‌نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x ، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = ۲$ ، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{\lambda x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادله $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{\lambda x}} = (۶ + x)(\lambda x)^{-\frac{1}{۴}}$$

$$y' = (\lambda x)^{-\frac{1}{۴}} - ۲(۶ + x)(\lambda x)^{-\frac{۵}{۴}} = (\lambda x)^{-\frac{۵}{۴}}(\lambda x - ۱۲ - ۲x) = \frac{۶x - ۱۲}{\sqrt[۴]{(\lambda x)^۵}}$$

$$y' = ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(۲)$ است و داریم:

$$y(۲) = \frac{۶ + ۲}{\sqrt[۴]{\lambda(۲)}} = \frac{\lambda}{\sqrt[۴]{۱۶}} = \frac{\lambda}{\sqrt[۴]{۲^۴}} = \frac{\lambda}{۲} = ۴$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

گام دوم

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هر یک از زیربازه‌ها، پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در سه نقطهٔ مرزی $x=0$ ، $x=1$ و $x=2$ بررسی شود.
بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 0 + 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + 2 = 4 \\ f(1) = 2(1) + 2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=2$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 2 = 4 + 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \\ f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 2 \\ 2x & ; x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(2) = 2 \\ f'_+(2) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در یک نقطه ناپیوسته و در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

می‌دانیم: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ برابر $f'(1)$ است.

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \times \frac{4(x+3) - (4x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}} \times \frac{4(1+3) - (4+5)}{(1+3)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{48}$$

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$ ، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$ ، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x; x \leq 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	↗		↘	

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x \leq 1$ ، در نقطه $x = -1$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

بنابراین با شرط $x \leq 1$ داریم: $f(x) \leq 2$

به این ترتیب بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$(g \circ f)_{\max} = g(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

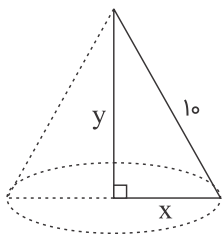
ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \frac{f}{\delta} (fx + |x|) - \frac{1}{\delta} |fx + |x|| \\ \text{اگر } x \geq 0 &\Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{f}{\delta} (\delta x) - \frac{1}{\delta} (\delta x) = fx - x = 3x \\ \text{اگر } x < 0 &\Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{f}{\delta} (fx - x) - \frac{1}{\delta} \underbrace{|fx - x|}_{3x} \\ &= \frac{12}{\delta} x - \frac{1}{\delta} (-3x) = \frac{15}{\delta} x = 3x \end{aligned}$$

بنابراین $(f \circ g)(x) = 3x$ ، پس:

$$(f \circ g)'(x) = 3$$

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمه آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y \xrightarrow{(*)} V = \frac{1}{3} \pi (100 - y^2) y = \frac{\pi}{3} (100y - y^3)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3y^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3} (100 - 3y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 100 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \Rightarrow x^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{300 - 100}{3} = \frac{200}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \right)$ ، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطه $x = 1$ موجود و باهم برابر باشند.
بررسی پیوستگی در نقطه $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a - a = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0$$

به یک رابطه همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x = 1$ پیوسته است.
بررسی مشتق‌پذیری در نقطه $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < 1 \\ x^2 - x & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & ; x < 1 \\ 2x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a = 1$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است، پس بایستی در $x = 2$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x = 2$ برابر باشند.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 + 2a + b = |4 - 4| \Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 + 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = -2 \quad (1)$$

تابع f را در همسایگی چپ $x = 2$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

x					
$x^2 - 2x$	+	○	-	○	+

بنابراین باتوجه به جدول تعیین علامت اگر $0 < x < 2$ باشد، $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x < 0 \\ -x^2 + 2x & ; 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & ; x < 0 \\ -2x + 2 & ; 0 < x < 2 \\ x + a & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 2 + a = -2(2) + 2 \Rightarrow a = -4$$

$$(1) \xrightarrow{a=-4} -4 + b = -2 \Rightarrow b = 6$$

$$\Rightarrow a + b = 2$$

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -5 \\ f(8) = \frac{27}{9} = 3 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3 - (-5)}{8 - 0} = 1$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x-5)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \text{ ق.ق} \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x = 2$ بر منحنی مماس است:

$$f(2) = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow (2, 1), m = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = -1$$

گام اول

فرض کنیم $x = c$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x)$ باشد. اگر $f''(c) > 0$ باشد آنگاه $x = c$ ، مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است و اگر $f''(c) < 0$ باشد آنگاه $x = c$ ، ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

گام دوم

ابتدا با محاسبه مشتق تابع $f(x)$ ، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$$

برای یافتن نقاط بحرانی ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را می‌یابیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{a}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{a}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

پس $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x)$ است. اکنون مقدار مشتق دوم تابع را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3} \xrightarrow{x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}} f''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) = 2 + \frac{2a}{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)^3} = 2 + \frac{2a}{\frac{a}{2}} = 2 + 4 = 6$$

باتوجه به گام اول، چون $f''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) > 0$ است پس $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین تابع f به ازای هیچ مقداری از a ، ماکزیمم نسبی ندارد.

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع بر حسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$ ، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطه مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x - 2) \sqrt[3]{x^2} = (x - 2) x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 1 \times x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x - 2) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x - 2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-1)$ است، پس داریم:

$$f'(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{2(-1 - 2)}{3\sqrt[3]{-1}} = 1 + \frac{2(-3)}{3(-1)} = 1 + 2 = 3$$

از آنجاکه این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$y_1 = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_1 = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$y_2 = x^2 + ax + b \Rightarrow y'_2 = 2x + a$$

$$y'_1(4) = y'_2(4) \Rightarrow 2 + \frac{4}{2} = 8 + a \Rightarrow a = -5$$

و نیز داریم:

$$y_1(4) = y_2(4) \Rightarrow 8 = 16 - 5(4) + b \Rightarrow 8 = -4 + b \Rightarrow b = 12$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 1$ تا $x = 1/44$ را با استفاده از رابطه $\frac{f(1/44) - f(1)}{0/44}$ به دست می‌آوریم.
 ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 1$ باید ضابطه مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(1)$ را محاسبه کنیم.
 اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44) - f(1)}{0/44} = \frac{\frac{0/44}{\sqrt{1/44}} - 0}{0/44} = \frac{1}{\sqrt{1/44}} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$$

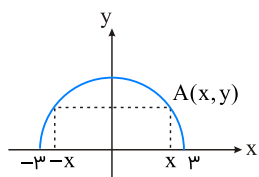
$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

نقطه A را بر روی نیم‌بیضی $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ در نظر می‌گیریم.



این نقطه دارای مختصات $A(x, \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2})$ است. فرض می‌کنیم طول مستطیل $2x$ و عرض آن y باشد پس داریم:

$$S = 2xy = 2x\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right) = \frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2} = \frac{4}{3}\sqrt{9x^2-x^4}, \quad -3 < x < 3$$

برای یافتن بیشترین مساحت، ابتدا معادله $S'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{18x - 4x^3}{2\sqrt{9x^2-x^4}} \right)$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 18x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(9 - 2x^2) = 0$$

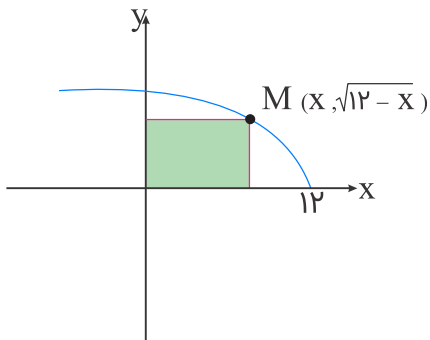
$$\xrightarrow{x \neq 0} 2x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

بنابراین داریم:

$$S_{\max} = \frac{4}{3}\sqrt{9x^2-x^4} = \frac{4}{3}\sqrt{9\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{81}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{81}{2} - \frac{81}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{36}{6} = 6$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته شده برابر $S(x) = x\sqrt{12-x}$ است.

$$S' = \sqrt{12-x} - \frac{x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}} = 0$$

$$24 - 2x - x = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S_{\max} = 8\sqrt{12-8} = 16$$

چون دامنه تابع $[-1, 3]$ است، پس $x_1 = 3$ و $x_2 = -1$ ریشه‌های معادله $-x^2 + ax + b = 0$ هستند.

$$x_1 + x_2 = \frac{-a}{-1} \Rightarrow -1 + 3 = a \Rightarrow a = 2$$

$$x_1 x_2 = \frac{b}{-1} \Rightarrow -1 \times 3 = -b \Rightarrow b = 3$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیمم صفر است.

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = (x-1)^2 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$x = 1 + \sqrt{2}$ قابل قبول است.

$$f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2}) + 3}$$

$$= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-1 - 2 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 3} = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازه } [0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(\sqrt{9} + \frac{1}{5}) - (\sqrt{1} + \frac{1}{1})}{4 - 0} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10} = 0/3$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ در لحظه‌ای تغییر} = f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\frac{5}{2})^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = 0/5 - 0/16 = 0/34$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر متوسط} - \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = 0/34 - 0/3 = 0/04$$

گام اول

(الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

(ب) مختصات نقطه تماس در معادله خط مماس و معادله منحنی صدق می‌کند.

(ج) شیب خطی به معادله $y = ax + b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y = 2x - 5$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادله $y = ax^2 + bx + 1$ در نقطه $x = 1$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y' = 2ax + b \xrightarrow{x=1} m_{\text{مماس}} = y'(1) = 2 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (\text{I})$$

طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x = 1$ مقدار به دست آمده از معادله خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y = 2x - 5 \Rightarrow y(1) = 2 - 5 = -3$$

$$y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y(1) = a + b + 1 = -3 \Rightarrow a + b = -4 \quad (\text{II})$$

از دو معادله (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 6$$

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. ضابطه $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x-4)(x+1)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(4) = -32 \\ y(-1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

باتوجه به مقادیر به‌دست‌آمده، $y = -32$ کمترین مقدار تابع است.

تابع باید در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lambda}{ax+b} = \frac{\lambda}{2a+b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + \epsilon x = -\lambda + 12 = \epsilon \Rightarrow \frac{\lambda}{2a+b} = \epsilon \Rightarrow 2a+b = 2$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} & ; x > 2 \\ -3x^2 + \epsilon & ; x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = \frac{-\lambda a}{2^2} = -2a \\ f'_-(2) = -12 + \epsilon = -\epsilon \end{cases} \Rightarrow -2a = -\epsilon \Rightarrow a = 3, b = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0 - \frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x - 18} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(10x - 18) \sqrt[3]{(3x+2)^2}}$$

$$= \frac{-1}{2(4)} = \frac{-1}{8}$$

فاصله میان دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نقطه مورد نظر را $M(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$|MB| = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی بر حسب α است که برای یافتن ماکسیمم مقدارش، کافی است ریشه مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25} - \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-2(1 - \alpha)}{2\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} - \frac{-2(7 - \alpha)}{2\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} - \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} \frac{(7 - \alpha)^2}{(7 - \alpha)^2 + 4} = \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2((7 - \alpha)^2 + 4) = (7 - \alpha)^2((1 - \alpha)^2 + 25)$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2(7 - \alpha)^2 + 4(1 - \alpha)^2 = (7 - \alpha)^2(1 - \alpha)^2 + 25(7 - \alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4(1 - \alpha)^2 = 25(7 - \alpha)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2(1 - \alpha) = \pm 5(7 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\alpha = 35 - 5\alpha \Rightarrow 3\alpha = 33 \Rightarrow \alpha = 11 \\ 2 - 2\alpha = -35 + 5\alpha \Rightarrow 7\alpha = 37 \Rightarrow \alpha = \frac{37}{7} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها، $\alpha = 11$ قابل قبول است.

برای تعیین ضابطه تابع $f(f(x))$ ، کافی است در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم:

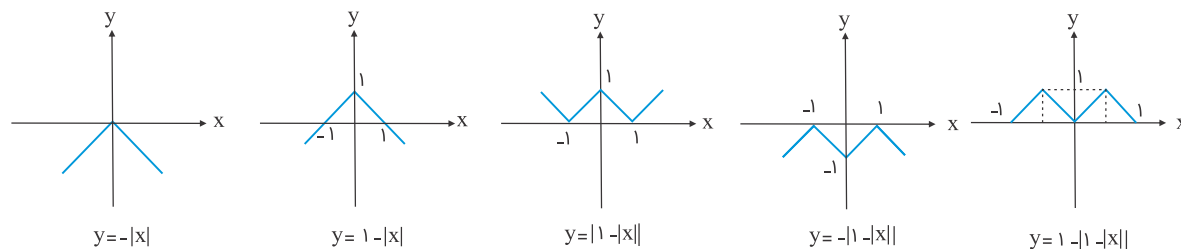
$$f(x) = 1 - |x| \Rightarrow f(f(x)) = 1 - |f(x)| = 1 - |1 - |x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های ساده عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$۱) |x| : x = 0$$

$$۲) |1 - |x|| : 1 - |x| = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

علاوه بر آن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y = 1 - |x|$ دارای سه نقطه مشتق‌ناپذیر $x = -1$ ، $x = 1$ ، $x = 0$ است.

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید همواره نامنفی باشد.
 ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.
 ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

گام دوم

ابتدا دامنه تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته است (باتوجه به اینکه گزینه "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطه $x = 0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکننده صورت و مخرج حذف شود:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - 1 + x^2}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \end{aligned}$$

چون داریم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

بنابراین:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 0}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

برای سهولت در مشتق‌گیری به جای $\sqrt[3]{x}$ ، عبارت $x^{\frac{1}{3}}$ را قرار می‌دهیم. ضابطه مشتق دوم یا همان y'' را تعیین کرده و حاصل $y''y^{\frac{5}{3}}$ را به دست می‌آوریم (دقت کنید $y^{\frac{5}{3}}$ مشتق پنجم تابع y نیست، مشتق پنجم را به صورت $y^{(\frac{5}{3})}$ نمایش می‌دهند).

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y'' = \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

$$\Rightarrow y''y^{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} (\sqrt[3]{x})^{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \times \sqrt[3]{x^5} = -\frac{2}{9}$$

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 4a - 2b + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -8 + 2 = -6 \Rightarrow 4a - 2b = -10 \Rightarrow 2a - b = -5$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2, f'_+(-2) = -4a + b \\ 3x^2 - 1 & ; x < -2, f'_-(-2) = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a + b = 11 \\ 2a - b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -2a = 6 \Rightarrow a = -3, b = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - x + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$$

$$f(1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{36}{9} - \frac{36}{4}}{1} = \frac{36}{9} - \frac{36}{4} = 4 - 9 = -5$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = \sqrt[3]{12}$ ، ابتدا ضابطه مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{36}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times x^2 - 2x(36)}{x^4} = -\frac{72x}{x^4} = -\frac{72}{x^3}$$

$$x = \sqrt[3]{12} \text{ در آهنگ آنی} = f'(\sqrt[3]{12}) = -\frac{72}{(\sqrt[3]{12})^3} = -\frac{72}{12} = -6$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(\sqrt[3]{12}) = -5 - (-6) = 1$$

گام اول

حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطه $x = 2$ یا همان $f'_-(2)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را وقتی $x < 2$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطه $f'(x)$ و مقدار $f'(-2)$ را به دست می‌آوریم.

$$x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

$$f(x) = 2 - x + \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} - 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'_-(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

تابع $y = x + \sqrt{x}$ یک به یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[0, 2]$:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

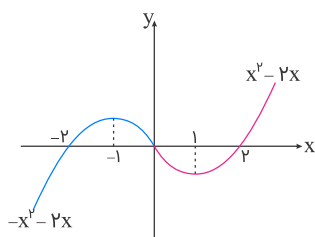
$$f'(x) = 1 \times \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{19}{4}$$

تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$5 - \frac{19}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq 0 : f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x < 0 : f'(x) = -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

باتوجه به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ است، پس فاصله آن‌ها از هم برابر است با:

$$\text{فاصله} : \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

الف) حجم مخروطی به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$



برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم. باتوجه به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{3}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعده مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 h = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{h} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (\text{I})$$

برای محاسبه مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازه l را به دست آوریم. با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (\text{II})$$

اکنون با استفاده از رابطه مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطه (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(\text{II})} S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \xrightarrow{(\text{I})} S = \pi \times \frac{1}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \frac{\pi \sqrt{h^3 + 1}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{h^3+1}} \times h - \sqrt{h^3+1}}{h^2} = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{3h^3 - 2h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow h^3 - 2 = 0 \Rightarrow h^3 = 2 \Rightarrow h = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[3]{2}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{3}$ ، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 به x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبه مقدار a کافی است معادله $f'(a) = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4}$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۴ به ۲۵} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{4}}{21} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$a \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر در } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4a = 49 \Rightarrow a = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_0, y_0) عبور می‌کند، به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow{x=2} y(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(2) = \frac{2^2 - (2 \times 2)}{(2-1)^2} = \frac{4-4}{1} = 0$$

بنابراین معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(2, 4)$ به صورت زیر است:

$$y - y(2) = y'(2)(x - 2) \xrightarrow{\substack{y'(2)=0 \\ x=2}} y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطه $(2, 4)$ ؛ یعنی خط $y = 4$ ، دارای عرض ۴ است.

گام اول

- الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱- می‌شود.
 ب) شیب خطی به معادله $y = ax + b$ برابر a است.
 ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
 د) معادله خط به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادله خط داده شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می‌آوریم.

$$x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می‌کنیم خط در نقطه $x = x_0$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 + 6x_0 + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

$$y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

پس نقطه تماس دارای مختصات $(-1, 3)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادله خط مماس برابر است با:

$$y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 3 + 3 \Rightarrow y = -3x$$

از میان گزینه‌ها، فقط نقطه $(2, -6)$ در معادله خط صدق می‌کند.

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی \mathbb{R} و از جمله روی بازه $(1, 4)$ پیوسته است. برای یافتن نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم. می‌دانیم این معادله روی بازه $(1, 4)$ ریشه خواهد داشت در صورتی که رابطه $f'(1)f'(4) < 0$ برقرار باشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^3 + ax^2 - \lambda x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - \lambda$$

$$\begin{cases} f'(1) = 3 + 2a - \lambda = 2a - 5 \\ f'(4) = 4\lambda + \lambda a - \lambda = \lambda a + 4 \end{cases} \xrightarrow{f'(1)f'(4) < 0} \lambda(a + 5)(2a - 5) < 0$$

$$\Rightarrow -5 < a < 2/5$$

گام اول

الف) $f'(1)$ موجود است؛ یعنی در $x = 1$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.
 ب) تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

ج) تابع در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(1) = f'_-(1)$$

گام دوم

باتوجه به اینکه $1 - \sqrt{2} < 1$ است، برای محاسبه $f(1 - \sqrt{2})$ باید از ضابطه مربوط به x های کوچک‌تر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = a + b + 1 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)} a + b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -1 \text{ (I)}$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطه مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطه $x = 1$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} & ; x > 1 \\ 2x + a & ; x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 1 + 1 = 2 + a \Rightarrow a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

با جایگذاری در رابطه I مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$a + b = -1 \Rightarrow 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین ضابطه تابع به ازای $x < 1$ به صورت زیر می‌شود:

$$x < 1 : f(x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

داریم:

$$f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 4$ تا $x = 12$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{24+1}} - \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8} = \frac{\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3-5}{15}}{8} = \frac{-\frac{2}{15}}{8} = -\frac{1}{60}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(4)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = -\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$x = 4 \text{ در } \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } f'(4) = -\frac{1}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\frac{1}{9 \times 3} = -\frac{1}{27}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) = -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{60} + \frac{1}{27} = \frac{-9+20}{540} = \frac{11}{540}$$

وقتی $x \rightarrow 2$ ، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \rightarrow 2$ ، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = 2$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + b = 0 \quad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{2 \times 2}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با استفاده از رابطه (I) مقدار b برابر است با:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right) + b = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

گام اول

الف) برای این که تابع در $x = 3$ پیوسته باشد، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

ب) وقتی $x \rightarrow 3^+$ حاصل حد $\frac{0}{0}$ شده و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال حاصل حد راست تابع را در نقطه $x = 3$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax - 3a - \frac{3}{\lambda} = 3a - 3a - \frac{3}{\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$f(3) = 3a - 3a - \frac{3}{\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = -\frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{4}}}{2\sqrt{3-2}}$$

$$= -\frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$$

مشاهده می‌شود فارغ از اینکه مقدار a چند باشد، حاصل حد راست، حد چپ و مقدار تابع در نقطه $x = 3$ برابر است. پس به ازای هر مقدار a ، تابع $f(x)$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است.

$$f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2 \quad (*)$$

باتوجه به معادله باید $x-2 \geq 0$ باشد، یعنی: $x \geq 2$
 حال معادله (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} & \text{قابل قبول} \\ x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} & (x \geq 2 \text{ زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2 + \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})^2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}) \text{ ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصله نقطه A را از نیمساز ناحیه اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

الف) مشتق تابع $y = \sqrt{u}$ از رابطه $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.
 ب) مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{3(2x+1) - 2(3x-1)}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}} = \frac{\frac{5}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}} \Rightarrow f'(2) = \frac{\frac{5}{(4+1)^2}}{2\sqrt{\frac{6-1}{4+1}}} = \frac{\frac{5}{5^2}}{2\sqrt{\frac{5}{5}}} = \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^2 + x - 2|$ ، ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2| = (x-1)|(x+2)(x-1)|$$

 $x = 1$ و $x = -2$ ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x+2) & ; x \geq 1 \text{ یا } x \leq -2 \\ -(x-1)^2(x+2) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ پیوسته است پس ضابطه $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-1)(3x+3) & ; x > 1 \text{ یا } x < -2 \\ -(x-1)(3x+3) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

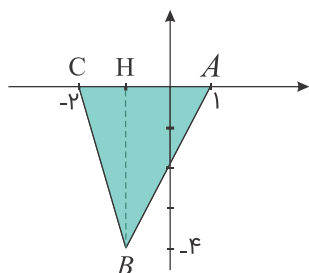
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1, x < -2 : (x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ -2 < x < 1 : -(x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

باتوجه به اینکه $f'_-(1) = f'_+(1) = 0$ است پس $x = 1$ نیز نقطه بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف نشده است. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} f'_+(-2) = -(-2-1)(-3) = -9 \\ f'_-(-2) = (-2-1)(-3) = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2) \text{ وجود ندارد}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطه بحرانی $A(1, 0)$ ، $B(-1, -4)$ و $C(-2, 0)$ است. مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{12}{2} = 6$$



آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

باتوجه به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x = 5 \text{ تا } x = 9 &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{9^2 + 144} - \sqrt{5^2 + 144}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

ابتدا ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(x) = x + 1 + (g(x))^\omega &\Rightarrow f'(x) = 1 + \omega g'(x) (g(x))^\omega \\ \Rightarrow f'(\circ) = 1 + \omega g'(\circ) (g(\circ))^\omega \end{aligned}$$

باتوجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(\circ)=g(\circ)=1} 1 = 1 + \omega g'(\circ) (1)^\omega \Rightarrow \omega g'(\circ) = 0 \Rightarrow g'(\circ) = 0$$

در محاسبه ضابطه تابع $f''(x)$ با عبارت $f'(x) = 1 + \omega g'(x) (g(x))^\omega$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(\circ) = 0$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفرشونده تابع $f'(x)$ در نقطه $x = 0$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(\circ) = 0 + \omega g''(\circ) (g(\circ))^\omega$$

$$\xrightarrow{\substack{x=\circ \\ g(\circ)=1}} f''(\circ) = \omega g''(\circ) (1)^\omega = \omega g''(\circ)$$

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

باتوجه به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(fg)(2 + \Delta x) - (fg)(2)}{\Delta x} = (fg)'(2)$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (2x - 1)\sqrt{2x} + (x^2 - x)\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(2) = (4 - 1)\sqrt{4} + (2^2 - 2)\frac{1}{\sqrt{4}} = (3 \times 2) + \frac{2}{2} = 6 + 1 = 7$$

نقطه $M(\alpha, \sqrt{2\alpha + 9})$ را بر روی منحنی $y = \sqrt{2x + 9}$ در نظر می‌گیریم. فاصله میان دو نقطه A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - 4)^2 + (\sqrt{2\alpha + 9} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16 + 2\alpha + 9} = \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 25}$$

برای یافتن کمترین فاصله، ابتدا معادله $(MA)'_{\alpha} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(MA)'_{\alpha} = \frac{2\alpha - 6}{2\sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 25}}$$

$$(MA)'_{\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 3$$

بنابراین کمترین فاصله نقطه A از منحنی $y = \sqrt{2x + 9}$ برابر است با:

$$(MA)_{\min} = \sqrt{9 - 6(3) + 25} = \sqrt{16} = 4$$

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

ب) اگر $y = f(u)$ باشد به طوری که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

مشتق تابع $f(\sqrt{|x|+3})$ در همسایگی نقطه $x = -1$ محاسبه می‌شود بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-1} |x| = -x \Rightarrow f(\sqrt{|x|+3}) = f(\sqrt{3-x})$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول می‌توان چنین نوشت:

$$y = f(\sqrt{3-x}) \Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} f'(\sqrt{3-x})$$

$$\Rightarrow y'(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{3+1}} f'(\sqrt{3+1}) = \frac{-1}{2 \times 2} f'(2)$$

$$\xrightarrow{f'(2) = -\frac{1}{4}} y'(-1) = \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

روش اول:

تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است؛ بنابراین تابع روی بازه‌ای مشتق پذیر است که خروجی آن فقط یک مقدار باشد.
بررسی گزینه اول:

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in [1, \infty)$$

$x = 0$ ریشه مخرج کسر است. به ازای $0 < x \leq 1$ ، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع در این بازه ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است.
بررسی گزینه دوم:

$$x \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in (-\infty, -1)$$

در این بازه، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است.
بررسی گزینه سوم:

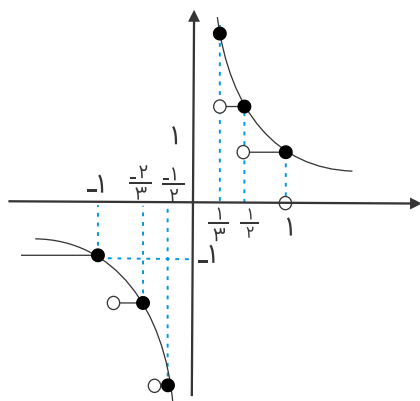
$$x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = \begin{cases} 0 & ; 0 < \frac{1}{x} < 1 \\ 1 & ; \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ در نقطه $x = 1$ ناپیوسته است بنابراین روی بازه $[1, +\infty)$ مشتق ناپذیر می‌شود.
بررسی گزینه چهارم:

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ روی بازه $(-\infty, -1)$ ، یک تابع ثابت است پس روی این بازه پیوسته و مشتق پذیر می‌شود.
روش دوم:

با رسم نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ ، بازه مشتق پذیری آن را مشخص می‌کنیم:



همان طوری که مشاهده می‌کنید از میان گزینه‌ها، تابع تنها در بازه $(-\infty, -1)$ برابر تابع ثابت $f(x) = -1$ است، در نتیجه روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

گزینه ۱

۱۲۱

برای تعیین وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع در اطراف نقطه $x = 0$ ، تابع y' را قبل و بعد از این نقطه تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - 3x^2(x^2 + 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-x^5 - 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

باتوجه به اینکه $f'(0) = 0$ است پس تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ دارای مماس افقی است. داریم:

x	0
f'(x)	- 0 +
f(x)	↘ ↗
	min

نقطه $x = 0$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

گزینه ۳

۱۲۲

باتوجه به اینکه تابع f در نقطه $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطه $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > 0 \\ f(x) - f(c) \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطه $x = c$ داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \stackrel{(*)}{\rightarrow} f'_+(c) \geq 0$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطه $x = c$ الزاماً نامنفی است.

می‌دانیم $g \circ f(x) = g(f(x))$ و $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ است.

باتوجه به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y = f \circ g \circ h(x)$ را در نقطه $x = 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow y' = (g(h(x)))' \times f'(g(h(x))) = h'(x) \times g'(h(x)) \times f'(g(h(x)))$$

$$\xrightarrow{x=0} y'(0) = h'(0) \times g'(h(0)) \times f'(g(h(0)))$$

$$\xrightarrow{h(0)=1, \quad h'(0)=1} y'(0) = \frac{1}{2} \times g'(1) f'(g(1))$$

$$\xrightarrow{-g(1)=1, \quad -g'(1)=1} y'(0) = \frac{1}{2} \times (-1) f'(-1)$$

$$\xrightarrow{f'(-1)=1} y'(0) = \frac{1}{2} (-1) (1) = -\frac{1}{2}$$

نقطه $B(x, \sqrt{2x+7})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه $A(5, 0)$ را از نقطه B محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \end{aligned}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$$

$$(AB)' = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow B(4, \sqrt{15})$$

کمترین فاصله نقطه A از منحنی، برابر است با فاصله دو نقطه A و B . در نتیجه داریم:

$$A(5, 0), B(4, \sqrt{15}) \Rightarrow AB = \sqrt{(5-4)^2 + (0-\sqrt{15})^2} = 4$$

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدوده تغییرات مقادیر $f(x)$ بر روی بازه مشخص شده است. مقادیر $f(x)$ بر روی یک بازه بین ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[-3, 1]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را بر روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌یابیم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^3 - 12x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = -2 \xrightarrow{x \in [-3, 1]} x = -2$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 8 = -27 + 36 + 8 = 17$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 8 = -8 + 24 + 8 = 24 \Rightarrow \text{max مطلق}$$

$$f(1) = 1^3 - 12(1) + 8 = 1 - 12 + 8 = -3 \Rightarrow \text{min مطلق}$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به صورت $[-3, 24]$ است.

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$x^2 - 3$	+ 0 - 0 +	

$$\Rightarrow |x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & ; x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} : 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} : -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \text{ غرق}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{3}) = 6, \quad f'_-(\sqrt{3}) = -6 \Rightarrow f'_+(\sqrt{3}) \neq f'_-(\sqrt{3})$$

$$f'_+(-\sqrt{3}) = -6, \quad f'_-(-\sqrt{3}) = 6 \Rightarrow f'_+(-\sqrt{3}) \neq f'_-(-\sqrt{3})$$

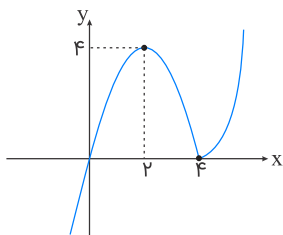
تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	-	+
$f(x)$		\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow
		max	min	max	min	

بنابراین مجموعه نقاط ماکسیمم نسبی تابع $f(x)$ به صورت $\{-\sqrt{3}, 1\}$ است.

$$f(x) = x|x - ۴| = \begin{cases} x^2 - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^2 & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



این تابع در $(۴, ۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصله آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲ - ۴)^2 + (۴ - ۰)^2} = \sqrt{۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

گزینه ۲

۱۲۸

$$\begin{aligned} g(x) &= f(۴ - x^۲) \Rightarrow g'(x) = -۲xf'(۴ - x^۲) \\ \Rightarrow g''(x) &= -۲(f'(۴ - x^۲) + x(-۲x)f''(۴ - x^۲)) \\ \Rightarrow g''(\sqrt{۳}) &= -۲(f'(۱) - ۶f''(۱)) = -۲(-۵ - ۶ \times (-۱)) = -۲ \end{aligned}$$

گزینه ۴

۱۲۹

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{aligned} x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - x^۳ \geq -x^۳ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq \sqrt[۳]{-x^۳} \\ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq -x \Rightarrow x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq ۰ \end{aligned}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R} برابر صفر است.

$$y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$$

آهنگ متوسط در بازه $[5, 6]$ برابر است با:

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36 + 24} - \sqrt{21 - 25 + 20}}{1} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{16}}{1} = -1$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y' = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{2(-x + 2)}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x} = -1 \Rightarrow x - 2 = \sqrt{21 - x^2} + 4x \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 - 4x + 4 = 21 - x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{200}}{4} = 2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2} \xrightarrow{x \geq 2} x = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (*)$$

گام اول

(الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.
(ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند، به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(ج) مختصات نقطه تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادله خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y = x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(1) = 3 - 2 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y(1) = (1)^3 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$$

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = x - 1 \Rightarrow y = x - 1$$

سپس با مساوی قرار دادن معادله خط $y = x - 1$ و معادله منحنی، مختصات نقطه تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x - 1 = x^3 - x^2 \Rightarrow x - 1 = x^2(x - 1) \Rightarrow (x - 1)(1 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(1 - x)(1 + x) = 0 \xrightarrow{x \neq 1} 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

بنابراین $x_A = -1$ است و داریم:

$$y_A = (-1)^3 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$$

یکی از اعداد را x و دیگری را y می‌نامیم. داریم: $y = 2x - 6$
می‌خواهیم x, y مینیمم شود پس این حاصل ضرب را به صورت تابعی بر حسب x نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x \cdot y = x(2x - 6) = 2x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow f'_x = 4x - 6 = 0 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{y=2x-6} y = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 6 = 3 - 6 = -3$$

مجموع دو عدد برابر است با:

$$x + y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.
ب) مشتق تابع $g \circ f(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع $g \circ f$ را در نقطه $x = 0$ به طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \\ g(x) = \left(\frac{3}{4} + a\right)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'_+(0) = f'_+(0)g'_+(f(0)) = 4\left(\frac{3}{4} + a\right) = 3 + 4a$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \\ g(x) = \left(\frac{3}{4} - a\right)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'_-(0) = f'_-(0)g'_-(f(0)) = 2\left(\frac{3}{4} - a\right) = \frac{3}{2} - 2a$$

باتوجه به قسمت الف) از گام اول، تابع $g \circ f$ در $x = 0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(g \circ f)'_+(0) = (g \circ f)'_-(0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطه مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطه آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{گویا } x \\ 0 & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \text{گویا } x \\ 0 & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ مشتق دارد.

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq x \Rightarrow -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq 0$$

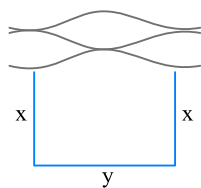
بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ روی \mathbb{R} برابر صفر است.

حاصل $f'(\frac{1}{4})$ را می‌خواهیم:

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} \frac{-\frac{1}{2} - 1(-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + 2x = 110 \Rightarrow y = 110 - 2x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(110 - 2x) = 110x - 2x^2$$

برای محاسبه بیشترین مساحت، معادله $S'_x = 0$ را حل می‌کنیم:

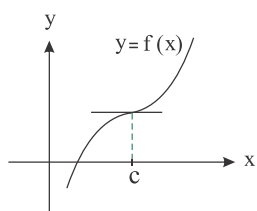
$$S'_x = 110 - 4x \Rightarrow S'_x = 0 \Rightarrow 4x = 110 \Rightarrow x = 27.5, y = 110 - 44 = 66$$

بنابراین:

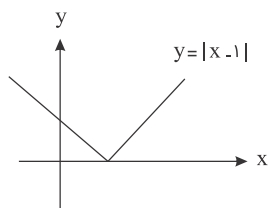
$$S_{\max} = xy = 27.5 \times 66 = 1815$$

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.

گزینه اول: نقطه $x = c$ در نمودار زیر، یک نقطه بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.



گزینه سوم: نقطه $x = 1$ در تابع $y = |x - 1|$ یک نقطه بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف نشده است.



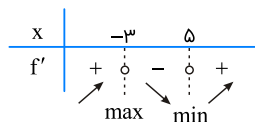
گزینه چهارم: نقطه $x = 1$ اکسترمم نسبی تابع $y = |x - 1|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.

بنابراین هر نقطه اکسترمم نسبی، قطعاً یک نقطه بحرانی تابع است.

نقاط بحرانی تابع را در فاصله $[-۴, ۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x \Rightarrow f'(x) = x^۲ - ۲x - ۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x^۲ - ۲x - ۱۵ = (x - ۵)(x + ۳) = 0$$



نقاط بحرانی تابع در بازه $[-۴, ۳]$ = $-۳, -۴, ۳$

$$\left. \begin{aligned} f(-۴) &= -\frac{۶۴}{۳} - ۱۶ + ۶۰ = \frac{۶۸}{۳} \\ f(-۳) &= \frac{(-۳)^۳}{۳} - ۹ + ۴۵ = ۲۷ \\ f(۳) &= \frac{۳^۳}{۳} - ۹ - ۴۵ = -۴۵ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x \in [-۴, ۳]} \begin{cases} y_{\min} = -۴۵ \\ y_{\max} = ۲۷ \end{cases}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم. $f'(a)$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

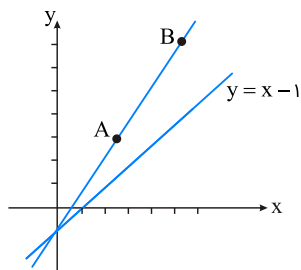
$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_1 = 2 \text{ تا } x_2 = 5 &= \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{5-1} - \frac{2}{2-1}}{3} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{3} = \frac{\frac{5-8}{4}}{3} = \frac{-\frac{3}{4}}{3} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$x = \alpha \text{ در } \text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow -\frac{1}{(\alpha-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha-1 = 2 \Rightarrow \alpha = 3 \\ \alpha-1 = -2 \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

دو نقطه A و B و خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط $y = x - 1$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - 1$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{4 - 2}(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x - 1$$

با مساوی قرار دادن معادله دو خط، نقطه برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

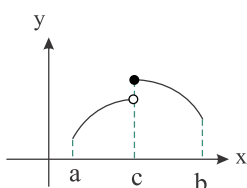
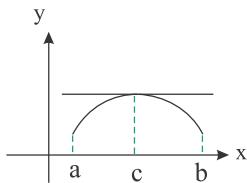
$$2x - 1 = x - 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow M(0, -1)$$

بنابراین طول نقطه M برابر با صفر است.

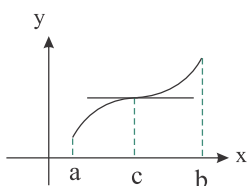
با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.

گزینه اول: اگر c نقطه اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینه دوم: اگر c نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، باتوجه به اینکه f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد که در هر دو حالت c نقطه بحرانی f نیز می‌باشد.



گزینه سوم: فرض می‌کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد، باتوجه به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:



گزینه چهارم: باتوجه به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطه اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینه دوم، این نقطه یک نقطه بحرانی تابع f است.

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

فرض می‌کنیم نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبه مشتق تابع در این نقطه، معادله خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)} y'_A = \frac{2(\alpha+1) - (2\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2\alpha+2-2\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$y - y_A = y'_A(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha)$$

خط مماس از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-1, y=0} 0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = -\frac{3(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} \Rightarrow \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{\alpha+1}$$

دقت کنید که نقطه $x = -1$ عضو دامنه تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است بنابراین $\alpha \neq -1$ است (زیرا نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد) پس می‌توان عبارت $\alpha + 1$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-2} -4f(-2) + 4f'(-2) = -4(-3) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 12 + 2 = 14$$

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \Rightarrow u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x))$$

اکنون ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{۲\sqrt{x+۲}}$$

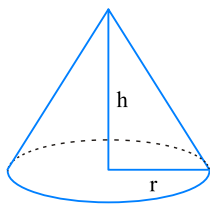
بنابراین داریم:

$$y' = \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}} \right) \left(-\frac{1}{۲\sqrt{xf(x)+۲}} \right)$$

$$= \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}} \right) \left(-\frac{1}{۲\sqrt{\frac{۳}{۲}x - x\sqrt{x+۲} + ۲}} \right)$$

$$\Rightarrow y'(۲) = \left(\frac{۳}{۲} - ۲ - \frac{1}{۲} \right) \left(-\frac{1}{۲\sqrt{۳-۴+۲}} \right) = (-1) \left(-\frac{1}{۲} \right) = \frac{1}{۲}$$

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = 1 \Rightarrow r = 1 - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=1-h} V = \frac{1}{3}\pi(1-h)^2 h = \frac{1}{3}\pi(h^3 - 2h^2 + h)$$

برای ماکسیمم کردن حجم مخروط، ابتدا معادله $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = \frac{1}{3}\pi(3h^2 - 4h + 1)$$

$$V'_h = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4h + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{(زیرا } r + h = 1 \text{ غ ق ق)}$$

بنابراین به ازای $h = \frac{1}{3}$ ، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{\max} = \frac{1}{3}\pi \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{81}$$

می‌دانیم $gof(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنه تعریف تابع $gof(x)$ به صورت زیر است:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

باتوجه به گام اول، ابتدا ضابطه $gof(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطه $g(f(x))$ کافی است در ضابطه $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-1, 1), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{gof} = (-1, 1)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow y = gof(x) = x \Rightarrow f'(x) g'(f(x)) = y' = 1 \quad ; \quad -1 < x < 1$$

نقطه $M(\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y = x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصله میان دو نقطه A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - \lambda)^2 + (\alpha\sqrt{\alpha} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 16\alpha + 64 + \alpha^3} = \sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - 16\alpha + 64}$$

برای مینیمم کردن فاصله MA ، ابتدا معادله $(MA)'_{\alpha} = 0$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'_{\alpha} = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha - 16}{2\sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - 16\alpha + 64}}$$

$$(MA)'_{\alpha} = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -\frac{16}{6} \end{cases} \quad \text{غ ق ق (*)}$$

* دامنه تابع $y = x\sqrt{x}$ به صورت بازه $[0, +\infty)$ است.

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{\min} = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 + \lambda} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } ۲ \text{ به } ۲ + h = \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{۲ + h - ۲} = \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } ۲ \text{ به } ۲ + h = \frac{\left(۲ + h + \frac{۱}{۲+h}\right) - \left(۲ + \frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h + \frac{۱}{۲+h} - \frac{۱}{۲}}{h} = \frac{\lambda}{۹}$$

$$\Rightarrow h + \frac{۱}{۲+h} - \frac{۱}{۲} = \frac{\lambda}{۹} h \xrightarrow{\times ۹} ۹h + \frac{۹}{۲+h} - \frac{۹}{۲} = \lambda h$$

$$\Rightarrow h + \frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h(h+۲) + ۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h^2 + ۲h + ۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h^2 + ۴h + ۱۸ = ۹h + ۱۸ \Rightarrow ۲h^2 - ۵h = ۰ \Rightarrow h(۲h - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۰ & \text{غ ق ق} \\ h = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h = ۰$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

گام اول

الف) دو خط موازی اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.
ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m + 2)y = mx \Rightarrow y = \left(\frac{m}{m + 2}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m + 2}\right)$ است. کافی است ضابطه $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{m}{m + 2} \Rightarrow \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}} = \frac{m}{m + 2}$$

می‌دانیم $1 > \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}} > -1$ همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m + 2} > -1 \Rightarrow \frac{m}{m + 2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{m + m + 2}{m + 2} > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -1 \\ \frac{m}{m + 2} < 1 \Rightarrow \frac{m}{m + 2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m - m - 2}{m + 2} < 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

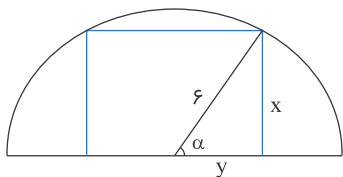
از اشتراک جواب‌های دو معادله فوق داریم: $m > -1$

به ازای $x = 1$ عبارت $(x - 1)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x) = \frac{\sqrt[3]{3x - 2}}{(\Delta x - 3)^4}$ نیز در نقطه $x = 1$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(1)$ کافی است مشتق عبارت $(x - 1)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x = 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x - 1) \sqrt[3]{3x - 2}}{(\Delta x - 3)^4} \xrightarrow[\text{در نقطه } x=1]{\text{عبارت } (x-1) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt[3]{3x - 2}}{(\Delta x - 3)^4}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{\sqrt[3]{3 - 2}}{(\Delta - 3)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{16}$$

راه حل اول:



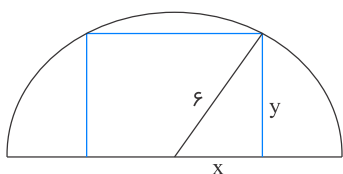
$$\sin \alpha = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 6 \cos \alpha$$

$$\text{مساحت مستطیل} : S = x(2y) = 2(36) \sin \alpha \cos \alpha = 36 \sin 2\alpha$$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد. بنابراین: $S_{\max} = 36$

راه حل دوم:



$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S = 2xy = 2x\sqrt{36 - x^2}$$

$$S' = 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 - x^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S_{\max} = 2 \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 36$$

$$x = 3 \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = f'(3)$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(3) = 27 \quad (1)$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{f(3/1) - f(3)}{0/1} = \frac{(3/1)^3 - 3^3}{0/1} = 27/91 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2); (1)} 27/91 - 27 = 0/91$$

گام اول

الف) باتوجه به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $0 \leq x - [x] < 1$
 ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x < y$ داریم: $f(x) < f(y)$

گام دوم

باتوجه به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-1 < f(x) \leq 0 \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(-1) < g(f(x)) \leq g(0)$$

$$\Rightarrow 2^{-1} < 2^{[x]-x} \leq 2^0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2^{[x]-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < g \circ f \leq 1$$

بنابراین تابع $g \circ f$ دارای ماکسیمم و فاقد مینیمم است.

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) منظور از نمو متغیر همان Δx است، پس داریم: $\Delta x = 0/21$
ج) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

باتوجه به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_2 = 1/21 \text{ تا } x_1 = 1 \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع} &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1/21) - f(1)}{1/21 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{0/21} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{1/10}{21/100} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 1$ ، ابتدا باید ضابطه مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$x = 1 \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع} = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(1) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{21 - 20}{42} = \frac{1}{42}$$

گام اول

الف) تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.
 ب) هرکدام از دو تابع $\left[x + \frac{1}{3}\right]$ و $[x]$ روی بازه $(0, 3)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x) = \left[x + \frac{1}{3}\right] + [x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازه $(0, 3)$ ، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

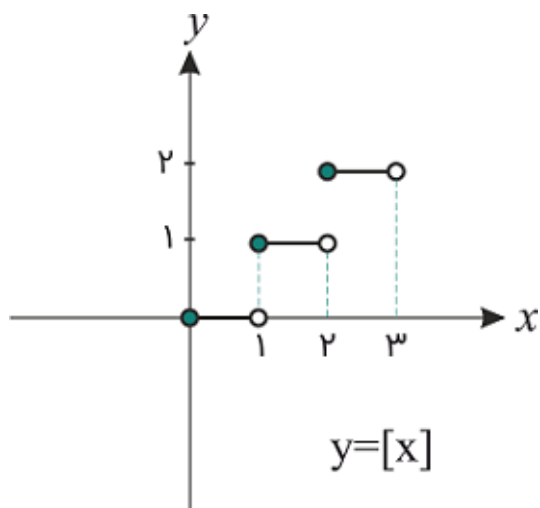
$$۱) \quad y = [x]: \quad x \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 3) \Rightarrow x = 1, \quad x = 2$$

$$۲) \quad y = \left[x + \frac{1}{3}\right]: \quad x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 3) \Rightarrow x = \frac{2}{3}, \quad x = \frac{5}{3}, \quad x = \frac{8}{3}$$

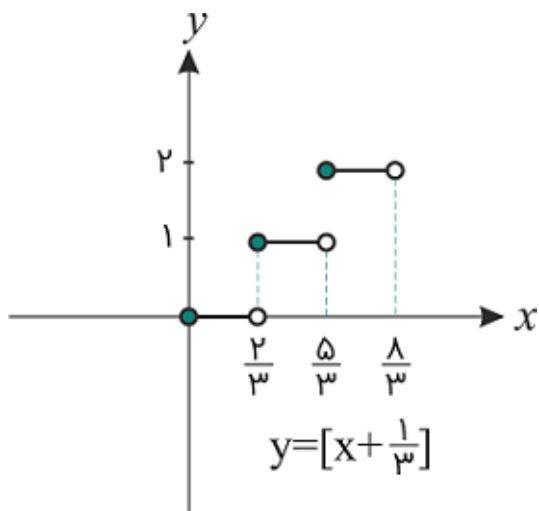
بنابراین تابع $f(x)$ در مجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y = [x]$ و $y = \left[x + \frac{1}{3}\right]$ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



نقاط ناپیوستگی: $x = 1, \quad x = 2$



نقاط ناپیوستگی: $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{5}{3}$, $x = \frac{8}{3}$
 بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

گزینه ۱

۱۵۷

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازه I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در این صورت c طول نقطه اکسترم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.
 ب) نقطه $c \in D_f$ ، نقطه بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-a\}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + a) - (x^2 - 2x)}{(x + a)^2} = \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2}$$

بررسی می‌کنیم به ازای چه مقادیری از a ، معادله $f'(x) = 0$ دارای ریشه ساده است.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

این معادله درجه دو ریشه ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta > 0$ باشد، پس داریم:

$$(2a)^2 - 4(1)(-2a) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 8a = 4a(a + 2) > 0$$

a	-2	\cdot
$4a(a+2)$	\div	\div
	\div	\div
	$-$	$+$

بنابراین به ازای $a < -2$ یا $a > 0$ ، تابع f دارای اکسترم نسبی است.

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. چون دامنه تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر \mathbb{R} است، کافی است ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازه $[-1, 3]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $0, 2, -1, 3$ به دست می‌آوریم:

$$f(-1) = \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 = -\frac{5}{12}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 = -\frac{8}{3}$$

$$f(3) = \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3^2 = \frac{9}{4}$$

کمترین مقدار تابع روی بازه $[-1, 3]$ برابر $y = -\frac{8}{3}$ است.

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} y'(2) = g'(2)f'(g(2)) \Rightarrow 6 = g'(2)f'\left(\frac{4+1}{2-1}\right) \Rightarrow 6 = g'(2)f'(5) \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(2) = -3$$

$$(1) : 6 = -3f'(5) \Rightarrow f'(5) = -2$$

الف) $f'_+(0)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ و $f'_-(0)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ است.

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{ب) می‌دانیم:}$$

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به ازای $x > 0$ و $x < 0$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطه $x = 0$ محاسبه می‌کنیم.

$$x > 0: |x| = x, [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x \times 0 = 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0$$

$$x < 0: |x| = -x, [x] = -1 \Rightarrow f(x) = (-x)(-1) = x \Rightarrow f'_-(0) = 1$$

بنابراین:

$$f'_-(0) - f'_+(0) = 1 - 0 = 1$$

چون خط $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(2) = 3$ و $A(2, 1) \in g$ خواهد بود.

$$\text{از طرفی چون } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = \frac{2}{3} \text{ است، پس:}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x) f'(g(x)) \Rightarrow y'(2) = g'(2) f'(g(2))$$

$$\Rightarrow y'(2) = 3 f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

$$\begin{cases} f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4 \xrightarrow{f(2)=g(2)} fa + 2b = 4 \quad (1) \\ g(2) = fa + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -3 \\ g'(x) = 2ax + b \Rightarrow g'(2) = 4a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(2)=g'(2)} fa + b = -3 \quad (2)$$

باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} fa + 2b = 4 \\ fa + b = -3 \end{cases} \Rightarrow b = 7$$

$$f(x) = \frac{|x| |x^2 - 2|}{x}$$

دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{0\}$ است. تابع f در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{2}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشهٔ مخرج یعنی $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی \mathbb{R} سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی \mathbb{R} است.

می‌دانیم مشتق تابع $y = u^n$ که u تابعی بر حسب x است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = nu'u^{n-1}$$

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \Rightarrow y = \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow y' = 2 \times \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow y' = 2 \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right) \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=-8} y' = 2 \left(-\frac{16}{64} - \frac{2}{3 \times (-2)}\right) \left(\frac{16}{-8} - 4\right) = 2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) (-2 - 4) = 2 \left(\frac{1}{12}\right) (-6) = -\frac{12}{12} = -1$$

برای تعیین ماکزیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x) = \frac{1}{x^6 - 4x^3 + 4x^2 + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - (4x^3 - 12x^2 + 8x)}{(x^6 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x-2)(x-1)}{(x^6 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطه بحرانی تابع $f(x)$ هستند. همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس داریم:

$$f(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$$

$$f(1) = \frac{1}{1-4+4+5} = \frac{1}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{16-32+16+5} = \frac{1}{5}$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{1}{5}$ است.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3} + 2x + 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 20 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		↘ min	↗ max	

$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{(2+\sqrt{5})^2 + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{(2+\sqrt{5})^2 + 1}$$

$$= \frac{9 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 1}{9 + 4\sqrt{5} + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} = -1 + \sqrt{5}$$

برای آنکه نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول مماس باشد، باید معادله تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -2 \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطه برخورد برابر ۱ است. از معادله کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = 4x + m + 1 \xrightarrow{y'=1} 1 = 4x + m + 1 \Rightarrow x = -\frac{m}{4}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیه اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > 0$ لذا $m = -2$ قابل قبول است.

$$f(x) = \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{1}{3} \left(\frac{-4-4}{-6+5} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{6(-1) - 3(-4-4)}{(-6+5)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (8)^{-\frac{2}{3}} (-6+24) = \frac{2 \times 18}{3 \sqrt[3]{8}} = 6$$

برای تعیین اکسترم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم. ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادله $f'(x) = 0$ ، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4x + 8/3) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-1)(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$ ، اکسترم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$+\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+
$f(x)$		\searrow	\nearrow	\nearrow

min

باتوجه به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطه $x = -2$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x = 1$ ریشهٔ معادله $f'(x) = 0$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

تابع f در $x = 4$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{3}{2}, f(4) = -7$$

$$\left(\frac{f(2x)}{x}\right)' = \frac{2f'(2x)x - f(2x)}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{2f'(4) \times 2 - f(4)}{4} = \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)(2) - (-7)}{4}$$

$$= \frac{-6 + 7}{4} = \frac{1}{4}$$

گام اول

توابع شامل قدر مطلق در ریشه‌های ساده عبارت درون قدر مطلق مشتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در $x = 0$ مشتق ندارد پس $\alpha = 0$ است.

گام دوم

به ازای $x > 0$ و $x < 0$ ضابطه مشتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را تعیین می‌کنیم سپس حاصل عبارت $f'_+(0) - f'_-(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow f'_+(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow f'_-(0) = \frac{-1}{2\sqrt{1-0}} = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > 1$ و $x < 1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} = 2\sqrt{4-3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^3 + bx = a + b \\ f(1) &= 2\sqrt{4-3} = 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \\ \longrightarrow & a + b = 2 \end{aligned} \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & ; x < 1 \\ 2 \times \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} & ; x > 1 \end{cases}$$

تابع در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است در صورتی که $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 3a + b = \frac{4}{\sqrt{4-3}} \Rightarrow 3a + b = 4 \quad (II)$$

دو معادله I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 3a + b = 4 \\ a + b = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(I)} 1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

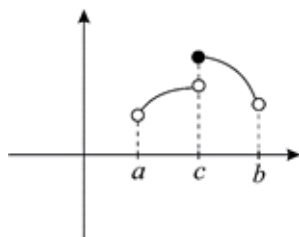
گام اول

الف) نقطه‌ای از دامنه تعریف تابع f که به ازای آن تابع بیشترین (کمترین) مقدارش را می‌پذیرد، اکسترمم مطلق این تابع نامیده می‌شود.

ب) وقتی تابع f در همسایگی یک نقطه از دامنه تعریف شود آنگاه آن نقطه، یک نقطه درونی دامنه است.

گام دوم

باتوجه به نمودار زیر، نقطه $x = c$ اکسترمم مطلق تابع f است و تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است. همان طور که ملاحظه می‌کنید تابع f در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، همچنین مماس افقی ندارد.



بنابراین نقطه $x = c$ تنها می‌تواند یک نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد.

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدوده تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنه تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}} : \frac{2-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_f = (0, 2]$$

به ازای $0 < x \leq 2$ ، $|x| = x$ است پس ضابطه تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x) = (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}} = (x + x) \sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2x \sqrt{\frac{2-x}{x}} \stackrel{(*)}{=} 2 \sqrt{\frac{x^2(2-x)}{x}} = 2 \sqrt{2x - x^2}$$

(*) چون $x > 0$ است پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطه $x = 2$ محاسبه می‌کنیم. ضابطه تابع $f(x)$ و ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = 2 \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 - 2x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 2 \sqrt{2 - 1} = 2$$

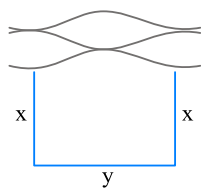
$$f(2) = 2 \sqrt{4 - 4} = 0$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازه $[0, 2]$ است.

$$f(x) = x \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{3(x+2) - (3x+1)}{(x+2)^2} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \times x$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{5x}{3(x+2)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \xrightarrow{x=-3} 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

طول و عرض زمین را به ترتیب y و x و طول طناب را l می‌نامیم، در این صورت داریم:



$$l = 2x + y \Rightarrow y = l - 2x$$

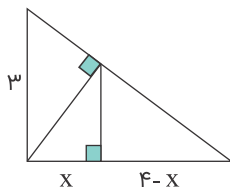
بیشترین مساحت این زمین مستطیلی شکل ۶۴۸ متر مربع است پس:

$$S_{\max} = xy = 648 \xrightarrow{y=l-2x} S = x(l - 2x) = xl - 2x^2$$

$$\Rightarrow S'_x = l - 4x \Rightarrow S'_x = 0 \Rightarrow l - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{4}$$

$$S_{\max} = x(l - 2x) = \frac{l}{4} \left(l - \frac{l}{2} \right) = 648 \Rightarrow \frac{l^2}{8} = 648 \Rightarrow l^2 = 5184 \Rightarrow l = 72$$

۱ در شکل زیر، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟



(۱) $1/96$

(۲) $1/56$

(۳) $1/64$

(۴) $1/44$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۲ در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

(۲) $11/6$

(۱) $11/5$

(۴) $12/8$

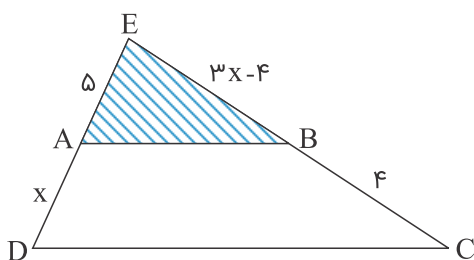
(۳) $12/2$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ در شکل زیر، مساحت دوزنقه $ABCD$ ، چندبرابر مساحت مثلث EAB است؟



(۱) $9/4$

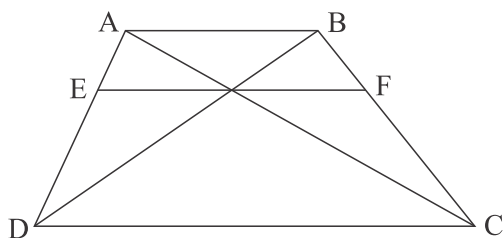
(۲) $16/9$

(۳) $25/16$

(۴) $36/25$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

در شکل زیر، $AB \parallel EF \parallel DC$ و اندازه پاره‌خط‌های AB و DC ، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازه پاره‌خط EF ، کدام است؟



(۱) $\frac{۴۵}{۷}$

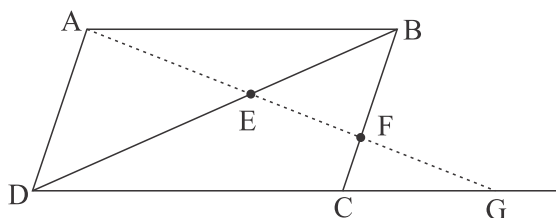
(۲) $\frac{۴۵}{۶}$

(۳) $۳\sqrt{۵}$

(۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟



(۱) EA^2

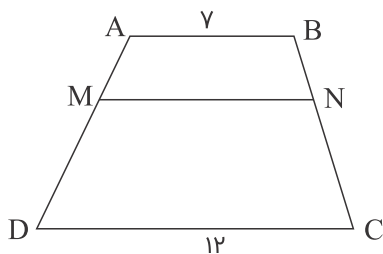
(۲) ED^2

(۳) $EB \times ED$

(۴) $FB \times FC$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

در ذوزنقه $ABCD$ ، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است. اندازه MN ، کدام است؟



(۱) ۸

(۲) $\frac{۸}{۷۵}$

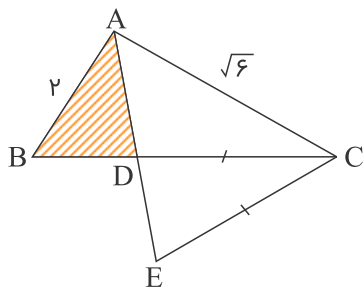
(۳) ۹

(۴) $\frac{۹}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE ، کدام است؟

۷

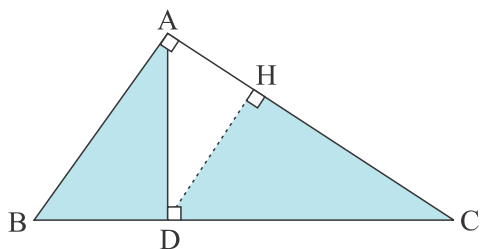


- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{4}{3}$
 (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه HCD و ABD ، کدام است؟

۸

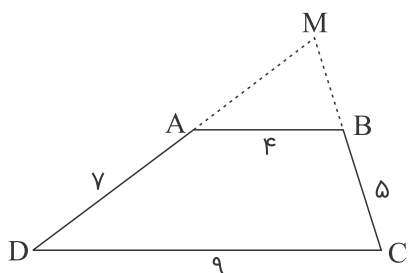


- (۱) $\frac{3}{7}$
 (۲) $\frac{4}{7}$
 (۳) $\frac{16}{21}$
 (۴) $\frac{8}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اندازهٔ اضلاع دوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB ، کدام است؟

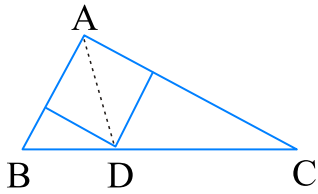
۹



- (۱) $13/2$
 (۲) $13/6$
 (۳) $14/4$
 (۴) $14/8$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟



(۱) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

(۲) $\frac{2}{1}$

(۳) $\frac{2}{8}$

(۴) $\frac{2}{1}\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۱ در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، اگر از نقطه O محل تلاقی قطرها، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

(۲) مساوی ۱

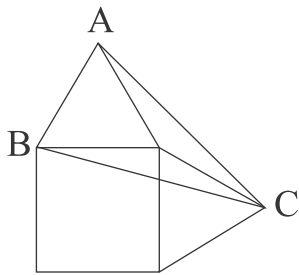
(۱) کوچک‌تر از ۱

(۴) متغیر نسبت به اضلاع

(۳) بزرگ‌تر از ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۲ در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۱) ۴

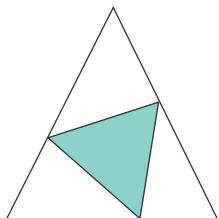
(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $2 + \sqrt{3}$

(۴) $1 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۳ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی، چندبرابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



(۱) $\frac{1}{4}$

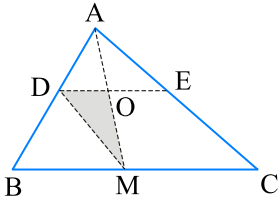
(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

در شکل زیر، نقطه M وسط BC و $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3}$ و $DE \parallel BC$ است، مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



(۱) ۱۲

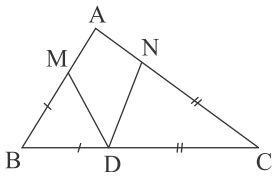
(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

در شکل زیر $\hat{A} = 58^\circ$ ، $BM = BD$ و $CN = CD$ ، زاویه $M\hat{D}N$ چند درجه است؟



(۱) ۵۸

(۲) ۵۹

(۳) ۶۱

(۴) ۶۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

در یک دوزنقه متساوی الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه قاعده بزرگتر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازه قاعده کوچکتر چند واحد است؟

(۲) ۳/۲

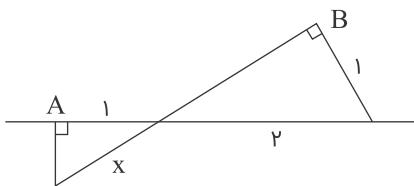
(۱) ۲/۸

(۴) ۴/۲

(۳) ۳/۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر دو زاویه \hat{A} و \hat{B} قائمه‌اند، مقدار x چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۲) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

در یک دوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های دوزنقه کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

$$۱ \quad (۲)$$

$$۱/۵ \quad (۴)$$

$$۵/۷۵ \quad (۱)$$

$$۱/۲۵ \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

$$۲۴\sqrt{۲} \quad (۲)$$

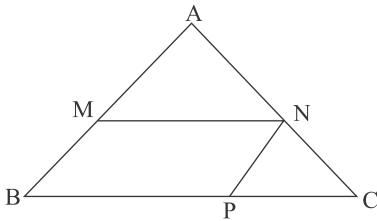
$$۱۶ + ۱۶\sqrt{۲} \quad (۴)$$

$$۳۲ \quad (۱)$$

$$۲۴ + ۸\sqrt{۲} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



$$۴۸ \quad (۱)$$

$$۵۲ \quad (۲)$$

$$۵۴ \quad (۳)$$

$$۵۶ \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

مثلثی به اضلاع ۵ و ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۷ و b متشابه است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

$$\frac{۴۵}{۷} \quad (۲)$$

$$\frac{۳۵}{۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۳۶}{۷} \quad (۱)$$

$$\frac{۳۶}{۵} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

مثلی به اضلاع a و b و 3 با مثلی به طول اضلاع 5 و 4 و 3 متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

(۲) ۹

(۱) $7/2$

(۴) $13/5$

(۳) ۱۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم مثلث مفروض کدام است؟

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{2}$

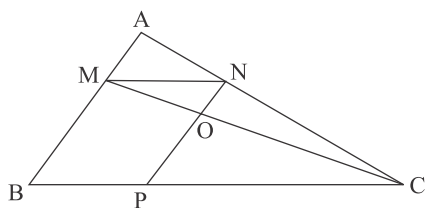
(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{4}$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



(۱) ۶۳

(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ ، $AB = AC = 4$ و $BC = 2\sqrt{7}$ است. ضلع AC را به اندازه خود تا نقطه D امتداد می‌دهیم ($AD = AC$). اندازه BD کدام است؟

(۲) $4\sqrt{2}$

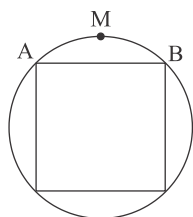
(۱) $2\sqrt{10}$

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصله وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



(۱) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

(۲) $4\sqrt{2}$

(۱) ۵

(۴) ۸

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی $6/76$ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

(۲) $\frac{5}{12}$

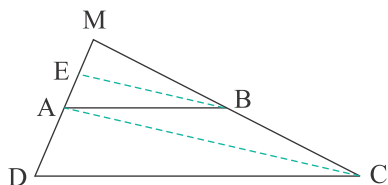
(۱) $\frac{2}{8}$

(۴) $\frac{3}{8}$

(۳) $\frac{7}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در دوزنقه $ABCD$ ، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، فاصله MD کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) $12/25$

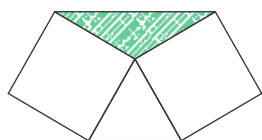
(۳) $12/5$

(۴) $12/75$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی می‌باشد؟



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

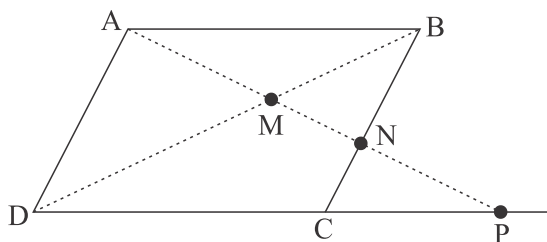
(۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۳) ۱

(۴) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

در شکل زیر، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد. حاصل $MN \times MP$ برابر کدام است؟



(۱) AB^2

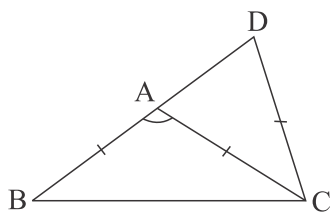
(۲) AD^2

(۳) MD^3

(۴) MA^2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، ساق BA را از نقطه B به اندازه قاعده BC تا نقطه D ، امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، زاویه A چند درجه است؟



(۱) ۱۰۲

(۲) ۱۰۵

(۳) ۱۰۸

(۴) ۱۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازه میانه وارد بر ضلع متوسط چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

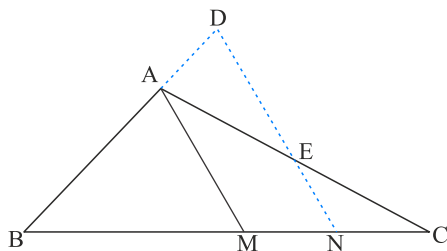
(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

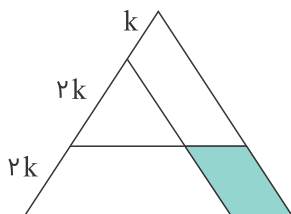
در مثلث ABC که $AB = \frac{2}{3}AC$ ، پاره‌خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟

(۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

در شکل زیر، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



(۱) ۱۶

(۲) ۱۸

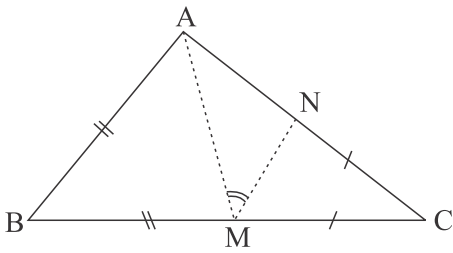
(۳) ۲۰

(۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی الساقین اند و $\hat{M} = 43^\circ$ ، اندازه زاویه \hat{BAC} چند درجه است؟

۳۷



(۱) ۹۳

(۲) ۹۴

(۳) ۹۶

(۴) ۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

۳۸

(۲) ۲۰

(۱) ۱۵

(۴) ۳۰

(۳) ۲۵

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در یک مکعب به طول یال $4\sqrt{2}$ ، فاصله وسط هریک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

۳۹

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) ۳

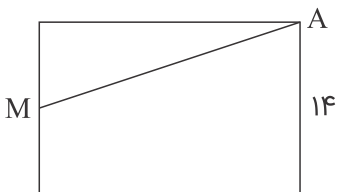
(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در شکل زیر، پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{5}{9}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره خط AM چند واحد است؟

۴۰



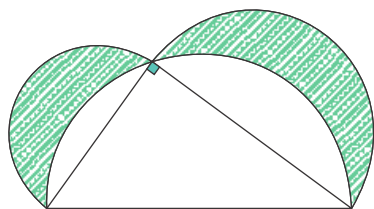
(۱) ۲۱

(۲) ۲۳

(۳) $9\sqrt{7}$ (۴) $10\sqrt{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در مثلث قائم‌الزاویه زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟



(۱) 2π

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) 3π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

در مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ ، قاعده BC را از دو طرف به اندازه ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث $\triangle ADE$ کوچک‌ترین زاویه خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

در چهار ضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه $\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور \hat{A} و \hat{B} ، چند درجه است؟

(۱) ۵۰

(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصله نقطه M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

(۱) ۴

(۲) $4/5$

(۳) ۵

(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

در مثلث ABC ، اضلاع $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 7$ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD ، کدام است؟

(۱) $7/5$

(۲) ۸

(۳) $8/5$

(۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

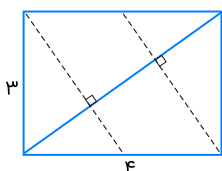
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدام است؟



$$5/25 \quad (۱)$$

$$5/75 \quad (۲)$$

$$6 \quad (۳)$$

$$7/5 \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

در مستطیلی به طول اضلاع $2\sqrt{7}$ و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. فاصله این دو خط عمود کدام است؟

$$1/5 \quad (۲)$$

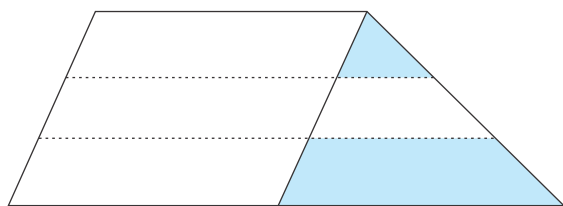
$$1 \quad (۱)$$

$$2 \quad (۴)$$

$$1/75 \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

یک ساق دوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه رنگی، کدام است؟



$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۲)$$

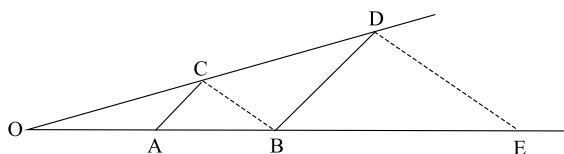
$$\frac{2}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = 3$ و $AB = 5$ ، اندازه BE ، کدام است؟

۵۰

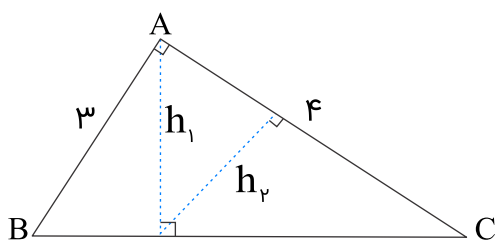


- (۱) $\frac{13}{3}$
 (۲) $\frac{12}{3}$
 (۳) $\frac{11}{3}$
 (۴) $\frac{10}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

در شکل زیر، h_1 و h_2 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ کدام است؟

۵۱



- (۱) $\frac{3}{5}$
 (۲) $\frac{4}{5}$
 (۳) $\frac{2}{3}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۵۲

- (۱) ۱۸
 (۲) ۲۰
 (۳) ۲۴
 (۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

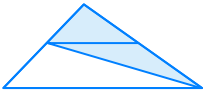
۵۳

- (۱) $\frac{11}{4}$
 (۲) $\frac{11}{6}$
 (۳) $\frac{12}{2}$
 (۴) $\frac{12}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

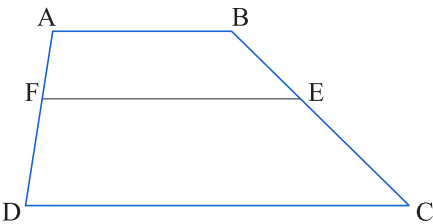
در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت دوزنقه است؟



- (۱) $\frac{۳}{۴}$
 (۲) $\frac{۷}{۸}$
 (۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$
 (۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

در دوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$
 (۲) $\frac{۷}{۱۵}$
 (۳) $\frac{۸}{۱۵}$
 (۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا E و D امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

- (۱) کمتر از ۱
 (۲) بیشتر از ۱
 (۳) مساوی ۱
 (۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در یک دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۶}$
 (۲) $\frac{۱}{۵}$
 (۳) $\frac{۱}{۴}$
 (۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ و $AC = ۶$ ، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC ، چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

- (۱) ۱۰
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۵
 (۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در مستطیل ABCD به طول $AB = 17$ ، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = 15$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

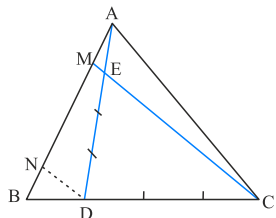
$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{4}{15} \quad (1)$$

$$\frac{7}{15} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در شکل زیر، $AE = \frac{1}{4}AD$ و $BD = \frac{1}{4}BC$ و $DN \parallel CM$. اندازه AB چند برابر AM است؟



$$4 \quad (1)$$

$$4/5 \quad (2)$$

$$5 \quad (3)$$

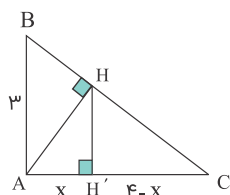
$$6 \quad (4)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

گزینه ۴

۱

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم و داریم:



$$AC = AH' + CH' = 4 - x + x = 4$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 9 + 16 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

اندازه AH را با استفاده از رابطه $AH \times BC = AB \times AC$ به دست می آوریم. سپس اندازه AH' یا همان x را با استفاده از رابطه $AH^2 = AH' \times AC$ در مثلث AHC ، به دست می آوریم.

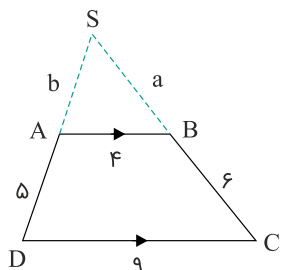
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$AH^2 = AH' \times AC \Rightarrow \frac{144}{25} = x \times 4 \Rightarrow x = \frac{144}{100} = 1/44$$

گزینه ۴

۲

مطابق شکل، ساق های ذوزنقه $ABCD$ به طول اضلاع $AB = 4$ ، $CD = 9$ ، $AD = 5$ و $BC = 6$ را امتداد می دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.

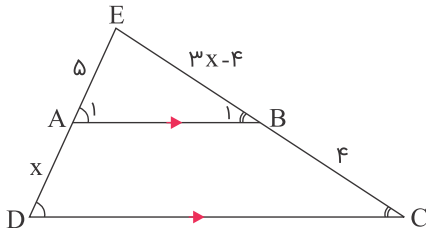


$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/8 \end{cases}$$

$$SAB \text{ مثلث } = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$

طبق فرض، داریم:



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4}$$

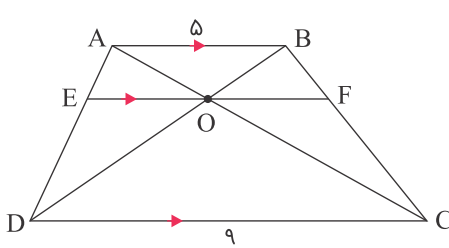
$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{10}{3} (*)$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}, \hat{B}_1 = \hat{C} \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EDC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle EDC}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^2 = \left(\frac{5}{5 + \frac{10}{3}}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle EAB} = 9S, S_{\triangle EDC} = 25S \Rightarrow S_{ABCD} = 25S - 9S = 16S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{16S}{9S} = \frac{16}{9}$$



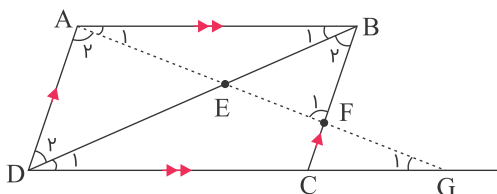
$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ADC : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{9} = \frac{AE}{AD} \\ \triangle DAB : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{5} = \frac{DE}{AD} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{9} + \frac{EO}{5} = \frac{\overbrace{AE + DE}^{AD}}{AD} = 1 \xrightarrow{\times 45} 5EO + 9EO = 45$$

$$\Rightarrow 14EO = 45 \Rightarrow EO = \frac{45}{14}$$

$$\text{به روش مشابه} \Rightarrow OF = \frac{45}{14} \Rightarrow EF = \frac{45}{14} + \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$$

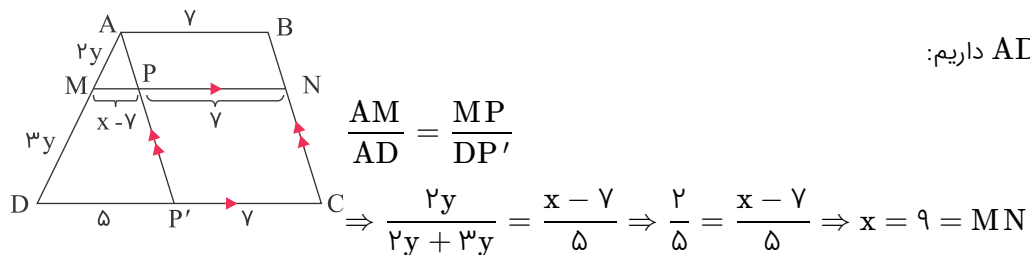
تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}}$. (طول EF واسطه توافقی طول قاعده‌ها است)

چون $AB \parallel DG$ و $BC \parallel AD$ است، داریم:

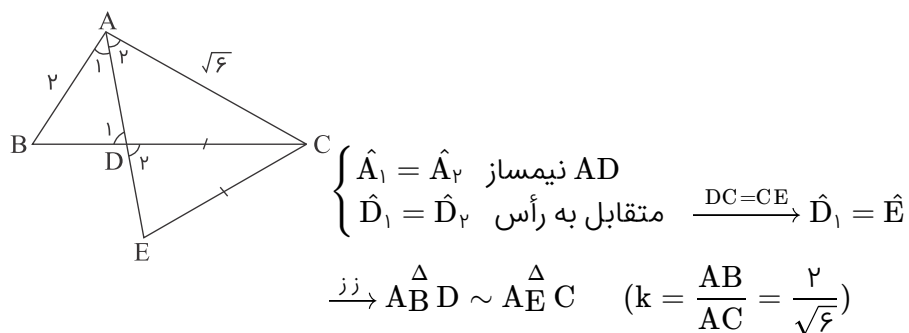
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{G}_1, \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EGD \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EB}{ED} \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2, \hat{F}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \triangle EBF \sim \triangle EAD \Rightarrow \frac{EF}{EA} = \frac{EB}{ED} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$$

$$\Rightarrow EF \cdot EG = EA^2$$

در دوزنقه ABCD از نقطه A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.



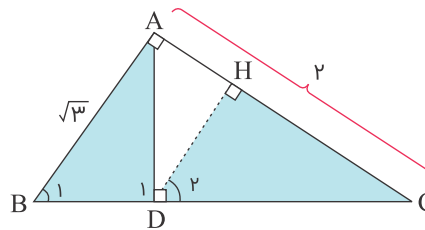
طبق شکل داریم:



$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}} = k^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



طبق قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle ABC$ داریم:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 3 + 4 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DH, \text{ مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{D}_1 = \widehat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle HCD$$

طبق روابط طولی در مثلث $\triangle ABC$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{7} \times CD \Rightarrow CD = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث HCD و ABD برابر است با:

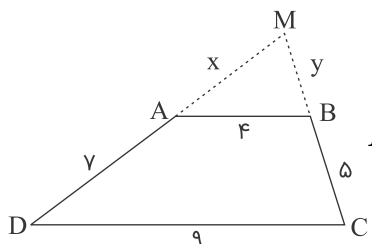
$$K = \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = K^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}} \right)^2 = \frac{16}{21}$$

می‌دانیم در ذوزنقه $ABCD$ ، دو قاعده AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.

بنابراین داریم:



$$\triangle AMB \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \triangle AMB = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

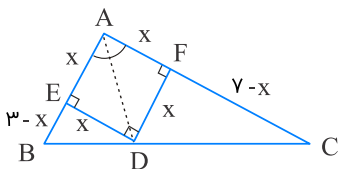
نقطه D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE = DF$

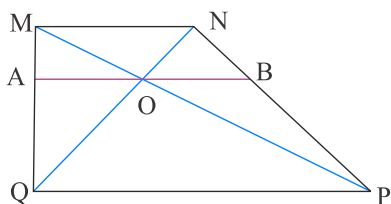
$\hat{A} = 90^\circ$ و $DE = DF$ ، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE \parallel FD$

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{7-x}{7} \Rightarrow 7x = 21 - 3x \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{10}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2}x = \frac{21}{10}\sqrt{2}$$





نکته: طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم $\frac{AQ}{AM} = \frac{BP}{BN}$ ، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم: $\frac{AQ}{QM} = \frac{BP}{PN}$
 با توجه به تعمیم قضیه تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

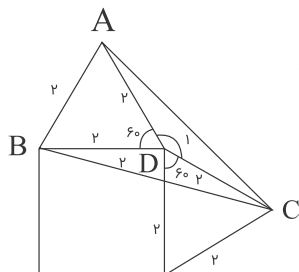
$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA}{MN} = \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} = \frac{BP}{PN} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \underbrace{\frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP}}_1 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

گام اول

الف) زوایای داخلی هر مثلث متساوی‌الاضلاع 60° است.

ب) مثلث $\triangle ADC$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. اندازه زاویه \hat{D}_1 برابر است با:

$$\hat{D}_1 = 360 - (90 + 60 + 60) = 360 - 210 = 150^\circ$$



ج) برای به دست آوردن مساحت مثلث $\triangle ABC$ ، مساحت سه مثلث $\triangle ABD$ ، $\triangle BDC$ و $\triangle ADC$ را به دست آورده و باهم جمع می‌کنیم.

د) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از رابطه $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$\triangle ADC \cong \triangle BDC \Rightarrow S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$$

(ض ض ض)

با استفاده از مبحث کاربرد مثلثات مساحت دو مثلث $\triangle BDC$ و $\triangle ADC$ را تعیین می‌کنیم:

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

مثلث $\triangle ABD$ متساوی‌الاضلاع است و داریم:

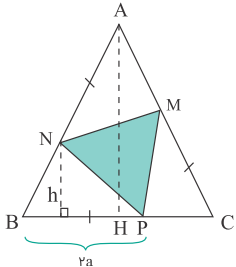
$$S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$$

بنابراین مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABD} = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

گام اول

الف) اندازه هر یک از سه قسمت مشخص شده بر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر a و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر $3a$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین در مثلث‌های رنگ‌نشده ارتفاع وارد بر ضلع‌های با اندازه $2a$ را h فرض می‌کنیم. (ب) اگر ارتفاع مثلث اصلی را رسم کنیم طبق قضیه تالس اندازه آن برابر $3h$ به دست می‌آید (چون ارتفاع دو مثلث ABC و NBP موازی‌اند پس $\frac{h}{AH} = \frac{a}{3a}$ در نتیجه $AH = 3h$). پس می‌توان اندازه مساحت مثلث رنگی و مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را بر حسب h و a تعیین و در نهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنیم.



گام دوم

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3h \times 3a}{2} = \frac{9ha}{2}$$

$$S_{\triangle BNP} = \frac{1}{2} \times h \times 2a = ha$$

$$S_{\triangle MNP} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle BNP} = \frac{9ha}{2} - 3ha = \frac{3ha}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3ha}{2}}{\frac{9ha}{2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱

$$\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}, \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \text{ چون } AM \text{ میانه نظیر ضلع } BC \text{ است، پس:}$$

در دو مثلث ABM و AMD ، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس M یکسان هستند، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{\triangle ADM}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

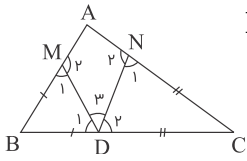
در دو مثلث ADM و ODM ، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس D یکسان هستند؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{\triangle ODM}}{S_{\triangle ADM}} = \frac{OM}{AM} = \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}$$

با ضرب کردن سه رابطه فوق داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} \times \frac{S_{\triangle ADM}}{S_{\triangle ABM}} \times \frac{S_{\triangle ODM}}{S_{\triangle ADM}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ODM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{25} = \frac{12}{100}$$

الف) شکل را با جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:



$$BM = BD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1 = \alpha, \quad CN = CD \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{N}_1 = \beta$$

ب) $\hat{A} = 58^\circ$ است، بنابراین در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=58} 58 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} &= 180 - 58 = 122^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 122^\circ \quad (I) \end{aligned}$$

دو مثلث $\triangle BMD$ و $\triangle CND$ را در نظر گرفته و مجموع زوایای این دو مثلث را به دست می‌آوریم. مجموع زوایای این دو مثلث باید 360° باشد. با تعیین $\alpha + \beta$ اندازه \hat{D}_3 یا همان \hat{MDN} را محاسبه می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle CND : \hat{C} + 2\beta = 180^\circ \\ \triangle BMD : \hat{B} + 2\alpha = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \hat{B} + \hat{C} + 2(\alpha + \beta) = 360^\circ$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(I)} 122^\circ + 2(\alpha + \beta) &= 360^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 122^\circ \\ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) &= 238^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{238}{2} = 119^\circ \quad (II) \end{aligned}$$

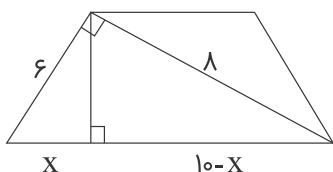
از طرفی:

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3 &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \hat{MDN} = 180^\circ \\ \xrightarrow{(II)} 119^\circ + \hat{MDN} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{MDN} = 61^\circ \end{aligned}$$

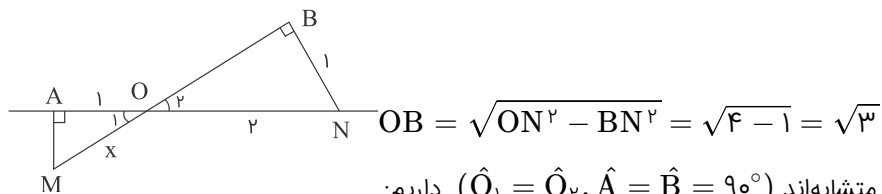
در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه واسطه هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

$$6^2 = 10x \Rightarrow x = 3/6$$

$$\text{طول قاعده کوچک} = 10 - 2x = 10 - 7/2 = 2/8$$



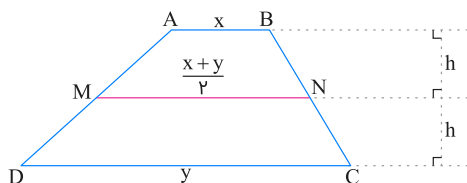
طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OBN داریم:



دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$). داریم:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

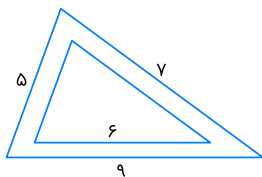
می‌دانیم در دوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.
باتوجه به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left(x + \frac{x+y}{2} \right) (h)}{\frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{2} + y \right) (h)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 15x + 5y = 3x + 9y \Rightarrow 12x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به صورت زیر رسم می‌کنیم:



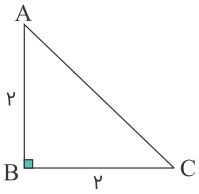
چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1/25$$

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.



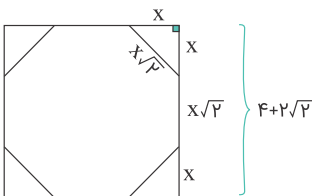
محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه ضلع AC و سپس محیط مثلث $\triangle ABC$ را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر $4 + 2\sqrt{2}$ است.

می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازه اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را x در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیه فیثاغورس برابر $x\sqrt{2}$ می‌شود.



باتوجه به اینکه طول ضلع مربع برابر $4 + 2\sqrt{2}$ است، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 2$$

برای محاسبه مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (4 + 2\sqrt{2})^2$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (4 \times S_{\text{مثلث}}) = (4 + 2\sqrt{2})^2 - 8 = 16 + 16\sqrt{2} + 8 - 8 = 16 + 16\sqrt{2}$$

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN \parallel BP \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$NP \parallel MB \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow \triangle NPC \sim \triangle ABC$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

طبق گام اول، $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ ، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA + MB} = \frac{1}{\frac{MA + MB}{MA}} = \frac{1}{1 + \frac{MB}{MA}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

چون $MN \parallel BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle NPC \sim \triangle ABC$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN + NC} = \frac{1}{\frac{AN + NC}{NC}} = \frac{1}{\frac{NC}{AN} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\triangle NPC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle NPC} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را بر حسب مساحت مثلث $\triangle ABC$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle NPC} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{12}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{48}{100} S_{\triangle ABC}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\triangle ABC$ است.

گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{5}{9} \equiv \frac{4}{9}$ و $\frac{4}{9} \equiv \frac{5}{9}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلع به طول a از مثلث اول یا با ضلع به طول 7 از مثلث دوم متناظر است یا با ضلع به طول 9 . هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلع به طول a از مثلث اول با ضلع به طول 9 از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{9} = \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{45}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{9} = \frac{4}{9} = \frac{5}{b} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{36}{9}$$

حالت دوم: ضلع به طول a از مثلث اول با ضلع به طول 7 از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{7} = \frac{4}{9} = \frac{5}{b} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{28}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{7} = \frac{5}{9} = \frac{4}{b} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{35}{9}$$

از بین مقادیر به دست آمده، بیشترین مقدار $a = \frac{45}{9}$ است.

گزینه ۲

گام اول

الف) دو مثلث قابل انطباق نیستند یعنی دو مثلث با هم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچک‌ترین ضلع مثلث با اضلاع b و a و 3 را برابر 3 در نظر بگیریم (اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث اول را 3 در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر $1 = \frac{3}{3}$ می‌شود و باید مقدار a و b برابر 4 و 5 باشد که در این صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچک‌ترین ضلع این مثلث a یا b است.
ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$3 + 4 + 5 = 12$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند $\frac{3}{5}$ یا $\frac{3}{4}$ باشد. اگر نسبت تشابه برابر $\frac{3}{4}$ باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

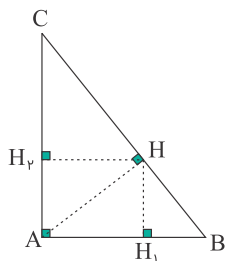
$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{4} = 3 \times 3 = 9$$

و اگر نسبت تشابه برابر $\frac{3}{5}$ باشد، داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$$

بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر 9 است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند؛ یعنی مثلث‌های ABH و ACH باهم متشابه‌اند.



$$\frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC) - S(\triangle ABH)} = \frac{1}{5-1} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ACH)} = \frac{1}{4}$$

بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{1}{4}$ و نسبت تشابه دو مثلث $\frac{1}{2}$ است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است.

$$\frac{HH_1}{HH_2} = \frac{1}{2} \text{ داریم}$$

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است؛ بنابراین $MN \parallel PB$ است. با استفاده از قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$MN \parallel BP \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{۷}{۱۰}$$

همچنین $NO \parallel AM$ است پس دو مثلث $\triangle NOC$ و $\triangle AMC$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\triangle NOC} = \frac{۴۹}{۱۰۰} S_{\triangle AMC} \quad (I)$$

مساحت دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle AMC$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{۳}{۱۰} S_{\triangle ABC} \quad (II)$$

با استفاده از دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$S_{\triangle NOC} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰} S_{\triangle ABC} = \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰} S_{\triangle ABC} \quad (III)$$

از طرفی چون $MN \parallel BP$ است پس دو مثلث $\triangle AMN$ و $\triangle ABC$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

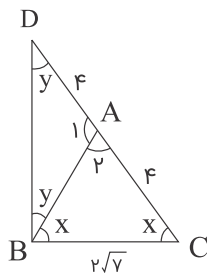
$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{۹}{۱۰۰} S_{\triangle ABC} \quad (IV)$$

اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\left(\frac{۳}{۱۰} - \frac{۹}{۱۰۰} - \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}\right) S_{\triangle ABC}}{\frac{۹}{۱۰۰} S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{۶۳}{۱۰۰۰}}{\frac{۹}{۱۰۰}} = \frac{۶۳}{۹۰} = \frac{۷}{۱۰}$$

پس مساحت مثلث $\triangle OMN$ ، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\triangle AMN$ است.

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ متساوی‌الساقین هستند پس:

$$\hat{A}BC = \hat{A}CB = x \quad , \quad \hat{A}BD = \hat{A}DB = y$$

زاویه \hat{A}_1 زاویه خارجی مثلث $\triangle ABC$ است و اندازه آن برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_1 = x + x = 2x$$

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، داریم:

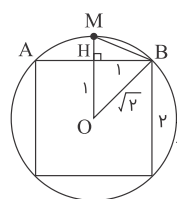
$$\hat{A}_1 + y + y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow 2(x + y) = 180^\circ \Rightarrow x + y = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث $\triangle DBC$ در رأس B قائمه است و می‌توان اندازه ضلع BD را با استفاده از قضیه فیثاغورس محاسبه کرد.

$$CD = AD + AC = 4 + 4 = 8 \quad , \quad BC = 2\sqrt{7}$$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \Rightarrow 8^2 = BD^2 + (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow 64 = BD^2 + 28$$

$$\Rightarrow BD^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow BD = \sqrt{36} = 6$$



$$HB = 1, \quad MH = OM - OH$$

هدف محاسبه اندازه MB است. در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle MHB$ داریم:

برای محاسبه MH، ابتدا لازم است با استفاده از قضیه فیثاغورس شعاع دایره را به دست آوریم:

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM = OB = \sqrt{2} \Rightarrow MH = \sqrt{2} - 1$$

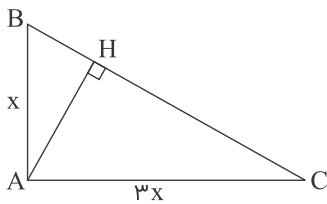
اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه MB را محاسبه می‌کنیم:

$$MB^2 = MH^2 + HB^2 \Rightarrow MB^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

گام اول

الف) طول اضلاع قائمه مثلث $\triangle ABC$ را x و $3x$ در نظر می‌گیریم.
 ب) می‌دانیم: "ارتفاع \times قاعده $\times \frac{1}{2}$ = مساحت مثلث"



گام دوم

با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه BC را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر 60 واحد مربع است، مقدار x را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} x(3x) = 60 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

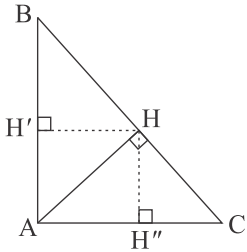
می‌توان مساحت مثلث $\triangle ABC$ را با تعریف BC و AH به ترتیب به‌عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 60$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2} AH \times \sqrt{10}(2\sqrt{10}) = 60 \Rightarrow 10AH = 60 \Rightarrow AH = 6$$

الف) مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.
 ب) با فرض اینکه $HC < HB$ باشد داریم: $S_{\triangle ABC} = \frac{6}{\sqrt{6}} S_{\triangle AHC}$
 ج) $HH' = ?$ و $HH'' = ?$



سه مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AHC$ ، $\triangle AHB$ و $\triangle ABC$ با هم متشابه‌اند. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسبت تشابه برابر جذر نسبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH} + S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} + 1 = \frac{6}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

همچنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است. چون دو مثلث $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ با هم متشابه‌اند، داریم:

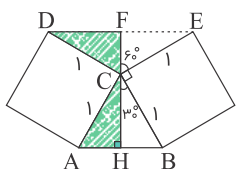
$$\frac{HH'}{HH''} = \sqrt{\frac{5}{\sqrt{6}}} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{5}{12}$$

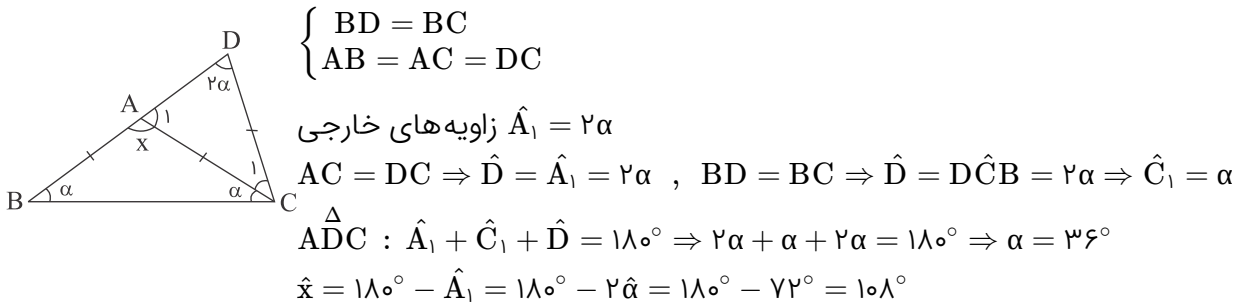
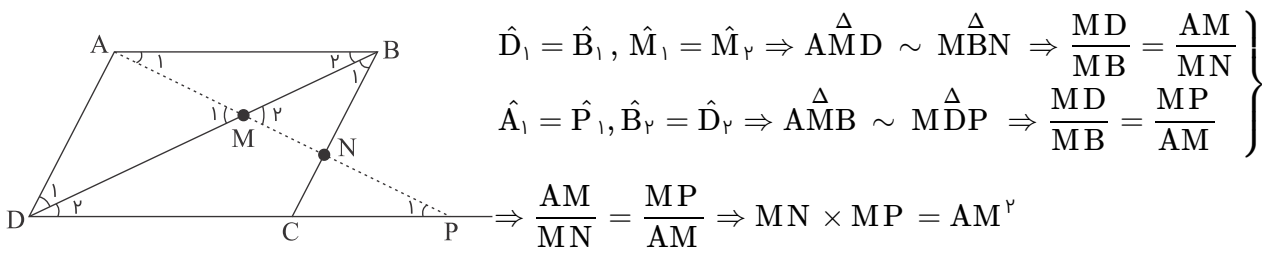
طبق قضیه تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+7}{7} \Rightarrow x = \frac{2}{25}$$

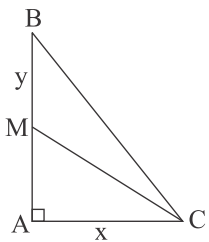
$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = \frac{2}{25} + 3 + 7 = \frac{12}{25}$$

باتوجه به شکل واضح است که مثلث‌های $\triangle ACH$ و $\triangle CDF$ همنهشت هستند؛ بنابراین مساحت مثلث $\triangle ABC$ دو برابر مساحت مثلث $\triangle DCF$ و مساوی با مساحت مثلث $\triangle DCE$ است.





مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش x و y ($x < y$) باشد، رسم می‌کنیم. AB ضلع متوسط این مثلث و CM میانه وارد بر آن است. هدف محاسبه نسبت $\frac{CM}{AB}$ است.



مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر مساحت مربعی به طول ضلع x است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{2} = x^2 \Rightarrow xy = 2x^2 \xrightarrow{x, y > 0} y = 2x \Rightarrow AB = 2x$$

$$AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}(2x) = x$$

اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle AMC$ ، اندازه CM را به دست می‌آوریم:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 \Rightarrow CM^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow CM = \sqrt{2}x$$

پس نسبت $\frac{CM}{AB}$ برابر است با:

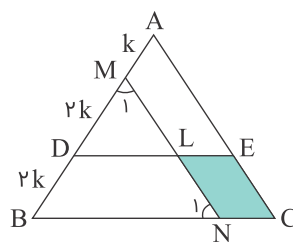
$$\frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BDN : AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \\ \triangle ACM : EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{CM} \end{array} \right\} \xrightarrow{BM=CM} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم:

مثلث $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع است؛ بنابراین:



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

چون $NLEC$ متوازی الاضلاع است، داریم:

$$MN \parallel AC \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A} = 60^\circ, \hat{N}_1 = \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \triangle MBN \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow BN = 4k$$

هر دو مثلث $\triangle MBN$ و $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع هستند در نتیجه با هم متشابه اند. می دانیم نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\triangle MBN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{4k}{4k}\right)^2 = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{16}{16} \Rightarrow S_{\triangle MBN} = \frac{16}{16} S_{\triangle ABC}$$

همچنین

$$DL \parallel BN \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = 60^\circ, \hat{L} = \hat{N}_1 = 60^\circ \Rightarrow \triangle MDL \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow ML = 2k$$

به طریق مشابه ثابت می شود که $\triangle ADE$ نیز متساوی الاضلاع و $AE = 3k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\triangle MDL$ و $\triangle MBN$ و دو مثلث $\triangle MDL$ و $\triangle ADE$ با هم متشابه اند و داریم:

$$\triangle MDL \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle MBN}} = \left(\frac{2k}{4k}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle MDL} = \frac{1}{4} S_{\triangle MBN} = \frac{4}{16} S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle MDL \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{2k}{3k}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{9}{4} S_{\triangle MDL} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC}$$

با استفاده از نسبت های بالا، نسبت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$S_{AMLE} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle MDL} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC} - \frac{4}{16} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{16} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{LECN} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle BMN} + S_{AMLE}) = S_{\triangle ABC} - \left(\frac{16}{16} S_{\triangle ABC} + \frac{5}{16} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{4}{16} S_{\triangle ABC} = 25\% S_{\triangle ABC}$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث $\triangle ABC$ است.

گام اول

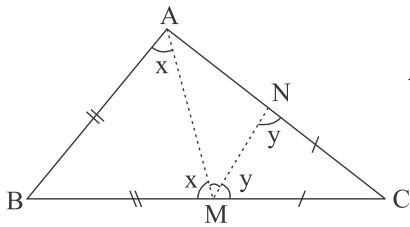
الف) مثلث $\triangle MNC$ متساوی الساقین است، پس $\widehat{NM}C = \widehat{MNC}$.
 ب) مثلث $\triangle ABM$ متساوی الساقین است، پس $\widehat{AMB} = \widehat{BAM}$.
 ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:
 می‌دانیم \widehat{M} یک زاویه نیم‌صفحه است، داریم:

$$\widehat{AMB} + \widehat{AMN} + \widehat{NMC} = x + 43^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ \quad (I)$$

از طرفی:



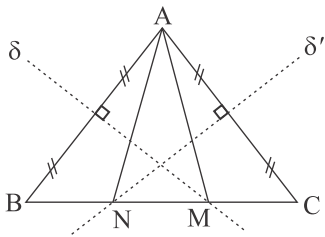
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM : \widehat{B} + 2x = 180^\circ \\ \triangle CNM : \widehat{C} + 2y = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \widehat{B} + 2x + \widehat{C} + 2y = \widehat{B} + \widehat{C} + 2(x + y) = 360^\circ$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} \widehat{B} + \widehat{C} + 274^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ - 274^\circ = 86^\circ$$

همچنین در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow 86^\circ + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

$$\widehat{A} = 80^\circ, AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 50^\circ$$



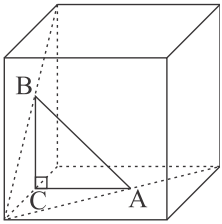
هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{B} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 80^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{C} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{ANC} = 80^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 180^\circ - (\widehat{AMB} + \widehat{ANC}) = 20^\circ$$

بنابراین، کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN ، زاویه $\widehat{MAN} = 20^\circ$ است.

مکعبی به طول یال $4\sqrt{2}$ به صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبه اندازه AB است.



اندازه AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$AC = BC = \frac{1}{2}(4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

با استفاده از رابطه فیثاغورس، اندازه AB را تعیین می‌کنیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow 2(2\sqrt{2})^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$$

گزینه ۲

۴۰

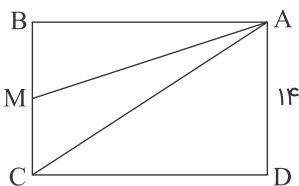
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{5}{9} \quad \text{ب)}$$

AM = ? ج)

گام دوم



با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \xrightarrow[\substack{AD=14 \\ AC=25}]{\substack{AC=25 \\ AD=14}} 25^2 = 14^2 + CD^2 \\ \Rightarrow 625 = 196 + CD^2 \Rightarrow CD^2 = 625 - 196 = 429 \Rightarrow AB^2 = 429$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABM} + S_{AMCD}} = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$$

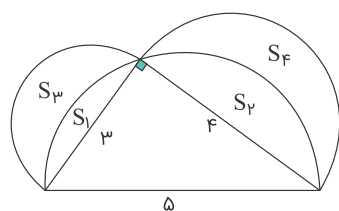
$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{2AD} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{BM}{28} = \frac{5}{14} \Rightarrow BM = 10$$

رابطه فیثاغورس را برای مثلث ABM نوشته و اندازه AM را تعیین می‌کنیم:

$$AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow 429 + 100 = AM^2 \Rightarrow AM^2 = 529 \Rightarrow AM = \sqrt{529} = 23$$

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبه $S_3 + S_4$ است. با استفاده از قضیه فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



داریم:

مساحت مثلث قائم‌الزاویه - مساحت نیم‌دایره به قطر ۵ $S_1 + S_2 = 5$

$$S_3 + S_4 = (S_1 + S_2) - (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۳} + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۴})$$

بنابراین:

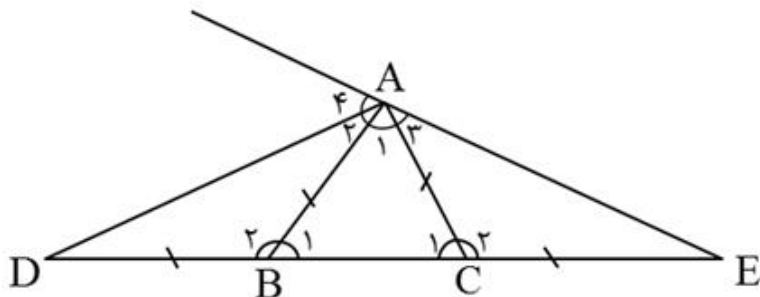
$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{25}{4}\right) - 6 = \frac{25\pi}{8} - 6$$

$$S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{25\pi}{8} - 6\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{9}{4}\right) + \frac{\pi}{2} (4) - \frac{25\pi}{8} + 6 = \frac{25\pi}{8} - \frac{25\pi}{8} + 6 = 6$$

گام اول

الف) مثلث $\triangle ADE$ را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



ب) $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویه خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویه داخلی است.

گام دوم

مثلث $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ ، در نتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ است. از طرفی طبق قسمت (ب) از گام اول، $AB = AC$ و $CE = BD$ است؛ بنابراین دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle ACE$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} CE = BD \\ \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \\ AB = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض}} \triangle ABD \cong \triangle ACE$$

در نتیجه زوایای \hat{D} و \hat{E} با هم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث $\triangle ADE$ محسوب می‌شوند.

$$\triangle ABD \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D} = \alpha \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

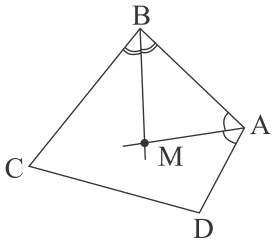
\hat{A}_4 کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث $\triangle ADE$ است پس اندازه آن با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

$$\hat{A}_4 = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است.

$$\hat{A} = \frac{۴}{۳}\hat{B}, \hat{C} + \hat{D} = \frac{۱۱}{۳}\hat{B}, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}\hat{B} + \hat{B} + \frac{۱۱}{۳}\hat{B} = ۳۶^\circ \Rightarrow ۶\hat{B} = ۳۶^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۸^\circ$$

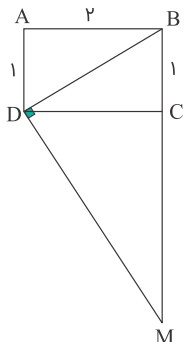


اگر M زاویه بین نیمسازهای دو زاویه A و B باشد، داریم:

$$\hat{M} = ۱۸۰ - \frac{\hat{A}}{۲} - \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰ - ۳۰ - ۴۰ = ۱۱۰$$

$$\Rightarrow \text{زاویه حاده} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

راه حل اول: باتوجه به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می کنیم:



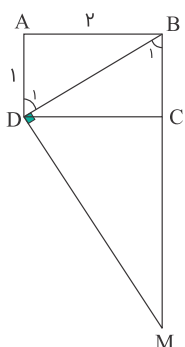
هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

با استفاده از رابطه طولی در مثلث BDM داریم:

$$BD^2 = MB^2 \cdot BC^2 \Rightarrow (\sqrt{5})^2 = MB^2 \times 1 \Rightarrow MB = 5$$

راه حل دوم:



هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

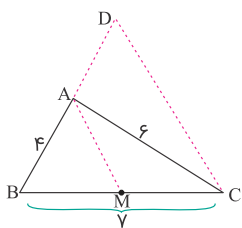
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

دو مثلث قائم الزاویه $\hat{\Delta} B\hat{A}D$ و $\hat{\Delta} B\hat{D}M$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{BDM} = 90^\circ \\ AD \parallel BC \\ \text{مورب BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{\Delta} B\hat{A}D \sim \hat{\Delta} B\hat{D}M$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

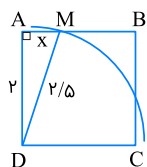
$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{MB} \Rightarrow MB = (\sqrt{5})^2 = 5$$



در مثلث BDC می‌دانیم $AM \parallel CD$ است. به کمک رابطه تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 8$$

مربع ABCD را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع $2/5$ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



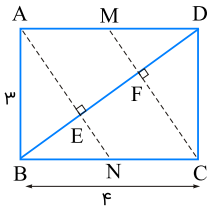
با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle DAM$ ، فاصله نقطه M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^2 + 2^2 = (2/5)^2 \Rightarrow AM^2 + 4 = 4/25 \Rightarrow AM^2 = 2/25$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{2/25} = 1/5, \quad MB = 2 - 1/5 = 9/5$$

بنابراین فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $1/5 = \frac{1}{5}$ است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABD : BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ \Rightarrow BD^2 &= 9 + 16 = 25 \Rightarrow BD = 5 \end{aligned}$$

کاملاً واضح است که مثلث‌های ABN و CDM همنهشت‌اند، لذا $DF = EB$. همچنین ABD قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BE \times BD \Rightarrow 9 = BE \times 5 \Rightarrow BE = DF = \frac{9}{5} \\ \Rightarrow EF &= 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

همچنین در مثلث BFC داریم:

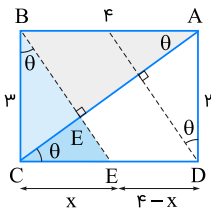
$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5} + \frac{7}{5}} = \frac{BN}{4} \Rightarrow BN = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow NC = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_{ANCM} = AB \times NC = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5/25$$

راه حل دوم:

در شکل زیر تمام زوایای مشخص شده با یکدیگر برابرند که آن‌ها را θ می‌نامیم.

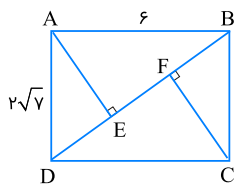


در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $\tan \theta = \frac{3}{4}$ و همچنین در مثلث قائم‌الزاویه BCE داریم $\tan \theta = \frac{x}{3}$ ، در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2/25$$

$$\begin{aligned} S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} &= \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = (4 - x) \times 3 = (4 - 2/25) \times 3 \\ &= 1/75 \times 3 = 5/25 \end{aligned}$$

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 = 36 + 28 = 64 \Rightarrow BD = 8$$

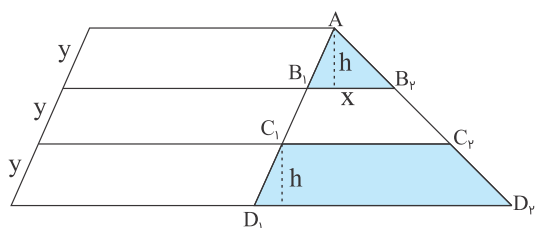
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\triangle ABD : AD^2 = DE \cdot BD \Rightarrow 28 = DE \times 8 \Rightarrow DE = \frac{28}{8} = 3.5$$

به طور مشابه $BF = 3.5$ است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = 8 - 7 = 1$$

فرض کنید $B_1B_2 = x$ باشد. در این صورت داریم:

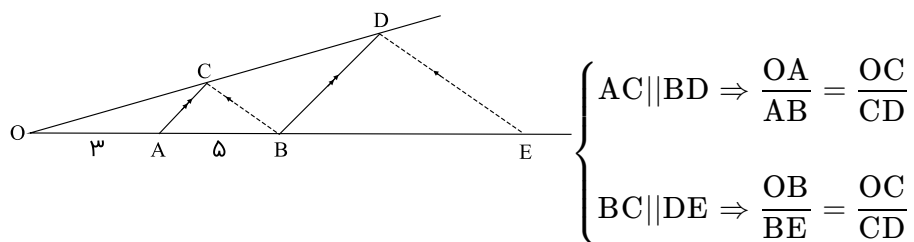


$$\triangle AC_1C_2 : \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow C_1C_2 = 2x$$

$$\triangle AD_1D_2 : \frac{AB_1}{AD_1} = \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow D_1D_2 = 3x$$

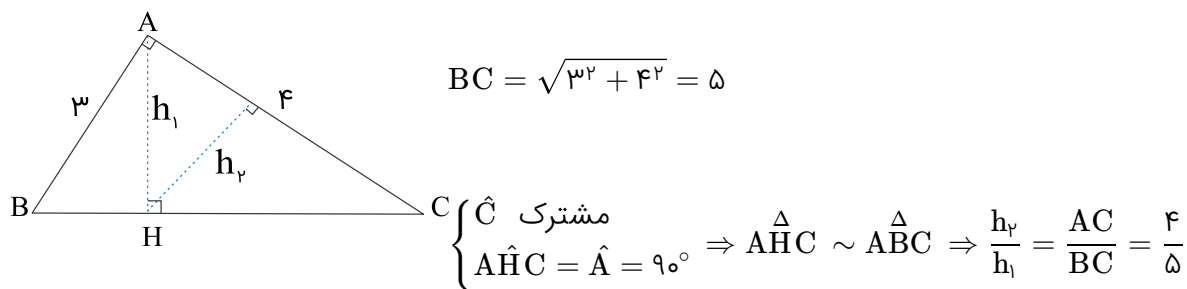
$$\frac{S_{AB_1B_2}}{S_{C_1C_2D_1D_2}} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times h}{\frac{1}{2} (2x + 3x)h} = \frac{1}{5}$$

باتوجه به شکل و با کمک قضیه تالس داریم:



طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{13}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$



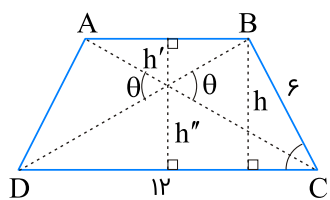
راه حل اول:

راه حل دوم:

$$\triangle ABC : \begin{cases} h_1 \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5h_1 = 3 \times 4 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{5} \\ AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 16 = 5HC \Rightarrow HC = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\triangle AHC : h_2 \times AC = h_1 \times HC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}$$

دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OCD$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{h'}{h''} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow h'' = \frac{3}{2}h'$$

$$h' + h'' = 10 \Rightarrow h' + \frac{3}{2}h' = 10 \Rightarrow h' = 4 \Rightarrow h'' = 6$$

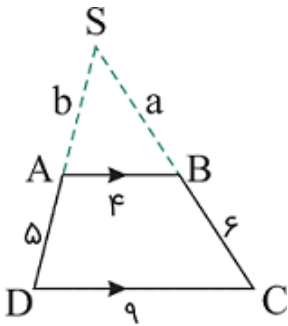
$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OB \times OC = OA \times OD (*)$$

مساحت دو مثلث $\triangle OAD$ و $\triangle OBC$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases} S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}OB \times OC \times \sin \theta \\ S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}OA \times OD \times \sin \theta \end{cases} \xrightarrow{(*)} S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ODC} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} \\ &\Rightarrow \frac{(8 + 12) \times 10}{2} = \frac{6 \times 12}{2} + \frac{4 \times 8}{2} + 2S_{\triangle OBC} \\ &\Rightarrow 100 = 36 + 16 + 2S_{\triangle OBC} \Rightarrow S_{\triangle OBC} = \frac{48}{2} = 24 \end{aligned}$$

مطابق شکل، ساق‌های دوزنقه ABCD به طول اضلاع $AB = ۴$ ، $CD = ۹$ ، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث SAB} = 4 + 4/5 + 4 = 12/5$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$$

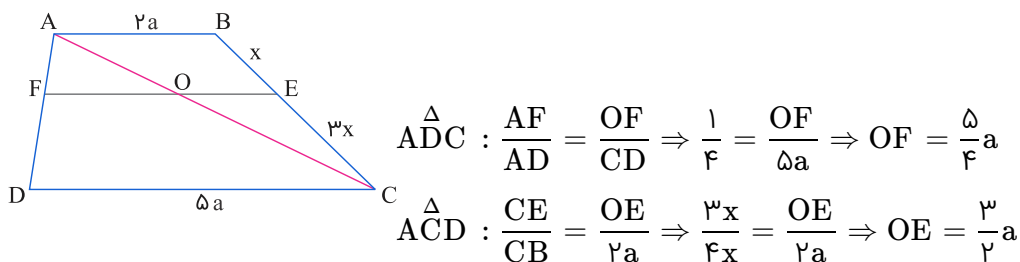
$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{\frac{1}{2} \times 5 \times h''}{\frac{1}{2} \times (3+5) \times h''} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BCFE}} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{نسبت تشابه: } \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}}$$

$$= \frac{S_{\triangle AEF}}{\frac{25}{9}S_{\triangle AEF} - S_{\triangle AEF}} = \frac{1}{\frac{25}{9} - 1} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16}$$

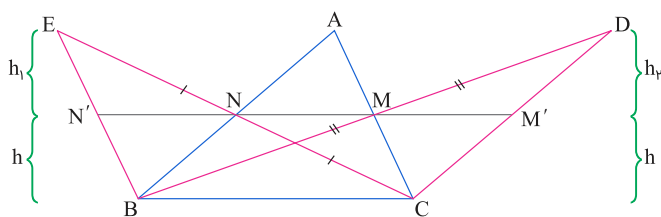
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BCFE}} + \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



$$EF = OF + OE = \frac{5}{4}a + \frac{3}{2}a = \frac{11}{4}a$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{11}{4}a}{5a} = \frac{11}{20}$$



مثلث‌های EBC و DCB دارای قاعده‌های یکسان BC هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

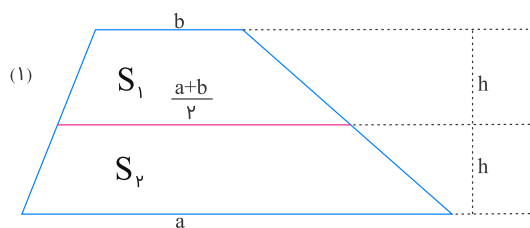
$$\triangle EBC : \frac{EN}{EC} = \frac{NN'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_1}{h + h_1} \Rightarrow 2h_1 = h + h_1 \Rightarrow h_1 = h$$

$$\triangle DCB : \frac{DM}{DB} = \frac{MM'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_2}{h + h_2} \Rightarrow 2h_2 = h + h_2 \Rightarrow h_2 = h$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

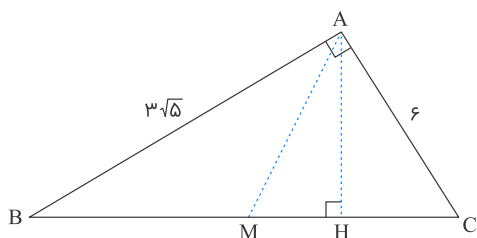
پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.



$$S_2 = ۲S_1 \Rightarrow \frac{1}{۲}h\left(a + \frac{a+b}{۲}\right) = ۲ \times \frac{1}{۲}h\left(b + \frac{a+b}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b+a \Rightarrow ۳a+b = ۶b+۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{۵}$$

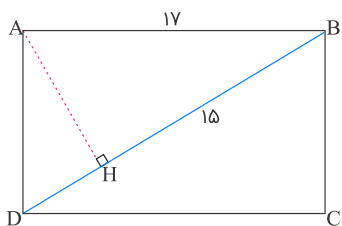


$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{5})^2} = 9 \Rightarrow MC = MB = 4.5$$

$$\triangle ABC : AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 45 = BH \times 9$$

$$\Rightarrow BH = 5 \Rightarrow HM = BH - MB = 5 - 4.5 = 0.5$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHM}} = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{AH \times HM}{۲}} = \frac{AH \times 9}{AH \times \frac{1}{۲}} = 18$$



$$AB^2 = BH \times BD$$

$$17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{17^2}{15} - 19 = \frac{17^2 - 15 \times 19}{15} = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

فرض کنیم $AE = x$ ، $ED = 3x$ ، $BD = y$ و $DC = 3y$. داریم:

$$\begin{aligned} \triangle AND : ME \parallel DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN} &= \frac{AE}{ED} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow AM = z \text{ و } MN = 3z \\ \triangle BCM : DN \parallel CM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM} &= \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{3z} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = z \\ \Rightarrow \frac{AB}{AM} &= \frac{z + 3z + z}{z} = \frac{5z}{z} = 5 \end{aligned}$$



۱ به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

- (۱) -3 (۲) $-\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۲ در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است، مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) 4
(۳) $4/5$ (۴) 5

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

۳ فاصله دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$
(۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴ کوچکترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $1, -3$ (۲) $0, -3$
(۳) $2, -1$ (۴) $3, -2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

- (۱) $m \geq 1$ (۲) $m < 2$
(۳) $1 \leq m < 2$ (۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

نمودارهای دو تابع $y = x + 7$ و $y = |x - 2| + |x + 1|$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) ۱۲
(۳) ۱۳ (۴) $10\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

دایره‌ای به مرکز $(1, 3)$ بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ ، وترى به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور x ها، وترى با کدام اندازه جدا می‌کند؟

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) ۶
(۳) $2\sqrt{15}$ (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m ، کدام است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-4, -2)$
(۳) $(-6, 0)$ (۴) $(-6, -4)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ ، $y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵
(۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC ، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $2\sqrt{6}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB ، کدام است؟

- (۱) 60π (۲) 70π
(۳) 75π (۴) 80π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \frac{1}{p}x + 2$ و $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹
(۳) ۱۰ (۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲ مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ ، مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) $3\sqrt{2}$
(۳) ۵
(۴) $4\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳ معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$
(۲) ۳
(۳) -۱
(۴) $-\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$ از طرف بالا بر محور x مماس شده است، طول نقطه تماس کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۵ به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه عددی بین دو ریشه معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

- (۱) ۳
(۲) -۳
(۳) ۴
(۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۱۶ اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x ‌هاست؟

- (۱) $m < -\frac{1}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2} < m < 1$
(۳) $1 < m < \frac{3}{2}$
(۴) $m > \frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

- (۱) $m > 2$
 (۲) $-1 < m < 2$
 (۳) هر مقدار m
 (۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادله $3x + 4y = 15$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) ۱
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

در یک مکعب به طول یال a ، صفحه قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر a^2 است؟

- (۱) $5 + \sqrt{2}$
 (۲) $4 + 2\sqrt{2}$
 (۳) $5 + 2\sqrt{2}$
 (۴) $3 + 4\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام می‌باشد؟

- (۱) $7/2$
 (۲) $9/6$
 (۳) $11/4$
 (۴) $12/8$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

به ازای کدام مقدار a زاویه بین خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله $3x + 2y = a$ در نقطه تلاقی آن‌ها 90° درجه است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

نقطه $(a, 2a)$ مرکز دایره گذرنده بر دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) $2\sqrt{2}$
 (۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۴ در معادله $x^2 - \lambda x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۴
(۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

- (۱) $\{-3\}$
(۲) $\{3\}$
(۳) $\{-3, 3\}$
(۴) \emptyset

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۶ در یک بیضی به افطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۶
(۳) ۱۸
(۴) ۲۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۷ بهروز یک مجله را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو باهم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- (۱) ۳۲
(۲) ۳۳
(۳) ۳۵
(۴) ۳۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۸ منحنی توابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله $y = 7$ مماس اند، فاصله دو نقطه تماس کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۹ به ازای کدام مقدار a دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) ۳
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۰ اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) $2/5$
(۳) $3/5$ (۴) $4/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱ سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵
(۳) ۲۰ (۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۲ در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

- (۱) $5/6$ (۲) $5/64$
(۳) $5/75$ (۴) $5/8$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۳ اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -14 (۲) -12
(۳) -8 (۴) -6

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۴ دایره به مرکز $(2, 0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله $y = 1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

- (۱) 1 و 3 (۲) 0 و 4
(۳) $1/2$ و $5/2$ (۴) $2 - \sqrt{2}$ و $2 + \sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۵ شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله $y = 2x$ باشد، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{13}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۶ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس خارج
(۲) مماس داخل
(۳) متقاطع
(۴) متخارج

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a + 3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طولهای منفی قطع می‌کند؟

- (۱) $a < -9$
(۲) $a < -3$
(۳) $a > -1$
(۴) $-3 < a < 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۸ دایره‌ای از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط به معادله $y = 1$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) 3

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۹ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(-2, 1)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) 2
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) 3
(۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۰ دایره‌ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) 2
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) 3

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۱ نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱) $(1, 5)$
(۲) $(3, 4)$
(۳) $(3, 5)$
(۴) $(4, 3)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

دایره‌ای از نقطه $(2, -1)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

۴۲

- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

ظرفی است به شکل نیمکره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانه آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۴۳

- (۱) ۲۰۸
(۲) ۲۱۲
(۳) ۲۱۵
(۴) ۲۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

۴۴

- (۱) 0 و $-\frac{4}{3}$
(۲) 0 و $\frac{4}{3}$
(۳) 1 و $-\frac{4}{3}$
(۴) 1 و $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۴۵

- (۱) $a \leq 2$
(۲) $0 < a \leq 2$
(۳) $2 < a < 3$
(۴) $0 < a < 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(2, 1)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ می‌گذرد، کدام است؟

۴۶

- (۱) ۲
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) ۳
(۴) $\frac{3}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۴۷

- (۱) $2 + \sqrt{3}$
(۲) $5 + 2\sqrt{3}$
(۳) $5 + 4\sqrt{3}$
(۴) $7 + 4\sqrt{3}$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۸ اگر معادله $x^2 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $m < -4$
 (۲) $m > 4$
 (۳) $-4 < m < 4$
 (۴) $4 < m < 9$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴۹ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$
 (۲) $\frac{9}{4}$
 (۳) $\frac{25}{8}$
 (۴) $\frac{25}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۵۰ نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ‌ها غیرمنفی باشد؟

- (۱) ۱
 (۲) $1/5$
 (۳) ۲
 (۴) ۳

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ‌ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

- (۱) $m > 1$ یا $m < -2$
 (۲) $-2 < m < 1$
 (۳) فقط $m < -2$
 (۴) فقط $m > 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۲ شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
 (۲) ۳
 (۳) $2\sqrt{3}$
 (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۳ از داخل یک استوانه قائم توپُر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده مخروط به فاصله ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

- (۱) $10/36\pi$
 (۲) $11/28\pi$
 (۳) $12/56\pi$
 (۴) $13/44\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
 (۲) $\sqrt{3}$
 (۳) $\sqrt{5}$
 (۴) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ و $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $y = \frac{2}{3}$
 (۲) $x = \frac{2}{3}$
 (۳) $y + x = \frac{2}{3}$
 (۴) $y + x = \frac{1}{3}$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ می‌باشد. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) ۴۰
 (۲) ۴۵
 (۳) ۷۵
 (۴) ۸۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ ، کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) $\frac{6}{5}$
 (۳) ۷
 (۴) $\frac{7}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(8, 3)$ عمود است، معادله آن خط کدام است؟

- (۱) $2y + 3x = 4$
 (۲) $2y + 3x = 1$
 (۳) $2y - 3x = -5$
 (۴) $3y - 2x = -5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه 30° درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند، حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟

- (۱) ۲۴
 (۲) ۳۲
 (۳) ۳۶
 (۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

یک دوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

(۲) 38π

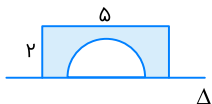
(۱) 36π

(۴) 40π

(۳) 39π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۶۱ سطح محدود به مستطیل 5×2 و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟



(۱) ۱۵

(۲) $15/5$

(۳) $16/5$

(۴) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۲ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) -۲

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۶۳ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟

(۲) -۲

(۱) -۴

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۶۴ دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $\sqrt{3}$

(۴) ۳

(۳) $\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۵ مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر $9\sqrt{2}$ است، اندازه قطر مکعب کدام است؟

(۲) $3\sqrt{2}$

(۱) $2\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $\frac{1}{\lambda} = 0$ ، $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ برابر با ۲ است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

به ازای کدام مقدار a معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟

- (۱) $-2 < a < 2$
(۲) $2 < a < 5$
(۳) $2 < a < 14$
(۴) $5 < a < 14$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ و ۳
(۲) ۱ و ۴
(۳) ۲ و ۳
(۴) ۱/۵ و ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

دایره گذرا بر نقطه $(1, -2)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

- (۱) ۱ و ۴
(۲) ۱ و ۵
(۳) ۲ و ۴
(۴) ۲ و ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $2\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{3}$
(۴) $4\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $3, -5$
(۲) $2, -4$
(۳) $-1 \pm \sqrt{2}$
(۴) $-1 \pm \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

- (۱) $-1 < m < 0$
(۲) $m < 0$
(۳) $2 < m < 8$
(۴) $m > 8$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

معادله $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ ، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟ ۷۳

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

اگر α و β ریشه های معادله $4x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$ است؟ ۷۴

- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$
(۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
(۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$
(۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

اگر α و β ریشه های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ ۷۵

- (۱) ۲۷
(۲) ۲۸
(۳) ۲۹
(۴) ۳۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

اگر $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$ باشد، عدد $4a + 9$ کدام است؟ ۷۶

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۱۵
(۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟ ۷۷

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۲/۵
(۳) ۱۳/۵
(۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟ ۷۸

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

نقطه $M(2\sqrt{5}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = 2x$ و $x = 2y$ مماس است. شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $1/5$
(۳) ۲
(۴) $2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $A(6, 3)$ گذشته و بر خط به معادله $y = 2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
(۲) $\sqrt{6}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) $\sqrt{10}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

دایره گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = 2x$ و $y = 2x + 10$ مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

- (۱) $(-3, 2)$
(۲) $(-3, 1)$
(۳) $(-2, 1)$
(۴) $(-1, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

دو دایره C و C' در نقطه $(0, 1)$ مماس برون‌ی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه $(2, -3)$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 3)$
(۲) $(-1, 2)$
(۳) $(1, -2)$
(۴) $(1, -1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

به ازای کدام مقدار a ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ مماس خارج یکدیگرند؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

دایره C بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(8, 7)$ می‌گذرد. شعاع دایره C کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۵ دو دایره گذرا بر نقطه $(-9, 2)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگتر، کدام است؟

(۲) ۱۵

(۱) ۱۴

(۴) ۱۹

(۳) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک چهارم داخل ۱۳۹۵

۸۶ در یک مکعب صفحه گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۷ دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام می‌باشد؟

(۲) ۱۱ و -۱۵

(۱) ۹ و -۱۵

(۴) ۱۱ و -۹

(۳) ۱۵ و -۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۸۸ دایره‌ای بر محور x ها و خط به معادله $3x + 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟

(۲) $1/5$

(۱) ۱

(۴) $2/5$

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۹ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد، کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $\sqrt{3}$

(۴) ۳

(۳) $\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۹۰ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۲) مماس خارج

(۱) مماس داخل

(۴) متداخل

(۳) متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۹۱ دو دایره به معادله های $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه اند؟

- (۱) مماس خارجی
(۲) مماس داخلی
(۳) متقاطع در دو نقطه
(۴) یکی خارج دیگری

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۹۲ به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

- (۱) $m < -6$
(۲) $m > 3$
(۳) $0 < m < 3$
(۴) $3 < m < 6$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹۳ یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می رسد؟

- (۱) ۰/۴
(۲) ۰/۵
(۳) ۰/۶
(۴) ۰/۸

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۹۴ ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$
(۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$
(۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$
(۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۹۵ اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (K+3)x^2 - 4x + K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۹۶ در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۹۷ به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۳
(۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۹۸ به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه های معادله درجه دوم $\lambda x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۱
(۳) ۱۳
(۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۹ اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله $\lambda x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۰۰ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$
(۲) ۱
(۳) 1 و $-\frac{9}{5}$
(۴) $\frac{9}{5}$ و -1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۰۱ ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، از ریشه های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است، b کدام است؟

- (۱) -۵
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۰۲ ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است، b کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

(۲) $3 < m < 4$

(۱) $m > 3$

(۴) $4 < m < 5$

(۳) $3 < m < 5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

(۲) $0 < m < 2$

(۱) $\frac{-3}{2} < m < 2$

(۴) $2 < m < 3$

(۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گزینه ۳

۱

گام اول

الف) نمودار تابع درجه دو در صورتی بر محور x ها مماس می‌شود که ریشه مضاعف داشته باشد. در این صورت $\Delta = 0$ خواهد بود.
 ب) چون نمودار تابع بالای محور x ها قرار دارد و بر محور x ها مماس شده است، پس ضریب x^2 مثبت در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$$

$$1) \quad m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (I)$$

$$2) \quad \Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m - 2)(m + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 4(m^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow m^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \quad (II)$$

اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) مقدار $m = \frac{5}{2}$ را به ما می‌دهد.

گام اول

اگر یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 + ax + 9 = 0$ را برابر α در نظر بگیریم، ریشه دیگر برابر 2α می‌شود.

گام دوم

روش اول:

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a} = \frac{9}{2}$ است. هر یک از ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\alpha(2\alpha) = \frac{9}{2} \Rightarrow 2\alpha^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها مثبت}} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\alpha = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{3}{2}$ و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه‌ها برابر $4/5$ می‌شود.

روش دوم:

یکی از ریشه‌ها α و دیگری 2α است، پس داریم:

$$2x^2 + ax + 9 = (x - \alpha)(x - 2\alpha) = x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{9}{2} = x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -3\alpha, 2\alpha^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \frac{3}{2}, 2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha + 2\alpha = \frac{3}{2} + 3 = 4/5$$

گام اول

نکته: فاصله دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow m_1 = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

شیب دو خط برابر با $\sqrt{3}$ است؛ بنابراین دو خط موازی‌اند. اکنون با توجه به گام اول، معادله دو خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی با هم برابر باشند.

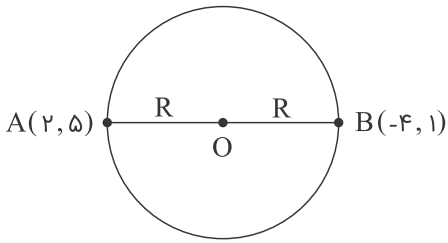
$$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow y - \sqrt{3}x - 2 = 0$$

$$\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \xrightarrow{\div \sqrt{3}} y - \frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$$

فاصله این دو خط موازی برابر است با:

$$d = \frac{|-2 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{|-2(1 + \sqrt{3})|}{\sqrt{4}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

کوچکترین دایره گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

$$O \Rightarrow O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3)$$

$$R = |OA| = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \text{دایره: } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور x ها}} (x+1)^2 + (0-3)^2 = 13$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

گام اول

الف) معادله را با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.

ب) برای این که معادله اولیه دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادله جدید دو ریشه مثبت داشته باشد. پس سه شرط $\Delta > 0$ ، $t_1 + t_2 > 0$ و $t_1 t_2 > 0$ را برای معادله جدید بررسی می‌کنیم.

گام دوم

$$x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0$$

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow 4 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow 4m < 8 \Rightarrow m < 2 \quad (I)$$

$$2) t_1 t_2 > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (II)$$

$$3) t_1 + t_2 > 0 \Rightarrow -\left(-\frac{2}{1}\right) > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = 1$ ، معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ به معادله $x - 2\sqrt{x} = 0$ تبدیل می‌شود که دارای دو جواب $x = 0$ و $x = 4$ است. پس $m = 1$ نیز قابل قبول است:

$$(I) \cap (II) \cup m = 1 \Rightarrow 1 \leq m < 2$$

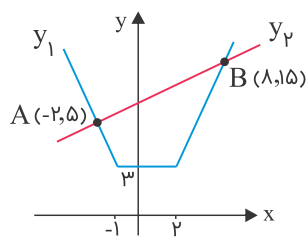
$$y_1 = |x - 2| + |x + 1|, \quad y_2 = x + 7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x + 2 - x - 1 & ; x \leq -1 \\ -x + 2 + x + 1 & ; -1 < x \leq 2 \\ x - 2 + x + 1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \leq -1 \\ 3 & ; -1 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_2 و y_1 را رسم می‌کنیم:

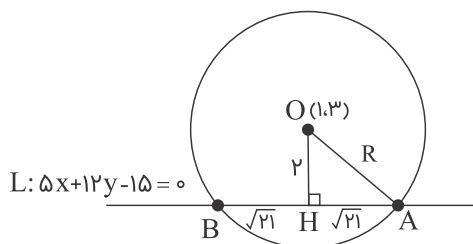
$$x > 2 : 2x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} \\ &= \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

از مرکز دایره بر خط $L: 5x + 12y - 15 = 0$ عمود می‌کنیم، پس $AH = HB = \sqrt{21}$ و داریم:



$$|OH| = \frac{|\Delta(1) + 12(3) - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\triangle OHA: \text{ فیثاغورس} \Rightarrow R^2 = 2^2 + (\sqrt{21})^2 = 25$$

$$\Rightarrow \text{دایره: } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور x ها، مقدار y را در معادله دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2 + (0-3)^2 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow x = -3, x = 5$$

$$\Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور } x \text{ها: } (-3, 0), (5, 0)$$

$$\Rightarrow \text{طول پاره خط حاصل} = 5 - (-3) = 8$$

برای اینکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه مثبت باشد باید $\Delta > 0$ ، $p > 0$ و $s > 0$ باشد، بنابراین داریم:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times 2 \times (m+6) = m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m-12)(m+4)}_p > 0$$

x	$-\infty$	-4	12	$+\infty$
$p(x)$	$+$	$ $	$-$	$+$
	ζ			ζ

$$\Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12$$

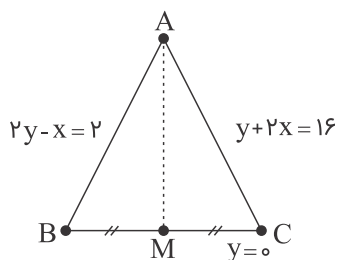
$$2) p > 0 \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$3) s > 0 \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$m \in (-6, -4)$$

مثلث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصله نقطه A از نقطه M را به دست آوریم:
از تقاطع دو خط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ مختصات نقطه A به دست می‌آید.

$$2 \times \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 2x = 4 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = 6 \Rightarrow A(6, 4)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$2y - x = 2 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow B(-2, 0)$$

$$y + 2x = 16 \xrightarrow{y=0} x = 8 \Rightarrow C(8, 0)$$

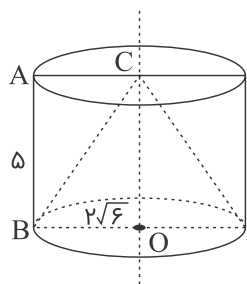
سپس مختصات نقطه M را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M(3, 0)$$

اکنون فاصله دو نقطه A و M را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(3 - 6)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:



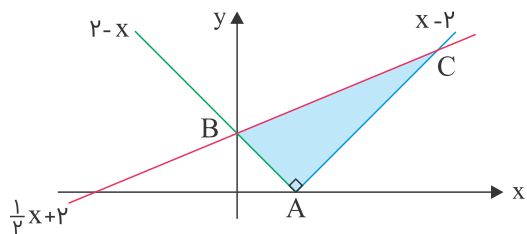
$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{6})^2(5) - \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5) = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(24)(5) = 80\pi$$

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ -x+2 & ; x < 2 \end{cases}$$



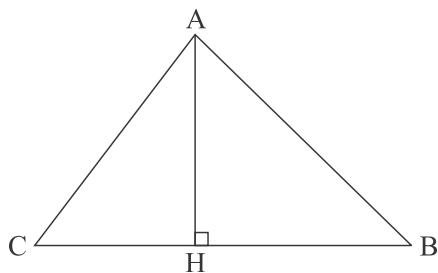
$$\begin{cases} A = (2, 0) \\ x-2 = \frac{1}{2}x+2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C = (8, 6) \\ 2-x = \frac{1}{2}x+2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0, 2) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (6-0)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = 12$$

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC ، کافی است که فاصله رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادله خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(7, 3), C(2, -2) \Rightarrow m = \frac{3 + 2}{7 - 2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = x - 2 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

بنابراین فاصله نقطه $A(1, 5)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{1}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{1}{\frac{(2-m)}{3}} \Rightarrow \frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -4m + 2m^2 + 2 - m = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادله داده شده دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید $\Delta > 0$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3x^2 + (-2-1)x + 2 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ غ ق ق} \\ m = \frac{7}{2} \Rightarrow 3x^2 + (2 \times \frac{7}{2} - 1)x + 2 - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{7}{2}$ است.

گام اول

الف) چون نمودار از طرف بالا بر محور Xها مماس شده است، ضریب x^2 مثبت است.
 ب) نمودار منحنی درجه دو بر محور Xها مماس است. بنابراین معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف داشته و $\Delta = 0$ است.

گام دوم

با مشخص شدن مقدار a ، معادله $f(x) = 0$ را حل کرده و طول نقطه تماس یا همان ریشه مضاعف تابع را مشخص می کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$$

$$1) a > 0 \quad (I)$$

$$2) \Delta = 0 \Rightarrow 4^2 - 4(a)(a-3) = 0 \Rightarrow 16 - 4(a^2 - 3a) = 0$$

$$\Rightarrow 4(a^2 - 3a) = 16 \Rightarrow a^2 - 3a = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) : a = 4$$

با در نظر گرفتن $a = 4$ ، ضابطه $f(x)$ را بازنویسی کرده و معادله $f(x) = 0$ را حل می کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3 \xrightarrow{a=4} f(x) = 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

گام اول

ریشه های معادله درجه دو را α و β در نظر می گیریم. چون $\frac{1}{\lambda}$ واسطه عددی بین α و β است، داریم:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda}$$

گام دوم

در معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه های معادله باشند، در این صورت $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ است.

$$(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0 \xrightarrow{\text{معادله ریشه های } \alpha \text{ و } \beta} \alpha + \beta = -\left(-\frac{3}{m^2 - 4}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{m^2 - 4} \text{ و } \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{4}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

به ازای $m = 4$ مقدار Δ برای معادله منفی شده و در نتیجه معادله فاقد ریشه می شود، پس فقط $m = -4$ قابل قبول است.

اول عبارت $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را ساده می‌کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$ حاصل ضرب ریشه‌های معادله است و به راحتی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{و } \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{12}{4}) = 3 \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

پس حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

برای اینکه نمودار تابع درجه دوم به فرم $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور x ها باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱) a < ۰, ۲) \Delta < ۰$$

مجموعه جواب های این دو نامعادله را به دست آورده و بین آن ها اشتراک می گیریم.

$$y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$$

$$۱) a < ۰ \Rightarrow m - 1 < ۰ \Rightarrow m < 1 \quad (I)$$

$$۲) \Delta < ۰ \Rightarrow (\sqrt{3})^2 - 4(m - 1)m < ۰ \Rightarrow ۳ - 4m^2 + 4m < ۰ \Rightarrow 4m^2 - 4m - ۳ > ۰$$

جدول تعیین علامت عبارت $4m^2 - 4m - 3$ را تشکیل می دهیم:

$$4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادله دوم به صورت زیر درمی آید:

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \quad (II)$$

بنابراین مجموعه جواب قابل قبول برای m برابر است با:

$$(I) \cap (II) : m < -\frac{1}{2}$$

گام اول

الف) منحنی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار Δ بزرگ‌تر از صفر است.
 ب) منحنی در دو نقطه منفی محور x ها را قطع می‌کند بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها (S) منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) مثبت است.

ج) در هر معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

گام دوم

در معادله درجه دو داده شده داریم:

$$a = (m - 2), \quad b = -2(m + 1), \quad c = 12$$

حال هر سه شرط گفته شده را بررسی می‌کنیم:

$$\text{I) } \Delta > 0 \Rightarrow 4(m + 1)^2 - 4(m - 2)(12) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 48m + 96 > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 40m + 100 > 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m - 5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5$$

$$\text{II) } S < 0 \Rightarrow \frac{2(m + 1)}{m - 2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$\text{III) } P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m - 2} > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

اشتراک بین دو مجموعه جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی مورد نظر به ازای هیچ مقدار m ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

در آغاز معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) = 4$$

$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

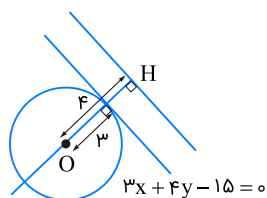
$$\Rightarrow R_{\text{شعاع}} = \sqrt{9} = 3, \quad O_{\text{مرکز}} = (1, -2)$$

فاصله هر نقطه مانند (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ که $a^2 + b^2 \neq 0$ برابر است با $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ پس فاصله

مرکز دایره $O = (1, -2)$ تا خط $3x + 4y - 15 = 0$ برابر است با:

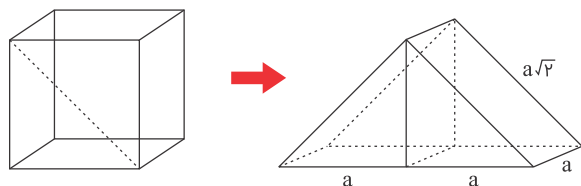
$$d = \frac{|3(1) + 4(-2) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

فاصله یک نقطه تا یک خط برابر با اندازه عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است. پس فاصله مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. از آنجاکه هر قطر دایره، در نقطه تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصله نقاط دایره تا خط موردنظر (شکل زیر) برابر می‌شود با $d_{\min} = 4 - 3 = 1$.



مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S = 2(a \times a\sqrt{2} + a \times a + 2 \times \frac{a^2}{2}) = 2(a^2\sqrt{2} + 2a^2) = a^2(4 + 2\sqrt{2})$$



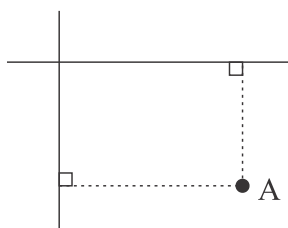
فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خطی با معادله استاندارد $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مختصات نقطه $A(8, 5)$ در ضابطه هیچیک از دو خط صدق نمی‌کند.

$$2(5) + 8 \neq 6 \quad , \quad 2(8) - 5 \neq 7$$

بنابراین نقطه A روی دو خط قرار ندارد و نقطه برخورد دو خط، رأس روبه‌رو به رأس A خواهد بود. اکنون با محاسبه فاصله نقطه A از هریک از خطوط، می‌توان طول و عرض مستطیل را به دست آورد.



$$2y + x = 6 \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$

$$d_1 = \frac{|2(5) + 8 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

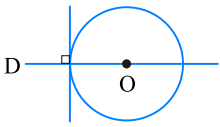
$$2x - y = 7 \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$$

$$d_2 = \frac{|2(8) - 5 - 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین $d_1 = \frac{12}{\sqrt{5}}$ طول مستطیل و $d_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ عرض مستطیل است و مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$S_{\text{مستطیل}} = d_1 \times d_2 = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

باتوجه به آنکه خط به معادله $3x + 2y = a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس این خط قائم بر دایره بوده و در نتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند.



پس مختصات مرکز دایره در معادله خط صدق می‌کند:

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1, -\frac{1}{2})$$

$$3(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = 2$$

طبق تعریف دایره، فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله نقطه $(a, 2a)$ از هر یک از نقاط $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ ، ابتدا مقدار a و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} \\ R &= \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-2)^2 + (2a-1)^2 = (a+1)^2 + (2a-4)^2 \\ &\Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 16a + 16 \\ &\Rightarrow -8a + 5 = -14a + 17 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ &\Rightarrow R = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{3^2} = 3 \end{aligned}$$

پس دایره‌ای به مرکز $(2, 4)$ و شعاع ۳ داریم.

یک ریشه را α و ریشه دیگر را $\frac{\alpha}{2} + 5$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه مجموع ریشه‌ها مقدار α و با استفاده از رابطه حاصل ضرب ریشه‌ها m را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x^2 - \lambda x + m = 0 &\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه‌های } (\frac{\alpha}{2} + 5) \text{ و } \alpha} \alpha + \frac{\alpha}{2} + 5 = -(-\frac{\lambda}{1}) = \lambda \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} + 5 = \lambda \\ &\Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

مقدار m را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha(\frac{\alpha}{2} + 5) = \frac{m}{1} = m \Rightarrow 2(1 + 5) = m \Rightarrow m = 2 \times 6 = 12$$

گام اول

الف) معادله استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.
 ب) معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

گام دوم

باتوجه به معادله گسترده نوشته شده در گام اول، ضریب x^2 و y^2 باید با هم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به گونه‌ای می‌یابیم که ضریب x^2 و y^2 با هم برابر شوند؛ در نتیجه:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

از طرفی معادله این دایره را باید بتوان به صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +3$ و $a = -3$ را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = 3 : 2x^2 + (9 - 7)y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

رابطه به دست آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -3 : 2x^2 + (9 - 7)y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) - 5 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$$

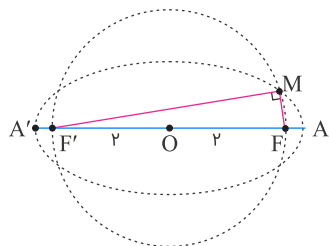
به ازای $a = -3$ ، معادله دایره‌ای به مرکز $(0, -1)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ داریم.

باتوجه به معلومات سؤال، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ \text{طول قطر کوچک} = 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} c = 2$$

پس $OF = OF' = 2$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F' و F روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویه $F'MF'$ محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\triangle MF'F : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2 = 16$$



اگر زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کند x ساعت فرض شود، آنگاه زمانی که فرهاد برای تایپ مجله صرف می‌کند $x + 9$ ساعت خواهد بود.

بهر روز در یک ساعت $\frac{1}{x}$ کل کار را انجام می‌دهد و فرهاد در یک ساعت $\frac{1}{x+9}$ کل کار و هر دو باهم در یک ساعت $\frac{1}{20}$ کل کار را انجام می‌دهند.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} &= \frac{1}{20} \xrightarrow{\times 20x(x+9)} 20(x+9) + 20x = x(x+9) \\ \Rightarrow 20x + 180 + 20x &= x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0 \\ \Rightarrow (x - 36)(x + 5) &= 0 \xrightarrow{x > 0} x = 36 \end{aligned}$$

روش اول:

گام اول

وقتی منحنی یک تابع درجه دو بر یک خط مماس باشد، معادله تلاقی خط و منحنی ریشه مضاعف دارد. پس معادله خط و منحنی را تلاقی داده، آن را به یک معادله درجه دو استاندارد تبدیل می کنیم و سپس Δ را برابر صفر قرار می دهیم.

گام دوم

$$-x^2 + bx + 3 = 7 \Rightarrow -x^2 + bx - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - bx + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

به ازای هر کدام از مقادیر b ، نقطه تماس خط و منحنی را تعیین می کنیم:

$$b = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y=7} A(2, 7)$$

$$b = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{y=7} A(-2, 7)$$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = |2 - (-2)| = 4$$

روش دوم:

بر اساس صورت مسئله، تابع $f(x) = -x^2 + bx + 3$ در نقطه $x = \frac{b}{2}$ یک ماکزیمم دارد و چون بر خط $y = 7$ مماس است پس $f\left(\frac{b}{2}\right) = 7$.

فاصله دو نقطه تماس همان فاصله بین ماکزیمم توابع به معادله $y = -x^2 + bx + 3$ است (دو مقدار برای b داریم).

$$f\left(\frac{b}{2}\right) = 7 \Rightarrow -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + 3 = 7 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = 4 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

ماکزیمم دو تابع به معادله $y = -x^2 + 4x + 3$ و $y = -x^2 - 4x + 3$ ، به ترتیب نقاط $(2, 7)$ و $(-2, 7)$ است که فاصله بین آن ها برابر است با:

$$|+2 - (-2)| = +4$$

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
 ب) اگر معادله گسترده دایره‌ای را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن برابر با $R = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c}$ است.
 ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه به گام اول، مرکز این دایره نقطه $(1, -2)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - a} = \sqrt{1 + 4 - a} = \sqrt{5 - a}$$

از طرفی فاصله نقطه $(1, -2)$ از خط $x + 3y = 0$ برابر است با:

$$R = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{5 - a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 5 - a = \frac{25}{10} \Rightarrow 50 - 10a = 25$$

$$\Rightarrow 10a = 25 \Rightarrow a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

روش دوم:

باتوجه به قسمت (ج) از گام اول، باید معادله تلاقی خط و دایره، ریشه مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \quad (I)$$

با جایگذاری رابطه I در معادله دایره، به یک معادله درجه دو بر حسب y می‌رسیم که ریشه مضاعف دارد.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \xrightarrow{I} (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0$$

$$\Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a = 0 \Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 100 - 4(10)a = 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow 40a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a$$

$$\begin{cases} 2 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3} \\ 2a^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow 2a(a + 2) \geq 0 \Rightarrow a \in [0, +\infty) \cup (-\infty, -2] \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-\infty, -2] \cup [0, \frac{2}{3}]$$

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان } 2} 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2 \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \times 7 \times 4 = 16(16 - 7) = 16 \times 9$$

$$a = \frac{16 \pm 12}{14} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{16 + 12}{14} = 2 \\ a_2 = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

بنابراین $a = \frac{2}{7}$ قابل قبول است.

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

در مسیر رفت و برگشت، به خاطر حرکت آب رودخانه به اندازه سرعت آب (v) از سرعت قایق کم و به آن اضافه می‌شود، پس زمان رفت $\frac{1200}{100+v}$ و زمان برگشت $\frac{1200}{100-v}$ است و اختلاف آن‌ها باید ۵ باشد.

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \xrightarrow{\div 5} 240 \left(\frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{240 \times 2v}{(100-v)(100+v)} = 1 \Rightarrow 100^2 - v^2 = 480v$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \Rightarrow (v - 20)(v + 500) = 0 \xrightarrow{v > 0} v = 20$$

فاصله کانون‌های $F(2, 7)$ و $F'(2, -1)$ برابر $2c$ است.

$$2c = |FF'| = |7 - (-1)| = 8 \Rightarrow c = 4$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

در بیضی رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

$$a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

گام اول

الف) اگر ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، برابر با $\frac{2}{\alpha}$ و $\frac{2}{\beta}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادله دوم مشخص می‌کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشند. داریم:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{7}{4} \\ \alpha\beta = \frac{3}{4} \end{cases} \quad (I)$$

برای تعیین مقدار a باید حاصل جمع ریشه‌های معادله دوم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} 3x^2 + ax + b = 0 &\xrightarrow{\text{ریشه‌ها } \frac{2}{\alpha} \text{ و } \frac{2}{\beta}} \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = -\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{3} \\ \Rightarrow \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{3} &\xrightarrow{(I)} \frac{2(\frac{7}{4})}{\frac{3}{4}} = -\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = -14 \end{aligned}$$

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
ب) معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

گام دوم

طبق قسمت الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصله نقطه $(2, 0)$ از خط $y = x$. پس داریم:

$$y = x \Rightarrow -x + y = 0$$

$$R = \frac{|-2 + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

معادله این دایره به صورت زیر است:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2$$

اکنون نقطه تلاقی دایره با خط $y = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x - 2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس این دایره، خط $y = 1$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادله $y = 2x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha, 2\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله مرکز دایره از هریک از نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} \\ R &= \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} \Delta\alpha^2 = (\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1)^2 \Rightarrow \Delta\alpha^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha^2 = \Delta\alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(1, 2)$ و شعاع $\sqrt{5}$ داریم.

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = \lambda \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - \lambda = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{6}{2}\right) \Rightarrow O_1(1, -3)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \lambda} = \sqrt{1 + 9 + \lambda} = \sqrt{10 + \lambda} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + \lambda x - 4y + 12 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{-4}{2}\right) \Rightarrow O_2\left(-\frac{\lambda}{2}, 2\right)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 12} = \sqrt{16 + 4 - 12} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-\frac{\lambda}{2} - 1)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

چون $O_1O_2 = R_1 + R_2$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

گام اول

الف) نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.
 ب) هر دو ریشه معادله منفی است، بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.
 ج) مجموعه مقادیر قابل قبول برای a ، اشتراک بین سه مجموعه جواب به دست آمده است.

گام دوم

$$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) > 0 \Rightarrow (a+3)^2 + 4a > 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1 \quad (\text{I})$$

$$۲) S = x_1 + x_2 = -\frac{a+3}{a} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{a} > 0 \Rightarrow a < -3 \text{ یا } a > 0 \quad (\text{II})$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (\text{III})$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای a عبارت است از:

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \cap (\text{III}) : a < -9$$

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(-2, 0)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره خط AB وترى از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x = 0$ عمودمنصف پاره خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطه $O(0, \alpha)$ مرکز دایره است. فاصله مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y = 1$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R = OA = \sqrt{(2-0)^2 + (0-\alpha)^2} = \sqrt{4 + \alpha^2}$$

$$y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{1^2}} = |\alpha - 1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + \alpha^2} = |\alpha - 1| \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4 + \alpha^2 = (\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow 4 + \alpha^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 \Rightarrow -2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = |\alpha - 1| = \left| -\frac{3}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.
ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطه $(-2, 1)$ عبور می‌کند و باتوجه به قسمت الف) از گام اول، نقطه $(-2, 1)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت ب) از گام اول، فاصله نقطه $(-2, 1)$ از خط $y = x - 1$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y = x - 1 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

$$R = \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله $x - y = 2$ قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را به صورت $\omega(\beta + 2, \beta)$ در نظر بگیریم. فاصله مرکز دایره از هر نقطه دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ بر این دایره واقع‌اند، پس:

$$R = \omega A = \omega B$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(\beta + 2 - 0)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{(\beta + 2 - 3)^2 + (\beta - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\beta + 2)^2 + (\beta - 1)^2 = (\beta - 1)^2 + \beta^2 \Rightarrow (\beta + 2)^2 = \beta^2$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 = \beta^2 \Rightarrow 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5}$$

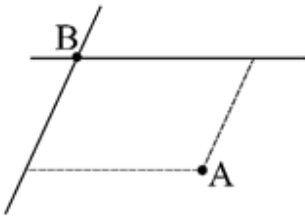
اگر M ، نقطهٔ وسط دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد آنگاه داریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

مختصات نقطهٔ $A(7, 6)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند:

$$2(6) - 3(7) \neq 11 \quad , \quad 3(6) + 4(7) \neq 8$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو خط قطعاً رأس روبه‌رو به رأس A در متوازی‌الاضلاع است.



مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

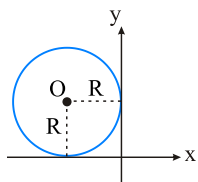
$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y - 12x = 44 \\ 9y + 12x = 24 \end{cases} \xrightarrow{+} 17y = 68 \Rightarrow y = 4$$

$$2y - 3x = 11 \xrightarrow{y=4} 8 - 3x = 11 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 4)$$

اکنون باتوجه به گام اول، مختصات وسط قطر AB برابر است با:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{7 + (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned} \Rightarrow M(3, 5)$$

باتوجه به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به طور کامل در یکی از چهار ناحیه مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیه دوم قرار دارد، پس دایره مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R, R)$ داریم. معادله این دایره برابر است با:

$$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند:

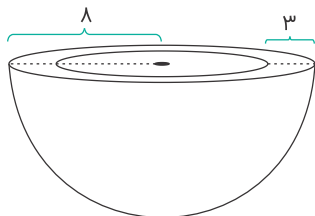
$$\xrightarrow{x=-1, y=2} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R - 5)(R - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R - 5 = 0 \Rightarrow R = 5 \\ R - 1 = 0 \Rightarrow R = 1 \end{cases}$$

قطر بزرگتر به ازای شعاع بزرگتر به دست می‌آید که برابر است با:

$$2R = 2(5) = 10$$

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبه سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیمکره درونی، نیمکره بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایره دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکره بیرونی}} = \frac{1}{2} (4\pi \times 64) = 2\pi \times 64 = 128\pi$$

$$S_{\text{نیمکره درونی}} = \frac{1}{2} (4\pi \times 25) = 2\pi \times 25 = 50\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(64 - 25) = 39\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکره بیرونی}} + S_{\text{نیمکره درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = 128\pi + 50\pi + 39\pi = 217\pi$$

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادله تلاقی آنها در آن نقطه ریشه مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^2 + y^2 - 2x = 3 \xrightarrow{y=mx+2} x^2 + (mx+2)^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 4mx + 4 - 2x = 3$$

$$\Rightarrow (m^2 + 1)x^2 + (4m - 2)x + 1 = 0$$

این معادله باید ریشه مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (4m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(1) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 - 4m^2 - 4 = 0$$

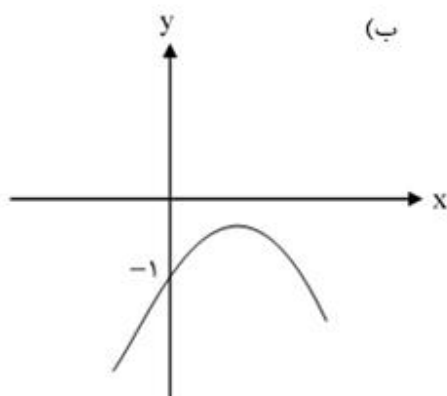
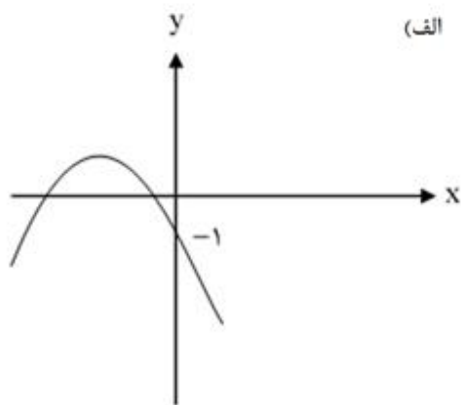
$$\Rightarrow 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m(12m - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 12m - 16 = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیه اول عبور نکند این است که ضریب x^2 یا همان a منفی باشد. که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

روش اول:

تابع صورت سؤال را می توان در دو حالت زیر فرض کرد:



$$f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -1$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > 0, S < 0, \Delta > 0$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq 0$ باشد.

برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (\text{I})$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{a}{a - 3} < 0 \xrightarrow{a - 3 < 0} -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (\text{II})$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \quad (\text{III})$$

(با توجه به اینکه $a - 3 < 0$ ، همواره برقرار است.)

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow a < -6$$

برای حالت (ب):

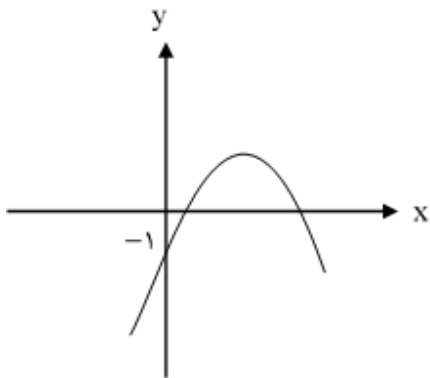
$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4(a-3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$$

چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی گذرد داریم:

$$(-\infty, -6) \cup [-6, 2] = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

روش دوم:

با توجه به اینکه $a < 3$ است حالتی را در نظر می گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به دست آمده را از $a < 3$ کم می کنیم. چون عرض از مبدأ -1 است و $a < 3$ پس تابع ما کزیمم دارد.



و با توجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow \text{باید دو ریشه داشته باشد}$$

$$2) > 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه ها}$$

$$3) > 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه ها}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+6) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (\text{I})$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 \quad (\text{II})$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a < 3 \quad (\text{III})$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow 2 < a < 3$$

به ازای بازه به دست آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می کند. پس با کم کردن این بازه از $a < 3$ خواسته سؤال محقق می شود.

$$(-\infty, -3) - (2, 3) = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

گزینه ۲

۴۶

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه $(2, 1)$ ، $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{(2,1)} 2^2 + 1^2 + a(2) + b(1) + c = 0 \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \Rightarrow 2a + b + c = -5 \quad (\text{I})$$

$$\xrightarrow{(-2,4)} (-2)^2 + 4^2 + a(-2) + b(4) + c = 0 \Rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b + c = 0 \Rightarrow -2a + 4b + c = -20 \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{(0,0)} 0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (\text{III})$$

با جایگذاری $c = 0$ در دو معادله I و II، به یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = -25 \Rightarrow b = -5$$

$$2a + b = -5 \xrightarrow{b=-5} 2a - 5 = -5 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

اکنون با توجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$a_1, 2a_5, a_8$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی‌اند، پس:

$$\begin{aligned} 2a_5 &= \frac{a_1 + a_8}{2} \\ \Rightarrow 2a_1q^4 &= \frac{a_1 + a_1q^7}{2} \Rightarrow 4q^4 = 1 + q^7 \\ \Rightarrow q^7 - 4q^4 + 1 &= 0 \xrightarrow{q^4=t} t^2 - 4t + 1 = 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^4 = 2 \pm \sqrt{3} \\ \Rightarrow q &= \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt[4]{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جمله هشتم بزرگ‌ترین جمله است و در نتیجه $q = \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}$ ، پس:

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{a_1q^7}{a_1q} = q^6 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

(الف) معادله درجه چهار را با تغییر متغیر $x^2 = y$ به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.
 (ب) اگر قرار باشد معادله درجه چهار داده‌شده دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، باید برای معادله درجه دو تشکیل شده داشته باشیم $\Delta > 0$.
 (ج) نکته دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل ضرب و هم حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است.

$$\begin{aligned} x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 &= 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - (m+2)y + m + 5 = 0 \\ \Delta > 0 &\Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0 \\ \Rightarrow m^2 - 16 > 0 &\Rightarrow m^2 > 16 \Rightarrow |m| > 4 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$-\left(-\frac{(m+2)}{1}\right) > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad \text{(II)}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها نیز مثبت است، پس:

$$\frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m+5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad \text{(III)}$$

برای اینکه هر سه شرط فوق برقرار باشد، بین مجموعه جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : m > 4$$

گام اول

فاصله دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c'' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c''|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$2x - 2y = 3 \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{-2} = +1$$

$$y = x + 1 \Rightarrow m_2 = +1$$

دو خط داده شده باهم موازی‌اند؛ بنابراین فاصله این دو خط از هم برابر با طول ضلع مربع خواهد بود. برای محاسبه فاصله میان دو خط موازی، لازم است معادلات دو خط را به فرم استاندارد بنویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.



$$2x - 2y = 3 \Rightarrow 2x - 2y - 3 = 0 \xrightarrow{\div (-2)} -x + y + \frac{3}{2} = 0$$

$$y = x + 1 \Rightarrow y - x - 1 = 0$$

$$d = \frac{\left| \frac{3}{2} - (-1) \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\left| \frac{3}{2} + 1 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

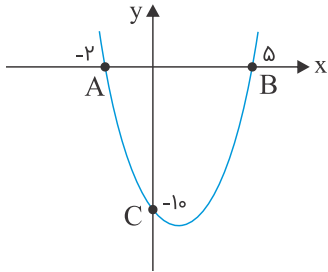
$$S_{\text{مربع}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \times \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{25}{4 \times 2} = \frac{25}{8}$$

$$y = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow y = (x - 5)(x + 2)$$

$$\xrightarrow{y=0} x = -2, x = 5$$

باتوجه به صفرهای تابع، نمودار تابع محور x را در نقاط $A(-2, 0)$ و $B(5, 0)$ قطع می‌کند. همچنین محور y را در نقطه $C(0, -10)$ قطع می‌کند.

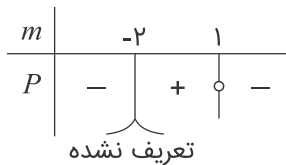
همچنین به علت مثبت بودن ضریب x^2 ، دهانه این سهمی روبه بالا باز می‌شود؛ بنابراین نمودار آن به شکل زیر است:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای آنکه طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور x ها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به سمت x های مثبت انتقال دهیم.

این منحنی باید دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد؛ در نتیجه کافی است حاصل ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0$$



$$\Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، $\Delta > 0$ می‌شود.

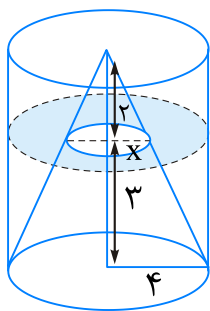
ابتدا معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 - 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow O_1 : (1, -2), R_1 = 2$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصله مراکز آنها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آنها است.

$$O_1 O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2} = 2 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + R_2 \Rightarrow R_2 = 3$$



$$\text{نسبت تشابه: } \frac{x}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$S = \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{5}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336}{25}\pi = 13\frac{16}{25}\pi$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (0,0)} c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (2,1)} 4 + 1 + 2a + b = 0$$

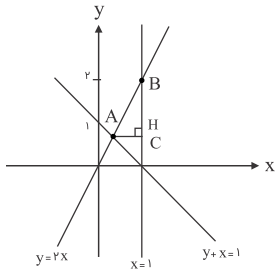
$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (1,-2)} 1 + 4 + a - 2b = 0$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a ، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow 6a = -15 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}, b = 1$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (1)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

با رسم خطوط در یک دستگاه، مطابق شکل کوچکترین ارتفاع مثلث ABC پاره خط AH است.



مختصات نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین کوچکترین ارتفاع مثلث یعنی AH روی خط $y = \frac{2}{3}$ قرار دارد.

فاصله نقطه A را از خط راست به دست می‌آوریم. فاصله به دست آمده نصف اندازه ضلع مربع است.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{2 + 3 + 5}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2d = \frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow s = a^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = 80$$

سه رأس داده شده مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{2}{2} \\ m_{BC} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$S = \frac{(AC) \times (BC)}{2} \xrightarrow{AC=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}, BC=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}} S = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = 6/5$$

گام اول

الف) دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمودند، هرگاه داشته باشیم:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ب) شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ج) شیب خطی با معادله استاندارد $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$m = -\frac{a}{b}$$

گام دوم

شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(8, 3)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{3 + 1}{6} = \frac{2}{3}$$

شیب خط انتخاب شده از میان دسته خطوط با معادله $(k + 1)y + 2kx - k + 1 = 0$ برابر است با:

$$m' = -\frac{2k}{k + 1}$$

این دو خط بر هم عمود هستند، بنابراین طبق قسمت الف) از گام اول، باید داشته باشیم:

$$m_{AB} \cdot m' = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \left(-\frac{2k}{k + 1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{-4k}{3k + 3} = -1 \Rightarrow -4k = -3k - 3$$

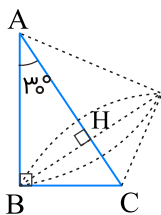
$$\Rightarrow k = 3$$

به ازای $k = 3$ ، معادله خط انتخاب شده به دست می‌آید.

$$(k + 1)y + 2kx - k + 1 = 0 \xrightarrow{k=3} 4y + 6x - 3 + 1 = 0 \Rightarrow 4y + 6x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(2y + 3x - 1) = 0 \Rightarrow 2y + 3x - 1 = 0 \Rightarrow 2y + 3x = 1$$

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC حول وتر AC ، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH) ، شعاع قاعده این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = \lambda \Rightarrow BC = \frac{1}{2} \times \lambda = 4$$

$$BC^2 = AC \cdot CH \Rightarrow 16 = \lambda \times CH$$

$$\Rightarrow CH = 2 \Rightarrow AH = \lambda - 2 = 6$$

$$BH^2 = AH \cdot CH = 2 \times 6 = 12$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

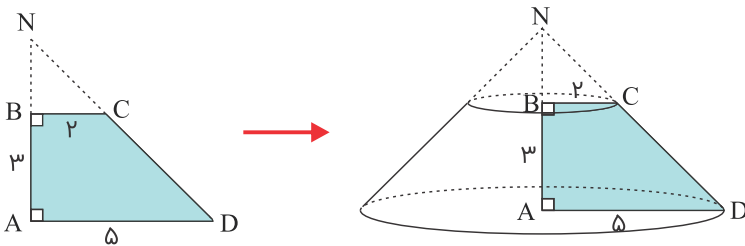
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi (BH)^2 \times AH + \frac{1}{3} \pi (BH)^2 \times CH \\ &= \frac{\pi}{3} \times 12 \times 6 + \frac{\pi}{3} \times 12 \times 2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \end{aligned}$$

گام اول

الف) در یک دوزنقه قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.
 ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.
 ج) حجم مخروط از رابطه $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

دوزنقه $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $\triangle NAD$ قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبه حجم حاصل از دوران دوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle NBC$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle NAD$ حول ضلع NA کم کنیم.



باتوجه به اینکه $BC \parallel AD$ است، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN + 3} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5BN = 2BN + 6 \Rightarrow 3BN = 6 \Rightarrow BN = 2$$

بنابراین:

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } \triangle NAD} - V_{\text{دوران مثلث } \triangle NBC}$$

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 5 - \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 2 = \frac{1}{3}\pi(125 - 8) = \frac{117}{3}\pi = 39\pi$$

گزینه ۲

باتوجه به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکته ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکته ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین باتوجه به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{3}{4}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(2)^2 \times 5 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 20\pi - \frac{9}{4}\pi = 15\frac{1}{4}\pi$$

برای حل معادله داده شده از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$x^2 + 4x + 3 = t$$

حالا معادله جدید بر حسب t به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 3 + 2} \Rightarrow t = \sqrt{t + 2}$$

با حل معادله به دست آمده، مقدار t و در ادامه حاصل ضرب ریشه‌های معادله اصلی را محاسبه می‌کنیم.

$$t = \sqrt{t + 2} \xrightarrow{\text{به توان } 2} t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 2)(t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \\ t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

اکنون معادله اصلی را حل می‌کنیم:

$$t = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 1$$

$t = -1$ غیرقابل قبول است. چون حاصل رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد.

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^2 + x = t$ ، معادله داده شده را به یک معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = t} t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 12)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 12 = 0 \Rightarrow t = 12 \\ t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله اولیه برابر است با:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 + 3 - 3 + 2 = -2$$

گام اول

الف) دایره محور x ها را در دو نقطه به طول $x = ۳$ و $x = ۱$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A(۱, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ روی دایره مورد نظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصله آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \alpha^2}$$

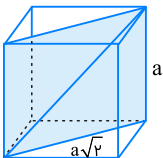
$$\xrightarrow{\text{به توان } ۲} (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $O(2, 2)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(2 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

همان طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحه قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{2}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازه a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a(a\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{3}$ است (با دو بار استفاده از قضیه فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

گام اول

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، باید رابطه $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2$ برقرار باشد.

گام دوم

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \quad S = \frac{m+1}{2}, \quad P = \frac{1}{16}$$

$$A = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{1}{2}} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m+1 = 7 \Rightarrow m = 6$$

گام اول

شرط اینکه معادله درجه دو دارای ۲ ریشه مثبت باشد، این است که:

$$۱) \Delta > 0 \quad ۲) S > 0 \quad ۳) P > 0$$

گام دوم

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4(a-2)^2 - 4(1)(14-a) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} (a-2)^2 - (14-a) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 14 + a > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 \quad (۱)$$

$$S > 0 \Rightarrow 2(a-2) > 0 \Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (۲)$$

$$P > 0 \Rightarrow 14-a > 0 \Rightarrow a < 14 \quad (۳)$$

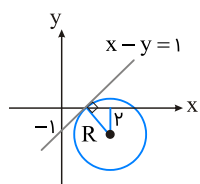
$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) : 5 < a < 14$$

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصله یک نقطه با مختصات (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

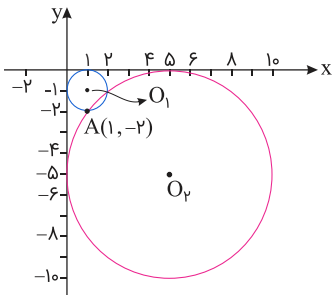
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$



$$\text{معادله دایره: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



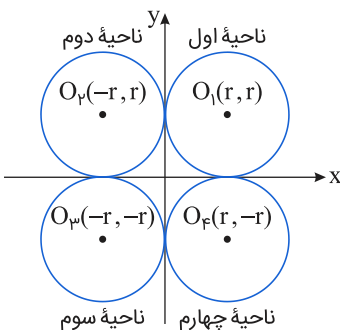
شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطه $A(1, -2)$ می‌گذرند. به علاوه مرکز دایره‌ها به صورت $O(r, -r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورهای برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r, -r)$ و شعاع r هستند. معادله آن‌ها به این صورت است:

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2 \xrightarrow{(1, -2)} (1 - r)^2 + (-2 + r)^2 = r^2$$

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)(r - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 5 \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم. نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به صورت زیر است:

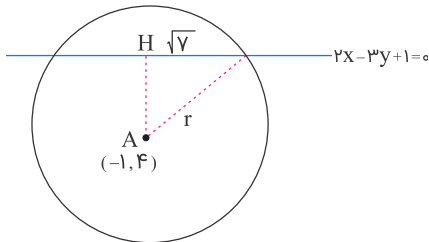


$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 &= 4x^2 + 4y^2 \\ \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 &= 0 \\ \xrightarrow{\div 3} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 &= 0 \\ \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 &= 20 \Rightarrow O(-1, -2) \end{aligned}$$

معادله فوق، معادله یک دایره است که بزرگترین وتر همان قطر است:

$$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2r = 4\sqrt{5}$$

فاصله مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^2 = AH^2 + \sqrt{V}^2 \Rightarrow r^2 = 13 + 7 = 20$$

معادله دایره را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-4)^2 &= 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

شرط آنکه معادله درجه دومی، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta > 0$ ، $S = \frac{-b}{a} > 0$ و $P = \frac{c}{a} > 0$ باشند.

$$x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m-2)}{1} > 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1$$

از اشتراک دو شرط بالا $-1 < m < 2$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نیست ولی ما شرط $\Delta > 0$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 8 \\ \text{یا} \\ m < 0 \end{cases}$$

از اشتراک $-1 < m < 2$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-1 < m < 0$

با فرض $x^2 - 2x = t$ داریم:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشه حقیقی دارد.

ابتدا از روی معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ، حاصل $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم. سپس حاصل $1 + \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta}$ و $(\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1)$ را محاسبه می کنیم. اگر P و S مقادیر حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله درجه دو باشند، آن معادله درجه دو به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته می شود.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

S و P را برای معادله جدید به دست می آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی آید:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

ابتدا معادله $x(\omega x + 3) = 2$ را به فرم استاندارد معادله درجه دو تبدیل کرده و باتوجه به اینکه α و β ریشه های آن است، مقدار $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم. برای یافتن k باید حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ را محاسبه کرده و برابر $\frac{k}{4}$ قرار دهیم.

$$x(\omega x + 3) = 2 \Rightarrow \omega x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{3}{\omega} \\ \alpha\beta = -\frac{2}{\omega} \end{cases}$$

مقدار k را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} 4x^2 - kx + 2\omega &= 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \frac{1}{\alpha^2} \text{ و } \frac{1}{\beta^2}} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{(-\frac{3}{\omega})^2 - 2(-\frac{2}{\omega})}{(-\frac{2}{\omega})^2} &= \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{\frac{9}{\omega^2} + \frac{4}{\omega}}{\frac{4}{\omega^2}} = \frac{29}{4} = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3a+16} = 1-2a &\xrightarrow{\text{توان } 2} 3a+16 = 1-4a+4a^2 \\ \Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 &\Rightarrow (4a+5)(a-3) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} 1-2a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2} \\ 3a+16 \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{16}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} a \in \left[-\frac{16}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

پس $a = 3$ در معادله اولیه صدق نمی‌کند، بنابراین $a = -\frac{5}{4}$ است.

$$4a+9 = 4\left(-\frac{5}{4}\right)+9 = -5+9 = 4$$

فرض کنید سرعت پرواز پرورنده v باشد. در این صورت سرعت رفت $v+5$ و سرعت برگشت $v-5$ خواهد بود و داریم:

$$\begin{aligned} t_1 = \frac{x_1}{v_1} &\Rightarrow t_1 = \frac{1}{5+v} \\ t_2 = \frac{x_2}{v_2} &\Rightarrow t_2 = \frac{1}{v-5} \end{aligned}$$

$$t_1 + t_2 = 9 \text{ (min)} = \frac{9}{60} \text{ (h)} \Rightarrow \frac{9}{60} = \frac{1}{5+v} + \frac{1}{v-5}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{1}{5+v} + \frac{1}{v-5} \xrightarrow{\times 20(v^2-25)} 3(v^2-25) = 20(v-5) + 20(v+5)$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 75 = 20v - 100 + 20v + 100$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \Rightarrow (3v+5)(v-15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 15 & \checkmark \\ v = -\frac{5}{3} & \times \end{cases}$$

گام اول

وقتی گفته می شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ در می آوریم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان شده را بررسی می کنیم.

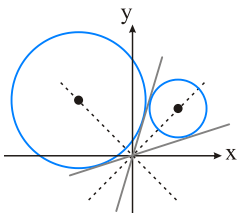
$$mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \xrightarrow{x_1 \text{ و } x_2 \text{ ریشه ها}} x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{m} = 1$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \\ m = -1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > 0$ فقط $m = -1$ جواب قابل قبول است.

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد. باتوجه به شکل، مرکز دایره کوچکتر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگتر روی $y = -x$ قرار دارد.



$$M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$$

شعاع دایره برابر با فاصله مرکز آن از خط $2y - x = 0$ است.

$$R = \frac{|4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$

مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول است، پس مختصات آن به صورت (x, x) است. فاصله مرکز دایره از نقطه $A(6, 3)$ و خط $y = 2x$ یکسان است، پس داریم:

$$\sqrt{(x-6)^2 + (x-3)^2} = \frac{|2x-x|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow (x-6)^2 + (x-3)^2 = \frac{x^2}{5} \Rightarrow 2x^2 - 18x + 45 = \frac{x^2}{5}$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 90x + 225 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{شعاع دایره: } R = \frac{|x|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

چون دایره بر دو خط موازی $y = 2x$ و $y = 2x + 10$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y = 2x + 5$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصله این دو خط است.

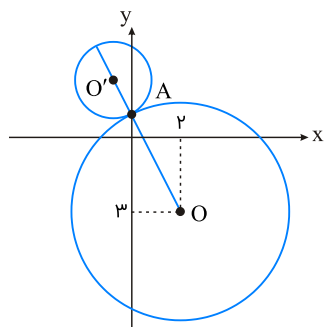
$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|10-0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصله مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

$$R = \sqrt{x^2 + (2x+5)^2} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{5x^2 + 20x + 25}$$

$$\Rightarrow 5(x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2(-2) + 5 = 1$$

$$\text{مرکز دایره} = (-2, 1)$$



مطابق شکل، مراکز دو دایره مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایره C' در ناحیه دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (2, -3)$ و $A = (0, 1)$ داریم:

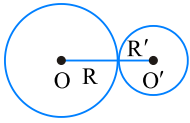
$$m_{OA} = \frac{1 - (-3)}{0 - 2} = -2$$

$$OA \text{ خط معادله } : y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطه $(-1, 3)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات است و در معادله خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-1, 3)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(0 + 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} O = (-2, 0) \\ R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + a = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 17 - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (1, -2) \\ R' = \sqrt{17 - a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 + 2)^2} = 5 \\ R + R' = 2 + \sqrt{17 - a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'| = R + R'} \Delta = 2 + \sqrt{17 - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17 - a} = 3 \Rightarrow 17 - a = 9 \Rightarrow a = 8$$

شعاع و مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ عبارت‌اند از:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

$$\text{مرکز: } O'(2, -1), \text{ شعاع: } R' = 3$$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایره C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(8, 7)$ مرکز دایره C است.

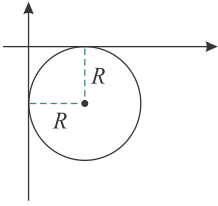
$$d = OO' = \sqrt{(2 - 8)^2 + (-1 - 7)^2} = 10$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow 10 = R + 3 \Rightarrow R = 7$$

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطه $(2, -9)$ نیز عبور کند به صورت زیر است:



ب) معادله دایره‌ای به مرکز (x_0, y_0) و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادله این دایره برابر است با:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

چون هر دو دایره از نقطه $(2, -9)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادله آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

$$\xrightarrow{x=2, y=-9} (2 - R)^2 + (-9 + R)^2 = R^2 \Rightarrow 4 - 4R + R^2 + 81 - 18R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 22R + 85 = 0 \Rightarrow (R - 17)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 17 \\ R = 5 \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.

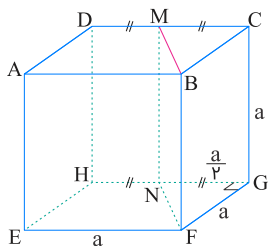
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های AE, FG, EF, BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از AB و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ M را به نقطهٔ N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN \parallel BF$ و در نتیجه صفحهٔ گذرنده از M و N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را V_1 ، حجم بزرگ‌تر را V_2 و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^3$$

$$V_1 = S_{\triangle GFN} \times CG = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{3a^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$$



گام اول

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام دوم

نقطهٔ فرضی $A(\alpha, \alpha - 1)$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ A از خط به معادلهٔ $2x - 3y = 5$ برابر با $\sqrt{13}$ باشد؛ بنابراین طبق گام اول داریم:

$$2x - 3y = 5 \Rightarrow 2x - 3y - 5 = 0$$

$$\sqrt{13} = \frac{|2\alpha - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \Rightarrow \sqrt{13} = \frac{|2\alpha - 3\alpha + 3 - 5|}{\sqrt{13}}$$

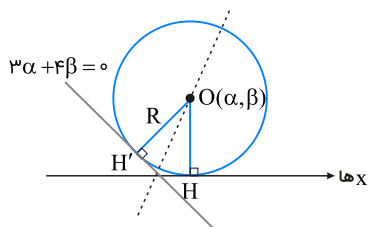
$$\Rightarrow 13 = |-\alpha - 2| \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2 = -13 \Rightarrow \alpha = 11 \\ -\alpha - 2 = 13 \Rightarrow \alpha = -15 \end{cases}$$

بنابراین دو نقطه روی خط $y = x - 1$ که فاصلهٔ آن‌ها از خط $2x - 3y = 5$ برابر با $\sqrt{13}$ باشد، دارای طول ۱۱ و ۱۵ است.

مرکز دایره را نقطه $O(\alpha, \beta)$ در نظر می‌گیریم. باید فاصله O از محور x ها با فاصله آن از خط $3x + 4y = 0$ برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|3\alpha + 4\beta|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3a + 4\beta|}{5} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 5\beta \\ 3\alpha + 4\beta = -5\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = \beta \\ 3\alpha = -9\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O(\alpha, 3\alpha) \\ \text{مرکز: } O(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیه اول است، پس فقط $O(\alpha, 3\alpha)$ قابل قبول است؛ بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = 3 \Rightarrow \beta = 3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$$

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{A(-1,0)} (-1)^2 + 0^2 + a(-1) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0 \Rightarrow a - c = 1 \quad (\text{I})$$

$$\xrightarrow{B(3,0)} 3^2 + 0^2 + a(3) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \Rightarrow 3a + c = -9 \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{C(0,-3)} 0^2 + (-3)^2 + a(0) + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow c - 3b = -9 \quad (\text{III})$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادله I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 3a + c = -9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a - c = 1 \xrightarrow{a=-2} c = -2 - 1 = -3$$

با جایگذاری $c = -3$ در معادله (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - 3b = -9 \xrightarrow{c=-3} -3 - 3b = -9 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

اکنون با توجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_1(1, -2)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 13} = \sqrt{1 + 4 + 13} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{2}{2}, -\frac{0}{2}\right) \Rightarrow O_2(-1, 0)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 0 + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$|R_1 - R_2| = |3\sqrt{2} - \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_1(2, -2)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-1)} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{8}{2}\right) \Rightarrow O_2(2, -4)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 19} = \sqrt{4 + 16 - 19} = 1$$

طول خط‌المركزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{0 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

همچنین داریم:

$$|R_1 - R_2| = |3 - 1| = 2$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

برای اینکه تابع دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(m - 6)(-3) > 0$$

$$4m^2 + 4(3m - 18) > 0$$

$$m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m + 6)(m - 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ \text{یا} \\ m < -6 \end{cases}$$

$$۲) -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m - 6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6$$

$$۳) \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m - 6} > 0 \Rightarrow m - 6 < 0 \Rightarrow m < 6$$

اشتراک جواب‌ها: $3 < m < 6$

فرض کنید x مقدار تخییر برحسب کیلوگرم باشد. ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

$$\text{کیلوگرم رنگ خالص} = 11 \times 40\% + 4 \times 70\% = 7/2$$

بنابراین در $15 = 11 + 4$ کیلوگرم رنگ موجود، $7/2$ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر x میزان تخییر باشد، آنگاه:

$$\frac{7/2}{15 - x} = 50\% = \frac{50}{100}$$

$$\Rightarrow 720 = 750 - 50x \Rightarrow x = 0/6 \text{ کیلوگرم}$$

گام اول

ریشه‌های معادله موردنظر از معکوس ریشه‌های معادله داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله موردنظر به صورت $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ است، لذا:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} - 2 = -5$$

$$P' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1$$

$$= \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} + 1 = 2$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

گام اول

اگر تابع درجه دو دارای ماکسیمم باشد، باید ضریب x^2 منفی شود.

گام دوم

ضریب x^2 منفی است پس:

$$K + 3 < 0 \Rightarrow K < -3$$

عرض بیشترین مقدار تابع (عرض ماکسیمم) برابر صفر است:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4a} = 0 &\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(K+3)K = 0 \\ \Rightarrow 16 = 4(K+3)K &\Rightarrow K(K+3) = 4 \Rightarrow K^2 + 3K - 4 = 0 \\ \Rightarrow (K+4)(K-1) = 0 &\xrightarrow{K < -3} K = -4 \end{aligned}$$

البته اگر از اول نگاهی به گزینه ها می انداختیم تنها گزینه ای که $K < -3$ باشد، گزینه ۱ یعنی $k = -4$ است.

گزینه ۲

یک ریشه را α و ریشه دیگر را $3\alpha + 3$ در نظر می گیریم.

با استفاده از حاصل جمع ریشه ها مقدار α را محاسبه می کنیم. سپس با استفاده از حاصل ضرب ریشه ها مقدار m را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 17x + m = 0 &\xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (3\alpha+3) \text{ ریشه های}} \alpha + (3\alpha + 3) = -\left(-\frac{17}{3}\right) \\ \Rightarrow 4\alpha + 3 = \frac{17}{3} &\Rightarrow 4\alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \\ 3\alpha + 3 = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3 &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

پس حاصل ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha \times (3\alpha + 3) = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow m = 10$$

α و β را ریشه های معادله درجه دو فرض می کنیم. $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین α و β است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta = (\sqrt{2})^2 = 2$$

در معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه های معادله باشند، حاصل ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \alpha\beta = \frac{m^2 - 3}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=2} 2 = \frac{m^2 - 3}{m} \Rightarrow m^2 - 3 = 2m$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$m = 3: 3x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 72 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m = -1: -x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 8 > 0$$

پس فقط $m = -1$ قابل قبول است.

اگر α و β را ریشه های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ در نظر بگیریم، داریم:

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

بنابراین α^3 و β^3 ریشه های معادله درجه دوم $\lambda x^2 - mx - \lambda = 0$ می شود:

$$\lambda x^2 - mx - \lambda = 0 \Rightarrow S' = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$S' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \frac{13}{8} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow m = 13$$

اگر فرض کنیم $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \alpha^2\beta$ ریشه‌های معادله $\lambda x^2 + kx - 1 = 0$ باشند آنگاه کافی است $x_1 + x_2$ را به دست آوریم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda x^2 + kx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \frac{-k}{\lambda} \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow k = 6$$

گام اول

الف) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دو داده شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) در صورتی که $\Delta > 0$ باشد معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشه حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

گام اول

الف) فرض کنید α و β ریشه های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ باشند پس می توانیم نتیجه بگیریم که $(\alpha + 1)$ و $(\beta + 1)$ ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ هستند.
 ب) برای به دست آوردن مقدار b باید حاصل ضرب ریشه های معادله یا همان $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه ها}} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4}{3} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (I)$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{(\alpha+1) \text{ و } (\beta+1) \text{ ریشه ها}} (\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{b}{3} \xrightarrow{(I)} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6$$

گزینه ۲

گام اول

الف) ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ را α و β فرض می کنیم. بنابراین ریشه های معادله $x^2 + ax + b = 0$ به صورت $(\alpha + 1)$ و $(\beta + 1)$ می شود.
 ب) برای به دست آوردن b ، باید حاصل ضرب $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$3x^2 + 7x + 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های معادله}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{7}{3} \\ \alpha\beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{(\alpha+1) \text{ و } (\beta+1) \text{ ریشه های معادله}} (\alpha + 1)(\beta + 1) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = b \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{1}{3}, \alpha + \beta = -\frac{7}{3}} \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1 = b \Rightarrow b = -1$$

در تابع درجه دو به فرم $y = ax^2 + bx + c$ ، محور تقارن منحنی، خط $x = -\frac{b}{2a}$ است. با توجه به این نکته، مقدار a را به دست می آوریم:

$$y = (a - 1)x^2 + x + 3 \xrightarrow{x=2 \text{ محور تقارن}} x = -\frac{1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow a - 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین ضابطه تابع درجه دو به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ درمی آید. معادله $y = 0$ را حل می کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق.}$$

چون در سؤال ذکر شده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط $x = 6$ قابل قبول است.

گام اول

الف) اولاً نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می کند، پس معادله $y = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.
ب) هر دو ریشه معادله مثبت است، بنابراین حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه ها باید مثبت باشد.

گام دوم

$$y = 2x^2 - 4x + m - 3$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(2)(m - 3) > 0 \Rightarrow 16 - 8(m - 3) > 0$$

$$\Rightarrow 8(m - 3) < 16 \Rightarrow m - 3 < 2 \Rightarrow m < 5 \quad (I)$$

$$۲) S = x_1 + x_2 = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 3}{2} > 0 \Rightarrow m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3 \quad (II)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای m ، اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است پس می توان نوشت:

$$(I) \cap (II) : 3 < m < 5$$

گام اول

الف) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ معادله داده شده را به معادله درجه دو تبدیل می کنیم.
 ب) برای این که معادله اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادله جدید باید دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد (چون در این صورت یک بار \sqrt{x} برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشه مختلف علامه داشته باشد.
 ج) حالت دیگر این است که معادله اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادله جدید یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

گام دوم

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3(\sqrt{x}) + m - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

$$\text{حالت اول: } t_1 t_2 < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2 \quad (I)$$

$$\text{حالت دوم: } mt^2 - 3t + m - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 8m = 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 8m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \xrightarrow{m>0} m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \quad (II)$$

جواب سؤال اشتراک (I) و (II) است که باتوجه به گزینه ها جواب به صورت $0 < m < 2$ می شود.