



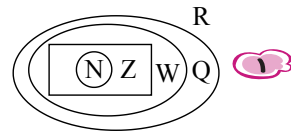
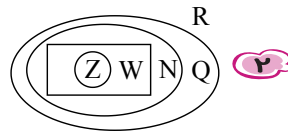
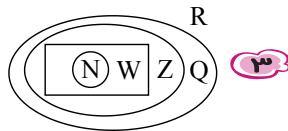
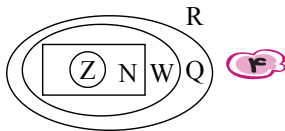
در یک انجمن تعداد افرادی که مهارت A را دارند، دو برابر افرادی است که مهارت B را دارند. اگر $\frac{1}{5}$ افراد این انجمن هر دو مهارت را داشته باشند و $\frac{3}{20}$ آن‌ها هیچ کدام از مهارت‌ها را نداشته باشند؛ چند درصد افراد مهارت A را ندارند؟

قلم چی - ۱۳۹۷

۶۵ ۳۰ ۷۰ ۳۵

قلم چی - ۱۳۹۷

کدام گزینه صحیح است؟



قلم چی - ۱۳۹۷

در یک الگوی خطی، جمله پنجم ۲۳ و جمله هفتم ۳۱ است. جمله عمومی این الگو کدام است؟

$t_n = 3n - 4$

$t_n = 4n - 3$

$t_n = 3n + 4$

$t_n = 4n + 3$

تعداد دانش‌جویان یک کلاس ۴۱ نفر است که فقط ۵ نفر از آنها در تعطیلات به مسافرت نرفته‌اند و بقیه برای تعطیلات به مشهد یا تبریز مسافرت کرده‌اند. به این ترتیب که ۲۸ نفر از آن‌ها به مشهد مسافرت کرده‌اند و ۸ نفر هم به مشهد و هم به تبریز مسافرت کرده‌اند. چند نفر فقط به تبریز سفر کرده‌اند؟

قلم چی - ۱۳۹۷

۲۱ ۱۵ ۸ ۱۶

قلم چی - ۱۳۹۷

اگر $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ باشند، حاصل عبارت $[(A \cap B) \cup (B - A)]$ کدام است؟

$[-4, 2)$

$[-1, 3]$

$(-4, 2]$

$(-1, 3]$

از یک مدرسه ۱۲۰ نفری، ۴۸ نفر در دوره‌ی ورزشی فوتبال، ۳۶ نفر در دوره‌ی ورزشی والیبال و ۷۰ نفر حداقل در یکی از این دو دوره‌ی ورزشی ثبت‌نام کرده‌اند. تعداد افرادی که فقط در یک دوره‌ی ورزشی ثبت‌نام کرده‌اند، کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۷

۵۶ ۵۰ ۴۶ ۳۲

قلم چی - ۱۳۹۷

جمله‌ی هفتم از دنباله‌ی اعداد $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots$ کدام است؟

$\frac{7}{17}$

$\frac{7}{15}$

$\frac{7}{14}$

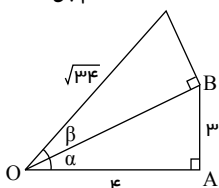
$\frac{7}{12}$

در یک کلاس ۵۰ نفره، ۱۲ نفر به هیچ کدام از رشته‌های ورزشی تنیس و فوتبال علاقه‌ای ندارند. اگر ۱۷ نفر فقط به رشته‌ی فوتبال و ۱۴ نفر فقط به رشته‌ی تنیس علاقه داشته باشند، چند نفر به هر دو رشته‌ی ورزشی علاقه دارند؟

قلم چی - ۱۳۹۷

۹ ۸ ۷ ۶

قلم چی - ۱۳۹۷

با توجه به شکل زیر، حاصل عبارت $\tan \alpha + \cot \beta$ کدام است؟

$\frac{13}{25}$

$\frac{27}{20}$

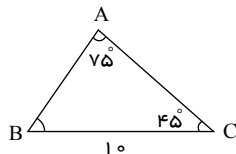
$\frac{29}{12}$

$\frac{29}{15}$



در مثلث زیر طول ضلع AC کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۷



$5(\sqrt{3}+1)$

$5(\sqrt{3}-1)$

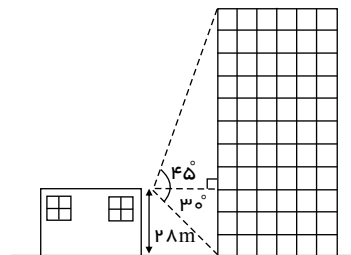
$5\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$

$5\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$

۱۰

در شکل مقابل اگر ارتفاع ساختمان کوتاه‌تر ۲۸ متر باشد، ارتفاع برج چند متر است؟

قلم چی - ۱۳۹۷



$29\sqrt{3}$

$28\sqrt{3}$

$28(1+\sqrt{3})$

56

۱۱

اگر روی دایرهٔ مثلثاتی، انتهای کمان‌های 60° ، 120° و 300° را به هم وصل کنیم، مثلث ABC تشکیل می‌شود. مساحت مثلث ABC کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۷

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2

$\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۲

اگر $\frac{1}{3}$ ، $\frac{\sqrt{x+2}}{3}$ و 2 سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار x کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۷

9

6

4

3

۱۳

بین دو عدد 2 و 162 سه واسطه‌ی هندسی قرار داده‌ایم. مجموع این 3 واسطه کدام است؟ (قدر نسبت مثبت است.)

قلم چی - ۱۳۹۷

98

92

84

78

۱۴

در یک دنباله‌ی هندسی با نسبت مشترک بزرگ‌تر از یک، حاصل ضرب سه جمله‌ی ابتدایی 216 و مجموع آن‌ها 19 است. در این صورت جمله‌ی چهارم دنباله کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۷

3

13

$\frac{27}{2}$

$\frac{8}{3}$

۱۵

اگر Z, W, N و Q به ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی، حسابی، صحیح و گویا باشد، آنگاه حاصل کدام گزینه تهی است؟

قلم چی - ۱۳۹۷

$(Z-Q) \cup N$

$W - (N \cup Z)$

$(W \cap Z) - N$

$N \cap W \cap Q$

۱۶

حاصل عبارت تعریف شدهٔ A کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۷

$$A = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x + \cot x$$

$\sin x + \cos x$

1

$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

2

۱۷





۱۸ در کلاسی که ۲۸ نفر دانش‌آموز دارد، ۲۱ نفر حداقل به یکی از رشته‌های فوتبال یا والیبال علاقه دارند، اگر ۱۷ نفر به فوتبال و ۹ نفر به والیبال علاقه داشته باشند، چند نفر فقط به یکی از این دو رشته علاقه دارند؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۱۹ در دنبالهٔ حسابی $0, \frac{7}{4}, 2, \dots$ اگر به جملات چهارم، هشتم و سیزدهم مقداری ثابت اضافه کنیم، به ترتیب از راست به چپ، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی حاصل می‌شود، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۲۰ خط با شیب مثبت و عرض از مبدأ یک و خط L_2 با شیب مثبت و عرض از مبدأ ۵، محور عرض‌ها را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کنند. خطوط L_1 و L_2 یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند به طوری که $AC = 13$ است. اگر مساحت مثلث ABC ۲۴ باشد، شیب خط L_1 کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

$\frac{5}{13}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$\frac{12}{13}$ (۲)

$\frac{12}{5}$ (۱)

۲۱ در تجزیهٔ عبارت $y^5 + 2y^3 - 24y$ کدام عامل وجود ندارد؟

قلم چی- ۱۳۹۷

$y - 4$ (۴)

$y + 2$ (۳)

$y - 2$ (۲)

$y^2 + 6$ (۱)

۲۲ اگر گویا شدهٔ کسر $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ به صورت $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(9 + 3\sqrt{4} + (\sqrt{4})^2)}{x}$ باشد، x کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۲۳ (۴)

۲۵ (۳)

۲۱ (۲)

۲۷ (۱)

۲۳ عبارت $\sqrt[15]{6}$ با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

$\sqrt[10]{\sqrt[3]{36}}$ (۴)

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{6^{\frac{1}{3}}}}$ (۳)

$\sqrt[10]{\sqrt[6]{6}}$ (۲)

$\sqrt[5]{\sqrt[6]{36}}$ (۱)

۲۴ اگر $\frac{1}{24\sqrt{x}} = \frac{x^2 - 1}{x}$ باشد، حاصل عبارت کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱۲ (۴)

۱۴ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

۲۵ در تجزیهٔ عبارت $8a^9 - a^6b^3 + 8a^3b^3 - b^6$ کدام عامل وجود ندارد؟

قلم چی- ۱۳۹۷

$2a + b$ (۴)

$2a - b$ (۳)

$4a^2 + 2ab + b^2$ (۲)

$a^6 + b^3$ (۱)

۲۶ حاصل عبارت $(3\sqrt{2} - \sqrt{1})(3\sqrt{2} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) \dots (3\sqrt{2} - \sqrt{20})$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

صفر (۴)

$(3\sqrt{2})^{20} - 20\sqrt{20}$ (۳)

$(3\sqrt{2})^{20} + 20$ (۲)

$(3\sqrt{2})^{20} - 20$ (۱)

۲۷ اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $(m^2 + 1) = x - (m - 1)x^2$ برابر ۲- باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

۲ (۱)



قلم چی- ۱۳۹۷

در تساوی $\frac{6+3\sqrt{x}+A}{x-1} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$ عبارت A کدام است؟

$$\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt[4]{x^3+x} \quad \text{۲}$$

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} \quad \text{۱}$$

۲۸

قلم چی- ۱۳۹۷

اگر $\sqrt[3]{a} > a$ باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$a^5 < a \quad \text{۴}$$

$$a^4 < a \quad \text{۳}$$

$$\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} \quad \text{۲}$$

$$-1 < a < 0 \quad \text{۱}$$

۲۹

پیش‌ترین مقدار تابع $y = mx^2 + 4x + m - 3$ برابر صفر است. محور تقارن این تابع، نمودار تابع $y = 4x^2 + 2x - 1$ را با چه عرضی قطع می‌کند؟

قلم چی- ۱۳۹۷

$$-1 \quad \text{۴}$$

$$1 \quad \text{۳}$$

$$19 \quad \text{۲}$$

$$11 \quad \text{۱}$$

۳۰

قلم چی- ۱۳۹۷

ریشه بیست و سوم عبارت $\frac{24\sqrt[3]{2} \times 4\sqrt[3]{7}}{32^2 \times 27\sqrt[3]{3} \times 48\sqrt[3]{4}}$ کدام است؟

$$\sqrt[6]{3} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt[12]{3} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{12} \quad \text{۲}$$

$$\sqrt[12]{6} \quad \text{۱}$$

۳۱

یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، محیط این قاب عکس چقدر است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

$$90 \quad \text{۴}$$

$$140 \quad \text{۳}$$

$$35 \quad \text{۲}$$

$$70 \quad \text{۱}$$

۳۲

قلم چی- ۱۳۹۷

اگر مجموعه جواب نامعادله $ax^2 + ax + 3 < 0$ به صورت $\mathbb{R} - [b, 1]$ باشد، $a + b$ کدام است؟

$$-1 \quad \text{۴}$$

$$-\frac{45}{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$-\frac{7}{2} \quad \text{۱}$$

۳۳

قلم چی- ۱۳۹۷

اگر $(2x^2 + a)^6$ همواره برقرار باشد، حاصل a کدام است؟

$$\text{نشدنی} \quad \text{۴}$$

$$-13 \quad \text{۳}$$

$$-12 \quad \text{۲}$$

$$16 \quad \text{۱}$$

۳۴

قلم چی- ۱۳۹۷

خلاصه شده عبارت $(\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})^{1/5}$ کدام است؟

$$\sqrt[5]{2} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt[5]{2^2} \quad \text{۳}$$

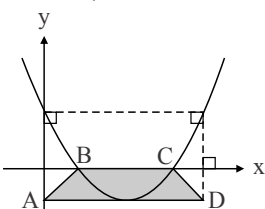
$$2 \quad \text{۲}$$

$$\sqrt[5]{2} \quad \text{۱}$$

۳۵

در شکل زیر، سهمی رسم شده مربوط به نمودار تابع به معادله $y = 2x^2 - 12x + 16$ است. اگر پاره‌خط افقی AD بر رأس سهمی مماس باشد، مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷



$$4 \quad \text{۱}$$

$$8 \quad \text{۲}$$

$$16 \quad \text{۳}$$

$$24 \quad \text{۴}$$

۳۶





قلم چی - ۱۳۹۷

کدام یک از روابط زیر تابع نیست؟

۲ رابطه‌ای که به هر دانش آموز، معلمانش را نسبت می‌دهد.

۱ رابطه‌ای که به هر فرد، سنش را نسبت می‌دهد.

۴ رابطه‌ای که به هر فرد، وزنش را نسبت می‌دهد.

۳ رابطه‌ای که به هر فرد، شناسنامه‌اش را نسبت می‌دهد.

۳۷

قلم چی - ۱۳۹۷

اگر رابطه $f = \{(5, -4), (n, 4), (5, n^2 - 5n), (1, n)\}$ تابع باشد، آن گاه معادله $x^3 + xn^2 = 8x^2$ چند جواب متمایز دارد؟

۴ صفر

۱ ۳

۲ ۲

۳ ۱

۳۸

قلم چی - ۱۳۹۷

چند عدد صحیح نامنفی در نامعادله $\frac{x+6}{3x+1} \leq x$ صدق نمی‌کند؟

۴ بی‌شمار

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۳۹

قلم چی - ۱۳۹۷

اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1$ به صورت $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ باشد، $b - a$ کدام است؟

۲ ۴

۱ ۳

صفر ۲

۳ ۱

۴۰

قلم چی - ۱۳۹۷

 b در کدام بازه باشد، تا عبارت درجه دوم $ax^2 + bx - b$ همواره منفی شود؟۴ $(4a, 0)$ ۳ $(0, -4a)$ ۲ $(0, 4a)$ ۱ $(-4a, 0)$

۴۱

قلم چی - ۱۳۹۷

در یک تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در این صورت $f(f(x)) = x$ کدام است؟

۴ ۲۴

۳ ۱۸

۲ ۲۰

۱ ۱۴

۲
۴۲

قلم چی - ۱۳۹۷

اگر مجموعه جواب نامعادله $|x+2| + b < a$ به صورت (n, m) باشد، $m + n$ کدام است؟

۴ -۴

۳ ۴

۲ $a - b$ ۱ $2a - 2b$

۴۳

یک جسم از بالای یک ساختمان که ۲۰ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 20t + 20$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین در مسیر برگشت به سطح زمین بیشتر از ۳۵ متر خواهد بود؟

۴ $(1, 2)$ ۳ $(0, 3)$ ۲ $(2, 3)$ ۱ $(1, 3)$

۴۴

قلم چی - ۱۳۹۷

هرگاه $\mathbb{R} = (-\infty, \frac{2m-7}{3}) \cup [\frac{m+2}{2}, +\infty)$ باشد، حدود m کدام است؟۴ $(-\infty, 20)$ ۳ $(-\infty, 20]$ ۲ $[20, +\infty)$ ۱ $[-20, 20]$

۴۵

سه مخزن کروی تو در تو را که هم‌مرکز هستند، در نظر بگیرید. حجم بزرگترین مخزن برابر با 36π و حجم کوچکترین مخزن برابر با $\frac{32}{3}\pi$ است، شعاع مخزن میانی، کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۴ $\sqrt{10}$ ۳ $\sqrt{5}$ ۲ $\sqrt{3}$ ۱ $\sqrt{2}$

۴۶



۴۷ اگر تابع $f = \{(2, 3), (4, m), (5, n^2 - m^2)\}$ تابع ثابت و تابع $g = \{(1, \frac{a^2}{3}), (3, a^2), (7, b^3)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $4f(5) - 5g(3)$ کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۸ جمله ی چندم دنباله ی هندسی با جملات $1, -1, \dots, \frac{1}{4}$ ، شانزده برابر جمله ی ششم آن می باشد؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) نهم ۲) دهم ۳) دوازدهم ۴) سیزدهم

۴۹ با حروف کلمه ASSIST چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت به طوری که همواره Sها پشت سر هم باشند؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۵۰ برد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ -|x + 2| & x \geq 0 \end{cases}$ شامل چند عدد صحیح نمی شود؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی شمار

۵۱ اگر حروف کلمه «جهانگردی» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد با حرف «ج» شروع و به «ی» ختم شود؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{28}$ ۴) $\frac{1}{56}$

۵۲ با حروف کلمه «یکسان» چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت به طوری که با حرف نقطه دار شروع شود؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۱۲

۵۳ رمز یک دستگاه از یک رقم و یک حرف الفبای فارسی تشکیل شده است. تعداد حالت های ممکن برای این رمز کدام است؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۳۲۰ ۲) ۶۴۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۸۰

۵۴ تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی از مجموعه ۸ عضوی A به طوری که فاقد b باشد و a و c همراه هم نیایند، کدام است؟

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۵ هفت نقطه A, B, C, D, E, F, G به صورت زیر روی دو خط موازی قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان رسم کرد که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شوند؟

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۵

۵۶ رمزی از سه رقم تشکیل شده است. اگر ارقام زوج کنار هم نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن است؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

قلم چی- ۱۳۹۷

۱) ۱۰۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۶۰ ۴) ۴۰۰



۵۷ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه باشند و $n(A) = 3$ و $n(B) = 10$ آن گاه تعداد اعضای پیشامد آن که «فقط یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد» کدام گزینه نمی تواند باشد؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱

۵۸ در کیسه ای ۶ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۴ مهره سبز قرار دارد. اگر سه مهره به تصادف خارج کنیم، در چند حالت امکان دارد ۳ مهره هم رنگ باشند؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۵۹ تعداد جایگشت های حروف کلمه «KONKORI» که در آن ها حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند، کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۶۰ اگر $120 = (n-1)((n-1)! + (n-2)!)$ باشد، n کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۱ با حروف کلمه «perusal» چند جایگشت هفت حرفی بدون تکرار می توان نوشت که به حرف e ختم می شود و حروف a, r, e کنار هم باشند؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۴۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۴۰

۶۲ برای ساخت رمز یک دستگاه از سه کاراکتر استفاده می کنیم به طوری که برای هر کاراکتر می توانیم از یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ یا یکی از سه نماد @، #، \$ یا یکی از حروف a, b, c, d و e استفاده کنیم به چند طریق می توان این رمز را ساخت به طوری که فقط در یک کاراکتر آن از عدد استفاده شود؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۳۸۴ ۲) ۷۶۸ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۱۵۳۶

۶۳ حاصل عبارت $\binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{14}{10}$ کدام است؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۱۳۶۴ ۲) ۱۳۶۵ ۳) ۳۰۰۲ ۴) ۳۰۰۳

۶۴ در یک کیسه ۴ مهره سیاه و ۳ مهره سفید وجود دارد، ۲ مهره هم زمان بیرون می آوریم، چقدر احتمال دارد هم رنگ نباشند؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۶۵ از بین اعداد ۲ رقمی، عددی به تصادف انتخاب می کنیم، چقدر احتمال دارد این عدد مضرب ۵ باشد؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{2}{10}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{35}{10}$

۶۶ می خواهیم کارت هایی بسازیم که در سمت راست آن ها یکی از حروف {ن، ی، ب، ج، الف} و در سمت چپ آن ها عدد ۳ رقمی بدون رقم صفر نوشته شود. چند کارت می توانیم بسازیم؟ (تکرار ارقام مجاز است).
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۵۰۰۰ ۲) ۷۲۹ ۳) ۳۶۴۵ ۴) ۴۵۰۰

۶۷ تابع خطی $f(x) = ax + b$ مفروض است. اگر دامنه و برد این تابع به ترتیب $[2, 4]$ و $[-5, 3]$ باشد، آن گاه $a + b$ کدام می تواند باشد؟
قلم چی- ۱۳۹۷

- ۱) ۱۷ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) -۷



قلم چی - ۱۳۹۷	«گروه خونی افراد» از کدام نوع متغیر است؟	۶۸
کیفی - اسمی (۴)	کیفی ترتیبی (۳)	کمی - پیوسته (۲)
قلم چی - ۱۳۹۷	پیشامد آن که در هفته اول سال برف بیارد و B پیشامد آن که در این مدت هوا آفتابی باشد، است. پیشامد $B' \cup A$ بیانگر کدام گزینه است؟	۶۹
در هفته اول سال برف بیارد. (۱)	در هفته اول سال هوا آفتابی باشد و برف نیارد. (۲)	در هفته اول سال هوا آفتابی نباشد یا برف بیارد. (۳)
در هفته اول سال هوا آفتابی نباشد یا برف نیارد. (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۷	در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، مجموع جمله‌های دوم و چهارم برابر ۵ و جمله ششم ۱۵ واحد از جمله دوم بیشتر است. جمله اول این دنباله کدام است؟	۷۰
$\frac{1}{2}$ (۱)	۱ (۲)	$\frac{3}{2}$ (۳)
۲ (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۷	کدام مجموعه تهی نیست؟	۷۱
$W \cap (Z - N)$ (۱)	$N \cap (Z - W)$ (۲)	$W \cap (R - Q)$ (۳)
$N \cap (Q - Z)$ (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۷	اگر بازه $[2n - 1, 3n + 14]$ شامل عدد ۵ باشد، حداقل مقداری که n می‌تواند اختیار کند، کدام است؟ ($n > -15$)	۷۲
۳ (۱)	-۲ (۲)	-۳ (۳)
۲ (۴)		
خارج از کشور - ۱۳۹۷	در دنباله حسابی مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۰ می‌باشد. جمله هشتم آن، کدام است؟	۷۳
۲۶ (۱)	۲۹ (۲)	۳۰ (۳)
۳۱ (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۸	اگر $(-a, a] \cap (b, +\infty) = (2, 4]$ و $a > 0$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟	۷۴
-۲ (۱)	۲ (۲)	۶ (۳)
۱ (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۸	اجتماع دو مجموعه A و B ، ۱۴ عضو دارد. اگر به مجموعه A ، ۸ عضو جدید اضافه کنیم، به مجموعه اشتراک دو مجموعه، ۶ عضو افزوده می‌شود. اجتماع مجموعه B و مجموعه جدید A چند عضو دارد؟	۷۵
۱۶ (۱)	۱۸ (۲)	۲۰ (۳)
۲۲ (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۸	در یک دنباله حسابی، جمله دوم صفر، $t_m = n^2$ و $t_n = m^2$ است. جمله اول بر حسب m و n کدام است؟	۷۶
$m - n$ (۱)	$m + n$ (۲)	$2m + 3n$ (۳)
$3m - 2n$ (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۸	در الگوی خطی t_n ، اگر جمله اول برابر با ۳ و جمله پنجم برابر با -۵ باشد، کدام جمله برابر با -۱۹۷ است؟	۷۷
t_{99} (۱)	t_{100} (۲)	t_{101} (۳)
t_{102} (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۸	بین دو عدد ۱۲ و ۶۸ تعداد ۱۰ واسطه حسابی به ترتیب از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم. مجموع واسطه‌های دوم، چهارم، هفتم و نهم کدام است؟	۷۸
۸۰ (۱)	۱۲۰ (۲)	۱۶۰ (۳)
۲۰۰ (۴)		
قلم چی - ۱۳۹۸	حاصل کدام یک از گزینه‌های زیر نشان دهنده یک بازه بسته است؟	۷۹
$(-\infty, \frac{5}{2}] \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$ (۱)	$(-\frac{7}{6}, 6) - (1, 9)$ (۲)	$[-5, 4] \cup (-\infty, 12)$ (۳)
$[-5, 1) - [0, 12)$ (۴)		



<p>(1) (2) (3)</p>	<p>با توجه به الگوی زیر، تعداد کوچک‌ترین مربع‌های سفید در مرحله نهم کدام است؟ قلم چی - ۱۳۹۸</p> <p>۱۶ (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴)</p>	۸۰
<p>قلم چی - ۱۳۹۸</p>	<p>بین ۵۱۲ و ۱۲۱٫۵ چهار عدد درج کرده‌ایم، به طوری که شش عدد حاصل یک دنباله هندسی با جملات کاهشی تشکیل دهند. جمله چهارم این دنباله چقدر است؟</p> <p>۲۱۲ (۱) ۲۱۸ (۲) ۲۱۴ (۳) ۲۱۶ (۴)</p>	۸۱
<p>(1) (2) (3) , ...</p>	<p>با توجه به الگوی زیر، در مرحله ۱۰۰ام تعداد مثلث‌های تیره چند برابر تعداد مثلث‌های سفید است؟</p> <p>$\frac{99}{100}$ (۱) $\frac{98}{100}$ (۲) $\frac{100}{101}$ (۳) $\frac{100}{102}$ (۴)</p>	۸۲
<p>قلم چی - ۱۳۹۸</p>	<p>دنباله حسابی ۴, ۱۰, ۱۰, ۰۰۰ با قدرنسبت d مفروض است. اگر دنباله‌ای هندسی با جمله اول $\frac{8}{27}$، قدرنسبتی برابر با d داشته باشد، جمله مشترک این دو دنباله، چندمین جمله از دنباله حسابی است؟</p> <p>۸ (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴)</p>	۸۳
<p>قلم چی - ۱۳۹۸</p>	<p>بین دو عدد ۴۸ و ۳، سه عدد را طوری قرار می‌دهیم که این ۵ عدد تشکیل یک دنباله هندسی با جملات مثبت را دهند. اگر عدد ۳، جمله اول این دنباله باشد، جمله دوم این دنباله کدام است؟</p> <p>۹ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۶ (۴)</p>	۸۴
<p>قلم چی - ۱۳۹۸</p>	<p>مساحت یک ۶ ضلعی منتظم برابر با $12\sqrt{3}$ است. محیط آن برابر است با:</p> <p>۲۴ (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) $12\sqrt{2}$ (۳) ۱۲ (۴)</p>	۸۵
<p>قلم چی - ۱۳۹۸</p>	<p>در یک دنباله حسابی که جمله اول آن ۹۸ است، تنها ۱۷ جمله اول آن، اعدادی طبیعی هستند. چندمین جمله دنباله برابر ۴۴ است؟</p> <p>۸ (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴)</p>	۸۶
<p>قلم چی - ۱۳۹۸</p>	<p>دو دنباله حسابی به صورت زیر داریم. این دو دنباله، چند عدد سه رقمی مشترک دارند؟</p> <p>$\begin{cases} 2, 7, 12, 17, 22, \dots \\ 8, 11, 14, 17, 20, \dots \end{cases}$</p> <p>۵۸ (۱) ۶۱ (۲) ۶۰ (۳) ۵۹ (۴)</p>	۸۷
<p>قلم چی - ۱۳۹۸</p>	<p>در یک دنباله حسابی، واسطه هندسی بین جملات سوم و دهم دنباله، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر جمله هفتم است. جمله چندم این دنباله برابر صفر است؟ (جمله اول دنباله حسابی مخالف صفر است.)</p> <p>یازدهم (۱) دوازدهم (۲) سیزدهم (۳) چهاردهم (۴)</p>	۸۸



قلم چی - ۱۳۹۸

اگر نقطه P انتهای کمان مربوط به زاویه α روی دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$ باشد، مختصات نقطه P کدام می تواند باشد؟

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{5}\right) \quad \text{۴}$$

$$\left(1, \frac{\sqrt{6}}{12}\right) \quad \text{۳}$$

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \quad \text{۲}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{12}, 1\right) \quad \text{۱}$$

۸۹

قلم چی - ۱۳۹۸

جمله دوم یک دنباله هندسی $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ و جمله پنجم $-\frac{1}{8}$ است. جمله چندم این دنباله $\frac{\sqrt{2}}{16}$ است؟

جمله سوم ۴

جمله هفتم ۳

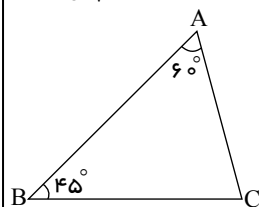
جمله ششم ۲

جمله چهارم ۱

۹۰

قلم چی - ۱۳۹۸

در شکل زیر، اگر $AC = 10\sqrt{3}$ باشد، آن گاه اندازه ضلع BC کدام است؟



$$15 \quad \text{۱}$$

$$15\sqrt{2} \quad \text{۲}$$

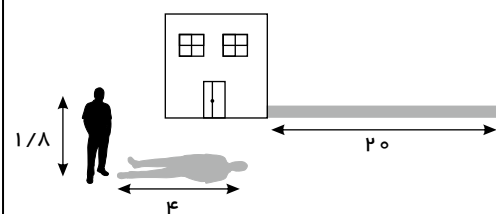
$$15\sqrt{3} \quad \text{۳}$$

$$20 \quad \text{۴}$$

۹۱

حسین می خواهد طول یک ساختمان را با استفاده از اندازه سایه آن محاسبه کند. اگر خورشید به او و ساختمان با یک زاویه بتابد و سایه حسین که $1\frac{1}{8}$ متر قد دارد، برابر با ۴ متر و طول سایه ساختمان برابر با ۲۰ متر باشد، ارتفاع ساختمان چند متر است؟

قلم چی - ۱۳۹۸



$$8 \quad \text{۱}$$

$$9 \quad \text{۲}$$

$$10 \quad \text{۳}$$

$$12 \quad \text{۴}$$

۹۲

قلم چی - ۱۳۹۸

مساحت پنج ضلعی منتظم به طول ضلع a کدام گزینه است؟

$$(\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 0.8, \sin 36^\circ = \cos 54^\circ = 0.6)$$

$$\frac{5}{3}a^2 \quad \text{۴}$$

$$\frac{10}{3}a^2 \quad \text{۳}$$

$$\frac{5}{6}a^2 \quad \text{۲}$$

$$\frac{3a^2}{2} \quad \text{۱}$$

۹۳

در یک مدرسه ۶۰ دانش آموز تحصیل می کنند. در بین آن ها ۳۰ نفر ورزش فوتبال، ۲۵ نفر ورزش والیبال و ۱۵ نفر هر دو ورزش را دوست دارند. چند نفر از دانش آموزان به هیچ یک از دو ورزش علاقه ندارند؟

قلم چی - ۱۳۹۸

$$10 \quad \text{۴}$$

$$15 \quad \text{۳}$$

$$25 \quad \text{۲}$$

$$20 \quad \text{۱}$$

۹۴

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $0 < a < 1$ باشد، حاصل $|a^3 - \sqrt{a}| - |a - a^3| - |a - \sqrt{a}|$ کدام است؟

$$-2a^3 \quad \text{۴}$$

$$-2\sqrt{a} \quad \text{۳}$$

$$\text{صفر} \quad \text{۲}$$

$$2a \quad \text{۱}$$

۹۵

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ ، آنگاه حاصل $\tan \theta + \cot \theta$ کدام است؟

$$\frac{4}{9} \quad \text{۴}$$

$$\frac{9}{4} \quad \text{۳}$$

$$\frac{8}{9} \quad \text{۲}$$

$$\frac{9}{8} \quad \text{۱}$$

۹۶



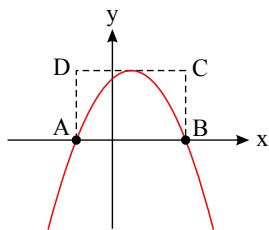


۱۳۹۸ - قلم چی	حاصل عبارت روبه رو کدام است؟	۹۷
	$\frac{\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 10^{-\frac{4}{3}}}{(\sqrt{20})^{\frac{2}{3}} \times (25)^{-\frac{2}{3}}}$	
	$\frac{2^{\frac{5}{12}}}{5}$ (۴) $\frac{5^{\frac{5}{12}}}{2}$ (۳) $\frac{2^{\frac{5}{12}}}{5}$ (۲) $\frac{5^{\frac{5}{12}}}{2}$ (۱)	
۱۳۹۸ - قلم چی	اگر $a - b = 3$ ، $ab = \frac{3}{4}$ و a و b هر دو مثبت باشند، آنگاه مقدار $(a + b)^{-3}$ کدام است؟	۹۸
	$\frac{\sqrt{3}}{72}$ (۴) ۷۲ (۳) $24\sqrt{3}$ (۲) ۱ (۱)	
۱۳۹۸ - قلم چی	معادله $(x + 2)(-x^2 + x - 1) = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟	۹۹
	صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)	
۱۳۹۸ - قلم چی	اگر $\cos x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + 2 \tan x$ کدام است؟	۱۰۰
	$\frac{4}{3}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴)	
۱۳۹۸ - قلم چی	اگر معادله درجه دوم $mx^2 - mx + 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد، m در کدام بازه قرار می گیرد؟	۱۰۱
	$(-8, 8)$ (۱) $(-8, 0)$ (۲) $(-4, 4)$ (۳) $(0, 8)$ (۴)	
۱۳۹۸ - قلم چی	در یک لیگ فوتبال که بازی ها به صورت رفت و برگشت انجام می گیرد، در کل ۳۰ بازی انجام شده است. چند تیم در این لیگ حضور دارند؟	۱۰۲
	۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)	
۱۳۹۸ - قلم چی	نمودار سهمی به معادله $y = a^2x^2 + bx - c^2$ محور x ها را در نقاطی به طول ۲ و ۳ - قطع می کند. اگر این سهمی از نقطه $(3, 3)$ عبور کند، فاصله رأس سهمی از نقطه $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ کدام است؟	۱۰۳
	$2\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) ۴ (۱)	
۱۳۹۸ - قلم چی	حاصل عبارت $A = \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}$ ، همواره کدام است؟ (عبارت ها تعریف شده هستند).	۱۰۴
	$1 + \tan^2 x$ (۱) $1 + \tan^3 x$ (۲) $1 + \tan^4 x$ (۳) $1 + \tan^6 x$ (۴)	
۱۳۹۸ - قلم چی	اگر $a = \sqrt{6 + \sqrt{20}}$ و $b = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟	۱۰۵
	$2\sqrt{5}$ (۲) ۴ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴) ۲ (۱)	
۱۳۹۸ - قلم چی	اگر $0 < a < 1$ باشد، کدام گزینه درست است؟	۱۰۶
	$a^3 < a$ (۱) $\sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$ (۲) $\frac{1}{a} < a$ (۳) $a^3 > a^5$ (۴)	



قلم چی - ۱۳۹۸

اگر نمودار سهمی $y = \frac{-x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 5$ به صورت زیر باشد، مساحت مستطیل $ABCD$ کدام است؟



$$\frac{324}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{245}{6} \quad \text{۱}$$

$$\frac{245}{4} \quad \text{۴}$$

$$\frac{323}{8} \quad \text{۳}$$

۱۰۷

قلم چی - ۱۳۹۸

به ازای کدام مقدار m ، مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟

$$-6 \quad \text{۴}$$

$$-2 \quad \text{۳}$$

$$6 \quad \text{۲}$$

$$2 \quad \text{۱}$$

۱۰۸

قلم چی - ۱۳۹۸

در صورتی که $0 < a < 1$ باشد، کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره نادرست است؟

$$-a < \sqrt{-a} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{-a} < \sqrt{a} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{a} > \sqrt{a} \quad \text{۲}$$

$$\sqrt{a} > a \quad \text{۱}$$

۱۰۹

قلم چی - ۱۳۹۸

حاصل عبارت $A = \sqrt{1 - \sqrt{2}} \times \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ کدام است؟

$$2 \quad \text{۴}$$

$$-1 \quad \text{۳}$$

$$-2 \quad \text{۲}$$

$$-4 \quad \text{۱}$$

۱۱۰

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر اشتراک مجموعه جواب دو نامعادله $3x - 1 < 8$ و $3x - 1 < -2$ را به صورت $|x - \alpha| < \beta$ بنویسیم، $\alpha + \beta$ کدام است؟

$$3 \quad \text{۴}$$

$$2 \quad \text{۳}$$

$$-2 \quad \text{۲}$$

$$-3 \quad \text{۱}$$

۱۱۱

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر مجموعه جواب نامعادله $x^2 + 4 \leq 4x^2 + x^2$ به صورت $[a, b] \cup [c, d]$ باشد، آن گاه $a + b + c + d$ کدام است؟

$$1 \quad \text{۴}$$

$$\text{صفر} \quad \text{۳}$$

$$-1 \quad \text{۲}$$

$$-2 \quad \text{۱}$$

۱۱۲

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $x + y = 6$ و $xy = 4$ حاصل عبارت $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ کدام است؟

$$\sqrt{35} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{45} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{40} \quad \text{۲}$$

$$\sqrt{50} \quad \text{۱}$$

۱۱۳

قلم چی - ۱۳۹۸

به ازای چه مقادیری از a ، سهمی به معادله $y = (a-1)x^2 + (2a-1)x + a$ فقط از ناحیه اول محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

$$\emptyset \quad \text{۴}$$

$$(-\infty, 1) \quad \text{۳}$$

$$(-\infty, 0] \quad \text{۲}$$

$$[0, +\infty) \quad \text{۱}$$

۱۱۴

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ناحیه اول باشد و محور x ها را در نقطه‌هایی به طول -1 و 3 قطع کند، آنگاه این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با

کدام عرض قطع می‌کند؟

$$-3 \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$-\frac{3}{4} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{4} \quad \text{۱}$$

۱۱۵

قلم چی - ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $|2x + 1| < x - 1$ کدام است؟

$$(-\infty, 1) \quad \text{۴}$$

$$\emptyset \quad \text{۳}$$

$$(1, +\infty) \quad \text{۲}$$

$$(-2, 0) \quad \text{۱}$$

۱۱۶

قلم چی - ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $x - 3 \leq 2x^2 - x - 3 \leq 5x - 1$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

$$\text{بی شمار} \quad \text{۴}$$

$$5 \quad \text{۳}$$

$$4 \quad \text{۲}$$

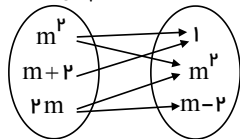
$$3 \quad \text{۱}$$

۱۱۷



به ازای چه مقدار m نمودار پیکانی زیر نمایش یک تابع است؟

قلم چی - ۱۳۹۸



۱

هیچ مقدار برای m وجود ندارد.

۳

۲

۱۱۸

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $S(1, -2)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx - \frac{3}{2}$ باشد، طول نقاط تلاقی این سهمی با محور x ها کدام است؟

-۲, ۳

-۳, ۵

-۱, ۳

-۲, ۴

۱۱۹

اگر سهمی به معادله $y = ax^2 - bx + c$ از مبدأ مختصات و نقطه $A(-1, 3)$ بگذرد و محور تقارن آن $x = 2$ باشد، مقدار $15a + 5b + c$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۸

۲۱

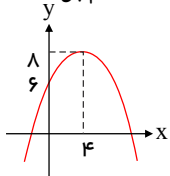
-۳

۹

۱۲۰

قلم چی - ۱۳۹۸

شکل زیر سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ می باشد، کدام گزینه تعیین علامت y را به درستی نمایش می دهد؟



x	-۲	۱۰	
y	-	+	-

x	-۳	۱۱	
y	-	+	-

x	-۲	۱۰	
y	+	-	+

x	-۴	۱۲	
y	-	+	-

۱۲۱

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر بالاترین نقطه سهمی $y = mx^2 + 2\sqrt{3}x + m + 2$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد، حدود m کدام است؟

$-1 < m < 0$

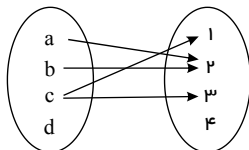
$-3 < m < -1$

$-3 < m < 1$

$m < -3$

۱۲۲

قلم چی - ۱۳۹۸



با کدام تغییر، نمودار پیکانی زیر به یک تابع تبدیل می شود؟

حذف پیکان c به a و a به 2

اضافه کردن پیکان d به 4 و حذف پیکان a به 2

حذف پیکان c به 3

اضافه کردن پیکان d به 4 و حذف پیکان c به 1

۱۲۳

اگر $f = \{(2, a+b), (-2a, b), (2, c+2), (1, 3+c), (-2, 3), (1, b+2)\}$ یک تابع باشد، آنگاه $a+b+c$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۷

۶

۵

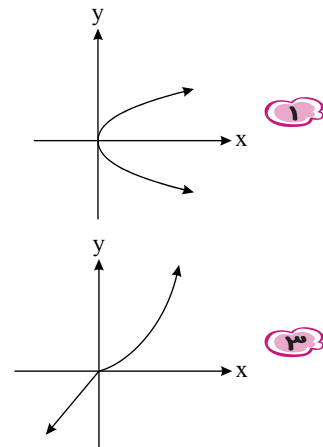
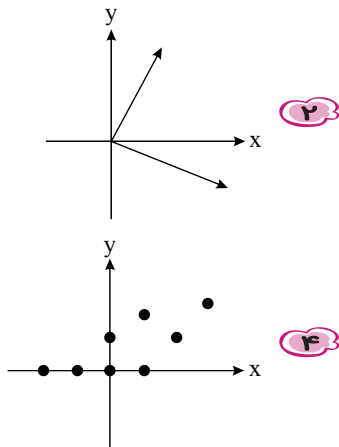
۴

۱۲۴



قلم چی - ۱۳۹۸

کدام نمودار، نمایش یک تابع است؟



۱۲۵

قلم چی - ۱۳۹۸

در کدام گزینه، رابطه y بر حسب x یک تابع را نمایش می دهد؟

$$|xy| = 4 \quad (4) \quad \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 4 \quad (3) \quad x = 2(y+1)^3 \quad (2) \quad |x| + |y| = 5 \quad (1)$$

۱۲۶

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+a}{x}$ به صورت بازه $(b, -\frac{1}{3}] \cup (0, +\infty)$ باشد، $a - b$ کدام است؟

$$2 \quad (4) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۱۲۷

قلم چی - ۱۳۹۸

معادله درجه دوم $mx^2 + (m-1)x + 3 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

$$16 \quad (4) \quad 14 \quad (3) \quad 13 \quad (2) \quad 12 \quad (1)$$

۱۲۸

قلم چی - ۱۳۹۸

چند مورد از رابطه های زیر، لزوماً بیانگر یک تابع است؟

- الف) رابطه ای که به هر شخص، سال تولد او را نسبت می دهد.
 ب) رابطه ای که به هر شخص، رنگ های مورد علاقه او را نسبت می دهد.
 پ) رابطه ای که به هر استان، مرکز آن را نسبت می دهد.
 ت) رابطه ای که به هر دایره، مساحت آن را نسبت می دهد.

$$1 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

۱۲۹

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $\tan \theta = 2$ و انتهای زاویه θ در ناحیه سوم محورهای مختصات واقع باشد، مجموع مؤلفه های اول و دوم نقطه P (محل برخورد انتهای زاویه θ با دایره مثلثاتی) کدام است؟

$$\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3) \quad -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (2) \quad -\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (1)$$

۱۳۰



قلم چی - ۱۳۹۸

برد تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 3 & , x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ -x^2 + 4x - 4 & , x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

۱۳۱

$$\mathbb{R} - (-2, 0) \quad \text{۲}$$

$$\mathbb{R} \quad \text{۱}$$

$$(-\infty, 0] \cup \{1\} - [-2, -1] \quad \text{۴}$$

$$(-\infty, 0] \cup \{1\} \quad \text{۳}$$

از میان ۵ ریاضیدان، ۶ فیزیکیان و ۴ شیمییدان قرار است کمیته‌ای ۴ نفره انتخاب شود به طوری که از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشد. این کمیته به چند طریق می‌تواند انتخاب شود؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۲

$$۹۶۰ \quad \text{۴}$$

$$۶۴۰ \quad \text{۳}$$

$$۷۲۰ \quad \text{۲}$$

$$۸۴۰ \quad \text{۱}$$

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x \geq 0 \\ x - 3 & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، برد تابع $g(x) = f(x) + 4$ کدام است؟

۱۳۳

$$[4, +\infty) \quad \text{۴}$$

$$(-\infty, 4] \quad \text{۳}$$

$$[0, +\infty) \quad \text{۲}$$

$$(-\infty, 0] \quad \text{۱}$$

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $\frac{{}^3C(n, 3) - P(n-1, 2)}{n-2} = 28$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱۳۴

$$۱۱ \quad \text{۴}$$

$$۱۰ \quad \text{۳}$$

$$۹ \quad \text{۲}$$

$$۸ \quad \text{۱}$$

قلم چی - ۱۳۹۸

از بین متغیرهای زیر به ترتیب از راست به چپ چند متغیر «کیفی اسمی» و چند متغیر «کمی گسسته» هستند؟

«رنگ مو - وزن - میزان لذت بردن از تماشای تلویزیون - کیفیت محصولات - انواع اتومبیل - میزان مصرف بنزین - تعداد فرزندان - معدل یک دانش آموز»

۱۳۵

$$۲ - ۴ \quad \text{۴}$$

$$۲ - ۲ \quad \text{۳}$$

$$۱ - ۴ \quad \text{۲}$$

$$۱ - ۲ \quad \text{۱}$$

قلم چی - ۱۳۹۸

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد چهاررقمی کوچک‌تر از ۳۰۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱۳۶

$$۲۴۰ \quad \text{۴}$$

$$۱۲۰ \quad \text{۳}$$

$$۱۶۰ \quad \text{۲}$$

$$۳۶۰ \quad \text{۱}$$

قلم چی - ۱۳۹۸

کدام گزینه نادرست است؟

۱۳۷

$$\text{دامنه تابع } y = -|x| + 2 \text{ برابر } \mathbb{R} \text{ و برد آن } (-\infty, 2] \text{ است.} \quad \text{۲}$$

$$\text{دامنه تابع } y = x^2 - 1 \text{ برابر } \mathbb{R} \text{ و برد آن } [-1, +\infty) \text{ است.} \quad \text{۱}$$

$$\text{اگر } f(x) = x^2 - x \text{ باشد، } f(-1) = \frac{f(2)}{2} \text{ است.} \quad \text{۴}$$

$$\text{دامنه تابع } f(x) = \frac{1}{3}x \text{ برابر } \mathbb{R} \text{ و برد آن نیز } \mathbb{R} \text{ است.} \quad \text{۳}$$

قلم چی - ۱۳۹۸

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد چهاررقمی زوج و کمتر از ۴۵۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱۳۸

$$۱۱۴ \quad \text{۴}$$

$$۷۲ \quad \text{۳}$$

$$۲۵۵ \quad \text{۲}$$

$$۹۷ \quad \text{۱}$$

قلم چی - ۱۳۹۸

اگر ${}^2C(n, 3) = 5P(n, 2)$ باشد، $C(n, 2)$ کدام است؟ ($n \geq 3$)

۱۳۹

$$۲۴۰ \quad \text{۴}$$

$$۱۲۰ \quad \text{۳}$$

$$۲۷۲ \quad \text{۲}$$

$$۱۳۶ \quad \text{۱}$$

می‌خواهیم از بین ۳ دانش آموز دهم ریاضی، ۴ دانش آموز دهم تجربی و ۲ دانش آموز یازدهم ریاضی، یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل را تصادفی انجام دهیم، احتمال هم رشته بودن اعضای تیم انتخابی چند برابر احتمال هم پایه بودن آن‌هاست؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۰

$$۲ \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{10}{21} \quad \text{۲}$$

$$\frac{8}{11} \quad \text{۱}$$



قلم چی - ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{3} \right| \geq \frac{1}{3}$ کدام است؟

۱۴۱

$3 \leq x \leq 7$ (۴)

$x \geq 7$ یا $x \leq 3$ (۳)

$x \leq -7$ یا $x \geq -3$ (۲)

$-7 \leq x \leq -3$ (۱)

تعداد کلمات ۳ حرفی که با استفاده از حروف a, b, d, e, f, s, t می توان ساخت، چند برابر تعداد کلمات ۵ حرفی است که با استفاده از حروف مذکور می توان ساخت؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۲

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

می خواهیم با استفاده از ارقام مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام بسازیم، به طوری که اعداد ساخته شده ۲ رقم زوج و ۲ رقم فرد داشته باشند. چه تعداد عدد با این شرایط می توانیم بسازیم؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۳

۲۸۸۰ (۴)

۲۱۶۰ (۳)

۱۴۴۰ (۲)

۲۴۰۰ (۱)

با حروف کلمه «خوارزمی» چند کلمه ۵ حرفی و بدون توجه به معنا می توان نوشت که فقط ۲ نقطه داشته باشد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۴

۴۸۰ (۴)

۶۲۴ (۳)

۷۴۴ (۲)

۷۲۰ (۱)

اگر $P(A \cup B) = \frac{P(A')}{2} = \frac{P(B')}{3} = P(A \cap B)$ باشد، $P(A)$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۵

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

در جعبه ای ۱۰ جفت کفش متمایز قرار دارد، اگر ۵ لنگه از آن بیرون آوریم، چقدر احتمال دارد که حداقل یک جفت از آن بیرون آمده باشد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۶

$\frac{1271}{1292}$ (۴)

$\frac{155}{323}$ (۳)

$\frac{21}{1292}$ (۲)

$\frac{168}{323}$ (۱)

۴ کتاب مختلف شیمی و ۶ کتاب مختلف ریاضی را به چند طریق می توان در یک قفسه قرار داد، به شرط آن که بین هر دو کتاب شیمی دقیقاً دو کتاب ریاضی قرار بگیرد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۷

$(6!)^2$ (۴)

$(4!)^2$ (۳)

$4! \times 3!$ (۲)

$6! \times 4!$ (۱)

به چند طریق می توان ۶ حرف a, b, c, d, e, f را در کنار هم قرار داد به طوری که e قبل از a, b, c و c قرار گیرد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۸

۱۸۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۶۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

اگر با حروف کلمه «جهانگردی» کلمه ای ۵ حرفی را بدون توجه به معنی به طور تصادفی بسازیم، چقدر احتمال دارد که کلمه فقط ۳ نقطه داشته باشد؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۹

$\frac{1}{14}$ (۴)

$\frac{2}{7}$ (۳)

صفر (۲)

$\frac{5}{14}$ (۱)

اگر $f = \{(1, 5), (2, m+n), (3, 2m-n)\}$ تابعی ثابت و $g = \{(-1, a), (-2, b), (-3, a+b)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $f(3) - g(-1)$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱۵۰

-۴ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)



هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پشت هر کارت، عدد روی کارت به علاوه ۱۸ را می‌نویسیم. یکی از کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم، احتمال این که حاصل ضرب اعداد دو طرف کارت مربع کامل باشد، کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱) صفر ۲) $\frac{1}{30}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{1}{10}$

در کدام گزینه نوع متغیر درست بیان شده است؟

قلم چی - ۱۳۹۸

۱) گنجایش آب یک لیوان: کمی گسسته ۲) دمای یک لامپ: کمی پیوسته
۳) گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس: کمی پیوسته ۴) مراحل تحصیل: کیفی اسمی

اگر مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۳۲ و ۵۶ را به ترتیب A و B بنامیم، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

اگر A مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{2} \leq 5x - 1 \leq 2x$ و $B = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ، \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، حاصل $(A \cup B)'$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱) $(0, 1] \cup [2, 6)$ ۲) $(0, \frac{2}{9}) \cup (\frac{1}{3}, 1)$ ۳) $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{1}{3}, 1)$ ۴) $(0, 1) \cup (2, 6)$

اگر U مجموعه مرجع و دو مجموعه A و B جدا از هم نباشند، آن‌گاه چه تعداد از تساوی‌های زیر صحیح می‌باشند؟

قلم چی - ۱۳۹۹

a) $A \cup A' = U$ b) $B \cap B' = \emptyset$ c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
d) $A - (A \cap B) = A - B$ e) $A \cup B' = A - B$ f) $U - (A \cup B) = (A \cup B)'$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۸ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۲ نفر گروه تئاتر هستند و ۵ نفر نیز عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند، چه تعداد از دانش‌آموزان این کلاس فقط عضو یکی از گروه‌های سرود یا تئاتر هستند؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

اگر U مجموعه مرجع، $n(U) = 120$ ، $n(A - B) = 50$ و $n(B - A) = 30$ باشد، آن‌گاه متمم مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱) ۶۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

تعدادی از دانش‌آموزان یک کلاس ۴۰ نفری، خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی و شیمی آماده می‌کنند. می‌دانیم ۲۰ نفر از دانش‌آموزان این کلاس یا در هر دو المپیاد ثبت‌نام کرده‌اند یا در هیچ‌کدام ثبت‌نام نکرده‌اند. اگر ۱۵ نفر فقط در المپیاد ریاضی ثبت‌نام کرده باشند، چه تعداد از دانش‌آموزان این کلاس در المپیاد شیمی ثبت‌نام کرده‌اند؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱) دقیقاً ۵ نفر ۲) از ۵ تا ۲۵ نفر ۳) دقیقاً ۱۰ نفر ۴) از ۱۰ تا ۲۵ نفر

مقدار y در دنباله حسابی زیر کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

$12 - x, y + 2, x, 12$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



قلم چی - ۱۳۹۹

چه تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی می‌باشد؟

الف) مجموعه کسره‌های مثبت با مخرج ۷۱

ب) مجموعه اعداد مرکب ۱۰۰۰۰ رقمی

ج) مجموعه مضارب طبیعی عدد ۷

د) مجموعه پرندگان روی کره زمین

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۶۰

در یک مدرسه، ۶ نفر فقط در درس ریاضی و ۱۸ نفر فقط در درس شیمی قبول شده‌اند و ۱۵ نفر در هیچ‌یک از این دو درس قبول نشده‌اند. اگر تعداد قبولی‌ها در درس ریاضی نصف تعداد قبولی‌ها در درس شیمی باشد، تعداد دانش‌آموزان مدرسه کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

۱۸ (۴)

۷۲ (۳)

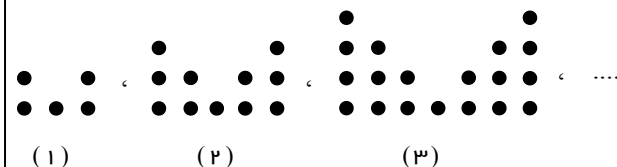
۴۵ (۲)

۳۳ (۱)

۱۶۱

قلم چی - ۱۳۹۹

در شکل ۱۹ ام از الگوی زیر، چند نقطه وجود دارد؟



۳۰۵ (۱)

۳۴۲ (۲)

۳۷۷ (۳)

۴۱۹ (۴)

۱۶۲

قلم چی - ۱۳۹۹

اگر $5, 12, 21, 32, \dots$ جملات یک دنباله درجه دوم باشند، جمله بیست‌ویکم این دنباله چند واحد از جمله اول بیش‌تر است؟

۵۲۱ (۴)

۵۲۰ (۳)

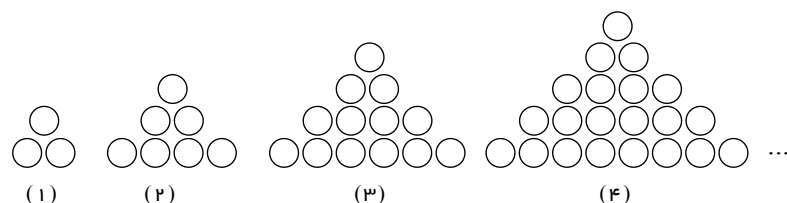
۵۱۹ (۲)

۵۱۸ (۱)

۱۶۳

با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل پانزدهم کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹



۲۲۱ (۱)

۲۴۱ (۲)

۲۶۱ (۳)

۲۸۱ (۴)

۱۶۴

قلم چی - ۱۳۹۹

اگر جمله $(2n - 1)$ ام یک دنباله به صورت $\frac{5n - 6}{(-1)^n + 2n}$ باشد، جمله هفدهم این دنباله کدام است؟ $\frac{79}{34}$ (۴) $\frac{39}{17}$ (۳) $\frac{79}{33}$ (۲) $\frac{39}{18}$ (۱)

۱۶۵

در دنباله هندسی a_n با جملات مثبت، مجموع جملات $(n - 4)$ ام، $(n - 2)$ ام و $(n - 1)$ ام، ۲۷ برابر مجموع جملات $(n + 2)$ ام، $(n + 4)$ ام و $(n + 5)$ ام است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

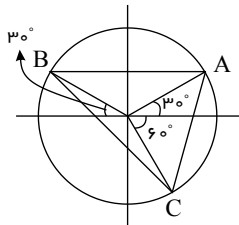
قلم چی - ۱۳۹۹

 $\frac{1}{27}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۶۶



قلم چی - ۱۳۹۹

در دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث ABC تقریباً کدام است؟ ($\sqrt{3} = 1,7$)

۱,۳۵

۰,۹۵

۱,۱۸

۱,۰۵

۱۶۷

قلم چی - ۱۳۹۹

اگر $\tan x = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}$ کدام است؟

$\frac{45}{31}$

$\frac{15}{11}$

$\frac{1}{15}$

$\frac{11}{15}$

۱۶۸

قلم چی - ۱۳۹۹

کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد مثلثاتی نیست؟ (همه عبارات‌ها تعریف شده‌اند).

$\sin^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^2 x$

$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

$\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1 - 2(\sin x \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}\right)^2$

۱۶۹

قلم چی - ۱۳۹۹

بین دو عدد ۵ و ۱۳۵، دو واسطه هندسی درج می‌کنیم. قدرنسبت دنباله هندسی به دست آمده کدام است؟

$3\sqrt{3}$

۳

-۳

۹

۱۷۰

قلم چی - ۱۳۹۹

اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}}$ کدام است؟

۱

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

۱۷۱

قلم چی - ۱۳۹۹

اگر $\sin^2 \alpha \times \cos \alpha < 0$ و $1 - \tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

$-\frac{3}{10}$

$\frac{3}{10}$

$-\frac{9}{10}$

$\frac{9}{10}$

۱۷۲

قلم چی - ۱۳۹۹

در تجزیه عبارت $x^3 - 8x$ کدام عامل وجود دارد؟

$x - 2$

$x^2 - 2x^2 + 4$

$x + 2$

$x + \sqrt{2}$

۱۷۳

قلم چی - ۱۳۹۹

اگر $\frac{1}{2}$ و m ریشه‌های n ام عدد $\frac{1}{256}$ باشند، حاصل mn کدام است؟

-۴,۵

۴,۵

۴

-۴

۱۷۴

قلم چی - ۱۳۹۹

اگر $16 = (0,25)^{4-x}$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{4}{3}x}$ کدام است؟

$\sqrt{2}$

$\sqrt{4}$

$2\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{\frac{8}{3}}$

۱۷۵



۱۷۶ اگر عدد A ریشه هفتم عدد $8\sqrt[3]{32}$ و عدد B ریشه سوم عدد $(\frac{1}{p})^{-2}$ باشد، حاصل $(-A \times B)^{-\frac{2}{3}}$ کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۷۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر k معادله $-x^2 - x + 2k = 0$ ریشه حقیقی ندارد اما معادله $(k+2)x^2 - 3x + 1$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۷۸ ساده شده عبارت تعریف شده $A = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۷۹ اگر معادله $2x^2 + 5x = 3$ را به صورت $(x+a)^2 = b$ بنویسیم، حاصل $a+b$ کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۸۰ در معادله $0 = \frac{t^2}{9} - \frac{t}{6} - \frac{1}{2}$ ، قدرمطلق تفاضل جوابها کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۸۱ اگر مجموع مربعات سه عدد متوالی مضرب ۳ برابر ۴۵ باشد، قدرمطلق مجموع این سه عدد کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۸۲ حاصل عبارت $M = \frac{2^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{2}} + 81^{\frac{1}{2}}}$ کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۸۳ اگر معادله $ax^2 - 20x + 25 = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد، آن ریشه کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴

۱۸۴ اگر جدول تعیین علامت عبارت A به صورت زیر باشد و این عبارت فقط به ازای $-3 \leq x$ تعریف شود، در مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{A} \geq 0$ ، مجموع اعداد صحیح کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

x	-3	0	4
A	+	-	+

۱ ۲ ۳ ۴

۱۸۵ حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۴ برابر عدد بزرگتر شش واحد بیش تر است. مجموع آن دو عدد کدام است؟
 قلم چی - ۱۳۹۹

۱ ۲ ۳ ۴



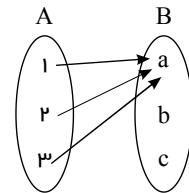
قلم چی - ۱۳۹۹

اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $ax^2 - 6x + b < 0$ بازه $(1, b)$ باشد، حاصل $a^2b + b^2a$ کدام است؟-۳۶ ۳۶ -۳۰ ۳۰

۱۸۶

قلم چی - ۱۳۹۹

کدام گزینه معرف یک تابع است؟

رابطه‌ای که به هر مادر فرزندان را نسبت می‌دهد. 

۱۸۷

 $f = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$ رابطه‌ای که به هر فرد، دوستانش را نسبت می‌دهد.

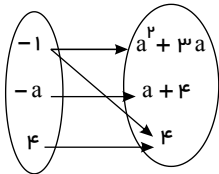
نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در دو نقطه به طول‌های (-1) و (2) قطع می‌کند، این سهمی از کدام یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟

قلم چی - ۱۳۹۹

 $(5, -18)$ $(3, -7)$ $(4, 10)$ $(1, 3)$

۱۸۸

قلم چی - ۱۳۹۹

به‌ازای چند مقدار a ، رابطه زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟۱ ۲ هیچ مقدار بی‌شمار

۱۸۹

برای کدام مجموعه مقادیر m ، نمودار سهمی به معادله $y = 3x^2 + mx + 1$ همواره بالای نمودار سهمی به معادله $y = 2x^2 + x - 2$ قرار دارد؟

قلم چی - ۱۳۹۹

 $-3 < m < 0$ $1 - 3\sqrt{2} < m < 1 + 3\sqrt{2}$ $-3 < m < 3$ $1 - 2\sqrt{3} < m < 1 + 2\sqrt{3}$

۱۹۰

اگر مجموعه جواب نامعادله $3x + 1 < 1 - x < x + 5$ به صورت بازه (a, b) باشد، مجموعه جواب نامعادله $|3x + a| < b + 1$ کدام است؟

قلم چی - ۱۳۹۹

 $(-\frac{1}{3}, 1)$ $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $(\frac{1}{3}, 1)$ $(\frac{1}{3}, 3)$

۱۹۱

قلم چی - ۱۳۹۹

به‌ازای کدام مجموعه مقادیر b ، رابطه زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ $f = \{(1, -3a), (a - 1, b + 3), (1, a^3 - 4), (4, 5), (3a + a^3, 2b + 7)\}$ اطلاعات مسئله کافی نیست. $\{-1, -4\}$ $\{-1\}$ $\{-4\}$

۱۹۲

قلم چی - ۱۳۹۹

کدام یک از روابط زیر لزوماً تابع است؟

رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی، هر عدد اول بزرگ‌تر از خودش را نسبت دهد. رابطه‌ای که به حاصل $|x|$ ، x را نسبت دهد. رابطه‌ای که به هر فرد، برادرانش را نسبت دهد. رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی‌اش را نسبت دهد.

۱۹۳





۱۳۹۹- قلم چی- ۱۹۴ اگر عبارت $y = 4x^2 + (m+2)x + 1$ همواره مثبت باشد، عبارت $y = x^2 + 3x + m$ چگونه است؟
 همواره مثبت ۱) مثبت یا صفر ۲) همواره منفی ۳) مثبت یا صفر ۴) مثبت یا صفر یا منفی

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۹۵ مجموعه جواب نامعادله $|x-2| - 1 \geq 0$ کدام است؟
 $(-\infty, 3] \cup [1, +\infty)$ ۱) $[1, 3]$ ۲) $(-\infty, 3]$ ۳) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ ۴)

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۹۶ جدول تعیین علامت عبارت $\frac{ax+1}{2x+1} - 3$ به صورت زیر است. مقدار $a \cdot b$ کدام است؟

x	b
P(x)	+
	-
	ت

 ۳ ۱) -۳ ۲) ۶ ۳) -۶ ۴)

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۹۷ اگر $f = \{(1, 2), (2, b), (-1, 3), (1, a^2 - a), (a, 4)\}$ تابع باشد، مجموع اعضای متمایز برد آن کدام است؟
 ۱۶ ۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴)

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۹۸ حاصل عبارت $[2, 4] - ([-1, 5] \cap (-2, 3))$ در کدام گزینه آمده است؟
 $[-1, 2]$ ۱) $[-2, 2]$ ۲) $[-1, 2)$ ۳) $(-2, 2]$ ۴)

۱۳۹۹- قلم چی- ۱۹۹ قطاری از شهر A به سمت شهر B حرکت می‌کند. اگر فاصله این قطار تا شهر B به صورت یک تابع خطی برحسب زمان طی شده باشد و پس از گذشت ۲ ساعت، ۳۲۰ کیلومتر تا شهر B فاصله داشته باشد و پس از ۶ ساعت از شروع حرکت، به شهر B برسد، فاصله دو شهر A و B چند کیلومتر است؟
 ۴۸۰ ۱) ۳۸۰ ۲) ۵۶۰ ۳) ۴۰۰ ۴)

۱۳۹۹- قلم چی- ۲۰۰ حاصل $\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \sqrt[6]{7 + 2\sqrt{10}}$ کدام است؟
 $\sqrt[6]{3}$ ۱) $\sqrt[3]{3}$ ۲) $\sqrt[3]{3}$ ۳) ۳ ۴)

گزینه ۳ می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $n(A') = n(u) - n(A)$

با استفاده از اطلاعات مسئله داریم:

$$n(A) = 2n(B)$$

$$n(A \cap B) = \frac{1}{5}n(u)$$

$$n(A' \cap B') = n(u) - n(A \cup B) = \frac{3}{20}n(u) \Rightarrow n(u) - n(A \cup B) = \frac{3}{20}n(u) \Rightarrow n(A \cup B) = \frac{17}{20}n(u)$$

از طرفی: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 2n(B) + n(B) - \frac{1}{5}n(u)$

$$\Rightarrow \frac{17}{20}n(u) = 3n(B) - \frac{1}{5}n(u) \Rightarrow 3n(B) = \frac{21}{20}n(u)$$

$$\Rightarrow n(B) = \frac{7}{20}n(u) \xrightarrow{n(A)=2n(B)} n(A) = \frac{7}{10}n(u)$$

$$n(A') = n(u) - n(A) = n(u) - \frac{7}{10}n(u) = \frac{3}{10}n(u)$$

و این یعنی ۳۰٪ از افراد، مهارت A را ندارند.

گزینه ۳ می‌دانیم: $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

با توجه به نکته‌ی فوق، گزینه‌ی ۳ صحیح است.

گزینه ۱ می‌دانیم: جمله عمومی هر الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است.

$$\begin{cases} t_5 = 23 \Rightarrow 5a + b = 23 \\ t_7 = 31 \Rightarrow 7a + b = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - b = -23 \\ 7a + b = 31 \end{cases} \Rightarrow t_n = 4n + 3$$

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 3$$

گزینه ۲ می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

مجموعه مسافران مشهد و تبریز را به ترتیب M و T می‌نامیم و داریم:

$$n(M \cup T) = 41 - 5 = 36$$

$$n(M) = 28$$

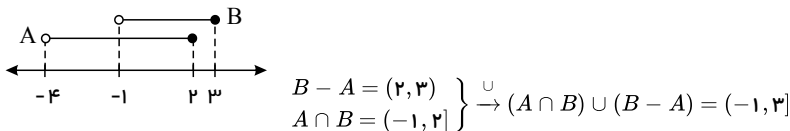
$$n(M \cap T) = 8$$

$$n(M \cup T) = n(M) + n(T) - n(M \cap T) \Rightarrow 36 = 28 + n(T) - 8 \Rightarrow n(T) = 16$$

$$n(\text{فقط تبریز}) = n(T) - n(M \cap T) = 16 - 8 = 8$$

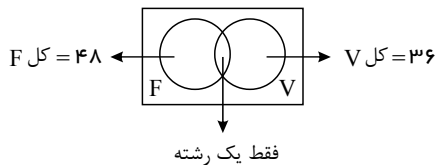
گزینه ۱ - بازه‌های A و B را روی محور اعداد نمایش می‌دهیم:

پس داریم:



گزینه ۴ می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

مجموعه‌ی فوتبال را با F و مجموعه‌ی والیبال را با V نشان می‌دهیم و اطلاعات مسئله را روی شکل زیر نشان می‌دهیم:



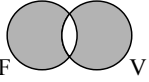
مجموعه‌ی افرادی که حداقل یکی از دو رشته ثبت‌نام کرده‌اند، برابر با $F \cup V$ است که تعداد افراد این مجموعه بنا به فرض ۷۰ نفر است. پس داریم:

$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V)$$

$$\Rightarrow 70 = 48 + 36 - n(F \cap V) \Rightarrow n(F \cap V) = 14$$

باتوجه به شکل بالا، تعداد افرادی که فقط در یک رشته ثبت‌نام کرده‌اند عبارت‌اند از تعداد افرادی که در قسمت‌های هاشورخورده قرار می‌گیرند:

و این تعداد برابر است با:



$$n(F \cup V) - n(F \cap V) = 70 - 14 = 56$$

گزینه ۲ جمله‌ی عمومی دنباله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$a_n = \frac{\text{شماره‌ی جمله}}{(\text{شماره‌ی جمله})^2 + 1} \Rightarrow a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{n=7} a_7 = \frac{7}{7^2 + 1} = \frac{7}{50} = \frac{14}{100} = 0,14$$

و جمله‌ی هفتم به ازای $n = 7$ عبارتست از:

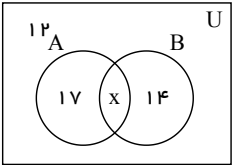
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A) = n(u) - n(A')$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

گزینه ۲ میدانیم:

در صورتی که مجموعه‌ی افرادی که به رشته‌ی فوتبال علاقه دارند را با A و مجموعه‌ی افرادی که به رشته‌ی تنیس علاقه دارند را با B نمایش دهیم، داریم: U مجموعه‌ی مرجع است.



$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)') = 50 - 12 = 38$$

$$n(A - B) = 17, \quad n(B - A) = 14$$

همچنین می‌دانیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (1)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad (2)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(3),(2),(1)} n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A - B) - n(B - A) \Rightarrow n(A \cap B) = 38 - 17 - 14 = 7$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$$

گزینه ۴ می‌دانیم:

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OAB داریم:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = OB^2 \Rightarrow OB = 5$$

به همین طریق در مثلث قائم‌الزاویه OBC نیز داریم:

$$OB^2 + BC^2 = OC^2 \Rightarrow BC^2 = OC^2 - OB^2 \Rightarrow BC^2 = 34 - 25 \Rightarrow BC = 3$$

در نتیجه:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}, \quad \cot \beta = \frac{OB}{BC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \tan \alpha + \cot \beta = \frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{29}{12}$$

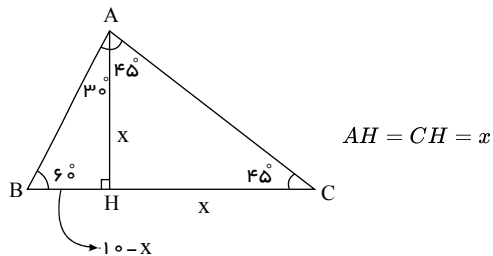
گزینه ۳

می‌دانیم: در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}, \quad \sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}$$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و CH را x می‌نامیم؛ واضح است که طول BH برابر با $x - 10$ خواهد بود.

داریم:



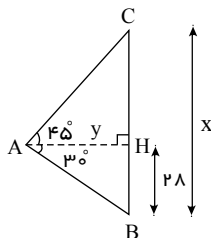
$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10-x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+3}{3} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{3+\sqrt{3}} = 5(3-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 45^\circ} = \frac{5(3-\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 5(\sqrt{18}-\sqrt{6}) = 5\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$$

گزینه ۳

می‌دانیم: در هر مثلث قائم‌الزاویه: $\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$

ارتفاع برج را x در نظر می‌گیریم و داریم:



$BC = x, AH = y$

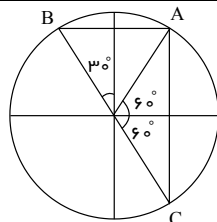
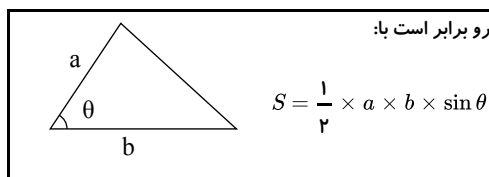
$$\tan 30^\circ = \frac{28}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{28}{y} \Rightarrow y = 28\sqrt{3}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{CH}{y} \Rightarrow 1 = \frac{CH}{y} \Rightarrow CH = y = 28\sqrt{3}$$

$$x = BC = BH + CH = 28 + 28\sqrt{3} = 28(1 + \sqrt{3})$$

گزینه ۱

می‌دانیم: مساحت هر مثلث دلخواه به شکل روبرو برابر است با:



چون BC قطر است.
بنابراین $A = 90^\circ$

$$\begin{cases} \vec{AB} = 2 \cos 60^\circ \\ \vec{AC} = 2 \sin 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \\ AC = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۲ اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = a \times c$ و b را واسطه‌ی هندسی بین a و c می‌نامیم.

$$\left(\frac{\sqrt{x+2}}{3}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x+6=18 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$$

گزینه ۱

در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله‌ی m ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$2, \circ, \circ, \circ, 162$
جمله‌ی اول جمله‌ی پنجم

$$a_5 = a_1 r^4 = 162 \Rightarrow 162 = 2(r^4) \Rightarrow r^4 = 81 = 3^4 \xrightarrow{r>0} r = 3$$

$$2, 2 \times 3, 2 \times 3^2, 2 \times 3^3, 2 \times 3^4 \Rightarrow 2, 6, 18, 54, 162$$

مجموع ۳ واسطه برابر $6 + 18 + 54 = 78$ است.

۱۴

گزینه ۲

سه جمله‌ی ابتدایی این دنباله‌ی هندسی را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه:

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6 \Rightarrow \text{جملات: } \frac{6}{r}, 6, 6r$$

$$\text{مجموع سه جمله‌ی ابتدایی} = 19 \Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \xrightarrow{\times r} 6 + 6r + 6r^2 = 19r$$

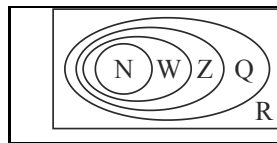
$$6r^2 - 13r + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-13)^2 - 4 \times (6) \times (6) \Rightarrow \Delta = 169 - 144 = 25$$

$$r = \frac{13 \pm 5}{2 \times (6)} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{13+5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4, 6, 9, \frac{27}{2} \text{ قیق} \\ r_2 = \frac{13-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} < 1 \text{ غرق} \end{cases}$$

بنابراین جمله‌ی چهارم برابر $\frac{27}{2}$ است.

۱۵

گزینه ۳



یا $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ می‌دانیم:

بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $N \cap W \cap Q = N$
- ۲) $(W \cap Z) - N = W - Z = \{0\}$
- ۳) $W - (Z \cup N) = W - Z = \emptyset$
- ۴) $(Z - Q) \cup N = \emptyset \cup N = N$

بنابراین تنها گزینه ۳ تھی است.

۱۶

گزینه ۲

می‌دانیم: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$A = \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x + \cos x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

۱۷

گزینه ۳

می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

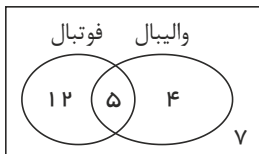
$$n(F) = 17$$

$$n(V) = 9$$

۱۸

$$n(F \cup B) = n(F) + n(V) - n(F \cap V) \Rightarrow 21 = 17 + 9 - n(F \cap V) \Rightarrow n(F \cap V) = 5$$

تعداد کسانی که به حداقل یکی از دو ورزش علاقه‌مند هستند



با توجه به نمودار افرادی که فقط به یکی از دو رشته علاقه دارند برابر است با $12 + 4 = 16$

گزینه ۴

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ و جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a_1 q^{n-1}$
 $d = a_n - a_{n-1}$ قدرنسبت حسابی و $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ قدرنسبت هندسی

$$2, \frac{5}{4}, \dots \Rightarrow d = \frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4}, t_1 = 2$$

$$t_3 = t_1 + 2d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$t_8 = t_1 + 7d = 2 - \frac{7 \cdot 3}{4} = -\frac{13}{4}$$

$$t_{13} = t_1 + 12d = 2 - \frac{12 \cdot 3}{4} = -11$$

دنباله هندسی: $\frac{5}{4} + x, \frac{1}{4} + x, -1 + x, \dots$

شرط تشکیل دنباله هندسی: $b^2 = ac \Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = (x - 1)(x + \frac{5}{4})$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \cancel{x^2} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{21}{16} \Rightarrow x = -\frac{21}{4}$$

$$r = \frac{-\frac{21}{4} + \frac{1}{4}}{-\frac{21}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

قدرنسبت دنباله هندسی

۱۹

گزینه ۳

می‌دانیم: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \theta$ (θ : زاویه بین AB, AC)

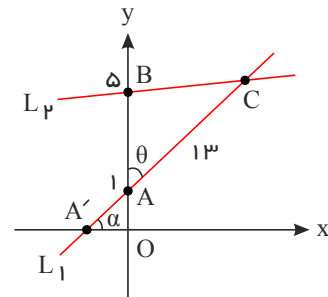
$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه α می‌سازد $\tan \alpha =$

می‌دانیم مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می‌آید:

۲۰

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \theta \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} (5-1) \times 13 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$$



در مثلث AA'O داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \theta, \sin \theta = \frac{OA'}{AA'} \\ \hat{A}' = \alpha, \cos \alpha = \frac{OA'}{AA'} \end{cases} \Rightarrow \sin \theta = \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

با توجه به اینکه شیب خط برابر است با تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور xها، بنابراین کافیت tan alpha را به دست آوریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha > 0} \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1}{(\frac{12}{13})^2} - 1} = \frac{5}{12}$$

گزینه ۴

$$y^5 + 2y^2 - 24y = y(y^4 + 2y^2 - 24) = y(y^2 + 6)(y^2 - 4) = y(y^2 + 6)(y + 2)(y - 2)$$

بنابراین $y - 4$ در عبارت وجود ندارد.

۲۱

گزینه ۴ می‌دانیم $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ است. از آنجائیکه گویاشده هر کسر با خودش برابر است، داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(9 + 3\sqrt{4} + (\sqrt{4})^2)}{x}$$

$$\Rightarrow x = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(9 + 3\sqrt{4} + (\sqrt{4})^2)$$

$$\Rightarrow x = ((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2)(9 + 3\sqrt{4} + (\sqrt{4})^2)$$

$$\Rightarrow x = (3 - 2)(3^2 + 3 \times \sqrt{4} + (\sqrt{4})^2) = 3^2 - (\sqrt{4})^2 = 27 - 4 = 23$$

۲۲

گزینه ۱ می‌دانیم: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{z^a}} = mnz\sqrt{a}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

بررسی گزینه‌ها:

$$1) \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \sqrt{36}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \times 6^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^4}} = \sqrt[4]{6^{\frac{4}{5}}} = \sqrt[20]{6^4} = \sqrt[5]{6^1} = \sqrt[5]{6}$$

$$2) \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \sqrt{6}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \times 6^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^{\frac{5}{2}}}} = \sqrt[4]{6^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[8]{6^1} = \sqrt[8]{6}$$

$$3) \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \sqrt[3]{6}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \times 6^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^{\frac{7}{3}}}} = \sqrt[4]{6^{\frac{7}{15}}} = \sqrt[60]{6^7} = \sqrt[60]{6^7}$$

$$4) \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \sqrt[3]{36}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^2 \times 6^2 \times 6^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{6^{\frac{10}{3}}}} = \sqrt[4]{6^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[12]{6^2} = \sqrt[6]{6^1} = \sqrt[6]{6}$$

۲۳

گزینه ۳ می‌دانیم $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ است.

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۳}} (\sqrt{x})^3 - 3(\sqrt{x})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 3(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 8$$

$$\Rightarrow x - 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 8 \Rightarrow x - \frac{1}{x} - \underbrace{3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_2 = 8$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = 8 + 2 = 10 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 10$$

۲۴

گزینه ۴ می‌دانیم که $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ است.

۲۵

$$\lambda a^3 - a^2 b^2 + \lambda a^2 b^2 - b^2 = a^2(\lambda a^3 - b^2) + b^2(\lambda a^2 - b^2)$$

$$= (\lambda a^3 - b^2)(a^2 + b^2) = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + b^2)$$

بنابراین $2a + b$ در عبارت وجود ندارد.

گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

 n زوج $a = b \leftarrow$ مثبت

داریم: ۲۶

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2}\sqrt{2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$$

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{1})(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdots \underbrace{(3\sqrt{2} - \sqrt{18})(3\sqrt{2} - \sqrt{19})(3\sqrt{2} - \sqrt{20})}_{\text{صفر}} = 0$$

بنابراین:

گزینه ۲

می‌دانیم:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

جواب هر معادله در خود معادله صدق می‌کند بنابراین $x = -2$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$(m-1)x^2 - x - (m^2 + 1) = 0 \xrightarrow{x=-2} 4(m-1) + 2 - (m^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 4m - 4 + 2 - m^2 - 1 = 0 \Rightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \Rightarrow m=1 \text{ غ قی} \\ \text{یا} \\ m-3 = 0 \Rightarrow m=3 \end{cases}$$

جواب $m=1$ غیرقابل قبول است زیرا معادله اصلی را تبدیل به یک معادله درجه ۱ می‌کند که تنها یک جواب دارد.با جایگذاری $m=3$ داریم:

$$m=3 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(2)(-10) = 81 \\ x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \begin{cases} \frac{1+9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{1-9}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases} \end{cases}$$

۲۷

گزینه ۱ ابتدا کسرهای دوم و سوم سمت راست تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}+2}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\text{پس: } \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{3}{x-1} + \frac{2\sqrt{x}+2}{x-1} + \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{x} + 2 + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1}{x-1} = \frac{6 + 3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x}}{x-1} = \frac{6 + 3\sqrt{x} + A}{x-1} \Rightarrow A = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x}$$

۲۸

گزینه ۴

می‌دانیم:

اعداد بین صفر و یک همچنین اعداد کوچکتر از منفی یک، هر چه به توان بزرگتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

۲۹

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$\sqrt[3]{a} > a \xrightarrow{\text{توان ۳}} a > a^3 \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \xrightarrow{\text{توان ۴}} a^4 < 1 \xrightarrow{\times a} a^5 < a \\ \text{یا} \\ a < -1 \xrightarrow{\text{توان ۴}} a^4 > 1 \xrightarrow[\text{a} < 0]{\times a} a^5 < a \end{cases}$$

$$1) \sqrt[3]{a} > a : a = \frac{1}{7} \Rightarrow -1 < a < 0 \text{ نادرست}$$

$$2) \sqrt[3]{a} > a : a = \left(\frac{1}{10}\right)^{15} \Rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^{15}} > \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^{15}} \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^5 > \left(\frac{1}{10}\right)^3 \text{ نادرست}$$

$$3) \sqrt[3]{a} > a : a = -2 \Rightarrow (-2)^4 < -2 \Rightarrow 16 < -2 \text{ نادرست}$$

گزینه ۲

می‌دانیم: بیشترین مقدار تابع (ماکسیمم) زمانی وجود دارد که تقعر تابع رو به پایین باشد و مقدار آن برابر است.

$$S \begin{cases} \frac{-b}{2a} \\ \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} \text{ با عرض رأس سهمی}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ محور تقارن سهمی برابر است با}$$

۳۰

$$y = mx^2 + 4x + m - 3$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \frac{-(16 - 4(m)(m-3))}{4m} = 0 \Rightarrow -16 + 4m^2 - 12m = 0 \\ \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 & m < 0 \\ m = -1 & \xrightarrow{m < 0} m = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$y = -x^2 + 4x - 4 \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = 4x^2 + 2x - 1 \xrightarrow{x=2} 4 \times 4 + 2 \times 2 - 1 = 19$$

گزینه ۳ کل عبارت را A می‌نامیم و داریم:

$$\begin{cases} (24)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 8)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 2^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2^2 \\ 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 \\ (32)^2 = (2^5)^2 = 2^{10} \\ (27)^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} \\ (48)^{-\frac{1}{4}} = (3 \times 16)^{-\frac{1}{4}} = (3 \times 2^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{1}{4}} \times 2^{-1} \end{cases}$$

$$A = \frac{2^2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^5}{2^{10} \times 3^{-1} \times 2^{-1} \times 3^{-\frac{1}{4}}} = \frac{2^9 \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^9 \times 3^{-\frac{5}{4}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}} = 3^{\frac{8+15}{12}} = 3^{\frac{23}{12}}$$

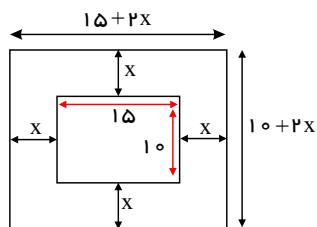
$$A \text{ ریشه بیست و سوم} = \sqrt[23]{A} = A^{\frac{1}{23}} = (3^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{23}} = 3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$$

۳۱

گزینه ۱

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \text{ می‌دانیم:}$$

فاصله هر لبه عکس تا قاب را x فرض می‌کنیم و با توجه به شکل داریم:



$$\text{مساحت قاب} : (15 + 2x)(15 + 2x) = (2x)^2 + (15 + 15)2x + 15 \times 15 = 4x^2 + 50x + 150 = 300$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \Rightarrow x^2 + 12.5x - 37.5 = 0 \Rightarrow (x + 15)(x - 2.5) = 0$$

۳۲

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 15 = 0 \Rightarrow x = -15 \\ x - 2,5 = 0 \Rightarrow x = 2,5 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$\text{محیط قاب: } [(15 + 2x) + (10 + 2x)] \times 2 = [20 + 15] \times 2 = 35 \times 2 = 70$$

گزینه ۱

ریشه هر معادله در خود آن صدق می‌کند

میدانیم: اگر $a < 0$ باشد تعیین علامت عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c < 0$ به شکل زیر است:

x	X ₁	X ₂	
y	-	+	-

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - [x_1, x_2]$$
با توجه به کادر و اینکه بازه $\mathbb{R} - [b, 1]$ جواب معادله $ax^2 + ax + 3 < 0$ است داریم:

$$ax^2 + ax + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = b$$

$$x_1 = 1 \rightarrow a(1)^2 + a(1) + 3 = 0 \Rightarrow a + a + 3 = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -3x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \xrightarrow{x_1=1} b = -2$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{-3}{2} - 2 = \frac{-3 - 4}{2} = \frac{-7}{2}$$

۳۳

گزینه ۱

$$ab > 0 \Rightarrow \begin{cases} a, b > 0 \\ \text{یا} \\ a, b < 0 \end{cases} \text{ می‌دانیم:}$$

$$(x^2 - x - 6)(2x^2 + ax + b) \geq 0$$

عبارت $x^2 - x - 6$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	-2	3	
X ² - X - 6	+	-	+

برای اینکه عبارت مورد نظر همواره مثبت باشد باید تعیین علامتی عیناً مشابه تعیین علامت $x^2 - x - 6$ داشته باشد بنابراین باید ریشه‌های دو عبارت مشابه باشند و به بیان دیگر عبارت $2x^2 + ax + b$ باید ضریبی از $x^2 - x - 6$ باشد.

$$x^2 - x - 6 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 2x - 12 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -12 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2 - (-12) = 10$$

۳۴

گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0), \quad a^r - b^r = (a - b)(a^{r-1} + ab^{r-2} + \dots + b^{r-1})$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 - 2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} \right)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}} = (4^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{4} = 2$$

۳۵

گزینه ۲

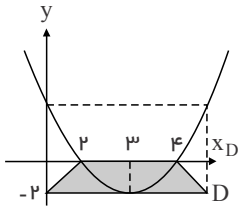
می‌دانیم:

$$\text{در سهمی به معادله } y = ax^2 + bx + c \text{، رأس سهمی نقطه‌ای } S \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right) \text{ است.}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{۲}$$

$$y = 2x^2 - 12x + 16 \Rightarrow S \left(\frac{-b}{2a} = \frac{12}{4} = 3, f(3) = 2 \times 9 - 12 \times 3 + 16 = 18 - 36 + 16 = -2 \right)$$

$$y = 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$$



$$3 - 0 = x_D - 3 \Rightarrow x_D = 6$$

$$S = \frac{(6+2) \times 2}{2} = 8$$

نقاط هم‌ارز روی سهمی نسبت به خط تقارن قرینه‌اند: $y(D) = y(0)$
بنابراین:

مساحت دوزنقه:

۳۶

گزینه ۲

می‌دانیم:

یک رابطه از A به B تابع است هر گاه به هر عضو A فقط یک عضو B نسبت داده شود.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) هر فرد، تنها یک سن دارد بنابراین تابع است.

(۲) هر دانش‌آموز، می‌تواند بیش از یک معلم داشته باشد بنابراین تابع نیست.

(۳) هر فرد، تنها یک شماره شناسنامه دارد بنابراین تابع است.

(۴) هر فرد، تنها یک وزن دارد بنابراین تابع است.

۳۷

گزینه ۲

می‌دانیم:

در نمایش زوج مرتبی، یک رابطه زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه‌های اولشان یکسان نباشد مگر اینکه مؤلفه‌های دومشان نیز یکسان باشد (تکراری باشد)

$$\begin{cases} (5, -4) \\ (5, n^2 - 5n) \end{cases} \rightarrow n^2 - 5n = -4 \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n, 4) \\ (1, n) \end{cases} \xrightarrow{n=1} \begin{cases} (1, 4) \\ (1, 1) \end{cases} \text{ تابع نیست } \Rightarrow n \neq 1$$

$$\begin{cases} (n, 4) \\ (1, n) \end{cases} \xrightarrow{n=4} \begin{cases} (4, 4) \\ (1, 4) \end{cases} \text{ تابع است } \Rightarrow n = 4$$

$$x^3 + xn^2 = 8x^2 \xrightarrow{n=4} x^3 + 16x = 8x^2 \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 8x + 16) = 0 \Rightarrow x(x-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

دو جواب متمایز

۳۸

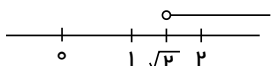
گزینه ۲

$$\left| \frac{x+6}{3x+1} \right| \leq x \xrightarrow{\text{قدرمطلق همواره مثبت}} x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+6 > 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+6}{3x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+6}{3x+1} \right| = \frac{x+6}{3x+1}$$

$$\frac{x+6}{3x+1} \leq x \Rightarrow x+6 \leq x(3x+1) \Rightarrow x+6 \leq 3x^2+x \Rightarrow 6 \leq 3x^2$$

$$\Rightarrow 2 \leq x^2 \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{x > 0} x > \sqrt{2}$$



اعداد صحیح نامنفی که در این مجموعه نیست صفر و ۱ هستند.

۳۹

گزینه ۳

می‌دانیم: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره مثبت است هرگاه

$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره منفی است هرگاه

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - (x-1)(x+1) + x(x+1)}{x(x+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - (x^2 - 1) + x^2 + x}{x^2 + x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x^2 + 1 + x^2 + x}{x^2 + x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \\ +x+1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = -3 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{همواره مثبت} \end{cases}$$

	-1	0	
x^2+x+1	+	+	+
x^2+x	+	0	+
$\frac{x^2+x+1}{x^2+x}$	+	تن	+

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

۴۰

گزینه ۳

می‌دانیم: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه

$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه

$$ax^2 + bx - b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4a(-b) < 0 \Rightarrow b^2 + 4ab < 0 \Rightarrow b(b + 4a) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -4a \Rightarrow \xrightarrow{a < 0} -4a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & -4a & \\ \hline b^2 + 4ab & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0 < b < -4a \Rightarrow b \in (0, -4a)$$

۴۱

گزینه ۴

می‌دانیم: فرم تابع خطی $f(x) = ax + b$ است.

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f(-x) = -ax + b \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(-x) = ax + b - ax + b = 2b = -12 \Rightarrow b = -6$$

$$\begin{cases} f(2) = 4a - 6 \\ f(1) = a - 6 \end{cases} \Rightarrow f(2) = -2f(1) \Rightarrow 4a - 6 = -2(a - 6) \Rightarrow 4a - 6 = -2a + 12 \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = 3x - 6 \Rightarrow f(10) = 3 \times 10 - 6 = 30 - 6 = 24$$

۴۲

گزینه ۴

می‌دانیم: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a, a \geq 0$

$$|x + 2| + b < a \Rightarrow |x + 2| < a - b$$

$$\Rightarrow b - a < x + 2 < a - b \Rightarrow b - a - 2 < x < a - b - 2 \Rightarrow \begin{cases} n = b - a - 2 \\ m = a - b - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n = a - b - 2 + b - a - 2 = -4$$

۴۳

گزینه ۲

می‌دانیم: رأس سهمی به معادله $ax^2 + bx + c$ نقطه $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ است.

$$h > 35 \Rightarrow -5t^2 + 20t + 20 > 35 \Rightarrow 5t^2 - 20t + 15 < 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 < 0 \Rightarrow (t-1)(t-3) < 0 \Rightarrow \begin{cases} t-1 = 0 \Rightarrow t=1 \\ t-3 = 0 \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

۴۴

$$t^2 - 4t + 3 \quad | \quad + \quad - \quad + \quad \Rightarrow 1 < t < 3$$

جسم تا نقطه رأس سهمی بالا می‌رود و پس از آن در حال بازگشت به زمین قرار می‌گیرد بنابراین:

$$S \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \\ f(2) \end{array} \right.$$

بنابراین از لحظه $t = 2$ به بعد، جسم در حال برگشت به زمین است.

$$1 < t < 3 \xrightarrow{t > 2} 2 < t < 3 \Rightarrow t \in (2, 3)$$

گزینه ۲

اگر بازه‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \quad \bullet \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \frac{2m-7}{3} \quad \frac{m+2}{2} \end{array}$$

شرط لازم و کافی برای آن که اجتماع دو بازه \mathbb{R} شود آنست که $\frac{2m-7}{3} \geq \frac{m+2}{2}$. بنابراین:

$$\frac{2m-7}{3} \geq \frac{m+2}{2} \xrightarrow{\times 6} (2m-7) \times 2 \geq (m+2) \times 3 \Rightarrow 4m-14 \geq 3m+6$$

$$\Rightarrow m \geq 20 \Rightarrow m \in [20, +\infty)$$

۴۵

گزینه ۳

می‌دانیم:

حجم کره به شعاع r از رابطه $\frac{4}{3}\pi r^3$ به دست می‌آید.

حجم بزرگ‌ترین مخزن < حجم مخزن میانی < حجم کوچک‌ترین مخزن

$$\frac{32}{3}\pi < \frac{4}{3}\pi r^3 < 36\pi \xrightarrow{\times \frac{3}{4}\pi} 8 < r^3 < 27 \Rightarrow 2 < r < 3$$

تنها گزینه بین ۲ و ۳، گزینه ۳ است یعنی $\sqrt{5}$

۴۶

گزینه ۴

می‌دانیم:

تابع ثابت تابعی است که به تمامی x ها تنها یک y را نسبت می‌دهد. $(f(x) = k)$
تابع همانی تابعی است که به هر عضو دامنه همان عضو در برد را نسبت می‌دهد $(f(x) = x)$

$$\text{تابع ثابت } f: (2, 3) \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow f(2) = f(4) = f(5) = 3$$

$$\text{تابع همانی } g: g(3) = 3$$

$$4f(5) - 5g(3) = 4 \times 3 - 5 \times 3 = 12 - 15 = -3$$

۴۷

گزینه ۲

در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}, -1, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$a_2 = a_1 r^1 = \frac{1}{2}(-2) = -1$$

$$\text{طبق صورت سوال} \rightarrow a_n = 16a_2 \Rightarrow a_n = 16(-1) = -16$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow -16 = \frac{1}{2}(-2)^{n-1} \Rightarrow -512 = (-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow (-2)^9 = (-2)^{n-1} \Rightarrow n-1 = 9 \Rightarrow n = 10 \text{ جمله دهم}$$

۴۸

گزینه ۲

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شی متمايز برابر است با $n!$

کها را یک حرف در نظر می‌گیریم و جایگشت ۴ شی را محاسبه می‌کنیم که برابر ۲۴ است.

۴۹

گزینه ۱

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 2 > 2 \\ x \geq 0 \Rightarrow x + 2 \geq 2 \Rightarrow |x + 2| \geq 2 \Rightarrow -|x + 2| \leq -2 \end{cases}$$

$$R_f = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 2]$$

اعداد صحیح ناموجود در این بازه: $\{-1, 0, 1, 2\}$

۵۰

گزینه ۴

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $n!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

حرف اول و آخر ۱ حالت دارند و ۶ حرف دیگر به ۶! حالت کنار هم قرار می‌گیرند پس $n(A) = 6!$
در مجموع می‌خواهیم ۸ حرف را کنار هم قرار بدهیم که به ۸! حالت امکان‌پذیر است یعنی $n(S) = 8!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6!}{8!} = \frac{6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{1}{56}$$

۵۱

گزینه ۲

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $n!$

برای حرف اول ۲ انتخاب داریم (ی و ن) که به‌ازای هر انتخاب، ۴ حرف دیگر به ۴! حالت کنار هم قرار می‌گیرند بنابراین در مجموع $2 \times 4! = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ حالت داریم.

۵۲

گزینه ۲

یک حرف و یک عدد انتخاب می‌کنیم و در کنار هم می‌گذاریم:

$$\begin{matrix} \text{حرف} & & \text{رقم} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \binom{32}{1} & \times & \binom{10}{1} \times 2 = 10 \times 32 \times 2 = 640 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{در کنار هم گذاشتن (عدد حرف، حرف عدد)} \end{matrix}$$

۵۳

گزینه ۲

باید ۵ عضو از ۸ عضو انتخاب کنیم بطوریکه:

$$\begin{aligned} \text{الف) } a \text{ باشد و } c \text{ و } b \text{ نباشند یعنی ۴ عضو از ۵ عضو یعنی } \binom{5}{4} = 5 \\ \text{ب) } c \text{ باشد و } a \text{ و } b \text{ نباشند یعنی ۴ عضو از ۵ عضو یعنی } \binom{5}{4} = 5 \\ \text{ج) } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ نباشند یعنی ۵ عضو از ۵ عضو یعنی } \binom{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

بنابر اصل جمع کل حالات برابر است با $5 + 5 + 1 = 11$

۵۴

گزینه ۲

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)}{6}$$

برای تشکیل مثلث باید ۳ نقطه انتخاب کنیم بطوریکه هر ۳ روی یک خط نباشند بنابراین باید ۲ نقطه از خط بالا و یک نقطه از خط پایین یا یک نقطه از خط بالا و ۲ نقطه از خط پایین انتخاب کنیم. داریم:

$$\binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} = \frac{4 \times 3}{2} \times 3 + 4 \times \frac{3 \times 2}{2} = 18 + 12 = 30$$

۵۵

گزینه ۳

رمز ۳ رقم دارد که می‌تواند ۱ رقم یا ۲ رقم زوج باشند و کنار هم قرار نگیرند یا تمام ارقام فرد باشند.

بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{جایگاه رقم زوج (اول، دوم، سوم)} \\ I) \text{ رقم زوج } 1: \quad \underbrace{5 \times 5 \times 4 \times 3}_{\text{رقم فرد}} = 300 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \text{رقم زوج (ارقام دوم)} \\ II) \text{ رقم زوج } 2: \quad 5 \times \underbrace{5 \times 4}_{\text{رقم زوج (ارقام اول و سوم)}} = 100 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \text{رقم فرد} \\ III) \text{ رقم فرد } 3: \quad 5 \times 4 \times 3 = 60 \end{aligned}$$

بنابر اصل جمع $300 + 100 + 60 = 460$ حالت داریم

۵۶

گزینه ۲

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

پیشامد فقط یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، یعنی یا A رخ بدهد و B رخ ندهد یا B رخ بدهد و A رخ ندهد یعنی $(A - B) \cup (B - A)$

۵۷

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) =$$

$$n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \xrightarrow{n(A)=2, n(B)=1} n((A - B) \cup (B - A)) = 13 - 2n(A \cap B)$$

$$\xrightarrow{0 \leq n(A \cap B) \leq 2} 13 - 6 \leq 13 - 2n(A \cap B) \leq 13 - 0 \Rightarrow 7 \leq n((A - B) \cup (B - A)) \leq 13$$

گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

۳ مهره قرمز باشند یا ۳ مهره سبز باشند

۵۸

$$\binom{6}{3} + \binom{4}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} = 20 + 4 = 24$$

گزینه ۱

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $n!$

۵۹

دو حرف K را یک حرف و دو حرف O را یک حرف در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های ۵ حرف را محاسبه می‌کنیم که برابر است با $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

گزینه ۲ می‌دانیم:

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

$$(n-1)((n-1)! + (n-2)!) = 120 \Rightarrow (n-1)((n-1)(n-2)! + (n-2)!) = 120$$

$$\Rightarrow (n-1)((n-2)!(n-1+1)) = 120 \Rightarrow (n-1)((n-2)!n) = 120$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)! = 120 \Rightarrow n! = 120 \Rightarrow n = 5$$

۶۰

گزینه ۱

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $n!$

حرف آخر e است. برای آن که حروف e و r و u کنار هم باشند، حروف دوم و سوم از آخر باید r و u باشند که ۲! حالت دارند و برای سایر حروف محدودیتی وجود ندارد و خانه‌های اول تا چهارم توسط آن‌ها پر می‌شوند.

در مجموع طبق اصل ضرب داریم:

$$4! \times 2! \times 1 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 48$$

۶۱

گزینه ۲

در یکی از کاراکترهای (اول یا دوم یا سوم) عدد قرار می‌دهیم که ۴ حالت دارد.

در کاراکتر دیگر می‌توانند حرف یا نماد باشند که هر کدام ۸ حالت دارند.

با توجه به جایگاه عدد، ۳ حالت مختلف می‌توانیم داشته باشیم. داریم:

۶۲

$$3 \times 4 \times \overbrace{8 \times 8}^{\text{نماد یا حرف}} = 768$$

↑ عدد
↓ جایگاه عدد

گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{14}{10} - \binom{5}{0}$$

$$= \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{14}{10} - \binom{5}{0}$$

$$= \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{14}{10} - \binom{5}{0}$$

⋮

$$= \binom{14}{9} + \binom{14}{10} - \binom{5}{0} = \binom{15}{10} - \binom{5}{0} = \frac{15!}{10!5!} - 1 = 3003 - 1 = 3002$$

۶۳

گزینه ۳

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4 \times 3}{7!} = \frac{12}{7 \times 6 \times 5!} = \frac{12}{21 \times 5!} = \frac{4}{7}$$

۶۴

گزینه ۲

ارقام ۰ تا ۹ را در نظر می‌گیریم.

۶۵

$$n(S) = 9 \times 10 = 90 \text{ کل اعداد دو رقمی}$$

$$\begin{cases} \boxed{9} \times \boxed{1} = 9 \text{ اعداد دو رقمی که یکان صفر دارند} \\ \boxed{9} \times \boxed{1} = 9 \text{ دارد} \end{cases}$$

اعداد دو رقمی که یکان

$$\rightarrow n(A) = 18$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ است.}$$

گزینه ۳ ارقام ۱ تا ۹ را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{9} & \boxed{9} & \boxed{9} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \boxed{5} \\ \hline \end{array} \Rightarrow 9 \times 9 \times 9 \times 5 = 3645$$

اعداد حرف

۶۶

گزینه ۳ ابتدا فرض کنید $a > 0$ باشد:

$$D_f = [2, 4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow 2a \leq ax \leq 4a \Rightarrow 2a + b \leq ax + b \leq 4a + b$$

$$R_f = [-5, 3] = [2a + b, 4a + b] \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -5 & (I) \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$

$$-2a = -8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -13 \Rightarrow a + b = -9$$

۶۷

حال فرض کنید $a < 0$ باشد:

$$D_f = [2, 4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow 2a \geq ax \geq 4a \Rightarrow 2a + b \geq ax + b \geq 4a + b$$

$$R_f = [-5, 3] = [4a + b, 2a + b] \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = -5 & (II) \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$2a = -8 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow b = 11 \Rightarrow a + b = 7$$

گزینه ۴ متغیر $\left. \begin{array}{l} \text{قابل شمارش: کمی} \\ \text{غیر پیوسته: گسسته} \end{array} \right\}$ اگر هر عدد a و b را بپذیرد هر مقدار بین آن دو را نیز می‌پذیرد: پیوسته

غیر قابل شمارش: کیفی $\left. \begin{array}{l} \text{دارای ترتیب خاص: ترتیبی} \\ \text{بدون ترتیب خاص: اسمی} \end{array} \right\}$

۶۸

گزینه ۳ پیشامد $B' \cup A$ یعنی آنکه B رخ ندهد یا A رخ بدهد بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۶۹

گزینه ۱ در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله m از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_7 + a_7 = 5 \Rightarrow a_1 r + a_1 r^7 = 5 \Rightarrow a_1 r(1 + r^6) = 5 \quad (I)$$

$$a_7 - a_7 = 15 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r = 15 \Rightarrow a_1 r(r^6 - 1) = 15 \quad (II)$$

(II) را به (I) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r(r^6 - 1)}{a_1 r(1 + r^6)} = \frac{15}{5} \Rightarrow \frac{r^6 - 1}{r^6 + 1} = 3 \Rightarrow \frac{(r^3 + 1)(r^3 - 1)}{r^6 + 1} = 3$$

$$\Rightarrow r^6 - 1 = 3 \Rightarrow r^6 = 4 \Rightarrow r = \pm 2 \xrightarrow{a_n > 0} r = 2$$

$$a_1 r(1 + r^6) = 5 \xrightarrow{r=2} 1 \cdot a_1 = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2}$$

۷۰

گزینه ۱ (۱)

$$\begin{cases} \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\} \\ \mathbb{W} = \{0, 1, \dots\} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{W} \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) = \{0\}$$

(۲)

$$\begin{cases} \mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\} \\ \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{N} \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{W}) = \{ \}$$

۷۱

(۳)

$$w \subseteq Q \Rightarrow (R - Q) \cap w = \{ \}$$

از آنجاییکه اعضای w همگی در Q هستند، پس با کم شدن از Q از اعضای w نیز همگی از \mathbb{R} کم می‌شوند در نتیجه اشتراکشان تهی است.

با استدلال مشابه گزینه ۳ داریم:

$$(۴) \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow (Q - \mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} = \{ \}$$

۷۲

گزینه ۳ از آنجاییکه بازه $[2n - 1, 3n + 14]$ شامل عدد ۵ می‌باشد بنابراین باید $\begin{cases} 2n - 1 < 5 \\ 5 \leq 3n + 14 \end{cases}$ باشد چرا که بازه بالا حداقل باید به صورت $\{5, 5\}$ باشد تا

شامل عدد ۵ شود.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2n - 1 < 5 \Rightarrow 2n < 6 \Rightarrow n < 3 \\ 3n + 14 \geq 5 \Rightarrow 3n \geq -9 \Rightarrow n \geq -3 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq n < 3$$

حداقل مقدار برابر با $m = -3$ است.

گزینه ۲

مجموع سه جمله اول 33 است.مجموع سه جمله بعدی (یعنی a_4 و a_5 و a_6) برابر 60 می باشد. با ساده کردن دو معادله نوشته شده مسأله را حل می کنیم.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 60$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33 \rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 33 \rightarrow 3a_1 + 3d = 33$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 60 \rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 60 \rightarrow 3a_1 + 12d = 60$$

دو معادله را در دستگاه قرار می دهیم و حل می کنیم.

$$\times (-1) \begin{cases} 3a_1 + 3d = 33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a_1 - 3d = -33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases}$$

$$\frac{9d = 27 \rightarrow d = 3}{}$$

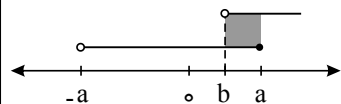
با استفاده از یکی از معادلات a_1 را به دست می آید.

$$3a_1 + 3d = 33 \xrightarrow{d=3} 3a_1 + 9 = 33 \rightarrow 3a_1 = 24 \rightarrow a_1 = 8$$

حال جمله هشتم را محاسبه می کنیم.

$$a_8 = a_1 + 7d = 8 + 7(3) = 8 + 21 = 29$$

گزینه ۱ با رسم بازه‌ها روی محور اعداد، داریم:



$$\text{ناحیه هاشورخورده} : (2, 4] = (b, a] \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2 - 4 = -2$$

دقت کنید اگر $b \geq a$ باشد، اشتراک دو مجموعه تهی خواهد بود؛ بنابراین: $0 < b < a$

گزینه ۱

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + 8 + n(B) - (n(A \cap B) + 6)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + 8 - 6 = 14 + 8 - 6 = 16$$

$$n(A \cup B) = 16$$

۷۵

گزینه ۲ می دانیم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{جمله عمومی دنباله حسابی برابر است با:}$$

$$t_p = t_1 + d = 0 \Rightarrow t_1 = -d$$

$$\begin{cases} t_m = t_1 + (m - 1)d = n^r \\ t_n = t_1 + (n - 1)d = m^r \end{cases} \xrightarrow{t_1 = -d} \begin{cases} -d + (m - 1)d = n^r \\ -d + (n - 1)d = m^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m - 2)d = n^r \\ (n - 2)d = m^r \end{cases}$$

$$(m - 2)d - (n - 2)d = n^r - m^r$$

$$\Rightarrow (m - n)d = n^r - m^r \Rightarrow d = \frac{n^r - m^r}{m - n} = \frac{(n - m)(n + m)}{(m - n)} = -(n + m)$$

$$t_1 = -d = -(-(n + m)) = n + m$$

۷۶

گزینه ۳ می دانیم: جمله عمومی الگوی خطی به فرم $t_n = an + b$ است

$$\begin{cases} t_1 = a + b = 3 \\ t_5 = 5a + b = -5 \end{cases}$$

$$4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a + b = 3 \Rightarrow -2 + b = 3 \Rightarrow b = 5$$

$$t_n = -197 = -2n + 5 \Rightarrow -202 = -2n \Rightarrow n = 101$$

۷۷

گزینه ۳

$$۱۲, \underbrace{\dots\dots\dots}_{۱۰ \text{ واسطه حسابی}}, ۶۸$$

طبق دنباله بالا، جمله اول برابر ۱۲ است و ۶۸ جمله دوازدهم خواهد بود. هم چنین واسطه دوم در واقع جمله سوم خواهد شد و به همین ترتیب واسطه‌های چهارم، هفتم و نهم به ترتیب جملات پنجم، هشتم و دهم هستند، لذا داریم:

$$۵ + ۸ = ۱۲ + ۱ \Rightarrow t_5 + t_8 = t_{12} + t_1 \Rightarrow t_5 + t_8 = ۶۸ + ۱۲ = ۸۰$$

$$۳ + ۱۰ = ۱۲ + ۱ \Rightarrow t_3 + t_{10} = t_{12} + t_1 \Rightarrow t_3 + t_{10} = ۶۸ + ۱۲ = ۸۰$$

مجموع واسطه‌های دوم، چهارم، هفتم و نهم برابر است با:

$$\underbrace{t_3 + t_5 + t_8 + t_{10}}_{۸۰} = ۸۰ + ۸۰ = ۱۶۰$$

۷۸

گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

۱) بازه نیم‌بسته $(-\infty, \frac{5}{2}] \cap (-\frac{3}{2}, +\infty) = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

۲) بازه بسته $[-\frac{7}{4}, 6) - (1, 9) = [-\frac{7}{4}, 1]$

۳) بازه باز $[-5, 4] \cup (-\infty, 12) = (-\infty, 12)$

۴) بازه نیم‌بسته $[-5, 1) - [0, 12) = [-5, 0)$

۷۹

گزینه ۳

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n	$a_9 = (9-1)^2 = 64$
مربع‌های سفید	$(1-1)^2$	$(2-1)^2$	$(3-1)^2$...	$(n-1)^2$	

۸۰

گزینه ۴ می‌دانیم: جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدر نسبت r برابر است با $t_n = t_1 r^{n-1}$

از آنجایی که دنباله کاهشی است، بنابراین $t_1 = 512$ و $t_6 = 121,5$ داریم:

$$\begin{cases} t_6 = t_1 r^5 \Rightarrow 121,5 = 512 r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{121,5}{512} = \frac{243}{1024} = \frac{3^5}{4^5} \Rightarrow r = \frac{3}{4} \\ t_6 = t_1 r^5 = 512 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 512 \times \frac{243}{1024} = 121,5 \end{cases}$$

۸۱

گزینه ۱

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سیاه	$1 = \frac{1 \times 2}{2}$	$3 = \frac{2 \times 3}{2}$	$6 = \frac{3 \times 4}{2}$...	$\frac{n(n+1)}{2}$
تعداد مثلث‌های سفید	$3 = \frac{2 \times 3}{2}$	$6 = \frac{3 \times 4}{2}$	$10 = \frac{4 \times 5}{2}$...	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
	$\frac{n(n+1)}{2}$				
	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$				
	$\frac{n}{n+2} \xrightarrow{n=98} \frac{98}{100}$				

۸۲

گزینه ۳ می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d برابر است با $t_n = t_1 + (n-1)d$

جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدر نسبت r برابر است با $t_n = t_1 r^{n-1}$

در دنباله حسابی، تفاضل هر دو جمله متوالی باهم برابر و برابر قدر نسبت است.

در دنباله هندسی، خارج قسمت هر دو جمله متوالی باهم برابر و برابر قدر نسبت است.

قدرنسبت دنباله حسابی برابر با $d = 6$ است. پس دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$r = 6, a_1 = \frac{8}{27}$$

$$\frac{8}{27}, \frac{16}{9}, \frac{32}{3}, 64, 384, \dots$$

جملات این دنباله از جمله پنجم مضرب صحیح ۳ هستند. از آن جا که دنباله حسابی مورد نظر به صورت $t_n = 4 + 6(n-1)$ است، بنابراین فقط عدد ۶۴ چون صحیح است و مضرب صحیح ۳ نیست، می‌تواند بین دو دنباله مشترک باشد، در نتیجه داریم:

$$4 + 6(n-1) = 64 \Rightarrow 6(n-1) = 60 \Rightarrow n = 11$$

۸۳

گزینه ۱

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با: $a_n = a_1 q^{n-1}$

$$t_1 = 3$$

$$t_5 = 48 = t_1 q^4 \Rightarrow 48 = 3q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{\text{جملات مثبت}} q = 2$$

$$t_6 = t_1 q = 3 \times 2 = 6$$

۸۴

گزینه ۲

یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع a ، از ۶ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است که مساحت هر کدام از آنها $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم} = 6 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = 12\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$\text{محیط ۶ ضلعی منتظم} = P : 6a = 6(2\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

۸۵

گزینه ۲

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d برابر $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.

می‌دانیم: هفده جمله اول اعداد طبیعی هستند و اعداد طبیعی همگی بزرگتر از صفر هستند، بنابراین داریم:

$$t_n > 0 \Rightarrow t_1 + (n-1)d > 0 \Rightarrow 98 + (17-1)d > 0 \Rightarrow 98 + 16d > 0$$

$$\Rightarrow 16d > -98 \Rightarrow d > -6,125 \xrightarrow{\text{جملات مثبت و طبیعی}} d = -6$$

$$t_n = 44 = 98 + (n-1) \times (-6) \Rightarrow 44 = 98 - 6n + 6 \Rightarrow 6n = 60 \Rightarrow n = 10$$

۸۶

گزینه ۲

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d برابر $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.

$$2, 7, 12, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$$

$$8, 11, 14, \dots \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow b_n = 8 + (n-1) \times 3 = 3n + 5$$

جملات مشترک این دو دنباله، دنباله c_n با قدرنسبت ۱۵ (ک.م.م قدرنسبت a_n, b_n یعنی ۵ و ۳) را تشکیل می‌دهد که داریم:

$$c_n = 17 + (n-1) \times 15 = 17 + 15n - 15 = 15n + 2$$

جملات ۳ رقمی c_n :

$$100 \leq c_n \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997$$

$$\Rightarrow \frac{98}{15} \leq n \leq \frac{997}{15} \Rightarrow 6,53 \leq n \leq 66,46 \Rightarrow 7 \leq n \leq 66$$

بنابراین تعداد جملات این دنباله برابر $60 = 66 - 7 + 1$ است.

۸۷

گزینه ۱

جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d برابر است با $a_n = a_1 + (n-1)d$ واسطه هندسی دو عدد c و a عدد b است هرگاه داشته باشیم: $b^2 = ac$

می‌دانیم:

$$aa_{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \right)^2 \Rightarrow (a_1 + 9d)(a_1 + d) = \frac{1}{2} a_1^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 9a_1d + 2a_1d + 9d^2 = \frac{1}{2} a_1^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 11a_1d + 9d^2 = \frac{1}{2} a_1^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 11a_1d + 9d^2 = \frac{1}{2} a_1^2 + 6a_1d + 9d^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a_1^2 + 5a_1d = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} a_1(a_1 + 10d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ \text{یا} \\ a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0 \end{cases}$$

۸۸

گزینه ۴

در دایره مثلثاتی شعاع $r = 1$ است و لذا مجموع مجذور طول و عرض هر نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی برابر یک می‌شود، یعنی $x^2 + y^2 = 1$ در گزینه ۱، ۳ و ۴ این حالت برقرار نیست پس یکی از گزینه‌های ۲، ۴ یا ۵، جواب است. از طرفی در دایره مثلثاتی اگر نقطه (x_p, y_p) مختصات انتهای کمان مربوط به زاویه α باشد، آن‌گاه $\tan \alpha = \frac{y_p}{x_p}$

است. پس:

۸۹

غ. ق. ق. غ. $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$ گزینه ۲،
 غ. ق. ق. ق. $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ گزینه ۴،

گزینه ۲ می‌دانیم: جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r برابر است با: $t_n = t_1 r^{n-1}$

$$\begin{cases} a_r = a_1 q = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow q^r = \frac{-1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = -2\sqrt{2} \\ a_5 = a_1 q^r = \frac{-1}{2} \Rightarrow q^r = \frac{-1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$a_1 q = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow a_1 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{-\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$$

$$a_n = \frac{-1}{2} \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{16} \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{-\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-2^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{n-1} = -\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3} \Rightarrow \left(-2^{\frac{1}{2}-1}\right)^{n-1} = -2^{\frac{1}{2}-3}$$

$$\Rightarrow \left(-2^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = -2^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{-n+1}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow -n+1 = -5 \Rightarrow n = 6$$

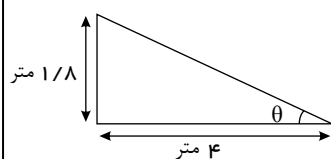
گزینه ۲ همان طور که می‌دانیم مساحت مثلث ABC را می‌توان از روابط زیر پیدا کرد.

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 60^\circ \\ S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 45^\circ \end{cases} \Rightarrow AC \times \sin 60^\circ = BC \times \sin 45^\circ$$

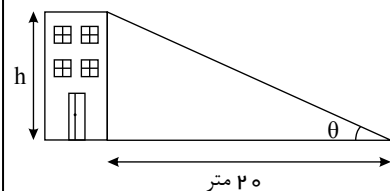
$$\Rightarrow 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = BC \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 30 = \sqrt{2} BC \Rightarrow BC = \frac{30}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = 15\sqrt{2}$$

گزینه ۲ چون خورشید به هردو با یک زاویه می‌تابد، زاویه تشکیل شده در انتهای سایه حسین و سایه خانه یکسان است.

مطابق شکل‌های زیر، اگر $\tan \theta$ را برای هریک از شکل‌ها بنویسیم، داریم:



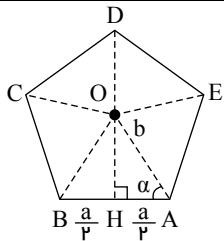
$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{1/8}{4} \Rightarrow \frac{1/8}{4} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 9 \text{ متر} \\ \tan \theta = \frac{h}{20} \end{cases}$$



گزینه ۴ می‌دانیم: اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ$

$$\hat{A}OB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\hat{A}OH = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



$$\alpha = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

$$\cos 54^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{a}{2} = 0.6b \Rightarrow b = \frac{a}{1.2}$$

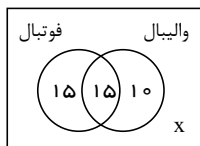
$$\text{مساحت مثلث } AOB = \frac{1}{2} ab \sin 54^\circ = \frac{1}{2} a \times \frac{a}{1.2} \times \frac{8}{10} = \frac{a^2}{3}$$

$$\text{مساحت پنج ضلعی منتظم} = 5 \times \text{مساحت مثلث } AOB = \frac{5}{3} a^2$$

گزینه ۱

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{می دانیم:}$$

با رسم نمودار ون داریم:



$$n(U) = 60$$

$$x = 60 - (15 + 10 + 5) = 30$$

۹۴

گزینه ۲

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a^3 > \sqrt[3]{a} \Rightarrow a^3 - \sqrt[3]{a} > 0 \Rightarrow |a^3 - \sqrt[3]{a}| = a^3 - \sqrt[3]{a}$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a < a^3 \Rightarrow a - a^3 < 0 \Rightarrow |a - a^3| = -a + a^3$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a > \sqrt[3]{a} \Rightarrow a - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |a - \sqrt[3]{a}| = a - \sqrt[3]{a}$$

$$|a^3 - \sqrt[3]{a}| - |a - a^3| - |a - \sqrt[3]{a}| = a^3 - \sqrt[3]{a} - (-a + a^3) - (a - \sqrt[3]{a}) = a^3 - \sqrt[3]{a} + a - a^3 - a + \sqrt[3]{a} = 0$$

۹۵

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

۹۶

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= a^{mn} \\ a^{-b} &= \frac{1}{a^b} \end{aligned} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\left(\frac{1}{16^3}\right)^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 10^{-\frac{4}{3}} = \left(\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times (2 \times 5)^{-\frac{4}{3}}$$

$$\frac{(\sqrt{20})^{\frac{2}{3}} \times (25)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\left(2^2 \times 5\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{-4}{3}} \times 5^{\frac{-4}{3}}}{2^{\frac{-1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{-2}{3}} \times 5^{\frac{-2}{3}}} = \frac{2^{-1} \times 5^{-2}}{2^{-1} \times 5^{-2}} = 2^{-1} \times 5^{-2} = \frac{1}{2 \times 25} = \frac{1}{50}$$

۹۷

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \quad \text{می دانیم:}$$

گزینه ۴

۹۸

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9 + 4 \times \frac{3}{4} = 12 \xrightarrow{a,b>0} a+b = \sqrt{12}$$

$$(a+b)^{-2} = (\sqrt{12})^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2 = \frac{1}{12 \times \sqrt{12}} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{12 \times 12} = \frac{2\sqrt{3}}{12 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{6 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{72}$$

گزینه ۲ می‌دانیم: تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با توجه به رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \Delta > 0 : \text{ریشه حقیقی } 2 \\ \Delta = 0 : \text{ریشه مضاعف } 1 \\ \Delta < 0 : \text{فاقد ریشه} \end{cases}$$

۹۹

$$(x+2)(-x^2+x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ \text{یا} \\ -x^2+x-1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0 \end{cases}$$

ریشه ندارد: $\Delta = 1 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$

گزینه ۳

$$\frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + 2 \tan x = \frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + \frac{2 \sin x}{\cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \sin x + 2 \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x}$$

۱۰۰

$$= \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2 + 2 \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

گزینه ۴ می‌دانیم: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $\Delta < 0$ ، آنگاه معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$mx^2 - mx + 2 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(m)(2) < 0 \Rightarrow m^2 - 8m < 0 \Rightarrow m(m-8) < 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 8 \end{cases}$$

۱۰۱

$$m^2 - 8m \quad \begin{array}{c} | \\ \circ \quad \quad \quad \Lambda \\ + \quad \circ \quad - \quad \circ \quad + \end{array} \Rightarrow m \in (0, 8)$$

گزینه ۳

می‌دانیم: در یک لیگ بین n تیم، بازی انجام می‌شود $\frac{n(n-1)}{2}$.

۱۰۲

باتوجه به رفت و برگشتی بودن بازی‌ها، تعداد بازی‌ها بین n تیم از رابطه $n(n-1)$ به دست می‌آید.

$$n(n-1) = 30 \Rightarrow n = 6$$

گزینه ۴ روش اول:

می‌دانیم: مختصات رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ برابر است با: $S \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$

فاصله در نقاط A و B برابر است با: $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$$y = a^2 x^2 + bx - c^2$$

۱۰۳

نقاط $(2, 0)$ ، $(-3, 0)$ و $(3, 3)$ در معادله سهمی صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\xrightarrow{(2,0)} 4a^2 + 2b - c^2 = 0 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-3,0)} 9a^2 - 3b - c^2 = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(3,3)} 9a^2 + 3b - c^2 = 3 \quad (III)$$

$$(I), (II) : - \begin{cases} 4a^r + 2b - c^r = 0 \\ 9a^r - 3b - c^r = 0 \\ -5a^r + 5b = 0 \Rightarrow 5(b - a^r) = 0 \Rightarrow b - a^r = 0 \Rightarrow b = a^r \end{cases}$$

با جایگذاری $b = a^r$ در معادلات (II) و (III) داریم:

$$\begin{cases} 4b + 2b - c^r = 0 \\ 9b + 3b - c^r = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b - c^r = 0 \\ 12b - c^r = 3 \end{cases}$$

$$6b = 3 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$6b - c^r = 0 \Rightarrow 6b = c^r \xrightarrow{b = \frac{1}{2}} 3 = c^r$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده در معادله اصلی داریم:

$$y = \frac{1}{2}x^r + \frac{1}{2}x - 3$$

$$S \begin{cases} -\frac{b}{2a} \\ f(-\frac{b}{2a}) \end{cases} \Rightarrow S \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ f(\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 3 = -3$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 3 = -3$$

$$\begin{cases} S(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) \\ A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) \end{cases} \Rightarrow |AS| = \sqrt{(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}))^2 + (-\frac{3}{4} - (-\frac{3}{4}))^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1}$$

روش دوم:

چون سهمی مورد نظر دارای ۲ ریشه ۲ و ۳ است، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = a^r(x - 2)(x + 3) \xrightarrow{(r, r)} 3 = a^r(3 - 2)(3 + 3) \Rightarrow a^r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2)(x + 3) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 6) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$$

$$x_{\text{رئس}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{\text{رئس}} = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) - 3$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8} \Rightarrow S' = (-\frac{1}{2}, -\frac{25}{8})$$

$$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) \text{ از } S' \text{ فاصله نقطه} = \sqrt{(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}))^2 + (-\frac{3}{4} - (-\frac{25}{8}))^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

گزینه ۴ می‌دانیم: $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$$A = (\frac{1}{\cos^2 x})^r - 3 \tan^r x (\frac{1}{\cos^2 x}) = (1 + \tan^2 x)^r - 3 \tan^r x (1 + \tan^2 x)$$

۱۰۴

$$A = 1 + 3 \tan^r x + 3 \tan^{2r} x + \tan^{2r} x - 3 \tan^r x - 3 \tan^{2r} x = 1 + \tan^{2r} x$$

گزینه ۲

می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

$$a = \sqrt{6 + \sqrt{20}} = \sqrt{5 + 1 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = |\sqrt{5} + 1| = \sqrt{5} + 1$$

۱۰۵

$$b = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{5 + 1 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1$$

$$a + b = \sqrt{5+1} + \sqrt{5-1} = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

برای مثال فرض کنید $a = -\frac{1}{2}$ باشد و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم؛ داریم:

$$-1 < a < 0 \xrightarrow{\text{مثال}} a = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \text{ (۱) نادرست}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} > \sqrt{-\frac{1}{2}} \text{ (۲) نادرست}$$

$$-2 < -\frac{1}{2} \text{ (۳) درست}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \text{ (۴) نادرست}$$

۱۰۶

گزینه ۳ ریشه‌های سهمی و D و C عرض رأس سهمی هستند؛ بنابراین داریم:

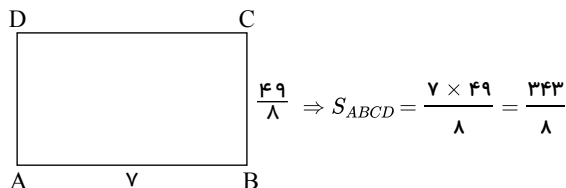
$$y = \frac{-x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 5$$

$$\frac{-x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 5 = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ x_B = 5 \end{cases} \Rightarrow |AB| = 7$$

$$S \text{ (رأس سهمی)} \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{3}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2} \\ f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 5 = \frac{-9 + 18 + 40}{8} = \frac{49}{8} = |CB| \end{cases}$$

باتوجه به اعداد به دست آمده داریم:



۱۰۷

گزینه ۳ می‌دانیم: در معادله $y = ax^2 + bx + c$ مجموع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{c}{a}$ است.ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \quad (I)$$

باتوجه به روابط ریشه‌ها داریم:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها: } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m)}{2} = \frac{m}{2} \\ \text{ضرب ریشه‌ها: } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{2} \end{cases} \quad (II)$$

$$(I), (II) : \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4 \Rightarrow \frac{m^2}{4} - m + 1 = 4 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (m-6)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}$$

طبق صورت مسئله ریشه‌ها حقیقی هستند، پس $\Delta > 0$ که به ازای $m = -2$ برقرار است، پس $m = -2$ قابل قبول است.

۱۰۸

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \Rightarrow \Delta = 28 > 0 \checkmark \\ m = 6 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \times \end{cases}$$

گزینه ۴

می‌دانیم: در صورتی که $0 < a < 1$ داریم:
 $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots$

بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست: $\sqrt[5]{a} > a$

(۲) درست: $\sqrt[3]{-a} > \sqrt{a}$

(۳) درست: $\sqrt[5]{-a} < \sqrt{a}$ (زیرا: $\sqrt[5]{-a} < 0 < \sqrt{a}$)

(۴) نادرست: $-a > \sqrt[3]{-a}$ (زیرا: $\sqrt[3]{-a} < -a \rightarrow \sqrt[3]{-a} > a$)

۱۰۹

گزینه ۳

$$A = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \times \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \times \sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \times \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \sqrt[3]{1 - 2} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

۱۱۰

گزینه ۴

$$3x - 1 < 8 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3 \quad (I)$$

$$-2 < 3x - 1 \Rightarrow 3x + 1 > 0 \Rightarrow 3x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{3} \quad (II)$$

$$(I) \wedge (II) : \frac{-1}{3} < x < 3 \xrightarrow[\frac{-1}{3}]{\text{طرفین}} \frac{-5}{3} < x - \frac{4}{3} < \frac{5}{3} \Rightarrow |x - \frac{4}{3}| < \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

۱۱۱

گزینه ۳

$$x^6 + 4 \leq 4x^3 + x^3 \Rightarrow x^6 - 4x^3 - x^3 + 4 \leq 0 \Rightarrow x^3(x^3 - 4) - (x^3 - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x^3 - 4)(x^3 - 1) \leq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 - 1)(x^2 + 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{(همواره مثبت است و ریشه ندارد.)} \end{cases}$$

	-2	-1	1	2	
$x - 2$	-	-	-	-	+
$x + 2$	-	+	+	+	+
$x^2 - 1$	+	+	-	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
A	+	-	+	-	+

$$\Rightarrow x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = 0$$

۱۱۲

گزینه ۲

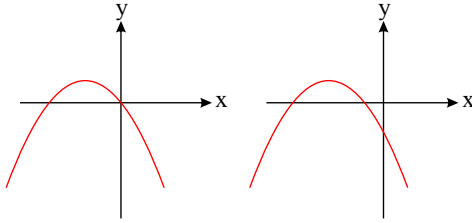
$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = A \xrightarrow{\text{بهر توان ۲}} x^2 y + y^2 x + 2xy\sqrt{xy} = A^2 \Rightarrow xy(x + y + 2\sqrt{xy}) = A^2$$

$$\Rightarrow 4(6 + 4) = A^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{40} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{40}$$

۱۱۳

گزینه ۲

نمودار سهمی مورد نظر باید به یکی از دو صورت مقابل باشد:



$$a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1)$$

پس اولاً ضریب x^2 باید منفی باشد:

$$y = (a - 1)x^2 + (2a - 1)x + a = 0$$

$$\Delta = (2a - 1)^2 - 4(a - 1)a = 1$$

$$x = \frac{-(2a - 1) \pm 1}{2(a - 1)} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{a}{1 - a} \end{cases}$$

$$\frac{a}{1 - a} \leq 0 \Rightarrow a \leq 0 \text{ یا } a > 1 \quad (2)$$

طبق نمودار سهمی باید، نامثبت باشد پس داریم:

$$(1) \cap (2) \rightarrow a \leq 0$$

۱۱۴

طول محل برخورد نمودار با محور x ها را به دست می آوریم:در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی نقطه $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است.اگر x_1, x_2 نقاط برخورد سهمی با محور x ها باشند، محور تقارن سهمی برابر است با: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$

گزینه ۱ می دانیم:

$$x_S = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

رأس سهمی و نیمساز ربع اول منطبق است بنابراین داریم: $S(x, x)$ سهمی محور x ها را در نقاط ۳ و -۱ قطع کرده؛ بنابراین داریم:

$$\text{رأس سهمی: } S(1, 1) \rightarrow y = a(x - 1)^2 + 1$$

$$\text{نقطه } (3, 0) \text{ در سهمی صدق می کند. } 0 = a(3 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 0 = 4a + 1 \Rightarrow 4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 1 \xrightarrow{x=0} y = \frac{-1}{4}(-1)^2 + 1 = \frac{-1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

۱۱۵

گزینه ۳

$$|2x + 1| < x - 1 \Rightarrow \begin{cases} -x + 1 < 2x + 1 \Rightarrow 3x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (I) \\ 2x + 1 < x - 1 \Rightarrow x < -2 \quad (II) \end{cases}$$

$$(III) \quad (|2x - 1| < x - 1 \text{ به شرط نهمان } : x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) = \emptyset$$

۱۱۶

گزینه ۲

$$x - 3 \leq 2x^2 - x - 3 \leq 5x - 1$$

$$(I) : x - 3 \leq 2x^2 - x - 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 - x + 3 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x \geq 0$$

$$\Rightarrow 2x(x - 1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۱۱۷

$2x^2 - 2x$	+	○	-	○	+	$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ (I)
-------------	---	---	---	---	---	--

$$(II): 2x^2 - x - 3 \leq 5x - 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 - 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4(1)(-1) = 9 + 4 = 13 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{13} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$x^2 - 3x - 1$	+	○	-	○	+	$\Rightarrow x \in \left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right]$ (II)
----------------	---	---	---	---	---	--

$$(I) \wedge (II): \left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, 0 \right] \cup \left[1, \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right]: \text{ عدد صحیح } 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ در این مجموعه جواب قرار دارد.}$$

گزینه ۱

باتوجه به شرط تابع نمودار پیکانی داریم:

$$\begin{cases} (m^2, 1) \\ (m^2, m^2) \end{cases} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$\begin{cases} (2m, m^2) \\ (2m, m - 2) \end{cases} \Rightarrow m^2 = m - 2 \Rightarrow m^2 - m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(2) = -7 < 0. \text{ معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

از آن جایی که اشتراک جواب‌های دو معادله تهی است؛ بنابراین پاسخ گزینه ۱ است.

۱۱۸

گزینه ۲

می‌دانیم:

$\frac{-b}{2a}$	رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه S است.
$\frac{-b}{2a}$	
$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	

$$S \left\{ \begin{aligned} \frac{-b}{2a} = 1 &\Rightarrow -b = 2a \Rightarrow b = -2a \text{ (I)} \\ f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = -2 &\Rightarrow a - 2a - \frac{3}{2} = -2 \Rightarrow -a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{(I)} b = -1 \end{aligned} \right.$$

در نتیجه معادله سهمی برابر است با:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

۱۱۹

گزینه ۳

می‌دانیم:

$\frac{-b}{2a}$	محور تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = \frac{-b}{2a}$ است.
$\frac{-b}{2a}$	

$$\text{محور تقارن: } \frac{-(-b)}{2a} = 2 \Rightarrow b = 4a$$

$$y = ax^2 - bx + c \xrightarrow{b=4a} y = ax^2 - 4ax + c \xrightarrow{\text{نقطه } (0,0) \text{ در معادله سهمی صدق می‌کند.}} c = 0$$

۱۲۰

نقطه $(-1, 3)$ در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$y = ax^2 - 4ax \rightarrow 3 = a + 4a \Rightarrow 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

$$b = 4a = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow 15a + 5b + c = 15 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{12}{5} + 0 = 9 + 12 = 21$$

گزینه ۳ می‌دانیم: معادله سهمی به رأس $S(b, h)$ به صورت $y = a(x - b)^2 + h$ است.

$$S(4, 8) : y = a(x - 4)^2 + 8$$

نقطه $(0, 6)$ در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$6 = a(0 - 4)^2 + 8 \Rightarrow 6 = 16a + 8 \Rightarrow 16a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$$y = -\frac{1}{8}(x - 4)^2 + 8 \rightarrow y = 0 \rightarrow -(x - 4)^2 + 64 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 64$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 8 \Rightarrow x = 12 \\ x - 4 = -8 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

پس ریشه‌های معادله $y = 0$ برابر با $x = 12$ و $x = -4$ است. باتوجه به نمودار واضح است گزینه ۳ پاسخ است.

۱۲۱

گزینه ۱ رأس سهمی در ربع چهارم واقع شده است. بنابراین:

رأس سهمی: S

$$\begin{cases} x_S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-2\sqrt{3}}{2m} = \frac{-\sqrt{3}}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \\ y_S < 0 \Rightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{m}\right) = m\left(\frac{-\sqrt{3}}{m}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{m}\right) + (m + 2) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{m} - \frac{6}{m} + m + 2 = \frac{-3}{m} + m + 2 = \frac{m^2 + 2m - 3}{m} < 0$$

$$\xrightarrow{m < 0} m^2 + 2m - 3 > 0 \Rightarrow (m + 3)(m - 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

$m^2 + 2m - 3$		-3		1		$+$	$-$	$+$
		$+$	0	$-$		0	$+$	$+$

$$\Rightarrow m < -3 \text{ یا } m > 1 \xrightarrow{m < 0} m < -3$$

۱۲۲

گزینه ۴ می‌دانیم: در نمایش نموداری، رابطه‌ای تابع است که از هر عضو مجموعه اول، تنها یک پیکان خارج شود.

۱۲۳

گزینه ۳

$$\left. \begin{cases} (2, a + b) \Rightarrow a + b = c + 2 \Rightarrow b - c = 2 - a \\ (2, c + 2) \Rightarrow a + b = c + 2 \Rightarrow b - c = 2 - a \\ (1, 3 + c) \Rightarrow 3 + c = b + 2 \Rightarrow b - c = 1 \\ (1, b + 2) \Rightarrow 3 + c = b + 2 \Rightarrow b - c = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow 2 - a = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$f = \{(2, 1 + b), (-2, b), (2, c + 2), (1, 3 + c), (-2, 3), (1, b + 2)\}$$

$$\begin{cases} (-2, b) \Rightarrow b = 3 \rightarrow b - c = 1 \Rightarrow c = 2 \\ (-2, 3) \end{cases}$$

$$a + b + c = 1 + 3 + 2 = 6$$

۱۲۴

گزینه ۳ می‌دانیم: نمودار یک رابطه زمانی نمایانگر یک تابع است که خطوط موازی محور y ها را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۱۲۵

گزینه ۲ می‌دانیم: رابطه‌ای تابع است که به ازای هر x ، تنها یک y داشته باشیم.

۱۲۶

بررسی گزینه‌ها:

$$1) |x| + |y| = 5 \Rightarrow |y| = 5 - |x| \Rightarrow y = \begin{cases} 5 - x \\ 5 + x \end{cases} \text{ تابع نیست.}$$

$$2) x = 2(y+1)^2 \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow y+1 = \sqrt{\frac{x}{2}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x}{2}} - 1 \text{ تابع است.}$$

$$3) \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{(x-1)^2}{4} \Rightarrow y = \pm \sqrt{4 - \frac{(x-1)^2}{4}} \text{ تابع نیست.}$$

$$4) |xy| = 4 \Rightarrow |x||y| = 4 \Rightarrow |y| = \frac{4}{|x|} \Rightarrow y = \pm \frac{4}{x} \text{ تابع نیست.}$$

گزینه ۴

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+a}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+a}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x(x-1) - (x+1)(x+a)}{x(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - x^2 - (a+1)x - a}{x(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{-(a+2)x - a}{x(x+1)} < 0$$

x	$-\infty$	b	$-\frac{1}{b}$	o	$+\infty$
$-\frac{(a+2)x - a}{x(x+1)}$		+	-	+	-

$$x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -1$$

$$-(a+2)x - a = 0 \xrightarrow{x = -\frac{1}{2}} \frac{(a+2)}{2} - a = 0 \Rightarrow a+2 - 2a = 0 \Rightarrow -2a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

در نتیجه داریم:

$$a - b = 1 - (-1) = 2$$

۱۲۷

گزینه ۳ می‌دانیم: اگر دلتای $(\Delta = b^2 - 4ac)$ معادله درجه دوم $(ax^2 + bx + c = 0)$ صفر باشد، معادله ریشه مضاعف دارد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4m \times 3 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 12m = 0 \Rightarrow m^2 - 14m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 196 - 4 = 192 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{14 + \sqrt{192}}{2} \\ m_2 = \frac{14 - \sqrt{192}}{2} \end{cases} \Rightarrow m_1 + m_2 = 14$$

۱۲۸

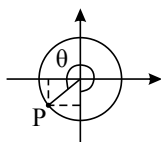
گزینه ۲ می‌دانیم: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود.

رابطه «ب» تابع نیست؛ هر شخص ممکن است به بیش از یک رنگ علاقمند باشد.

۱۲۹

گزینه ۱

شکل مقابل را برای مسئله رسم می‌کنیم:

P نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی با مختصات به فرم $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ است.

۱۳۰

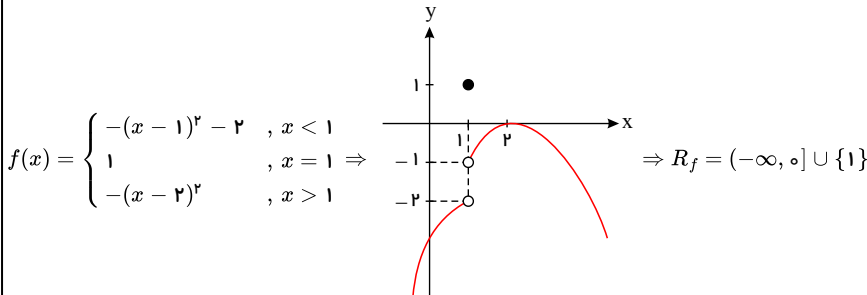
$$\left. \begin{aligned} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \Rightarrow \sin \theta = 2 \cos \theta \quad (*) \\ \text{از طرفی: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{(*)} \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow P \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه ها} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$$

گزینه ۳ می دانیم: برد تابع، تصویر نمودار بر محور y ها است.

تابع را به صورت زیر بازنویسی و هر ضابطه را در دامنه اش رسم می کنیم:



۱۳۱

گزینه ۲ می دانیم: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز برابر است با: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

از هر رشته حداقل یک نفر، یعنی از یک رشته ۲ نفر و از دو رشته دیگر هر کدام ۱ نفر در کمیته حاضر باشند.

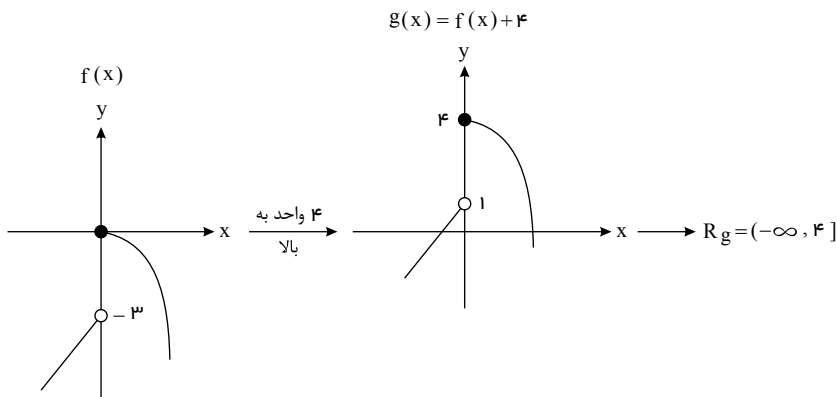
$$\begin{aligned} \text{حالات ممکن} \left\{ \begin{aligned} \text{۱ شیمیدان ، ۱ فیزیکدان ، ۲ ریاضیدان} &\rightarrow \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 1 \times 6 \times 4 = 240 \\ \text{۱ شیمیدان ، ۲ فیزیکدان ، ۱ ریاضیدان} &\rightarrow \binom{5}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} = 5 \times 15 \times 4 = 300 \\ \text{۲ شیمیدان ، ۱ فیزیکدان ، ۱ ریاضیدان} &\rightarrow \binom{5}{2} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 240 + 300 + 120 = 660$$

۱۳۲

گزینه ۳ می دانیم: برد تابع $f(x)$ عبارت است از: تصویر نمودار آن بر محور y ها.

تابع $f(x)$ را رسم می کنیم:



۱۳۳

گزینه ۲ می دانیم: $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ و $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

۱۳۴

$${}^3C(n, 3) = 3 \times \frac{n!}{3!(n-3)!} = 3 \times \frac{n(n-1)(n-2)(\cancel{n-3}!)}{3 \times 2 \times 1 \times \cancel{(n-3)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

$$P(n-1, 2) = \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} = \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)(\cancel{n-3}!)}{\cancel{(n-3)!}} = (n-1)(n-2)$$

$$\frac{{}^3C(n, 3) - P(n-1, 2)}{n-2} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{2} - (n-1)(n-2)}{n-2}$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)}{1} = \frac{n(n-1) - 2(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 28$$

$$\Rightarrow \underbrace{(n-1)(n-2)}_{\text{حاصلضرب دو عد متوالی}} = 56 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

\downarrow \downarrow
 ۸ ۷

متغیرهایی که قابل اندازه گیری اند، متغیرهای کمی نام دارند.
 متغیرهایی که قابل اندازه گیری نیستند، متغیرهای کیفی نام دارند.
 متغیر پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند.
 متغیر گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد.

گزینه ۱ می‌دانیم:

۱۳۵

متغیرهای کیفی اسمی: رنگ مو - انواع اتومبیل

متغیر کمی گسسته: تعداد فرزندان

متغیرهای کمی پیوسته: وزن - میزان مصرف بنزین - معدل یک دانش آموز

متغیر کیفی ترتیبی: کیفیت محصولات - میزان لذت بردن از تماشای تلویزیون

گزینه ۳ عدد مطلوب به صورت زیر است:

$$\frac{2}{2 \text{ یا } 1} \times \underbrace{5 \times 4 \times 3}_{\text{بقیه اعداد}} = 120$$

۱۳۶

گزینه ۴ در گزینه ۴ داریم:

۱۳۷

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2^2 - 2 = 2 \\ f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \neq \frac{f(2)}{2}$$

گزینه ۴

۱۳۸

حالات ممکن

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\text{چهار}} \times \underbrace{\frac{3}{\text{بقیه}} \times \frac{3}{\text{بقیه}}}_{\text{بقیه}} \times \frac{2}{\text{صفر یا ۲}} : 3 \times 3 \times 2 = 18 \\ \frac{1}{\text{دو}} \times \underbrace{\frac{4}{\text{بقیه}} \times \frac{3}{\text{بقیه}}}_{\text{بقیه}} \times \frac{2}{\text{صفر یا ۴}} : 4 \times 3 \times 2 = 24 \\ \frac{2}{\text{یک یا سه}} \times \underbrace{\frac{4}{\text{بقیه}} \times \frac{3}{\text{بقیه}}}_{\text{بقیه}} \times \frac{3}{\text{صفر یا ۴ یا ۲}} : 2 \times 4 \times 3 \times 3 = 72 \end{array}$$

بنابر اصل جمع داریم:

$$\text{مجموع} = 18 + 24 + 72 = 114$$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{گزینه ۱ می‌دانیم:} \quad 139$$

$$2 \times \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5 \times \frac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow \frac{2}{6(n-3)!} = \frac{5}{(n-2)(n-3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{n-2} \Rightarrow n-2 = 15 \Rightarrow n = 17$$

$$C(17, 2) = \frac{17!}{2! \times 15!} = \frac{17 \times 16 \times \cancel{15!}}{2 \times \cancel{15!}} = 17 \times 8 = 136$$

گزینه ۱

$$P(\text{دو نفر هم رشته باشند}) = P(\text{هر دو ریاضی}) + P(\text{هر دو تجربی}) = \binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 10 + 6 = 16$$

$$P(\text{دو نفر هم پایه باشند}) = P(\text{هر دو دهم}) + P(\text{هر دو یازدهم}) = \binom{7}{2} + \binom{2}{2} = 21 + 1 = 22$$

$$\Rightarrow \frac{P(\text{هم رشته})}{P(\text{هم پایه})} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

۱۴۰

گزینه ۲ می دانیم:

$$|u| \geq a \xrightarrow{a > 0} \begin{cases} u \geq a \\ u \leq -a \end{cases}$$

$$\left| \frac{3x-3-4x-2}{6} \right| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \frac{-x-5}{6} \right| \geq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-x-5}{6} \geq \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 6} -x-5 \geq 2 \Rightarrow -x \geq 7 \Rightarrow x \leq -7 \\ \text{یا} \\ \frac{-x-5}{6} \leq -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 6} -x-5 \leq -2 \Rightarrow -x \leq 3 \Rightarrow x \geq -3 \end{cases}$$

۱۴۱

تعداد حالات چیدن r شیء از n شیء متمایز در کنار هم از رابطه $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ به دست می آید.

گزینه ۱ می دانیم:

$$\frac{\text{تعداد کلمات ۳ حرفی}}{\text{تعداد کلمات ۵ حرفی}} = \frac{P(7, 3)}{P(7, 5)} = \frac{7!}{4!} = \frac{2!}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

۱۴۲

گزینه ۳

حالات ممکن

- شامل صفر باشد: $\binom{5}{2} \times \binom{4}{2} \times 4! = 10 \times 6 \times 24 = 60 \times 24$
چیدن ربعها مرزها
- شامل صفر نباشد: $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} \times \underbrace{3 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{چیدن بقیه همه جز صفر}} = 10 \times 4 \times 18 = 40 \times 24$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = 60 \times 24 + 40 \times 18 = 2160$$

۱۴۳

گزینه ۱ دقت کنید که حرف «ی» اگر در آخر کلمه بیاید، نقطه ندارد و در غیر این صورت ۲ نقطه دارد.

۱۴۴

چیدن ۵ حرف

$$\binom{4}{3} \times 5! = 4 \times 120 = 480$$

انتخاب ۳ حرف از ۴ حرف باقی مانده

چیدن همه جز «ی»

$$\binom{4}{2} \times 4! = 6 \times 24 = 144$$

انتخاب ۲ حرف از ۴ حرف باقی مانده

$$5! - 4! = 96 = \text{حالاتی که «ی» در آخر است} - \text{جایگشت ۵ حرف باقی مانده : «ز», «خ» باشند}$$

و «ی» باشد و حرف

آخر هم نباشد.

$$\Rightarrow \text{مجموع} = 480 + 144 + 96 = 720$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

گزینه ۴ می دانیم:

$$\frac{P(A \cup B)}{4} = \frac{P(A')}{2} = \frac{P(B')}{3} = P(A \cap B) = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cup B) = 4x \\ P(A') = 2x \Rightarrow P(A) = 1 - 2x \\ P(B') = 3x \Rightarrow P(B) = 1 - 3x \\ P(A \cap B) = x \end{cases}$$

$$\text{از طرفی: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 4x = (1 - 2x) + (1 - 3x) - x \Rightarrow 4x = 2 - 6x \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = 1 - 2x = 1 - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

۱۴۵

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز
از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می آید.

گزینه ۳ می دانیم:

$$n(S) = \binom{20}{5} = \binom{20}{5}$$

$$P(\text{هیچ جفت}) = 1 - P(\text{حداقل ۱ جفت})$$

$$P(\text{هیچ جفت}) = \binom{20}{5} \times \left(\text{انتخاب ۵ جفت از ۱۰ جفت} \right)$$

که از هر کدام یک لنگه برداریم

$$= \frac{\binom{10}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{20}{5}} = \frac{10!}{5! \times 5!} \times 2^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} \times 32 = \frac{168}{323}$$

$$\Rightarrow P(\text{حداقل ۱ جفت}) = 1 - \frac{168}{323} = \frac{155}{323}$$

۱۴۶

گزینه ۱ کتاب ها به صورت زیر در قفسه قرار گیرند:

۱۴۷

شیمی, ریاضی, ریاضی, شیمی, ریاضی, ریاضی, شیمی, ریاضی, ریاضی, شیمی, ریاضی, ریاضی, شیمی, ریاضی, ریاضی, شیمی

$$\text{تعداد حالات} = 6! \times 4!$$

\downarrow ریاضی \downarrow شیمی

گزینه ۴

$$\text{تعداد حالات} = \binom{6}{4} \times 3! \times 2! = 15 \times 6 \times 2 = 180$$

\downarrow انتخاب ۴ جایگاه برای e, c, b, a \downarrow در سه جایگاه اول e, b, a و c \downarrow جایگشت دو حرف باقی‌مانده در سه جایگاه باقی‌مانده

۱۴۸

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

گزینه ۳ می‌دانیم:

کلمه مطلوب باید دارای «ی» (به شرط آنکه در آخر نباشد) و یکی از حروف «ج» یا «ن» باشد:

$$n(A) = \text{تعداد حالات} = \binom{2}{1} \times \binom{5}{3} \times (5! - 4!) = 1920$$

\downarrow یکی از حروف «ج» و «ن» \downarrow سه حرف دیگر \downarrow کل حالات \downarrow حالتی که «ی» در آخر است

۱۴۹

$$n(S) = \frac{8}{1} \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} = 6720$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1920}{6720} = \frac{2}{7}$$

دقت کنید که اگر «ی» در آخر کلمه ظاهر شود، بی‌نقطه است.

گزینه ۲ چون f تابع ثابت است و عدد ۵ مؤلفهٔ دوم یکی از زوج مرتب‌های تابع است، پس برد آن (۵) می‌باشد. در نتیجه $f(3) = 5$ می‌باشد و چون g تابع همانی است پس $g(-1) = -1$ است، در نتیجه:

۱۵۰

$$f(3) - g(-1) = 5 - (-1) = 6$$

گزینه ۲ می‌خواهیم پیشامد آن که حاصل ضرب اعداد دو طرف کارت مربع کامل باشد را بیابیم. فرض کنید کارتی را انتخاب می‌کنیم که عدد روی آن a و عدد پشت آن $18 + a$ باشد، پس:

$$a(a + 18) = b^2 \Rightarrow a^2 + 18a + 81 = b^2 + 81 \Rightarrow (a + 9)^2 - b^2 = 81 \Rightarrow (a + 9 - b)(a + 9 + b) = 81$$

عدد ۸۱ را به صورت 1×81 یا 3×27 یا 9×9 می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 9 + b = 81, & a + 9 - b = 1 \Rightarrow a = 32, b = 4. & (1) \\ a + 9 + b = 27, & a + 9 - b = 3 \Rightarrow a = 6, b = 12 & (2) \\ a + 9 + b = 9, & a + 9 - b = 9 \Rightarrow a = b = 0. & (3) \end{cases}$$

۱۵۱

در (۱) $a > 30$ می‌باشد که ممکن نیست چون اعداد روی کارت ۱ تا ۳۰ هستند. در (۳) $a = 0$ می‌باشد که ممکن نیست چون a عددی طبیعی است. پس تنها $a = 6$ قابل قبول است.

$$P(A) = \frac{1}{30}$$

بنابراین احتمال این که حاصل ضرب اعداد دو طرف کارت مربع کامل باشد برابر است با: $\frac{1}{30}$

توجه کنید که اگر ۸۱ را به صورت‌های دیگر مانند 9×-9 ، -9×-9 ، -27×-3 یا -3×-81 بنویسیم جواب قابل قبول به دست نمی‌آید.

گزینه ۲ گنجایش آب یک لیوان، دمای یک لامپ، گروه خونی دانش‌آموزان و مراحل تحصیل به ترکیب کمی پیوسته، کمی پیوسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی هستند. پس گزینهٔ صحیح است.

۱۵۲

گزینه ۲

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 32, 56\} \Rightarrow 10 \text{ عضو}$$

۱۵۳

گزینه ۲

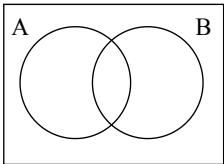
$$\frac{x}{2} \leq 5x - 1 \leq 2x \xrightarrow{\times 2} x \leq 10x - 2 \leq 4x \Rightarrow \begin{cases} 10x - 2 \geq x \\ 10x - 2 \leq 4x \end{cases}$$

۱۵۴

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{9} \\ 6x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{2}{9} \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow A = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right]$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = \left(0, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

گزینه ۳



با توجه به نمودار و رسم شده $A \cup A' = U$ و $B \cap B' = \emptyset$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$ و $A - (A \cap B) = A - B$ و $U - (A \cup B) = (A \cup B)'$ صحیح می‌باشد اما رابطه $A \cup B' = A - B$ نادرست است و شکل درست این رابطه به صورت $A \cap B' = A - B$ است.

۱۵۵

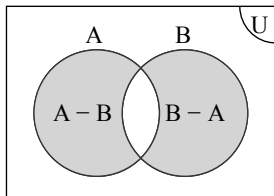
گزینه ۲

اگر A و B را به ترتیب مجموعه دانش آموزانی بنامیم که عضو گروه سرود و تئاتر هستند، هدف از سؤال، به دست آوردن تعداد اعضای مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ است.
 $n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) \Rightarrow 5 = 30 - n(A \cup B) \Rightarrow n(A \cup B) = 25$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $\Rightarrow 25 = 18 + 12 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 5$
 $n[(A \cup B) - (A \cap B)] = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 25 - 5 = 20$

۱۵۶

گزینه ۳

فرض کنیم $X = (A \cup B) - (A \cap B)$ باشد، طبق نمودار و زیر داریم:



$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = X$$

$$X' = U - X \Rightarrow n(X') = n(U) - (n(A - B) + n(B - A) - n((A - B) \cap (B - A)))$$

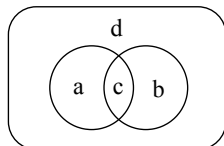
$$\xrightarrow{n((A-B) \cap (B-A))=0} n(X') = 120 - (30 + 50) = 120 - 80 = 40$$

توجه کنید که $A - B$ و $B - A$ دو مجموعه مجزا هستند پس اشتراکشان عضوی ندارد.

۱۵۷

گزینه ۲

فضای کلاس را مطابق نمودار و زیر به ۴ قسمت تقسیم می‌کنیم:



تعداد دانش آموزان مشترک در دو المپیاد: c

تعداد دانش آموزان فقط المپیاد ریاضی: a

تعداد دانش آموزان غیرالمپیادی: d

تعداد دانش آموزان فقط المپیاد شیمی: b

چون ۲۰ نفر یا در هر دو المپیاد ثبت نام کرده‌اند یا در هیچ کدام ثبت نام نکرده‌اند: پس:

۱۵۸

$$c + d = 20 \Rightarrow a + b + \underbrace{c + d}_{20} = 40 \Rightarrow a + b = 20$$

۱۵ نفر فقط در المپیاد ریاضی ثبت نام کرده اند، پس:

$$a = 15 \Rightarrow b = 5$$

دقت کنید که ۵ نفر از دانش آموزان فقط در المپیاد شیمی ثبت نام کرده اند و به این تعداد باید دانش آموزان مشترک بین المپیاد ریاضی و شیمی نیز اضافه شود:

$$b + c = 5 + c$$

چون $c + b = 20$ پس $0 \leq c \leq 20$ در نتیجه:

$$5 \leq 5 + c \leq 25$$

گزینه ۴

$$a_1 = 12 - x, a_2 = y + 2, a_3 = x, a_4 = 12$$

دنباله حسابی است، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} a_4 - a_3 &= 12 - x = d \\ a_3 - a_1 &= x - (12 - x) = 2d \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x - 12 = 2(12 - x) \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow d = 3$$

از طرفی داریم:

$$y + 2 = a_1 + d = 12 - x + d \Rightarrow y + 2 = 12 - 9 + 3 = 6 \Rightarrow y = 4$$

گزینه ۳ بررسی عبارت‌ها:

(الف) مجموعه کسرها مثبت با مخرج ۷۱ نامتناهی

(ب) مجموعه اعداد مرکب ۱۰۰۰۰ رقمی نامتناهی

(ج) مجموعه مضارب طبیعی عدد ۷ نامتناهی

(د) مجموعه پرندگان روی کره زمین نامتناهی

گزینه ۲ اگر مجموعه قبولی‌ها در درس ریاضی و شیمی را به ترتیب با A و B نشان دهیم، داریم:

فقط درس ریاضی

$$\rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 \quad (1)$$

فقط درس شیمی

$$\rightarrow n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 18 \quad (2)$$

همچنین $2n(A) = n(B)$ است، پس:

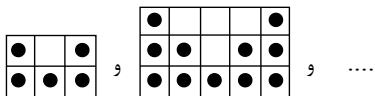
$$\Rightarrow \begin{cases} n(A) - n(A \cap B) = 6 \\ n(B) - n(A \cap B) = 18 \end{cases} \xrightarrow{2n(A)=n(B)} \begin{cases} n(A) - n(A \cap B) = 6 \\ 2n(A) - n(A \cap B) = 18 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2n(A) + 2n(A \cap B) = -12 \\ 2n(A) - n(A \cap B) = 18 \end{cases} \Rightarrow n(A \cap B) = 6 \Rightarrow \begin{cases} n(A) = 12 \\ n(B) = 24 \end{cases}$$

در هیچ یک از دو درس قبول نشده اند.

$$\rightarrow n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) \Rightarrow 15 = n(U) - 12 - 24 + 6 \Rightarrow n(U) = 45$$

گزینه ۴ اگر نقطه‌ها را درون یک شبکه مستطیلی شکل در نظر بگیریم، به راحتی می‌توانیم جمله عمومی دنباله را به دست آوریم.



$$2 \times 3 - 1, 3 \times 4 - 4, \dots, (n+1)(2n+1) - n^2$$

با توجه به جمله عمومی به دست آمده، تعداد نقاط در شکل ۱۹م برابر است با:

$$(19+1)(38+1) - 19^2 = 780 - 361 = 419$$

گزینه ۳ اعداد $5, 12, 21, 32, \dots$ جملات یک دنباله درجه دوم هستند. جمله عمومی این دنباله را به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم. اگر دنباله‌ای با جملات $c_n = t_{n+1} - t_n$ تشکیل دهیم، نشان می‌دهیم که c_n یک دنباله حسابی است.

$$c_n = t_{n+1} - t_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c)$$

$$\Rightarrow c_n = an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c = 2an + a + b$$

دنباله $c_n = 2an + a + b$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $2a$ و جمله اول $2a + b$ است. حال با توجه به اعداد داده شده، جملات دنباله c_n را می‌نویسیم:

$$c_n : 12 - 5, 21 - 12, 32 - 21, \dots \Rightarrow c_n : 7, 9, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} \text{قدرنسبت} = 2 \\ \text{جمله اول} = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ 3a + b = 7 \Rightarrow 3 + b = 7 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

پس $t_n = n^2 + 4n + c$ است و داریم:

$$t_1 = 5 \Rightarrow 1^2 + 4 \times 1 + c = 5 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow t_n = n^2 + 4n$$

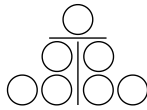
$$\Rightarrow t_{21} = (21)^2 + 4(21) = 441 + 84 = 525$$

$$\Rightarrow t_{21} - t_1 = 525 - 5 = 520$$

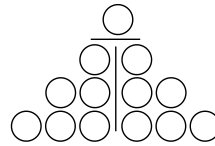
گزینه ۲ با توجه با الگوی زیر اگر دایره بالایی را از شکل حذف کنیم، داریم:



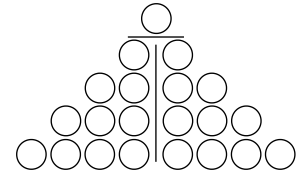
$$2 \times 1 + 1 \\ 2(1) + 1$$



$$2 \times 3 + 1 \\ 2 \times (1 + 2) + 1$$



$$2 \times 6 + 1 \\ 2 \times (1 + 2 + 3) + 1$$



$$2 \times 10 + 1 \\ 2 \times (1 + 2 + 3 + 4) + 1$$

در نتیجه جمله عمومی الگو برابر است با:

$$t_n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1 = n^2 + n + 1 \xrightarrow{n=15} t_{15} = (15)^2 + 15 + 1 = 225 + 15 + 1 = 241$$

۱۶۴

گزینه ۳ قرار دهیم $2n - 1 = 17$ و مقدار n را بیابیم:

$$2n - 1 = 17 \Rightarrow n = 9$$

با جای گذاری $n = 9$ در دنباله $\frac{5n - 6}{(-1)^n + 2n}$ جمله هفدهم به دست می آید.

$$a_{2(9)-1} = \frac{5(9) - 6}{(-1)^9 + 2(9)} = \frac{39}{17}$$

۱۶۵

گزینه ۳ طبق صورت سؤال داریم:

$$\frac{a_{n-4} + a_{n-2} + a_{n-1}}{a_{n+2} + a_{n+4} + a_{n+5}} = 27 \Rightarrow \frac{a_1 q^{n-5} + a_1 q^{n-3} + a_1 q^{n-2}}{a_1 q^{n+1} + a_1 q^{n+3} + a_1 q^{n+4}} = 27$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 q^{n-5}(1 + q^2 + q^3)}{a_1 q^{n+1}(1 + q^2 + q^3)} = 27 \Rightarrow \frac{q^{n-5}}{q^{n+1}} = 27$$

$$\Rightarrow q^{-6} = 27 \Rightarrow q^6 = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \xrightarrow{0 < q} a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

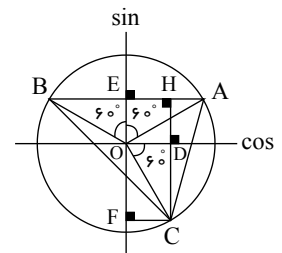
۱۶۶

گزینه ۳

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH$$

$$\left. \begin{aligned} HD = OE \\ \Delta AOE : OE = AO \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow HD = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} CD = OF \\ \Delta OCD : OF = OC \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۱۶۷

$$\Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$AB = AE + BE$$

$$\triangle OAE : AE = OA \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle OBE : BE = OB \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \times \sqrt{3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \approx \frac{4.7}{4} = 1.175 \approx 1.18$$

گزینه ۳ با توجه به آن که $\tan x = 2$ است، داریم:

$$\tan x = 2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \sin x = 2 \cos x$$

حال در عبارت خواسته شده به جای $\sin x$ ها، عبارت $2 \cos x$ را قرار می‌دهیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x \sin x = 2 \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{(2 \cos x)^2 + \cos^2 x}{(2 \cos x)^2 + \cos^2 x} = \frac{4 \cos^2 x + \cos^2 x}{4 \cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{5 \cos^2 x}{5 \cos^2 x} = 1 \quad (*)$$

حال از رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم تا $\cos^2 x$ بدست آید:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1 + 4}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5} \quad (**)$$

با جایگذاری (***) در (*) عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\frac{3}{11 \cos^2 x} = \frac{3}{11 \times \left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{15}{11}$$

۱۶۸

گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$\text{طرف چپ: } \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad \text{طرف راست:}$$

گزینه ۲:

$$\text{طرف چپ: } \sin^2 x - \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) - (1 - \cos^2 x)$$

$$= (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) - (1 - \cos^2 x) = \cos^4 x - \cos^2 x \quad \text{طرف راست:}$$

گزینه ۳:

$$\text{طرف چپ: } \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

$$\text{طرف راست: } \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}\right)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

گزینه ۴:

$$\text{طرف چپ: } \tan^2 x + \cot^2 x = (1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x) - 2$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2(\sin x \cos x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad \text{مخالف طرف راست:}$$

۱۶۹

گزینه ۳

$$a_1, \square, \square, \square, a_5$$

$135 = a_1 q^4$

$$\Rightarrow \frac{a_5}{a_1} = \frac{135}{5} = q^4 \Rightarrow q^4 = 27 \Rightarrow q = 3$$

۱۷۰

گزینه ۱

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}} \times \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}}{\cancel{x+2} - \cancel{x} + 4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۱۷۱

گزینه ۳

نکته:

$$1) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 - \tan^2 \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha > 0} \sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{4}}, \cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{4}} \times \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}$$

۱۷۲

گزینه ۱

نکته:

$$(a \pm b)(a^x \mp ab + b^x) = (a^x \pm b^x)$$

ابتدا از x فاکتور می‌گیریم، سپس با استفاده از اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله عبارت داخل پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$$x^y - 8x = x(x^y - 8) = x(x^y - 2^3) = x(x^y - 2^3)(x^y + 2x^y + 4) = x(x - \sqrt[3]{2})(x + \sqrt[3]{2})(x^y + 2x^y + 4)$$

۱۷۳

گزینه ۱

$$\sqrt[8]{\frac{1}{256}} = \sqrt[8]{\frac{1}{2^8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{256} \text{ ریشه } 8 \text{ ام عدد } \frac{1}{256} \text{ است.}$$

$\frac{1}{256}$ دو ریشه هشتم دارد که $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ هستند، بنابراین:

$$\Rightarrow n = 8, m = -\frac{1}{2} \Rightarrow mn = -\frac{1}{2} \times 8 = -4$$

۱۷۴

گزینه ۴

$$(0, 25)^{x-4} = 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} = 4^2 \Rightarrow (4^{-1})^{x-4} = 4^2 \Rightarrow 4^{4-x} = 4^2$$

$$\Rightarrow x - 4 = 2 \Rightarrow x = 6$$

$$\sqrt[9]{\frac{4}{3}} \times 6 = \sqrt[9]{8} = 8^{\frac{1}{9}} = (2^3)^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

۱۷۵

گزینه ۴ ابتدا پایه‌های دو عدد A و B را یکسان می‌کنیم.

$$A = \sqrt[3]{-8\sqrt[3]{32}} = -\sqrt[3]{2^3 \times 2^5} = -\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = -2^{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

$$B = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{(2^{-1})^{-2}} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} \quad (2)$$

در نتیجه از عبارت (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow (-A \times B)^{\frac{2}{3}} = \left(2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

۱۷۶

گزینه ۳

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac = 1 + 4k < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{4} \Rightarrow k \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \quad (1)$$

$$\Delta_2 = 9 - 4(k+2) \times 1 = 9 - 4k - 8 = 1 - 4k > 0$$

$$\Rightarrow k < \frac{1}{4} \Rightarrow k \in (-\infty, \frac{1}{4}) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} (-\infty, \frac{1}{4}) \cap (-\infty, -\frac{1}{4}) = (-\infty, -\frac{1}{4})$$

۱۷۷

گزینه ۳ با جای‌گذاری $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، عبارت را ساده می‌کنیم.

$$A = 1 - \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{تخله مزدوج}} A = 1 - \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = 1 - 1 + \cos x = \cos x$$

۱۷۸

گزینه ۲

$$2x^2 + 5x = 3 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow a = \frac{5}{4}, b = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{20}{16} + \frac{49}{16} = \frac{69}{16}$$

۱۷۹

گزینه ۳

$$\frac{t^2}{9} - \frac{t}{6} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2t^2 - 3t - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2(-9) = 81$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow |t_1 - t_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{81}}{2} = \frac{9}{2}$$

۱۸۰

گزینه ۲ سه عدد متوالی مضرب ۳ را به صورت $3x - 3, 3x, 3x + 3$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\text{سؤال بنابر سؤال: } (3x - 3)^2 + (3x)^2 + (3x + 3)^2 = 45$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 18x + 9 + 9x^2 + 9x^2 + 18x + 9 = 45$$

$$\Rightarrow 27x^2 + 18 = 45 \Rightarrow 27x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

در نتیجه دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x = 1 \xrightarrow{\text{داده}} 0, 3, 6 \Rightarrow |0 + 3 + 6| = 9$$

۱۸۱

ریشه‌های عبارت‌اند. داریم: $\begin{cases} x = 1 \\ x = b \end{cases}$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 6 + b = 0 \Rightarrow a + b = 6 \\ ab^2 - 6b + b = 0 \Rightarrow ab^2 - 5b = 0 \\ \Rightarrow b(ab - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ غ ق } (b > 1) \\ ab = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ ab = 5 \end{cases} \Rightarrow (a + b)ab = a^2b + b^2a = 6 \times 5 = 30$$

گزینه ۱ در هر تابع از مجموعه A به مجموعه B، به ازای هر x از مجموعه A دقیقاً یک y از مجموعه B نسبت داده می‌شود، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ تابع نیستند و فقط گزینه ۱ تابع است.

۱۸۷

گزینه ۴ روش اول: نقطه (۰، ۲) بر روی سهمی قرار دارد، بنابراین:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2$$

همچنین $x = 2$ و $x = -1$ ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند، در نتیجه:

$$\xrightarrow{x=-1} a(-1)^2 + b(-1) + 2 = 0 \Rightarrow a - b = -2 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{x=2} a(2)^2 + b(2) + 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

$$a - b = -2 \xrightarrow{a=-1} -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c \stackrel{a=-1, b=1, c=2}{=} -x^2 + x + 2$$

باتوجه به معادله سهمی، این سهمی از نقطه (۵، -۱۸) عبور می‌کند.

$$y = -x^2 + x + 2 = -(5)^2 + 5 + 2 = -25 + 7 = -18$$

روش دوم:

ابتدا معادله سهمی را به دست می‌آوریم. چون سهمی محور xها را در (-۱) و (۲) قطع کرده است، پس (-۱) و (۲) ریشه‌های سهمی هستند. بنابراین ضابطه سهمی به شکل

$y = a(x + 1)(x - 2)$ است. برای به دست آوردن a توجه شود که سهمی از نقطه (۰، ۲) عبور می‌کند. بنابراین:

$$y = a(x + 1)(x - 2) \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=2}} 2 = a(1)(-2) \Rightarrow a = -1$$

پس معادله سهمی به شکل $y = -(x + 1)(x - 2) = -x^2 + x + 2$ است. با بررسی گزینه‌ها معلوم می‌شود که سهمی فوق از نقطه (۵، -۱۸) عبور می‌کند.

گزینه ۳ باتوجه به تعریف تابع و نمودار داریم:

$$a^2 + 3a = 4 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=1} f = \{(-1, 4), (-1, 5), (4, 4)\} \quad \text{غ ق (تابع نیست)}$$

$$\xrightarrow{a=-4} f = \{(-1, 4), (4, 0), (4, 4)\} \quad \text{غ ق (تابع نیست)}$$

در نتیجه به ازای هیچ مقدار a رابطه یک تابع است.

۱۸۹

گزینه ۳

باید $y = 3x^2 + mx + 1$ همواره بزرگتر از $y = 2x^2 + x - 2$ باشد. یعنی:

$$3x^2 + mx + 1 > 2x^2 + x - 2 \Rightarrow 3x^2 - 2x^2 + mx - x + 1 + 2 > 0 \Rightarrow x^2 + (m - 1)x + 3 > 0$$

پس $x^2 + (m - 1)x + 3$ باید همواره مثبت باشد؛ پس برای این منظور باید Δ آن منفی و ضریب x^2 مثبت باشد. ضریب x^2 برابر یک و مثبت است. پس فقط کافی است $\Delta < 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m - 1)^2 - 4(1)(3) = m^2 - 2m + 1 - 12 = m^2 - 2m - 11 < 0$$

برای حل نامعادله $\Delta < 0$ عبارت درجه ۲ بر حسب m را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه آن را به دست می‌آوریم. پس ابتدا Δ را به دست آوریم:

$$m^2 - 2m - 11 = 0$$

جدول تعیین علامت زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-11) = 48 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{48}}{2} = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3} \\ m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{48}}{2} = \frac{2 - 4\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

۱۹۰

$m^2 - 2m - 11$		m_2		m_1		
	+	○	-	○	+	

باتوجه به جدول جواب برابر است با:

$$\Rightarrow \text{جواب : } 1 - 2\sqrt{3} < m < 1 + 2\sqrt{3}$$

گزینه ۲ در نامعادله داده شده داریم:

$$\begin{cases} 3x + 1 < 1 - x \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow x < 0 \\ 1 - x < x + 5 \Rightarrow -4 < 2x \Rightarrow -2 < x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 < x < 0 \Rightarrow x \in (-2, 0) = (a, b) \Rightarrow a = -2, b = 0$$

۱۹۱

از طرفی:

$$|3x + a| < b + 1 \xrightarrow{a=-2, b=0} |3x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < 3x - 2 < 1 \xrightarrow{+2} 1 < 3x < 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} < x < 1$$

گزینه ۲ نکته: اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

طبق تعریف تابع داریم:

$$\begin{cases} (1, -3a) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است}} -3a = a^3 - 4 \Rightarrow a^3 + 3a = 4 \Rightarrow (3a + a^3, 2b + 7) = (4, 2b + 7) \\ (1, a^3 - 4) \in f \\ (4, 2b + 7) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است}} 2b + 7 = 5 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1 \\ (4, 5) \in f \end{cases}$$

۱۹۲

گزینه ۴ هر فرد گروه خون منحصر به فردی دارد.

نکته: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: هر عدد طبیعی بی‌شمار عدد اول بزرگ‌تر از خودش دارد.

گزینه ۲: |x| را می‌توان به x یا -x نسبت داد مگر زمانی که x = 0 باشد که در این صورت -x = x = 0 است.

گزینه ۳: ممکن است بعضی از افراد چند برادر داشته باشند.

۱۹۳

گزینه ۴ برای آن که عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m + 2)^2 - 4(4)(1) = m^2 + 4m + 4 - 16 = m^2 + 4m - 12$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 < 0$$

جدول تعیین علامت را برای $m^2 + 4m - 12$ رسم می‌کنیم.

$$m^2 + 4m - 12 = (m + 6)(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 2 \end{cases}$$

$m^2 + 4m - 12$		$-\infty$	-6	2	$+\infty$
	+	○	-	○	+

۱۹۴

بنابراین برای آن که $\Delta < 0$ باشد باید $-6 < m < 2$ باشد.

برای عبارت $y = x^2 + 3x + m$ ، Δ را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(m) = 9 - 4m$$

می‌دانیم که $-6 < m < 2$ است در نتیجه:

$$-6 < m < 2 \xrightarrow{\times 4} -24 < 4m < 8 \xrightarrow{\times (-1)} -8 < -4m < 24 \xrightarrow{+9} 1 < 9 - 4m < 33 \rightarrow 1 < \Delta < 33$$

از آن‌جا که دلتای این عبارت همواره مثبت است، دو ریشه حقیقی دارد پس هم ممکن است صفر شود، هم منفی و هم مثبت.

گزینه ۴

$$|x - 2| - 1 \geq 0 \Rightarrow |x - 2| \geq 1$$

$$\Rightarrow x - 2 \geq 1 \text{ یا } x - 2 \leq -1 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq 1$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

۱۹۵

گزینه ۲ از جدول تعیین علامت $P(x)$ معلوم می‌شود که صورت کسر $\frac{ax+1}{2x+1} - 3$ فاقد ریشه است. یعنی:

۱۹۶

$$P(x) = \frac{ax+1}{2x+1} - 3 = \frac{(a-6)x-2}{2x+1}$$

برای این که $(a-6)x-2$ ریشه نداشته باشد، باید $a-6=0$ باشد. پس $a=6$ است. خودبه خود b نیز ریشه مخرج $P(x)$ است. یعنی $b = -\frac{1}{2}$ پس $ab = -3$.

گزینه ۲ اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت وجود نداشته باشد.

$$\begin{cases} (1, 2) \in f \\ (1, a^2 - a) \in f \end{cases} \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

به ازای $a = -1$ داریم:

$$f = \{(1, 2), (2, b), (-1, 3), (-1, 4)\}$$

که تابع نیست زیرا به ازای ورودی -1 ، دو تا خروجی داریم:

به ازای $a = 2$ داریم:

$$f = \{(1, 2), (2, b), (-1, 3), (1, 2), (2, 4)\}$$

به ازای ورودی 2 باید یک خروجی داشته باشیم پس $b = 4$.

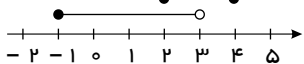
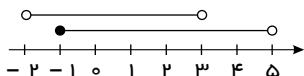
$$f = \{(1, 2), (2, 4), (-1, 3)\}$$

$$f \text{ برد تابع} = \{2, 4, 3\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای برد } f = 2 + 4 + 3 = 9$$

۱۹۷

گزینه ۲ شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$(-2, 3) \cap (-1, 5) \text{ با توجه به محور زیر } [-1, 3] \text{ است:}$$



و با توجه به شکل مقابل $[2, 4] - [-1, 3] = [-1, 2]$ برابر با $[-1, 2]$ است.

پس گزینه ۲ صحیح است.

۱۹۸

گزینه ۱ تابع خطی را به صورت $y = ax + b$ در نظر می‌گیریم که x زمان طی شده و y فاصله از شهر B است.

$$x = 2 \Rightarrow y = 320 \Rightarrow 320 = 2a + b$$

$$x = 6 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 6a + b$$

دو رابطه فوق را از هم کم می‌کنیم:

$$320 = -4a \Rightarrow a = -80$$

با جایگذاری $a = -80$ در رابطه دوم خواهیم داشت:

$$0 = 6(-80) + b \Rightarrow b = 480$$

تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = -80x + 480$$

برای به دست آوردن فاصله دو شهر A و B ، $x = 0$ قرار می‌دهیم، زیرا فاصله قطار را تا شهر B ، هنگامی که قطار در شهر A است، مشخص می‌کند.

$$y = -80(0) + 480 \Rightarrow y = 480$$

۱۹۹

گزینه ۲ ابتدا باید فرجه‌ها را برابر کنیم، یعنی:

$$\sqrt[6]{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} \times \sqrt[6]{7 + 2\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{5 + 2 - 2\sqrt{10}} \times \sqrt[6]{7 + 2\sqrt{10}} \Rightarrow \sqrt[6]{(7 - 2\sqrt{10})(7 + 2\sqrt{10})}$$

۲۰۰

$$\Rightarrow \sqrt[6]{(49 - 40)} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{3}$$

۱	۳	۳۵	۲	۶۹	۳	۱۰۳	۴	۱۳۷	۴	۱۷۱	۱
۲	۳	۳۶	۲	۷۰	۱	۱۰۴	۴	۱۳۸	۴	۱۷۲	۳
۳	۱	۳۷	۲	۷۱	۱	۱۰۵	۲	۱۳۹	۱	۱۷۳	۱
۴	۲	۳۸	۲	۷۲	۳	۱۰۶	۳	۱۴۰	۱	۱۷۴	۱
۵	۱	۳۹	۲	۷۳	۲	۱۰۷	۳	۱۴۱	۲	۱۷۵	۴
۶	۴	۴۰	۳	۷۴	۱	۱۰۸	۳	۱۴۲	۱	۱۷۶	۴
۷	۲	۴۱	۳	۷۵	۱	۱۰۹	۴	۱۴۳	۳	۱۷۷	۳
۸	۲	۴۲	۴	۷۶	۲	۱۱۰	۳	۱۴۴	۱	۱۷۸	۳
۹	۴	۴۳	۴	۷۷	۳	۱۱۱	۴	۱۴۵	۴	۱۷۹	۲
۱۰	۳	۴۴	۲	۷۸	۳	۱۱۲	۳	۱۴۶	۳	۱۸۰	۳
۱۱	۳	۴۵	۲	۷۹	۲	۱۱۳	۲	۱۴۷	۱	۱۸۱	۲
۱۲	۱	۴۶	۳	۸۰	۳	۱۱۴	۲	۱۴۸	۴	۱۸۲	۴
۱۳	۲	۴۷	۴	۸۱	۴	۱۱۵	۱	۱۴۹	۳	۱۸۳	۳
۱۴	۱	۴۸	۲	۸۲	۱	۱۱۶	۳	۱۵۰	۲	۱۸۴	۱
۱۵	۲	۴۹	۲	۸۳	۳	۱۱۷	۲	۱۵۱	۲	۱۸۵	۴
۱۶	۳	۵۰	۱	۸۴	۱	۱۱۸	۱	۱۵۲	۲	۱۸۶	۱
۱۷	۲	۵۱	۴	۸۵	۲	۱۱۹	۲	۱۵۳	۲	۱۸۷	۱
۱۸	۳	۵۲	۲	۸۶	۲	۱۲۰	۳	۱۵۴	۲	۱۸۸	۴
۱۹	۴	۵۳	۲	۸۷	۲	۱۲۱	۳	۱۵۵	۳	۱۸۹	۳
۲۰	۳	۵۴	۲	۸۸	۱	۱۲۲	۱	۱۵۶	۲	۱۹۰	۳
۲۱	۴	۵۵	۲	۸۹	۴	۱۲۳	۴	۱۵۷	۳	۱۹۱	۲
۲۲	۴	۵۶	۳	۹۰	۲	۱۲۴	۳	۱۵۸	۲	۱۹۲	۲
۲۳	۱	۵۷	۲	۹۱	۲	۱۲۵	۳	۱۵۹	۴	۱۹۳	۴
۲۴	۳	۵۸	۲	۹۲	۲	۱۲۶	۲	۱۶۰	۳	۱۹۴	۴
۲۵	۴	۵۹	۱	۹۳	۴	۱۲۷	۴	۱۶۱	۲	۱۹۵	۴
۲۶	۴	۶۰	۲	۹۴	۱	۱۲۸	۳	۱۶۲	۴	۱۹۶	۲
۲۷	۲	۶۱	۱	۹۵	۲	۱۲۹	۲	۱۶۳	۳	۱۹۷	۲
۲۸	۱	۶۲	۲	۹۶	۳	۱۳۰	۱	۱۶۴	۲	۱۹۸	۲
۲۹	۴	۶۳	۳	۹۷	۳	۱۳۱	۳	۱۶۵	۳	۱۹۹	۱
۳۰	۲	۶۴	۳	۹۸	۴	۱۳۲	۲	۱۶۶	۳	۲۰۰	۲
۳۱	۳	۶۵	۲	۹۹	۲	۱۳۳	۳	۱۶۷	۳		
۳۲	۱	۶۶	۳	۱۰۰	۳	۱۳۴	۲	۱۶۸	۳		
۳۳	۱	۶۷	۳	۱۰۱	۴	۱۳۵	۱	۱۶۹	۴		
۳۴	۱	۶۸	۴	۱۰۲	۳	۱۳۶	۳	۱۷۰	۳		

