

یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر "رو" بیاید آنگاه تاس می‌ریزیم. اگر "پشت" بیاید دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال، حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ است؟

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

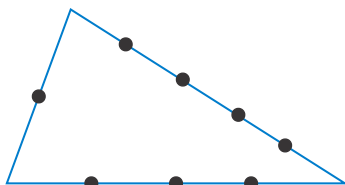
$$\frac{5}{12} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{7}{24} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

چهار نقطه از هشت نقطه مشخص شده در شکل زیر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد با استفاده از این چهار نقطه بتوانیم یک چهار ضلعی محدب بسازیم؟



$$\frac{7}{13} \quad (1)$$

$$\frac{5}{13} \quad (2)$$

$$\frac{24}{35} \quad (3)$$

$$\frac{18}{35} \quad (4)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید، ۳ قرمز و ۲ آبی، سه تا مهره به تصادف با هم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک مهره سفید است ولی همه مهره‌ها هم‌رنگ نیستند؟

$$\frac{5}{6} \quad (2)$$

$$\frac{13}{14} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

از بین مجموعه اعداد متوالی $\{51, 52, \dots, 300\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۶ یا بر ۷ بخش‌پذیر است ولی مضرب ۴۲ نیست؟

$$0/26 \quad (2)$$

$$0/31 \quad (4)$$

$$0/24 \quad (1)$$

$$0/28 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۵

چهار زوج (زن و شوهر) در یک ردیف کنار هم نشسته‌اند. احتمال اینکه هر شخصی در کنار همسر خود بنشیند چقدر است؟

$$\frac{2 \times 4!}{8!} \quad (2)$$

$$\frac{4!}{8!} \quad (1)$$

$$\frac{2^4 \times 4!}{8!} \quad (4)$$

$$\frac{(4!)^2}{8!} \quad (3)$$

تالیفی عزیزالله علی اصغری

۶

سکه‌ای را ۵ مرتبه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال تعداد "رو"های ظاهرشده کمتر از تعداد "پشت"های ظاهرشده است؟

$$\frac{17}{32} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{7}{16} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

تالیفی عزیزالله علی اصغری

۷

در ظرفی ۳ مهره سفید و ۴ مهره آبی و در ظرف دیگر ۵ مهره سفید و ۲ مهره آبی وجود دارد. از هر ظرف یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند، کدام است؟

$$\frac{22}{49} \quad (2)$$

$$\frac{23}{49} \quad (1)$$

$$\frac{4}{49} \quad (4)$$

$$\frac{3}{49} \quad (3)$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

۸

چهار عکس مختلف را به تصادف داخل سه پاکت مختلف قرار داده‌ایم. احتمال اینکه حداقل یک پاکت خالی باشد، چند است؟

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{5}{9} \quad (4)$$

$$\frac{4}{9} \quad (3)$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

۹

از بین ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز به تصادف ۱ مهره بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. سپس مهره دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{13}{28} \quad (2)$$

$$\frac{13}{32} \quad (1)$$

$$\frac{3}{28} \quad (4)$$

$$\frac{5}{14} \quad (3)$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۶

۱۰

در پرتاب دو سکه، چند پیشامد غیرحتمی وجود دارد؟

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$15 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز در کیسه‌ای موجود است. اگر سه مهره با جایگذاری از این کیسه بیرون آوریم، احتمال آنکه فقط دو مهره قرمز باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{۳۶}{۳۴۳}$ (۲) $\frac{۱}{۱۲}$
 (۳) $\frac{۱۰۸}{۳۴۳}$ (۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶

در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

- (۱) $۰/۱۲$ (۲) $۰/۱۵$
 (۳) $۰/۱۸$ (۴) $۰/۲۴$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

خانواده‌ای دارای ۶ فرزند است. احتمال آنکه تعداد دختران این خانواده برابر n باشد، $\frac{۵}{۱۶}$ است. مقدار n کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
 (۳) ۴ (۴) ۵

مدارس برتر ایران علوم تجربی دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

سه سکه را پرتاب می‌کنیم و همگی پشت ظاهر می‌شوند. چند پیشامد متمایز رخ داده است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۵
 (۳) ۳۱ (۴) ۱۲۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

- (۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ (۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$
 (۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ (۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

اعداد ۱ تا ۱۰ را روی ۱۰ کارت نوشته‌ایم. اگر ۳ کارت را با جایگذاری از بین ۱۰ کارت خارج کنیم، احتمال اینکه حداکثر عددی که خارج می‌شود برابر ۷ باشد، کدام است؟ (کارت شماره ۷ حداقل یک بار خارج شود)

- (۱) $۰/۱۲۷$ (۲) $۰/۲۱۶$
 (۳) $۰/۳۴۳$ (۴) $۰/۵۱۲$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

عددی به تصادف از بین اعداد مجموعه $\{1, 2, \dots, 200\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه این عدد مضرب ۳ یا ۴ باشد ولی مضرب ۱۲ نباشد، کدام است؟

(۲) $\frac{5}{42}$

(۱) $\frac{5}{36}$

(۴) $\frac{5}{5}$

(۳) $\frac{5}{47}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

از بین ۴ دانش‌آموز ریاضی و ۴ دانش‌آموز تجربی یک گروه ۴ نفری انتخاب می‌کنیم. اگر در گروه از هر دو رشته داشته باشیم، چقدر احتمال دارد که تعداد ریاضی و تجربی‌های گروه برابر باشد؟

(۲) $\frac{20}{35}$

(۱) $\frac{18}{35}$

(۴) $\frac{1}{17}$

(۳) $\frac{9}{17}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

سکه‌ای را ۶ مرتبه پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی تعداد "رو"های ظاهر شده کمتر از تعداد "پشت"های ظاهر شده است؟

(۲) $\frac{13}{32}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{11}{32}$

(۳) $\frac{21}{64}$

تالیفی عزیزالله علی اصغری

۷۰ درصد دانش‌آموزان یک کلاس عضو حداقل یکی از دو گروه فوتبال و بسکتبال هستند و ۴۵ درصد آن‌ها عضو حداکثر یکی از این دو گروه هستند. چند درصد دانش‌آموزان فقط عضو یکی از دو گروه هستند؟

(۲) ۲۵

(۱) ۱۵

(۴) ۴۵

(۳) ۳۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

رامتین، میلاد و ۶ نفر دیگر دور یک میز گرد می‌نشینند، با چه احتمالی بین رامتین و میلاد فقط یک نفر قرار دارد؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{7}$

(۳) $\frac{1}{7}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۴

خانواده ای چهار فرزند دارد. احتمال آنکه سه فرزند اول دختر باشد چند برابر احتمال آن است که فقط سه فرزند اول دختر باشند؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۲

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

داده‌های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟

۲۳

- (۱) $0/4$
 (۲) $0/48$
 (۳) $0/52$
 (۴) $0/6$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک دوم داخل ۱۳۹۵

در سه پرتاب یک سکه، پیشامد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. پیشامد کدامیک از گزینه‌ها مستقل از A است؟
 A : حداکثر یک بار "رو" در سه بار پرتاب سکه ظاهر شود.

۲۴

- (۱) سکه اول "رو" بیاید.
 (۲) روآمدن در دو پرتاب اول
 (۳) تمام سکه‌ها یکسان ظاهر شوند.
 (۴) پرتاب دوم و سوم "پشت" بیاید.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات $0/2$ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

۲۵

- (۱) ۲۲۹
 (۲) ۲۳۲
 (۳) ۲۳۴
 (۴) ۲۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

میانگین و انحراف معیار ۲۰ داده آماری به ترتیب ۳۰ و ۴ است. اگر داده‌های ۳۵، ۲۵، ۳۲، ۲۸ و ۳۰ به این داده‌ها اضافه شود، واریانس ۲۵ داده جدید کدام است؟

۲۶

- (۱) $15/21$
 (۲) $15/22$
 (۳) $15/12$
 (۴) $15/13$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳ نفر با هم در مسابقه‌ای شرکت می‌کنند. احتمال برنده شدن نفر اول $0/4$ ، نفر دوم $0/5$ و نفر سوم $0/1$ است. اگر این ۳ نفر، دو بار با هم مسابقه دهند، احتمال اینکه در این مسابقات فقط نفر دوم یا سوم برنده شود، کدام است؟

۲۷

- (۱) ۱۶
 (۲) ۳۶
 (۳) ۲۴
 (۴) ۴۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

آزمایش‌های انجام‌شده روی امید و زهرا نشان‌دهنده این است که احتمال بهبود امید پس از عمل پیوند قلب $\frac{5}{6}$ و احتمال بهبود زهرا پس‌ازاین عمل $\frac{4}{5}$ است. اگر آن‌ها تحت عمل پیوند قلب قرار گیرند، چقدر احتمال دارد فقط یکی از آن‌ها بهبود یابد؟

۲۸

- (۱) $0/1$
 (۲) $0/2$
 (۳) $0/3$
 (۴) $0/4$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۳

۲۹ در دو پیشامد مستقل A و B می‌دانیم $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ است. در این صورت حاصل $P(A) + P(B')$ برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{1}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۰ افراد A, B, C در یک آزمون به ترتیب به احتمال $\frac{3}{5}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{5}$ مردود می‌شوند اگر هر سه آزمون دهند، به چه احتمالی هر سه قبول می‌شوند؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{9}{4}$
(۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{7}{9}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۵

۳۱ اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه‌ی اضلاع مربع‌هایی ۱۵ و $\frac{2}{5}$ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

- (۱) ۲۲۷ (۲) ۲۲۹
(۳) ۲۳۲ (۴) ۲۳۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۳۲ در یک همایش اقتصاد هفت دکتر سخنرانی می‌کنند. چقدر احتمال دارد که فرد N حتماً بعد از فرد T و فرد P نیز بعد از فرد N سخنرانی کند؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{6}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

۳۳ در ۱۲ داده‌ی آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ است، ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{9}$
(۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۴ اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، حاصل $P(A \cup B) - P(A)$ کدام است؟

- (۱) $P(B)P(A')$ (۲) $P(B')P(A)$
(۳) $P(B')P(A')$ (۴) $P(A)P(B)$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۳

چهار رقم ۰، ۲، ۳ و ۴ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم، با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می‌شود؟

۳۵

- (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{7}{9}$
 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{5}{12}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۴

در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ است. ضریب تغییرات، کدام است؟

۳۶

- (۱) ۰/۲۲۵ (۲) ۰/۲۷۵
 (۳) ۰/۳۲۵ (۴) ۰/۳۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آن‌ها ۵ است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

۳۷

- (۱) ۱۲۴ (۲) ۱۳۴
 (۳) ۱۴۹ (۴) ۱۶۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

از کیسه‌ای شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، سه مهره به تصادف، یکی پس از دیگری خارج می‌کنیم. در چند حالت هیچ دو مهره متوالی خارج شده هم‌رنگ نیستند؟

۳۸

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۲۷۹
 (۳) ۱۴۰ (۴) ۳۶۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A' \cup B') = P(A)P(B') + P(A')$ ، آنگاه احتمال آنکه فقط A رخ دهد، کدام است؟

۳۹

- (۱) $P(A)P(B')$ (۲) $P(A) - P(B')$
 (۳) $P(A) - P(B)$ (۴) $P(A)$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۳

در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

۴۰

- (۱) $\frac{11}{56}$ (۲) $\frac{17}{56}$
 (۳) $\frac{13}{56}$ (۴) $\frac{15}{56}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

می‌دانیم که رمز یک کارت اعتباری بانکی چهاررقمی با ارقام متمایز ۵، ۲، ۴ و ۱ ساخته شده و مضرب ۶ است. احتمال درست وارد کردن این رمز برای دفعه اول چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{5}{12}$
 (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{12}$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

چهار تاس را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که دو جفت متمایز بین آن‌ها ایجاد شود؟

- (۱) $\frac{1}{216}$ (۲) $\frac{5}{72}$
 (۳) $\frac{5}{216}$ (۴) $\frac{1}{72}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴

یک جامعه به اندازه ۱۲ و واریانس $12/6$ ، با جامعه دیگری به اندازه ۲۴ و واریانس $7/2$ ، تشکیل جامعه جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه جدید کدام است؟

- (۱) $2/9$ (۲) 3
 (۳) $3/1$ (۴) $3/2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند به گونه‌ای که احتمال وقوع A دو برابر احتمال وقوع B است و $P(A - B) = \frac{3}{8}$ ، آنگاه $P(B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۳

در کلاس یازدهم ریاضی مدرسه‌ای ۲۵ نفر تحصیل می‌کنند. معدل ترم اول هیچ‌کدام از آن‌ها یکسان نشده است. دو دانش‌آموز را به نوبت و به تصادف صدا می‌کنیم. اگر معدل نفر دوم کمتر از نفر اول باشد، احتمال اینکه نفر اول شاگرد اول کلاس باشد، چند درصد است؟

- (۱) 8 (۲) 4
 (۳) 5 (۴) 1

تالیفی علیرضا رواگرد

۴۶ در ۲۵ داده آماری به کمک چارک‌ها داده‌ها را به ۴ دسته با میانگین‌های ۴، ۸، ۱۰ و ۱۲ تقسیم می‌کنیم. اگر میانگین کل داده‌ها برابر با $۸/۵۴$ باشد، میانه کدام است؟

- (۱) $۹/۲۵$ (۲) $۹/۵$
(۳) $۹/۷۵$ (۴) ۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۴۷ یک فضای نمونه‌ای Ω عضو دارد. اگر a عضوی از این فضای نمونه باشد و همین a به‌عنوان نتیجه آزمایش مشاهده شده باشد، چه تعداد پیشامد می‌تواند رخ داده باشند؟

- (۱) ۲^n (۲) ۲^{n-1}
(۳) ۲^{n+1} (۴) ۲^{n^2}

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳

۴۸ جعبه‌ای شامل ۴ مهره آبی و k مهره قرمز است. ۲ مهره به تصادف و پشت سر هم و با جایگذاری از جعبه خارج می‌کنیم. در صورتی که احتمال غیرهم‌رنگ بودن مهره‌ها $\frac{۲}{۹}$ باشد، k کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
(۳) ۴ (۴) ۵

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

۴۹ تمامی جایگشت‌های ۵ حرفی abcde را در نظر بگیرید. اگر بدانیم a همواره قبل از b قرار دارد، با چه احتمالی a اولین حرف از کلمه ساخته شده است؟

- (۱) $\frac{۱}{۵}$ (۲) $\frac{۲}{۵}$
(۳) $\frac{۱}{۶}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۵۰ میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشند. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) $۰/۲۵$ (۲) $۰/۲۷$
(۳) $۰/۲۸$ (۴) $۰/۳۳$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۱ میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها $۶۵/۴۴$ است. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) $۰/۱۲$ (۲) $۰/۱۵$
(۳) $۰/۲$ (۴) $۰/۲۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. احتمال کدام گزینه کمتر است؟

- (۱) فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم دختر باشد.
 (۲) فرزندان هم‌جنس باشند.
 (۳) حداقل یکی دختر باشد.
 (۴) حداکثر دو تا پسر باشند.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۳

۱٪ از افراد جامعه‌ای سرطان دارند. در یک نمونه از آزمایش فهمیدند اگر فردی سرطان داشته باشد، به احتمال ۸۰٪ دستگاه عکس‌برداری آن را تشخیص می‌دهد. اگر سرطان نداشته باشد، به احتمال ۱۰٪ ممکن است دستگاه اشتباه تشخیص سرطان برای او داده باشد. دستگاه عکس‌برداری تشخیص داده فردی سرطان دارد. چقدر احتمال دارد تشخیص دستگاه درست باشد؟

$$\begin{array}{ll} \frac{8}{107} & (۱) \\ \frac{8}{99} & (۳) \\ \frac{99}{107} & (۲) \\ \frac{71}{99} & (۴) \end{array}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ و ۱ بیاید یک سکه، اگر ۴ و ۳ بیاید دو سکه و اگر ۵ و ۶ بیاید دو تاس دیگر را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل یک خط ظاهر شود؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3} & (۱) \\ \frac{1}{9} & (۳) \\ \frac{2}{3} & (۲) \\ \frac{5}{12} & (۴) \end{array}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴

ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه می‌باشند. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{25}{63} & (۱) \\ \frac{10}{21} & (۳) \\ \frac{26}{63} & (۲) \\ \frac{11}{21} & (۴) \end{array}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

در جعبه A سه مهره سفید و دو مهره سیاه و در جعبه B دو مهره سفید و تعدادی مهره سیاه وجود دارد. از یکی از جعبه‌ها به تصادف مهره‌ای خارج می‌کنیم و با احتمال $\frac{1}{15}$ این مهره سیاه است. تعداد کل مهره‌های جعبه B چند تا است؟

$$\begin{array}{ll} 3 & (۱) \\ 5 & (۳) \\ 4 & (۲) \\ 6 & (۴) \end{array}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۳

از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه دو مهره خارج می‌کنیم و در کیسه دیگری شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه می‌اندازیم. حالا از کیسه دوم مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

$$\frac{33}{84} \quad (2)$$

$$\frac{35}{84} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{87}{168} \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در ظرف A، ۵ مهره قرمز و ۱۵ مهره سفید و در ظرف B، ۷ مهره قرمز و ۱۳ مهره آبی وجود دارد. از ظرف A، ۱۰ مهره و از ظرف B، ۱۲ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم، سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال این مهره قرمز است؟

$$\frac{7}{20} \quad (2)$$

$$\frac{67}{220} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ سیاه و در کیسه‌ای دیگر ۴ مهره سفید و ۲ سیاه داریم. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ اگر مضرب ۳ آمد، از کیسه اول و در غیراین صورت از کیسه دوم ۲ مهره برمی‌داریم. با کدام احتمال این ۲ مهره هم‌رنگ نیستند؟

$$\frac{593}{1260} \quad (2)$$

$$\frac{167}{315} \quad (4)$$

$$\frac{673}{1260} \quad (1)$$

$$\frac{168}{315} \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در پرتاب یک تاس، اگر عدد اول ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند، در غیر این صورت ۳ تیر رها می‌کند. اگر احتمال موفقیت در هر تیر رها شده، $\frac{3}{4}$ باشد، با کدام احتمال فقط یک بار موفقیت حاصل می‌شود؟

$$\frac{1}{64} \quad (2)$$

$$\frac{3}{32} \quad (4)$$

$$\frac{3}{128} \quad (1)$$

$$\frac{3}{16} \quad (3)$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

$$\frac{3}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{14} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

دو کیسه داریم. در کیسه اول ۳ مهره سفید و ۴ سیاه و در کیسه دوم ۵ مهره سفید داریم. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن مهره‌ای بیرون می‌آوریم. آن مهره را کنار می‌گذاریم و این کار را دوباره تکرار می‌کنیم. احتمال آنکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{7} & (1) \\ \frac{4}{7} & (3) \\ \frac{3}{7} & (2) \\ \frac{5}{14} & (4) \end{array}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در جعبه اول ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی و در جعبه دوم ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. از جعبه اول ۲ مهره و از جعبه دوم ۳ مهره داخل جعبه سوم قرار می‌دهیم. حال از جعبه سوم مهره‌ای خارج می‌کنیم. اگر این مهره قرمز باشد، احتمال آنکه از جعبه اول داخل جعبه سوم شده باشد چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{15}{41} & (1) \\ \frac{16}{41} & (3) \\ \frac{5}{8} & (2) \\ \frac{17}{40} & (4) \end{array}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید دقیقاً سه سکه دیگر را پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال آنکه دقیقاً یک بار رو ظاهر شود، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} & (1) \\ \frac{11}{16} & (3) \\ \frac{3}{8} & (2) \\ \frac{5}{8} & (4) \end{array}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

فرض کنید احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر دو برابر احتمال انتقال آن به فرزند دختر باشد. اگر والدین حامل این نوع بیماری در انتظار فرزند باشند و با احتمال $\frac{17}{40}$ این فرزند سالم باشد، آنگاه احتمال انتقال این بیماری به فرزند دختر چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} 0/1 & (1) \\ 0/3 & (3) \\ 0/2 & (2) \\ 0/21 & (4) \end{array}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳



گزینه ۳

۱

می‌دانیم هر سکه دو حالت دارد پس احتمال ظاهر شدن هریک از حالت‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است، همچنین در پرتاب یک تاس، با احتمال $\frac{2}{6}$ عدد ظاهرشده مضرب ۳ خواهد بود. باتوجه به صورت سؤال اگر در پرتاب سکه "رو" بیاید، تاس می‌ریزیم و اگر "پشت" بیاید، دوباره سکه پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم حداکثر در پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ باشد؛ بنابراین باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد:
حالت اول: در اولین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، عدد ظاهرشده مضرب ۳ باشد.

$$P(x=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

حالت دوم: در اولین پرتاب سکه، "پشت" و در دومین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود.

$$P(x=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{12}$$

حالت سوم: در اولین و دومین پرتاب سکه، "پشت" و در سومین پرتاب سکه، "رو" بیاید سپس با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود.

$$P(x=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{24}$$

بنابراین داریم:

$$P(x \leq 3) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{4+2+1}{24} = \frac{7}{24}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گزینه ۳

۲

تعداد کل حالت‌های انتخاب چهار نقطه از میان این هشت نقطه برابر $n(S) = \binom{8}{4} = 70$ است. برای آنکه بتوانیم با چهار نقطه انتخاب‌شده یک چهار ضلعی محدب بسازیم، باید از هر ضلع مثلث حداکثر دو نقطه انتخاب کنیم:

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{1}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 48$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{48}{70} = \frac{24}{35}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{4}{1} \binom{5}{2}}_{1 \text{ سفید و ۲ غیر سفید}} + \underbrace{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}_{2 \text{ تا سفید و ۱ غیر سفید}} = 4 \times 10 + 6 \times 5 = 40 + 30 = 70$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

عددی مضرب ۴۲ است که هم بر ۶ و هم بر ۷ بخش پذیر باشد. اگر پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۶ را با A و بخش پذیر بودن آن بر ۷ را با B نشان دهیم، هدف محاسبه $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = 300 - 51 + 1 = 250$$

تعداد اعداد بخش پذیر بر ۶ برابر است با:

$$n(A) = \left[\frac{300}{6} \right] - \left[\frac{50}{6} \right] = 50 - 8 = 42$$

بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{42}{250}$$

تعداد اعداد بخش پذیر بر ۷ برابر است با:

$$n(B) = \left[\frac{300}{7} \right] - \left[\frac{50}{7} \right] = 42 - 7 = 35$$

بنابراین داریم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{35}{250}$$

تعداد اعداد بخش پذیر بر ۴۲ برابر $n(A \cap B)$ است:

$$n(A \cap B) = \left[\frac{300}{42} \right] - \left[\frac{50}{42} \right] = 7 - 1 = 6$$

بنابراین:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{6}{250}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{42}{250} + \frac{35}{250} - \frac{12}{250} = \frac{65}{250} = \frac{13}{50} = 0/26$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

تعداد کل حالات برابر با جایگشت ۸ نفر (۴ زوج) است: $n(S) = 8!$
 حال اگر تمامی زوج‌ها را یک بسته در نظر بگیریم، ۴ بسته داریم که داخل هر یک زن و شوهر نیز می‌توانند باهم جابه‌جا شوند، پس:

$$n(A) = 4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 4! \times 2^4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 2^4}{8!}$$

تالیفی عزیزالله علی اصغری

پرتاب ۵ بار سکه، حالات مساوی ندارد؛ یعنی یا "پشت" بیشتر می‌آید و یا "رو". با توجه به تقارن بین "رو" و "پشت" احتمال رخداد هر یک برابر $\frac{1}{2}$ است. پس گزینه "۱" صحیح است.

تالیفی عزیزالله علی اصغری

در انتخاب مهره‌ها باید توجه داشت که از هر طرف فقط یک مهره انتخاب می‌کنیم:

$$P = \frac{\text{انتخاب از رنگ‌های یکسان}}{\text{انتخاب دو مهره از دو طرف}} = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{7}{1} \binom{7}{1}} = \frac{23}{49}$$

\downarrow \downarrow
 انتخاب از طرف دوم انتخاب از طرف اول

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

با کمک اصل متمم، ابتدا احتمال آن را به دست می‌آوریم که هیچ‌کدام از پاکت‌ها خالی نباشد:

$$P = \frac{\text{هیچ پاکتی خالی نباشد}}{\text{کل حالت‌ها}} = \frac{\text{در یک پاکت دقیقاً دو عکس باشد}}{\text{کل حالت‌ها}}$$

$$= \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1} \times 2!}{3^4}$$

\uparrow \uparrow
 انتخاب دو عکس که باهم در پاکت باشند انتخاب پاکتی که دو عکس دارد
 جابه‌جایی دو عکس دیگر $\rightarrow \times 2!$
 \downarrow
 هر عکس سه حالت دارد

$$\Rightarrow P(\text{هیچ پاکتی خالی نباشد}) = 1 - P(\text{حداقل یک پاکت خالی باشد})$$

$$= 1 - \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1} \times 2!}{3^4} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

$$\frac{\overset{\text{اولی سفید}}{۵}}{۸} \times \frac{\underset{\text{دومی سفید}}{۴}}{۷} + \frac{\overset{\text{اولی قرمز}}{۳}}{۸} \times \frac{\underset{\text{دومی قرمز}}{۲}}{۷} = \frac{۵}{۱۴} + \frac{۳}{۲۸} = \frac{۱۳}{۲۸}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۶

به خود S پیشامد حتمی می‌گوییم. پیشامدهای غیرحتمی یعنی تمام پیشامدهای ممکن به جز خود S که تعداد آن‌ها برابر $1 - 2^{n(S)}$ است. فضای نمونه‌ای که $n(S) = 2 \times 2 = 4$ عضو دارد. پس تعداد پیشامدهای غیرحتمی، $15 = 2^4 - 1$ تا است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$4 \text{ مهره آبی و } 3 \text{ مهره قرمز} \Rightarrow \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$$

$$= 3 \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} \right) = \frac{108}{343}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{60 + 3}{28 \times 15} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

هر دو سفید هر دو سیاه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

می‌دانیم $n(S) = 2^6 = 64$ است. تعداد حالاتی که n فرزند دختر است برابر $\binom{6}{n}$ پس:

$$\frac{\binom{6}{n}}{64} = \frac{5}{16} \Rightarrow \binom{6}{n} = \frac{5}{16} \times 64 = 20$$

می‌دانیم $\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$ و $\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$ و $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ پس فقط $n = 3$ می‌تواند باشد که با محاسبه $\binom{6}{3} = 20$ درستی جواب حاصل می‌شود.

مدارس برتر ایران علوم تجربی دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه $2^3 = 8$ عضو دارد. برآمد حاصل از پرتاب سه سکه "پشت، پشت، پشت" است. هر پیشامدی که شامل این برآمد باشد، رخ داده است. می‌دانیم در پرتاب سه سکه $2^8 = 256$ پیشامد متمایز داریم؛ پس تعداد پیشامدهایی که شامل "پشت، پشت، پشت" است برابر با $2^7 = 128$ تا است و هر پیشامدی که شامل این عضو باشد، رخ داده است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$P_{\text{کل}} = P(1 \text{ مهره قرمز، ۳ مهره سفید}) + P(1 \text{ مهره قرمز، ۲ مهره سفید، ۱ مهره سیاه})$$

$$= \frac{\binom{2}{1} \binom{7}{2} \binom{5}{1}}{\binom{14}{4}} + \frac{\binom{2}{1} \binom{7}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{2 \times \frac{7 \times 6}{2} \times 5 + 2 \times \frac{7!}{3! \times 4!}}{\frac{14!}{4! \times 10!}}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 + 2 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}}{14 \times 13 \times 12 \times 11 / (4 \times 3 \times 2)}$$

$$P_{\text{کل}} = \frac{210 + 70}{7 \times 13 \times 11} = \frac{40}{13 \times 11} = \frac{40}{143}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

تعداد کل حالات برابر 10^3 است. برای شمارش حالت مطلوب، حالت‌های زیر را داریم:

$$\text{فقط یکی از کارت‌ها ۷ باشد} = \binom{3}{1} \times 6^2 = 3 \times 36 = 108$$

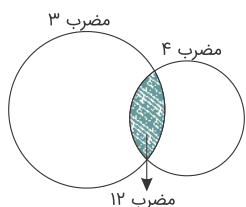
$$\text{دوتا از کارت‌ها ۷ باشد} = \binom{3}{2} \times 6 = 3 \times 6 = 18$$

$$\text{هر سه کارت برابر ۷ باشد} = 1$$

بنابراین $n(A) = 108 + 18 + 1 = 127$ و باتوجه به اینکه $n(S) = 1000$ است، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{127}{1000} = 0/127$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی



$$\text{تعداد اعداد مضرب ۳: } \left[\frac{۲۰۰}{۳} \right] = ۶۶$$

$$\text{تعداد اعداد مضرب ۴: } \left[\frac{۲۰۰}{۴} \right] = ۵۰$$

$$\text{تعداد اعداد مضرب ۱۲: } \left[\frac{۲۰۰}{۱۲} \right] = ۱۶$$

برای پیدا کردن تعداد اعدادی که مضرب ۳ یا ۴ هستند ولی مضرب ۱۲ نیستند، باید از اجتماع اعداد مضرب ۳ و ۴ مضرب ۱۲ را حذف کنیم:

$$n(A) = \underbrace{(۶۶ + ۵۰ - ۱۶)}_{\text{مضرب ۳ یا ۴ باشند}} - ۱۶ = ۶۶ + ۵۰ - ۲(۱۶) = ۸۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۸۴}{۲۰۰} = \frac{۴۲}{۱۰۰} = ۰/۴۲$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در این احتمال شرطی داریم:

(از هر دو گروه داشته باشیم؛ تعداد ریاضی و تجربی برابر باشد) P

$$= \frac{\binom{۴}{۲} \binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۴} - \binom{۴}{۴} - \binom{۴}{۴}} = \frac{۶ \times ۶}{۶۸} = \frac{۹}{۱۷}$$

هر ۴ تا تجربی باشند هر ۴ تا ریاضی باشند

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

در ۶ مرتبه پرتاب سکه، سه حالت ممکن است روی دهد:

تعداد روهای ظاهر شده بیشتر باشد، تعداد "رو"ها و "پشت"ها با هم برابر باشد، یعنی ۳ مرتبه "رو" و ۳ مرتبه "پشت" ظاهر شود یا تعداد "پشت"های ظاهر شده بیشتر باشد.

می‌دانیم در کل $۲^۶ = ۶۴$ حالت داریم که $\binom{۳}{۳} \binom{۶}{۳} = ۲۰$ تا آن‌ها برای حالت مساوی است.

باتوجه به تقارن "پشت" و "رو"، بقیه حالات یعنی $۶۴ - ۲۰ = ۴۴$ حالت باقی‌مانده به دو قسمت برابر تقسیم می‌شوند. یعنی در ۲۲ حالت "رو" بیشتر و در ۲۲ حالت برعکس است.

$$P(A) = \frac{۲۲}{۶۴} = \frac{۱۱}{۳۲}$$

پس گزینه "۴" صحیح است.

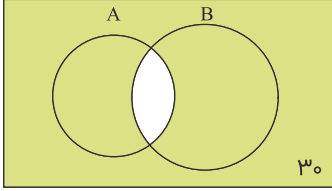
تالیفی عزیزالله علی اصغری

فرض کنیم که مجموعه A گروه فوتبال و مجموعه B گروه بسکتبال را نشان دهند. اگر جمعیت کل کلاس ۱۰۰ نفر باشد، داریم:

$$n(A \cup B) = 70$$

تعداد اعضای که حداکثر در یکی از دو مجموعه A و B هستند، یعنی $n(A \cap B)'$ طبق فرض مسئله برابر با ۴۵ است، بنابراین:

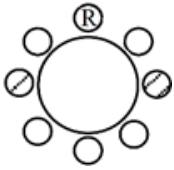
$$n(A \cap B) = n(U) - n(A \cap B)' \xrightarrow{n(A \cap B)' = 45} n(A \cap B) = 100 - 45 = 55$$



تعداد اعضای که فقط در یکی از دو مجموعه A و B هستند، برابر است با:

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 70 - 55 = 15$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی



رامتین هر جا که بنشیند، میلاد ۷ جایگاه برای نشستن دارد که از این بین فقط دو صندلی علامت‌دار مطلوب ماست پس احتمال این پیشامد برابر است با: $\frac{2}{7}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۴

$$P(A) = P(\text{سه فرزند اول دختر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = P(\text{فقط سه فرزند اول دختر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

گام اول

اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، ضریب تغییرات این داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

که \bar{x} میانگین داده‌هاست و داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

و σ انحراف معیار داده‌هاست و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

گام دوم

با دو روش می‌توان ضریب تغییرات u_i ها را محاسبه کرد.
روش اول:

$$u_i = 12x_i + 6 \Rightarrow u_i = 18, 30, 42, 54, 66$$

$$\bar{x} = \frac{18 + 30 + 42 + 54 + 66}{5} = \frac{210}{5} = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(18 - 42)^2 + (30 - 42)^2 + (42 - 42)^2 + (54 - 42)^2 + (66 - 42)^2}{5} = \frac{576 + 144 + 0 + 144 + 576}{5} = 288$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

بنابراین ضریب تغییرات u_i ها برابر است با:

$$CV = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7} \simeq \frac{2 \times 1/4}{7} = 0/4$$

روش دوم:

نکته ۱: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه میانگین داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه میانگین داده‌ها نیز با آن عدد ثابت جمع می‌شود.

نکته ۲: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه انحراف معیار داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه انحراف معیار داده‌ها تغییری نمی‌کند.

ابتدا با استفاده از روابط گام اول، میانگین و انحراف معیار x_i ها را به دست می‌آوریم، سپس با توجه به دو نکته بالا، میانگین و انحراف معیار u_i ها و در آخر ضریب تغییرات آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = 12\bar{x} + 6 = 12(3) + 6 = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = 12\sigma = 12(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$CV_{جدید} = \frac{\sigma_{جدید}}{\bar{x}_{جدید}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} \approx \frac{2 \times 1/4}{7} = 0/4$$

گزینه ۳

۲۴

اول: دو پیشامد مستقل اند، هرگاه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. ابتدا پیشامد A و P(A) را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \{(ر, پ, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)\}$$

پیشامد A، چهار عضو دارد و فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه، $2^3 = 8$ عضو دارد؛ بنابراین:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

دوم: احتمال پیشامد تک‌تک گزینه‌ها را حساب می‌کنیم و چک می‌کنیم که آیا پیشامد موردنظر مستقل از A است یا خیر:

$$1 \text{ گزینه: } B = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (پ, پ, ر)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(ر, پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \neq \frac{1}{8} = P(A \cap B)$$

دو پیشامد مستقل نیستند.

$$2 \text{ گزینه: } C = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ)\} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \neq 0 = P(A \cap C)$$

دو پیشامد مستقل نیستند.

$$3 \text{ گزینه: } D = \{(ر, ر, ر), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap D = \{(پ, پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow P(A) \times P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap D)$$

دو پیشامد مستقل اند.

$$4 \text{ گزینه: } E = \{(ر, پ, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap E = \{(ر, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow P(A \cap E) = \frac{1}{4} \neq P(A) \times P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

دو پیشامد مستقل نیستند.

پیشامدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را به ترتیب B، C، D و E فرض کرده‌ایم.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

گزینه ۳

۲۵

$$\text{انحراف معیار} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{\bar{x}=15, CV=0/2} \sigma = 3 \Rightarrow \sigma^2 = 9$$

مطابق رابطه واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 \xrightarrow{\bar{x}=15} 9 + 15^2 = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \bar{S} \Rightarrow \bar{S} = 234$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

$\bar{x} \times n =$ تعداد کل داده‌ها \times میانگین = مجموع داده‌های اولیه

$$= 30 \times 20 = 600$$

$$\bar{x} \text{ جدید} = \frac{\text{مجموع داده‌های اولیه} + 35 + 32 + 25 + 28 + 30}{25} = \frac{600 + 150}{25}$$

$$= \frac{750}{25} = 30$$

$$\sigma^2 \text{ اولیه} = \frac{(x_1 - 30)^2 + (x_2 - 30)^2 + \dots + (x_{20} - 30)^2}{20} = 16$$

$$\Rightarrow (x_1 - 30)^2 + (x_2 - 30)^2 + \dots + (x_{20} - 30)^2 = 320$$

$$\sigma^2 \text{ جدید} = \frac{(x_1 - 30)^2 + (x_2 - 30)^2 + \dots + (x_{20} - 30)^2 + (35 - 30)^2 + (25 - 30)^2 + (32 - 30)^2 + (28 - 30)^2 + (30 - 30)^2}{25}$$

$$= \frac{320 + 58}{25} = \frac{378}{25} = \frac{1512}{100} = 15.12$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر فقط نفر دوم یا سوم در این مسابقات برنده شود، به این معنا است که نفر اول در بار اول و دوم برنده نشده است، پس:

$$P(\text{برنده شدن نفر اول}) = 0.4 \Rightarrow P(\text{برنده نشدن نفر اول}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(\text{برنده نشدن نفر اول در هر ۲ مرحله}) = 0.6 \times 0.6 = 0.36 = 36\%$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر A پیشامد بهبود امید و B پیشامد بهبود زهرا باشد، داریم:

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A)P(B') + P(A')P(B)$$

$$= \frac{5}{6} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \left(1 - \frac{5}{6}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{5}{30} + \frac{4}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

دقت کنید A و B دو پیشامد مستقل هستند، پس A و B' و همچنین A' و B نیز مستقل هستند.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۳

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow ۰/۶ = P(A) + P(B) - ۰/۱$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = ۰/۷$$

از طرفی چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، می‌دانیم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow ۰/۱ = P(A)P(B)$$

حالا باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = ۰/۷ \Rightarrow P(B) = ۰/۷ - P(A) \\ P(A)P(B) = ۰/۱ \end{cases}$$

$$P(A)(۰/۷ - P(A)) = ۰/۱ \Rightarrow P^2(A) - ۰/۷P(A) + ۰/۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (P(A) - ۰/۲)(P(A) - ۰/۵) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) = ۰/۲ \Rightarrow P(B) = ۰/۵ \Rightarrow P(A) + P(B') = ۰/۲ + ۰/۵ = ۰/۷ \\ P(A) = ۰/۵ \Rightarrow P(B) = ۰/۲ \Rightarrow P(A) + P(B') = ۰/۵ + ۰/۸ = ۱/۳ \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

A و B و C سه پیشامد مستقل اند.

$$P(A' \cap B' \cap C') = P(A')P(B')P(C') = (1 - ۰/۳)(1 - ۰/۴)(1 - ۰/۵) = ۰/۲۱$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۵

نکته: واریانس داده‌ها را می‌توان از رابطه $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$ به دست آورد.
اگر طول اضلاع مربع‌ها را x_i در نظر بگیریم، با توجه به فرض سؤال داریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ۰/۲ \xrightarrow{\bar{x}=۱۵} \sigma = ۱۵ \times ۰/۲ = ۳ \Rightarrow ۹ = \frac{\sum x_i^2}{n} - ۱۵^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = ۲۳۴$$

از آنجا که مساحت مربع‌ها به صورت x_i^2 است، پس میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۲۳۴ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

جابه جایی سه نفر N، T و P در $۳! = ۶$ حالت امکان پذیر است، درحالی‌که در این سؤال فقط یکی از آن حالت‌ها مطلوب است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷!}{۶!} = \frac{۱}{۶}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

$$\text{میانگین داده‌ها: } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\text{واریانس داده‌ها: } \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{480}{12} - 36 = 4$$

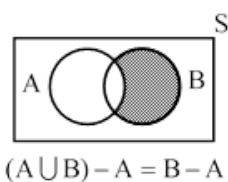
$$\Rightarrow \text{ضریب تغییرات داده‌ها: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

راه اول:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ \Rightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A')$$

راه دوم: با توجه به اینکه A و B مستقل‌اند بنابراین A' و B نیز مستقل خواهند بود و با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$$P(A \cup B) - P(A) = P(B - A) = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۳

برای آنکه عددی بر ۶ بخش‌پذیر باشد باید بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد. با توجه به اعداد داده‌شده چون مجموع ۹ است؛ پس همواره بر ۳ بخش‌پذیر است؛ بنابراین فقط باید زوج باشد که دو حالت پیش می‌آید:

$$\text{رقم یکان صفر: } \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{1} = 6 \\ \text{رقم یکان ۲ یا ۴: } \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{2} = 8 \Rightarrow n(A) = 6 + 8 = 14$$

$$n(S): \text{تعداد کل اعداد ۴ رقمی با اعداد داده‌شده: } \underline{3} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 18$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) ضریب تغییرات از رابطه $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ به دست می‌آید که σ انحراف معیار و \bar{x} میانگین داده‌ها است. می‌دانیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

(ب) داریم:

$$n = 30$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 240$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{30}^2 = 2190$$

گام دوم

با توجه به اطلاعات موجود، ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌ها را به دست آوریم:

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{30}^2}{30} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{2190}{30} - 8^2 = 73 - 64 = 9 \Rightarrow \sigma = \sqrt{9} = 3$$

پس ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0.375$$

گزینه ۳

۳۷

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow 5 = \frac{\sum x_i^2}{n} - 12^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = 149 = \text{میانگین مساحت‌ها}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گزینه ۳

۳۸

حالت‌بندی می‌کنیم:

اگر مهره اول سفید خارج شود:

$$5 \times 4 \times 4 = 80$$

اگر مهره اول سیاه خارج شود:

$$4 \times 5 \times 3 = 60$$

کل حالت‌ها برابر است با:

$$80 + 60 = 140$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$P(A' \cup B') = P(A)P(B') + P(A')$$

$$\Rightarrow \cancel{P(A')} + P(B') - P(A' \cap B') = P(A)P(B') + \cancel{P(A')}$$

$$P(A' \cap B') = P(B') - P(A)P(B') = P(B')(1 - P(A)) = P(B')P(A')$$

پس A' و B' مستقل هستند یعنی A و B' نیز مستقل اند. از طرفی احتمال آنکه فقط A رخ دهد برابر است با:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A)P(B')$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. قرار است اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد پس موش دوم می‌تواند سفید یا سیاه باشد. یعنی دو حالت داریم.

ب) این دو حالت هیچ اشتراکی با هم ندارند پس احتمال کل برابر مجموع احتمال‌های دو حالت تعریف می‌شود.

گام دوم

حالت اول: موش اول سفید، موش دوم سفید، موش سوم سیاه

$$P_1 = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$$

حالت دوم: موش اول سفید، موش دوم سیاه، موش سوم سیاه

$$P_2 = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{30}{336} = \frac{5}{56}$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{5}{28} + \frac{5}{56} = \frac{10 + 5}{56} = \frac{15}{56}$$

جمع ارقام $۱۲ = ۵ + ۲ + ۴ + ۱$ است و بر ۳ بخش پذیر است. اگر عدد ۴ رقمی ما زوج باشد، به ۲ هم بخش پذیر بوده و مضرب ۶ خواهد بود؛ پس مسئله مثل این است که از ما خواسته که عدد ما زوج باشد.

$$n(S) = \underbrace{3 \text{ حالت}}_{\text{به جز یکان که ۲ یا ۴ است}} \times 2 \times 1 \times \underbrace{2 \text{ حالت}}_{\text{فقط ۲ یا ۴}} = 12$$

پس احتمال اینکه در دفعه اول رمز را درست وارد کنیم $\frac{1}{12}$ است.

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$P(\text{دو جفت}) = \frac{\overbrace{\binom{6}{2}}^{\text{برای اعداد روی جفت‌ها}} \cdot \frac{4!}{2! \times 2!}}{6^4} = \frac{\overbrace{15 \times \frac{4!}{2! \times 2!}}^{\text{چرخش اعداد روی تاس‌ها}}}{6^4} = \frac{5}{72}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

اگر داده‌های جامعه اول را با x_i و داده‌های جامعه دوم را با y_i نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow 12/6 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 151/2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2} \Rightarrow 7/2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{24}$$

$$\Rightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = 172/8$$

باتوجه به آنکه $\bar{x} = \bar{y}$ ، پس واریانس کل داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2} = \frac{324}{36} = 9$$

و در نتیجه انحراف معیار داده‌ها برابر با $\sigma = 3$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

با فرض $P(A) = 2$ ، $P(B) = x$ و با توجه به اینکه $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ و چون A و B مستقل هستند، داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= x - x\left(\frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} \lambda x - 4x^2 = 3 \Rightarrow 4x^2 - \lambda x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lambda \pm \sqrt{64 - 4\lambda}}{4} = \frac{\lambda \pm 4}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{4} \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (چون باید } 0 \leq x \leq 1 \text{ غ.ق.ق.)}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۳

فرض کنیم A ، پیشامد شاگرد اول بودن دانش‌آموز اول و B ، پیشامد کمتر بودن معدل دانش‌آموز دوم از دانش‌آموز اول باشد. داریم:

$$P(A) = \frac{1}{25}, \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{25} = \frac{2}{25} \Rightarrow \frac{2}{25} \times \%100 = \%8$$

نکته: اگر قرار باشد هم نفر اول بالاترین معدل را داشته باشد و هم نفر دوم معدلی کمتر از اولی، کافی است فقط نفر اول بالاترین معدل را داشته باشد. چراکه خودبه‌خود بخش دوم نیز رخ خواهد داد.

تالیفی علیرضا رواگرد

اگر ۲۵ داده داشته باشیم، به کمک چارک‌ها می‌توانیم داده‌ها را به صورت زیر تقسیم‌بندی کنیم:

$$\underbrace{X_1 \dots X_6}_{Q_1} \quad \underbrace{X_7 \dots X_{12}}_{Q_2} \quad \underbrace{X_{13} \dots X_{19}}_{Q_3} \quad \underbrace{X_{20} \dots X_{25}}_{Q_4}$$

دسته اول دسته دوم دسته سوم دسته چهارم

$$\text{میانگین کل} = \frac{6 \times 4 + 6 \times 8 + 6 \times 10 + 6 \times 12 + Q_4}{25} = 8/54$$

$$\Rightarrow 6(34) + Q_4 = 25 \times 8/54 \Rightarrow 204 + Q_4 = 213/5$$

$$\Rightarrow Q_4 = 213/5 - 204 = 9/5$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

طبق متن کتاب درسی گسسته، منظور از "رخداد" یک پیشامد، مشاهده عضو از آن پیشامد به عنوان نتیجه آزمایش است. چون در این آزمایش a به عنوان نتیجه ظاهر شده است، لذا تمام پیشامدها یا زیرمجموعه‌های شامل a رخ داده‌اند که تعداد آن‌ها عبارت است از:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, a, \dots, n\}$$

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{(n-1) \text{ باشد یا نباشد}} \times \underbrace{1}_{a \text{ حتما باشد}} = 2^{n-1}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \binom{k}{1}}{\binom{4+k}{1} \binom{4+k}{1}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{4k}{(4+k)^2} = \frac{2}{9} \xrightarrow{\text{جایگذاری گزینه‌ها}} k = 2$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

اول: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را به دست می‌آوریم. باید تعداد جایگشت‌های ۵ حرف abcde را به دست آوریم که در آن‌ها a قبل از b قرار دارد. می‌دانیم دقیقاً در نصف کل حالات a قبل از b قرار دارد. پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $\frac{5!}{2}$
دوم: تعداد حالات پیشامد موردنظر، اگر بخواهیم a اولین حرف باشد، یعنی آن را در جایگاه اول قرار می‌دهیم و برای هرکدام از جایگاه‌های دیگر به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ حالت وجود دارد.
تعداد حالات پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\frac{\text{حالت ۱}}{\text{حرف پنجم}} \times \frac{\text{حالت ۲}}{\text{حرف چهارم}} \times \frac{\text{حالت ۳}}{\text{حرف سوم}} \times \frac{\text{حالت ۴}}{\text{حرف دوم}} \times \frac{\text{حالت ۱}}{\text{حرف اول}} = 4!$$

بنابراین حاصل احتمال برابر است با:

$$\frac{4!}{5!} = \frac{4! \times 2}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \xrightarrow{\bar{P}=4\bar{x}, 4\bar{x}=84 \Rightarrow \bar{x}=21} \sigma^2 = 490 - 441 = 49 \Rightarrow \sigma = 7$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \simeq 0/33$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

برای به دست آوردن ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، ابتدا انحراف معیار طول اضلاع را با σ نشان داده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

در این تست $\bar{x} = 8$ و $\frac{\sum x_i^2}{n} = 65/44$ است، پس σ را محاسبه کرده و با استفاده از فرمول $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ، ضریب تغییرات را مشخص می‌کنیم.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{65/44 - 8^2} = \sqrt{65/44 - 64} = \sqrt{1/44} = 1/2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/2}{8} = 0/15$$

چون جنسیت نوزادان دو پیشامد مستقل هستند، پس داریم:

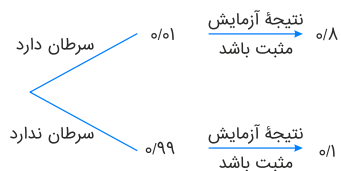
$$1) P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$2) P_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{هر سه پسر}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{یا هر سه دختر}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$3) P_3 = P(\text{حداقل یکی دختر}) = 1 - P(\text{هیچی دختر}) = 1 - P(\text{همه پسر}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$4) P_4 = P(\text{حداکثر دو پسر}) = 1 - P(\text{همه پسر}) = \frac{7}{8}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۳



$$P(\text{ابتلا به سرطان و تست مثبت}) = 0/01 \times 0/8 = 0/008$$

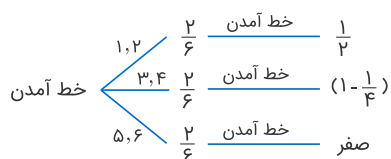
$$P(\text{عدم ابتلا به سرطان و تست مثبت}) = 0/99 \times 0/1 = 0/099$$

$$P(\text{نتیجه آزمایش مثبت باشد}) = 0/008 + 0/099 = 0/107$$

$$P(\text{نتیجه آزمایش مثبت باشد} \mid \text{سرطان داشته باشد})$$

$$= \frac{P(\text{نتیجه آزمایش مثبت باشد و سرطان داشته باشد})}{P(\text{نتیجه آزمایش مثبت باشد})} = \frac{0/008}{0/107} = \frac{8}{107}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی



$$\Rightarrow P(\text{حداقل یک خط آمدن}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴

دقت کنید که چون می‌خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهره انتخابی سفید باشد بنابراین باید ۲ مهره دیگر سیاه باشند و چون سه ظرف داریم، احتمال انتخاب هریک از ۳ ظرف $\frac{1}{3}$ است. احتمال آنکه از هر ظرف ۲ مهره سیاه و ۲ مهره سفید خارج شود را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{احتمال انتخاب ظرف A} &= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 10}{126} \\ \text{احتمال انتخاب ظرف B} &= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126} \\ \text{احتمال انتخاب ظرف C} &= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{3} \left(\frac{60}{126} + \frac{45}{126} + \frac{45}{126} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{150}{126} = \frac{50}{126} = \frac{25}{63}$$

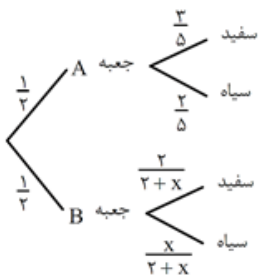
توجه کنید:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \\ \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \end{cases}$$

فلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

فرض کنیم x مهره سیاه در جعبه B باشد، با توجه به نمودار درختی داریم:



$$\Rightarrow p(\text{سیاه}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{x}{2+x} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{x}{4+2x} = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4+2x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = 4 + 2x \Rightarrow x = 4$$

پس تعداد مهره‌های جعبه B برابر ۶ تا است.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۳

دو مهره کیسه اول:

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} \text{ سفید } 5 \xrightarrow{\frac{5}{8}} \text{ سفید } 3 \Rightarrow \text{ هر دو سفید}$$

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \text{ سفید } 3 \xrightarrow{\frac{3}{8}} \text{ سفید } 5 \Rightarrow \text{ هر دو سیاه}$$

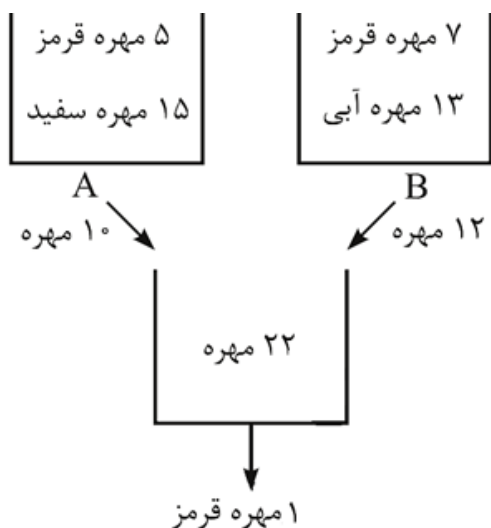
$$\frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} \text{ سفید } 4 \xrightarrow{\frac{4}{8}} \text{ سفید } 4 \Rightarrow \text{ یک سفید و یک سیاه}$$

$$P = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} \times \frac{5}{8} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \times \frac{3}{8} + \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} \times \frac{4}{8}$$

$$= \frac{6}{21} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{21} \times \frac{3}{8} + \frac{12}{21} \times \frac{4}{8} = \frac{30 + 9 + 48}{21 \times 8} = \frac{87}{168}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$\frac{10}{22} \times \frac{5}{20} + \frac{12}{22} \times \frac{7}{20} = \frac{134}{440} = \frac{67}{220}$$



مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

تاس

$\frac{۲}{۶}$ (مضرب ۳)
 دو مهره از کیسه اول هم‌رنگ نباشند $\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۲}}$

$\frac{۴}{۶}$ (مضرب ۳ نباشد)
 دو مهره از کیسه دوم هم‌رنگ نباشند $\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}}$

$$P = \frac{۲}{۶} \times \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۲}} + \frac{۴}{۶} \times \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۵ \times ۳}{۲۸} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۴ \times ۲}{۱۵}$$

$$= \frac{۵}{۲۸} + \frac{۱۶}{۴۵} = \frac{۲۲۵ + ۴۴۸}{۱۲۶۰} = \frac{۶۷۳}{۱۲۶۰}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

تاس عدد اول بیاید : $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ ۱ بار به هدف بزند در ۴ تیر $\rightarrow \binom{۴}{۱} \left(\frac{۳}{۴}\right)^1 \left(\frac{۱}{۴}\right)^3 = \frac{۳}{۶۴}$

تاس عدد اول نیاید : $\frac{۱}{۲}$ ۱ بار به هدف بزند در ۳ تیر $\rightarrow \binom{۳}{۱} \left(\frac{۳}{۴}\right)^1 \left(\frac{۱}{۴}\right)^2 = \frac{۹}{۶۴}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۶۴} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۶۴} = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۳}{۶۴} + \frac{۹}{۶۴} \right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۲}{۶۴} = \frac{۳}{۳۲}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

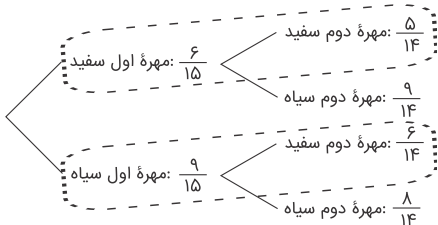
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

الف) مهره اول خارج شده می‌تواند سفید یا سیاه باشد. احتمال سفیدبودن مهره دوم بر اساس حالت مهره اول قابل محاسبه است.
ب) از نگاهی دیگر، چون رنگ مهره اول را نمی‌دانیم فرض می‌کنیم هنوز مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفیدبودن مهره دوم را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:



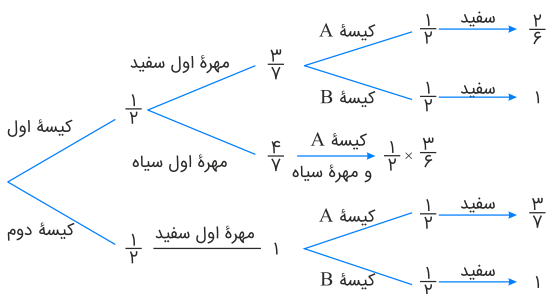
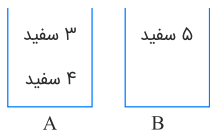
بنابراین داریم:

$$P(\text{دو مهره سفید}) = \left(\frac{6}{15} \times \frac{5}{14}\right) + \left(\frac{9}{15} \times \frac{6}{14}\right) = \frac{30 + 54}{210} = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$$

روش دوم:

بدون توجه به رنگ مهره اول و با فرض اینکه هنوز مهره‌ای خارج نشده، احتمال سفیدبودن رنگ مهره دوم برابر $\frac{2}{5}$ است.

گزینه ۳



$$P(\text{همرنگ}) = \frac{1}{7} \left(\frac{3}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} \times 1 + \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{1}{6} \times 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + 1 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{16}{7} \right) = \frac{4}{7}$$

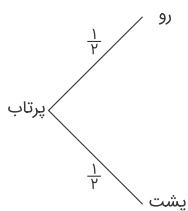
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

A: مهره جابه‌جا شده از ظرف اول باشد.
B: مهره خارج‌شده از ظرف سوم قرمز باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{8}} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{6}{25} + \frac{3}{8}}$$

$$= \frac{\frac{6}{25}}{\frac{48+75}{25 \times 8}} = \frac{6 \times 8}{123} = \frac{48}{123} = \frac{16}{41}$$

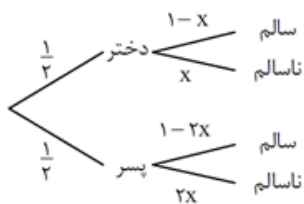
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴



$$P(\text{یک بار رو}) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{\binom{3}{1}}{2^3}}_{\substack{\text{فقط یک بار رو} \\ \text{از پرتاب ۳ سکه}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی



$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1-2x) = \frac{17}{20} \Rightarrow 1-x + 1-2x = \frac{17}{10} \Rightarrow 3x = \frac{3}{10} \Rightarrow x = 0.1$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳

۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۸	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۵۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۵۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>						
۵۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۶۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>								
۵۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>								
۵۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>								
۵۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>								
۶۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>								

۱ اگر تابع $f(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ باشد، حاصل $f(\sqrt[3]{2})$ کدام است؟

۸ (۲)

۴ (۱)

۱۶ (۴)

۶ (۳)

تالیفی سیروس نصیری

۲ در تابع $y = x - \sqrt{x}$ محدوده تغییرات y در کدام گزینه به درستی آمده است؟

$y \geq \frac{1}{4}$ (۲)

$y \geq 0$ (۱)

$y \geq -\frac{1}{4}$ (۴)

$y \geq -\frac{1}{2}$ (۳)

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۳ رابطه $f = \{(-1, m), (m, m^2 - 1), (m^2 - 1, m^2), (m^2, m + 1)\}$ به ازای $m \in \mathbb{R} - A$ تابع است. مجموعه A چند عضو دارد؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

تالیفی سیدعادل حسینی

۴ برد تابع $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2n + 1$ به صورت $(-\infty, \frac{7}{2}]$ است. مقدار n کدام است؟

$-\frac{9}{2}$ (۲)

$-\frac{7}{4}$ (۱)

-۲ (۴)

۱ (۳)

مدارس برتر ایران علوم تجربی دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۵ به ازای کدام مقدار k ، مساحت سطح محدود به محور y ها و نمودارهای $y = kx$ و $y = |x - k|$ برابر واحد است؟

$\sqrt{3} - 1$ (۲)

۱ (۱)

$\sqrt{3}$ (۴)

$-\sqrt{3} - 1$ (۳)

تالیفی سیدعادل حسینی

۶ از مجموعه $A = \{-1, a, 3\}$ به مجموعه $B = \{2, a^2 + 5, a\}$ چند تابع می‌توان تعریف کرد، به طوری که مجموع اعضای برد آن برابر ۵ باشد؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۰
(۳) ۱۵
(۴) ۱۸

تالیفی سید عادل حسینی

۷ معادله $|3 - x^2| = 3 - x^2$ چند جواب دارد؟ ([] علامت جزء صحیح است)

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۷
(۴) بی‌شمار

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

۸ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۹ نمودار تابع با ضابطه $y = x - [x]; x \in [-2, 3]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

- (۱) $(4, 1)$
(۲) $(4, \sqrt{2})$
(۳) $(5, 1)$
(۴) $(5, \sqrt{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - [x]}$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
(۲) \mathbb{R}
(۳) $\mathbb{R} - [0, 1]$
(۴) $(1, +\infty)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۱ نمودار تابع $y = [\frac{x}{10}] + [\sqrt[3]{x}]$ در فاصله $(0, 50)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳

نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در کدام یک از روابط زیر y تابعی از x است؟

(۲) $y - \sqrt{y} = x$

(۱) $y \sqrt[3]{y} = x$

(۴) $y \sqrt{y} = x$

(۳) $y^3 - x = y + 1$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ تابع $g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$ چگونه است؟

(۲) همانی

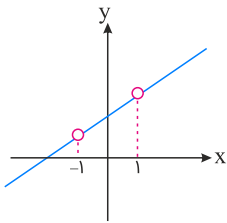
(۱) ثابت

(۴) یک به یک

(۳) چندجمله‌ای

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

اگر نمودار $y = \frac{a^2 x^3 + 2x^2 - x + b}{x^2 + c}$ شکل زیر باشد، $a^2 - b^2 + c^2$ کدام است؟



(۱) -۲

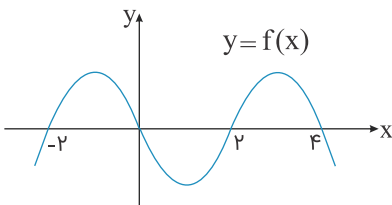
(۲) -۴

(۳) ۲

(۴) صفر

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(x-2)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) بی‌شمار

مدارس برتر ایران علوم تجربی دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۱۷ اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ بدانیم $2x^2 + 1 = xf(2-x) - xf(x+2)$ مقدار $f(3)$ کدام است؟

(۲) $\frac{7}{3}$
(۴) $\frac{9}{5}$

(۱) $\frac{6}{5}$
(۳) $\frac{3}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۸ معادله $1 = \frac{2}{3x} \left[\frac{3}{2}x \right]$ در بازه $[0, 5]$ چند جواب دارد؟

(۲) ۵
(۴) ۷

(۱) ۴
(۳) ۶

تالیفی سیدمحمدصالح ارشاد

۱۹ برد تابع $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ شامل کدام بازه نیست؟

(۲) $(1, 5)$
(۴) $(-2, 2)$

(۱) $(0, 4)$
(۳) $(2, 6)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۰ اگر $[x-2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-3| - |x-4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) فاقد نقطه مشترک

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۱ اگر $[x] + [x^2] + x = 5$ ، آنگاه مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟

(۲) -۲

(۱) صفر

(۴) ۴

(۳) -۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۲ معادله $x^2 = [x] + [2-x]$ چند ریشه دارد؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳

۲۳ برد تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ کدام است؟

- (۱) $(0, \frac{1}{2}]$
 (۲) $[0, \frac{1}{2}]$
 (۳) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
 (۴) $\mathbb{R} - (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۴ معادله $x[x] = 23$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) صفر

تالیفی سیدمحمد صالح ارشاد

۲۵ اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

- (۱) $[\frac{2}{3}, 2]$
 (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$
 (۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$
 (۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۶ اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $2f(x+1) - x^2 f(3) = 2x^2 - 4$ آنگاه حاصل $f(0)$ کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) -۲
 (۳) ۱
 (۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۷ برد تابع $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$ کدام است؟

- (۱) $[-1, +\infty)$
 (۲) $[0, +\infty)$
 (۳) $(-\infty, 2]$
 (۴) $[-1, 2]$

تالیفی سید عادل حسینی

۲۸ اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ باشد، $f(2) - f(2 + \sqrt{7})$ کدام است؟

- (۱) -۲
 (۲) -۱
 (۳) ۱
 (۴) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۹ اگر $x \leq -2$ باشد، $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ؛ آنگاه نمودار توابع f^{-1} و $g(x) = \frac{2x-1}{-3}$ با کدام طول متقاطع هستند؟

- (۱) -۵
(۲) -۸
(۳) صفر
(۴) ۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۰ هرگاه دامنه تعریف $y = 2f(2-x) + x$ بازه $[-1, 3]$ باشد، دامنه تعریف $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 3]$
(۲) $[-9, 3]$
(۳) $[-3, 1]$
(۴) $[-3, 9]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۱ اگر $g(x) = f(3x-4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ آنگاه حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۲ اگر وارون تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$ با دامنه $(-\infty, -1]$ به صورت $f^{-1}(x) = a - \sqrt{\frac{x+1}{b}}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۴

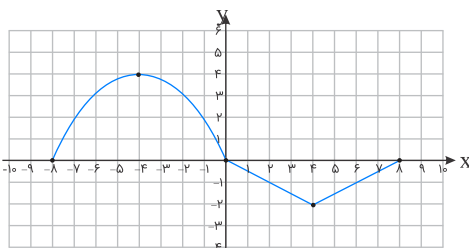
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۳ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 + 1}}$ باشد، $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x^3 - 3x}{2}$
(۲) $\frac{x^3 + 3x}{2}$
(۳) $x^3 - 3x$
(۴) $x^3 + 3x$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

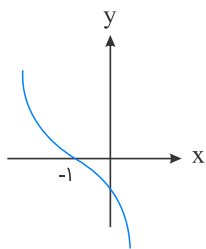
۳۴ شکل زیر، مربوط به نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{p}\right)$ است. تابع $y = f(-x+1)$ در کدام فاصله زیر یک‌به‌یک است؟



- (۱) $[-3, 1]$
(۲) $[-1, 3]$
(۳) $[0, 4]$
(۴) $[2, 4]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

تابع f از درجه سوم و به صورت زیر است، در تابع $g(x) = \sqrt{(x^2 - x)} f(x)$ بزرگترین مجموعه‌ای که x می‌تواند به آن تعلق داشته باشد، کدام است؟



(۱) D_f

(۲) $D_f \cap (-\infty, 0]$

(۳) $D_f \cap [0, +\infty)$

(۴) $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

اگر دامنه توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت $D_f : [-2, 4]$ و $D_g : (-1, 3)$ باشد، دامنه تابع $h(x) = 3f(2x) - 2g([x]) + 1$ کدام است؟

(۱) $[0, 3]$

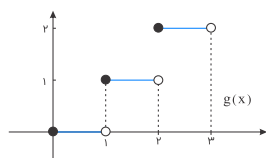
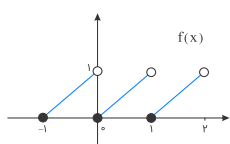
(۲) $[-4, 8]$

(۳) $[2, 3]$

(۴) $[0, 2]$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

اگر نمودار f و g به صورت زیر باشد، حاصل $f \circ g - g \circ f$ کدام است؟



(۱) $2f$

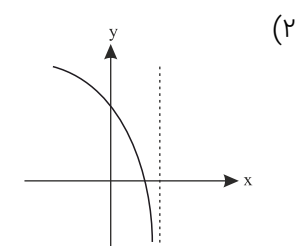
(۲) $2f - g$

(۳) 0

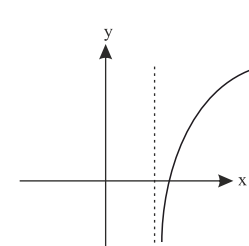
(۴) 1

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

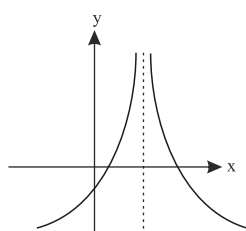
نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{x}{3}} - 6x + 9$ کدام است؟



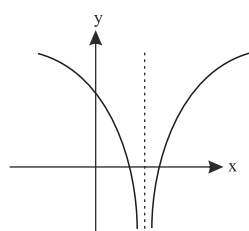
(۱)



(۲)



(۳)



تالیفی محمدرضا کشاورزی

اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، دقیقاً ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

۳۹

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ (2) \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right); x > 0 \\ (3) \quad & \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right); x > 0 \\ (4) \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - x\right); x > 0 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در مورد تابع غیرثابت f می دانیم به ازای هر x داریم $f(1-x) = f(x+1)$ ، در مورد تابع f کدام گزینه صحیح است؟

۴۰

- (۱) تابع f نسبت به محور y ها متقارن است.
 (۲) تابع f نسبت به خط $x = -1$ متقارن است.
 (۳) تابع f نسبت به خط $x = 1$ متقارن است.
 (۴) تابع f نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

تالیفی سیدمحمد صالح ارشاد

اگر دامنه تابع $f(2x-1)$ برابر با $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ باشد، در این صورت دامنه $f([x])$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

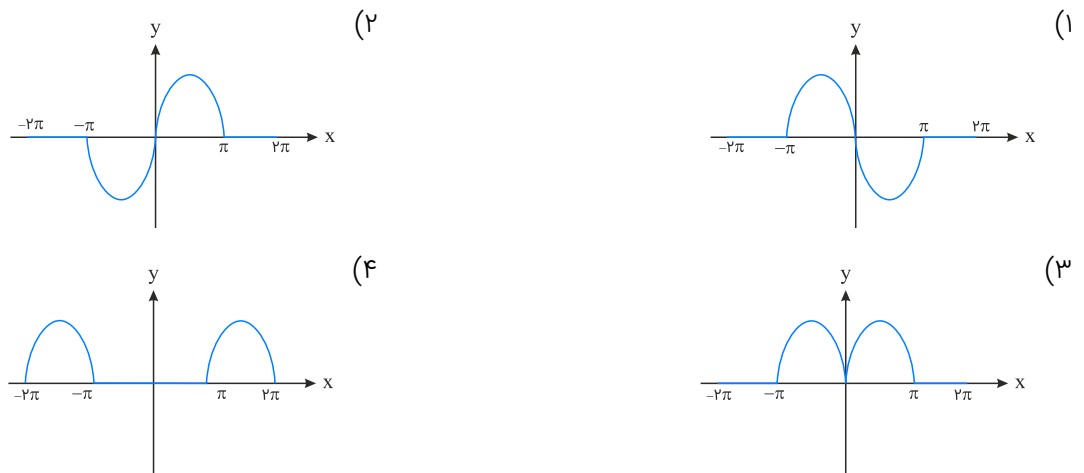
۴۱

- (۱) $[-1, 4]$
 (۲) $[-2, 3]$
 (۳) $[-1, 3]$
 (۴) $[-2, 4]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمایش هندسی $y = |\sin x| + \sin |x|$ در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ به صورت کدام گزینه است؟

۴۲



تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(2x-1)$ ، نیمساز ناحیه اول را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۴۳

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ (2) \quad & \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ (3) \quad & \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ (4) \quad & \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

تالیفی علی ناری ابیانه

۴۴ اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3 & ; x \geq 1 \\ \frac{1}{x} + a & ; x < 1 \end{cases}$ برابر \mathbb{R} باشد، حدود تغییرات a کدام است؟

- (۱) $a \geq 1$
 (۲) $a \leq 1$
 (۳) $a \geq -1$
 (۴) $a \leq -1$

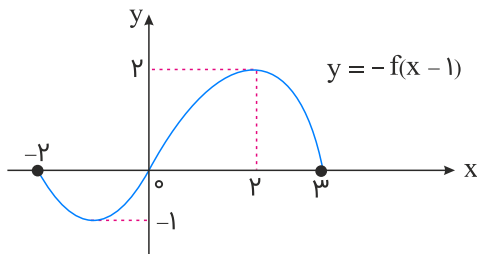
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۴۵ نمودار $f(x) = x^3$ را به کمک انتقال به نمودار $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ منطبق می‌کنیم. در این صورت نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f به کدام نقطه در g تبدیل می‌شود؟

- (۱) $(1, 4)$
 (۲) $(3, 9)$
 (۳) $(1, 7)$
 (۴) $(3, 7)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۴۶ شکل زیر مربوط به تابع $y = -f(x-1)$ است. در این صورت دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



- (۱) $[-1, 0]$
 (۲) $[0, 1]$
 (۳) $[-1, 0] \cup \{-3, 2\}$
 (۴) $[0, 1] \cup \{-3, 2\}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۴۷ اگر $f(x) = x^3 + x$ و $g(x) = \lambda x - 6$ باشد؛ دامنه $y = \sqrt{(f^{-1} \circ g)(x)} - x$ با فرض $x > 0$ کدام است؟

- (۱) $[1, 2]$
 (۲) $[2, 10]$
 (۳) $[3, 8]$
 (۴) $[2, 18]$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

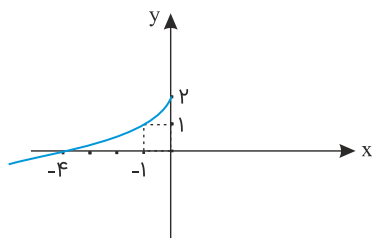
۴۸ اگر $f(x) = x^3 - 1$ و $g(x) = x^2 + 4x + 1$ باشند، آنگاه حاصل ضرب ریشه‌های معادله $f \circ g(x) = -2$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۴
 (۴) معادله ریشه ندارد

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. اگر ضابطه این تابع برابر $f(x) = c - \sqrt{ax + b}$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۴۹



-۱ (۱)

۱ (۲)

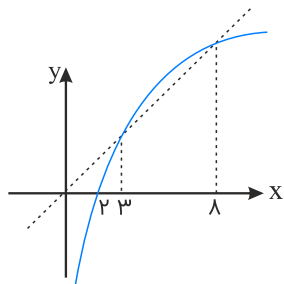
۳ (۳)

-۳ (۴)

تالیفی محمدرضا کشاورزی

شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

۵۰

 $[0, 2]$ (۱) $[2, 3]$ (۲) $[2, 8]$ (۳) $[3, 8]$ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ، برد تابع $g \circ f$ کدام بازه است؟

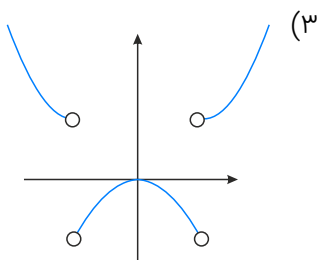
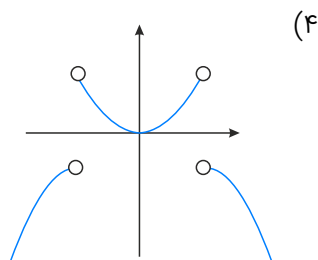
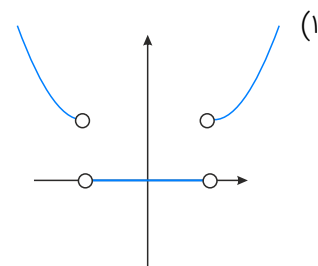
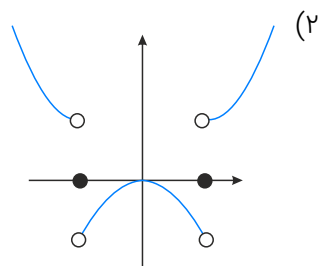
۵۱

 $[0, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۱) $[1, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، $g(x) = x^2 - 1$ و $h(x) = x^2$ باشد، نمایش هندسی $y = h(x) \circ f(g(x))$ در صفحه مختصات به کدام صورت است؟



تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

اگر $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$ ، کدام است؟

- (۱) $2x$ (۲) $\frac{2}{x}$ (۳) $x^2 - 1$ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

تابع $y = x|x - 2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{1+x}; x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1-x}; x < 1$ (۳) $1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

$f(x)$ تابعی چندجمله‌ای است. اگر $f(x) + f^{-1}(x) = -2x + 4$ باشد، حاصل $f(4) + f^{-1}(4)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -4 (۳) -6 (۴) -8

تالیفی محمدرضا توجه

اگر مجموعه جواب نامعادله $1 - |x + 1| < |x^2 - 2|$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

- (۱) $0/5$ (۲) 1 (۳) $1/5$ (۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

تابع نمایی $y = a^x$ ($a > 0$) وارون خود را قطع می‌کند، کدام گزینه در مورد آن نادرست است؟

۵۷

- (۱) مقدار تابع همواره مثبت است.
 (۲) طول و عرض نقطه برخورد در بازه $(0, 1)$ است.
 (۳) وارون تابع صعودی است.
 (۴) نقطه برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

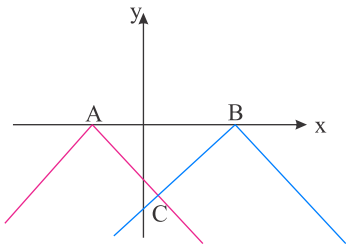
۵۸

- (۱) $(0, 5) \cup [20, 25)$
 (۲) $[-5, 0) \cup (15, 20]$
 (۳) $(15, 20]$
 (۴) $[-5, 0)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

نمودار $y = -|x-1|$ را یک بار ۳ واحد به سمت راست و بار دیگر a واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و هر دو نمودار را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۵۹



(۱) -۹

(۲) ۳

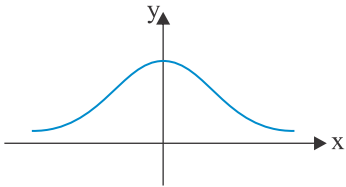
(۳) -۳

(۴) ۹

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نامعادله $f\left(\frac{|x|}{x-1}\right) > f(x)$ در کدام بازه زیر برقرار است؟

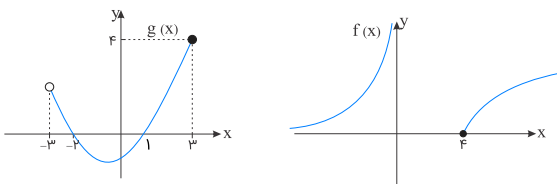
۶۰

(۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{1\}$

تالیفی سیروس نصیری

اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، دامنه تابع $f \circ g$ شامل چند عدد صحیح است؟

۶۱



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

تالیفی سیدمحمد صالح ارشاد

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-b}$ است. $b - 2a$ کدام است؟

۶۲

-۹ (۲)

۹ (۱)

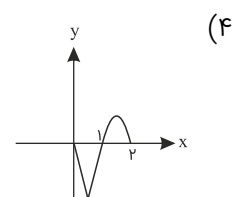
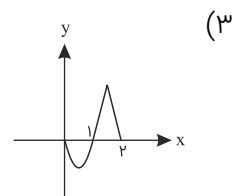
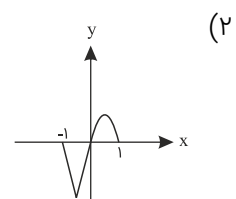
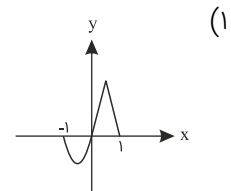
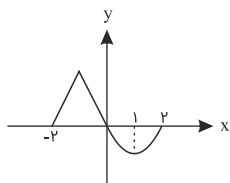
-۱ (۴)

۱ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار تابع $y = f(1-x)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $f(2x-1)$ کدام است؟

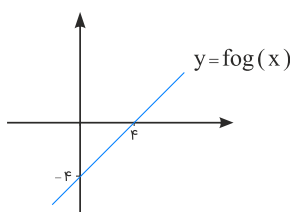
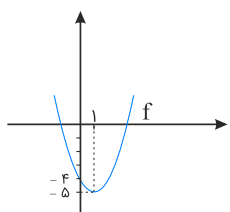
۶۳



تالیفی محمدرضا کشاورزی

اگر نمودار f و $y = (f \circ g)(x)$ به صورت زیر باشند، تابع g به ازای $x = 0$ کدام است؟

۶۴



۱ (۱)

۲ (۲)

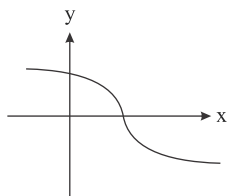
۳ (۳)

۴ (۴)

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

نمودار معکوس تابع $y = f(x)$ شبیه شکل زیر است. کدام گزینه می‌تواند ضابطه $f(x)$ باشد؟

۶۵



$$f(x) = x^3 - 2 \quad (1)$$

$$f(x) = x^3 + 2 \quad (2)$$

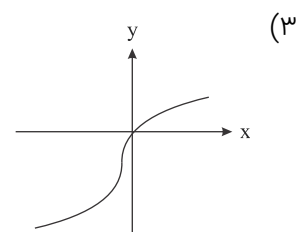
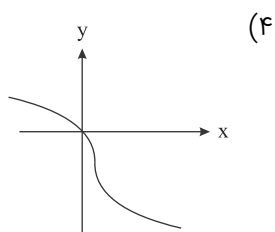
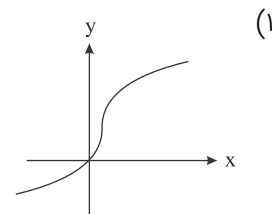
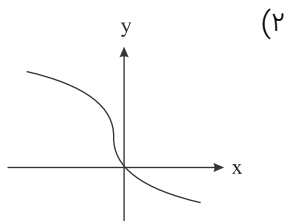
$$f(x) = 2 - x^3 \quad (3)$$

$$f(x) = -2 - x^3 \quad (4)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ چه شکلی است؟

۶۶



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{3^x - 2}{3^x + 2}$ کدام است؟

۶۷

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \log\left(\frac{2x+2}{1-x}\right) \quad (2)$$

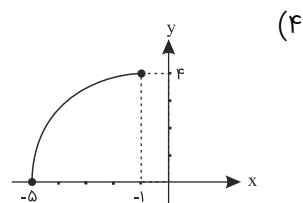
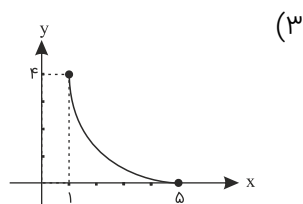
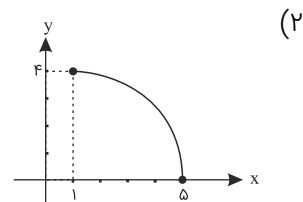
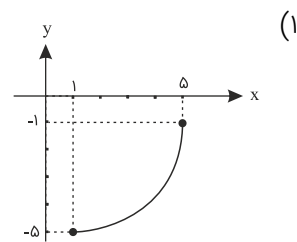
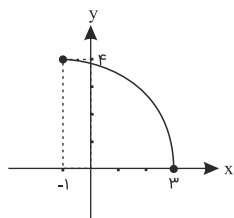
$$f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{2x-2}{1-x}\right) \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{2x+2}{1-x}\right) \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{1-x}{2x+2}\right) \quad (3)$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. کدام گزینه نمودار تابع $y = f^{-1}(x - 1) + 1$ را نمایش می‌دهد؟



تالیفی محمدرضا کشاورزی

اگر $f(2x + 1) = 4x^2 + 4x$ باشد، آنگاه رأس سهمی $y = -\frac{1}{4}f(2x - 1)$ روی کدام نقطه قرار می‌گیرد؟

- (۱) $(-\frac{1}{4}, 1)$ (۲) $(\frac{1}{4}, -1)$
 (۳) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (۴) $(1, 0)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، دقیقاً ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x \in \mathbb{R}$ (۲) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x)$, $x \in \mathbb{R}$
 (۳) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x > 0$ (۴) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x)$, $x > 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

(۲) ۴

(۱) $\frac{8}{3}$

(۴) ۶

(۳) $\frac{16}{3}$

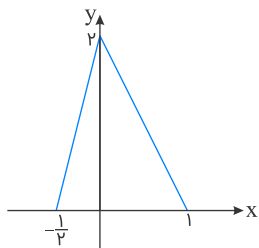
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $y = f \circ f(2x - 2)$ کدام است؟

۷۲

(۱) $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ (۲) $[-\frac{1}{2}, 1]$ (۳) $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ (۴) $[\frac{7}{8}, \frac{5}{4}]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار تابع $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۷۳

(۲) دوم

(۱) اول

(۴) چهارم

(۳) سوم

تالیفی محمدرضا کشاورزی

اگر تابع $y = x^2 + \frac{2m}{m-1}x$ در فاصله $(-1, 1)$ غیریکنوا باشد، حدود m کدام است؟

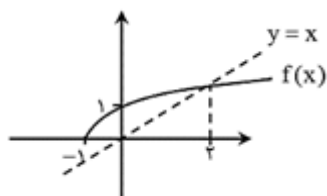
۷۴

(۲) $m < 2$ (۱) $m < 1$ (۴) $m < \frac{3}{4}$ (۳) $m < \frac{1}{2}$

تالیفی سیروس نصیری

باتوجه به شکل زیر دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x-3}{f^{-1}(x)}}$ کدام است؟

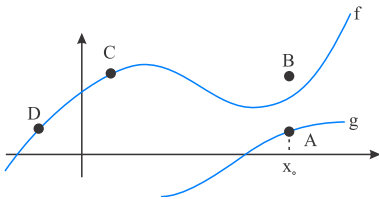
۷۵

(۱) $[1, 3)$ (۲) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 3]$ (۴) $[0, 1) \cup [3, +\infty)$ 

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

اگر نمودار تابع f و g به صورت زیر باشد، نقطه $(x_0, f \circ g(x_0))$ کدام است؟

۷۶



A (۱)

B (۲)

C (۳)

D (۴)

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

f تابعی است که جزء صحیح هر عدد را با جزء صحیح قرینۀ آن عدد جمع می‌کند، ترکیب تابع f با خودش به صورت کدام گزینه زیر است؟

۷۷

(۱) دو نیم‌خط

(۲) یک پاره‌خط

(۳) همان محور طول‌ها

(۴) خطی موازی محور طول‌ها

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

وارون تابع $f(x) = 2x - |2x + 5|$ در بازه‌ای که اکیداً صعودی است، کدام می‌تواند باشد؟

۷۸

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}; x < -5 \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}; x < -2/5 \quad (۱)$$

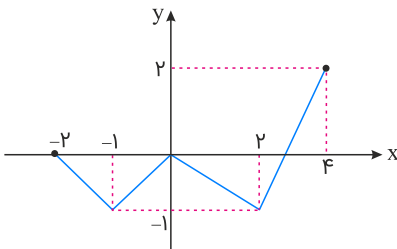
$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{4}; x < -5 \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{4}; x < -2/5 \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. در این صورت برد تابع $y = \sqrt{1 - f(2x)}$ برابر با کدام گزینه است؟

۷۹

(۱) $[0, 1]$ (۲) $[0, \sqrt{2}]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[1, 2]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = \log_4(2x - 1)$ باشند، آنگاه جواب معادله $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = \frac{3}{4}$ کدام است؟

۸۰

(۲) +۴

(۱) -۴

(۴) +۲

(۳) -۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = 3x - |x + 3| + |2 - 4x|$ در یک بازه اکیداً نزولی باشد، ضابطه معکوس f در این بازه کدام است؟

- (۱) $-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}; -3 \leq x \leq \frac{1}{2}$
 (۲) $-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}; -2 \leq x \leq 5$
 (۳) $-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}; -3 \leq x \leq \frac{1}{2}$
 (۴) $-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}; -2 \leq x \leq 5$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$ کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $f + g$
 (۲) $f \circ f$
 (۳) $g \circ f$
 (۴) $f \circ g$

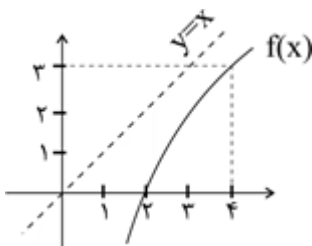
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

اگر $f(x) = 3x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{3x+1}$ باشند مساحت ناحیه محدود به نمودار $g \circ f(x)$ و خط به معادله $y = 2$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$
 (۲) $\frac{4}{3}$
 (۳) $\frac{2}{3}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{f^{-1}(x) - 4}$ کدام است؟



- (۱) $[2, +\infty)$
 (۲) $[4, +\infty)$
 (۳) $[3, +\infty)$
 (۴) $[2, 4]$

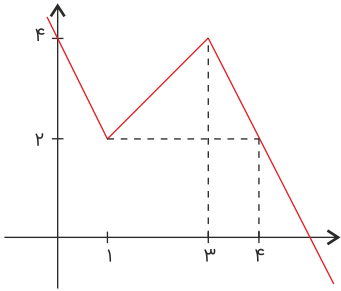
مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

اگر $f(x) = 2g^{-1}(3x-1)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشد؛ مقدار $g(2)$ کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۹
 (۳) ۱۵
 (۴) ۱۷

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

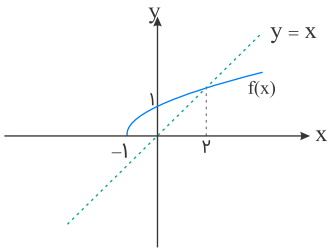
شکل زیر، نمودار تابع $g(x) = 2 + 2f(3 - x)$ است. مجموع ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ کدام است؟



- (۱) ۱۱
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) -۱۱

تالیفی علی ناری ابیانه

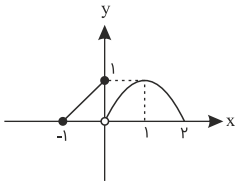
باتوجه به شکل زیر، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x-3}{f^{-1}(x)}}$ کدام است؟



- (۱) $[1, 3)$
(۲) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$
(۳) $(-\infty, 3]$
(۴) $[0, 1) \cup [3, +\infty)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در شکل زیر نمودار $y = f(x)$ رسم شده است. اشتراک دامنه و برد تابع $y = 3f(1 - \frac{x}{3})$ کدام است؟



- (۱) $[-2, 4]$
(۲) $[0, 3]$
(۳) $[-2, 3]$
(۴) $[0, 4]$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) اگر f اکیداً یکنوا باشد، الزاماً f^{-1} هم اکیداً یکنوا است.
(۲) اگر گودی تابع f روبه y ‌های مثبت باشد، الزاماً گودی f^{-1} روبه y ‌های منفی است.
(۳) f و f^{-1} می‌توانند یکدیگر را روی $y = x$ قطع نکنند.
(۴) ترکیب هر تابع با وارونش می‌تواند $y = x$ یا قسمتی از آن باشد.

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

نمودار وارون تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ در فاصله $[a, b]$ زیر محور x ‌ها قرار می‌گیرد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۳
(۴) $-\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۹۱ اگر دامنه $y = g(x+1)$ برابر با $[-1, 2]$ باشد، در این صورت دامنه تابع $f(x) = g^2(x) + g(x^2)$ کدام است؟

(۲) $[-\sqrt{3}, 0]$

(۱) $[0, 3]$

(۴) $[0, \sqrt{3}]$

(۳) $[\sqrt{3}, 3]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۹۲ f تابعی پیوسته و اکیداً نزولی است که به صورت $f: [0, 3] \rightarrow [1, 2]$ تعریف می‌شود. تعداد صفرهای تابع $y = f \circ f^{-1}(x)$ چندتا است؟

(۲) ۲

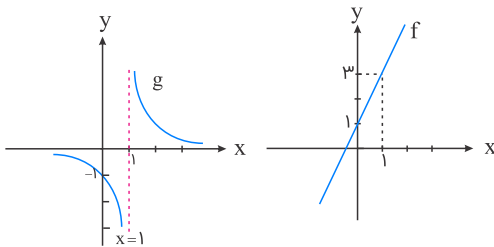
(۱) ۱

(۴) بی‌شمار

(۳) ۰

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۹۳ اگر نمودار f و g به صورت زیر باشد، ضابطه $h = g \circ f^{-1}$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{x-1}$

(۲) $\frac{2}{x-1}$

(۳) $\frac{2}{x-3}$

(۴) $\frac{2}{x-4}$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۹۴ اگر تابع $f(x) = \frac{ax+1}{x-c}$ وارون خودش باشد در معادله درجه دوم $2ax^2 + bx + c = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها چقدر است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) -۱

(۳) $\frac{1}{2}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۹۵ اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۲) $\{0\}$

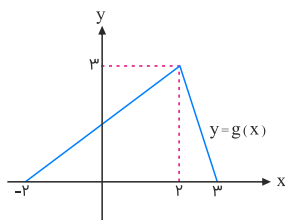
(۱) $[0, 1)$

(۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

(۳) $(-1, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۹۶ اگر $f(x) = \log(x^2 - x)$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه $f \circ g(x)$ به صورت (a, b) است. $b - a$ کدام است؟



(۱) ۳

(۲) $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{11}{3}$

(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۹۷ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۲) $[0, 3)$ (۱) $[0, 2)$ (۴) $[1, 4)$ (۳) $[0, 4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹۸ تابع $y = x \left[\frac{x}{4} \right]$ در کدام بازه زیر هم صعودی و هم نزولی است؟

(۲) $[0, 3]$ (۱) $[-2, 0)$ (۴) $[-2, 1)$ (۳) $\left[0, \frac{3}{4}\right)$

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

$$\begin{aligned}f(x-1) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 + 5 \\ \Rightarrow f(x-1) &= (x-1)^3 + 6 \xrightarrow{x-1=t} f(t) = t^3 + 6 \\ \Rightarrow f(\sqrt[3]{2}) &= (\sqrt[3]{2})^3 + 6 = 8\end{aligned}$$

تالیفی سیروس نصیری

می‌دانیم:

$$x^r + ax = \left(x + \frac{a}{r}\right)^r - \frac{a^r}{r}$$

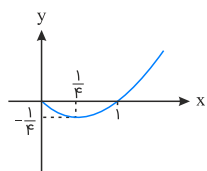
$$\Rightarrow x + a\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{a}{r}\right)^r - \frac{a^r}{r}$$

داریم:

$$y = x - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{r}\right)^r - \frac{1}{r}$$

می‌دانیم حداقل یک عبارت به صورت $(\)^r$ صفر است، پس حداقل تابع به صورت $y_{\min} = 0 - \frac{1}{r} = -\frac{1}{r}$ و $y \geq -\frac{1}{r}$ است؛ این اتفاق وقتی می‌افتد که:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{r}\right)^r = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{r} \Rightarrow x = \frac{1}{r^2}$$



تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

دوبه دو مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها را برابر قرار می‌دهیم و به ازای m به دست آمده، تابع بودن f را بررسی می‌کنیم:

الف) $m = -1 \Rightarrow (-1, -1), (-1, 0) \in f$: تابع نیست

ب) $m^2 - 1 = -1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow (0, -1), (0, 1) \in f$: تابع نیست

پ) $m^2 - 1 = m \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $m^2 - 1 \neq m^2 \Rightarrow$ تابع نیست

در واقع قسمت (پ) به خاطر زوج مرتب‌های $(m, m^2 - 1)$ و $(m^2 - 1, m^2)$ تابع نیست.

ت) $m = m^2 \Rightarrow m = 1, m = 0$

$\Rightarrow (1, 0), (1, 2) \in f$: تابع نیست

ث) $m^2 - 1 = m^2 \times$

ج) $m^2 = -1 \times$

در نتیجه رابطه f به ازای $m \in A = \left\{ -1, 1, 0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ تابع نیست.

تالیفی سید عادل حسینی

$h(x)$ معادله سهمی ماکزیم‌دار است.

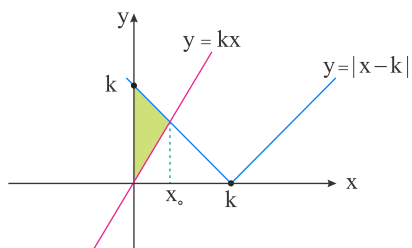
$$R_h = \left(-\infty, \frac{7}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right] \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow -2(-2n + 1) - 9 = -7 \Rightarrow n = 1$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

پاسخ مسئله برای k های منفی، قرینه پاسخ برای k های مثبت است. (با رسم نمودارها برای k های منفی، به سادگی می توان به این نتیجه رسید) پس برای k های مثبت، پاسخ را پیدا می کنیم و با قرینه کردن آن، k منفی قابل قبول نیز پیدا می شود.



مثلث هاشورخورده در شکل بالا، سطح مورد نظر می باشد که مساحت آن برابر است با: $S = \frac{1}{2} kx_0$.
 x_0 نیز طول نقطه تلاقی خط $y = kx$ و خط $y = k - x$ است:

$$kx_0 = k - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{k}{k+1}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \frac{k^2}{k+1} \xrightarrow{S=1} \frac{k^2}{k+1} = 2 \Rightarrow k^2 - 2k - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{k > 0} k = 1 + \sqrt{3}$$

قرینه آن یعنی $k = -1 - \sqrt{3}$ نیز مقدار قابل قبول برای k خواهد بود.

الف) برد تابع تک‌عضوی باشد: برای اینکه این عضو برد برابر ۵ باشد، دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

$$\text{i) } a = 5 \quad \text{یا} \quad \text{ii) } a^2 + 5 = 5 \Rightarrow a = 0$$

برای هر کدام از حالت‌های بالا، یک تابع از A به B می‌توان تعریف کرد.

ب) برد تابع دو‌عضوی باشد: سه حالت زیر امکان‌پذیر است:

$$\text{i) } a + 2 = 5 \Rightarrow a = 3$$

در این حالت دو تابع $\{(-1, 2), (3, 3)\}$ و $\{(-1, 3), (3, 2)\}$ را می‌توان تعریف کرد.

$$\text{ii) } a^2 + a + 5 = 5 \Rightarrow a^2 + a = a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = -1 \quad \text{یا} \quad a = 0$$

به ازای $a = -1$ دو تابع $\{(-1, -1), (3, 6)\}$ و $\{(-1, 6), (3, -1)\}$ را می‌توان تعریف کرد. همچنین به ازای $a = 0$ شش تابع قابل تعریف است:

$$\{(-1, 0), (0, 0), (3, 5)\}, \{(-1, 5), (0, 5), (3, 0)\}, \{(-1, 0), (0, 5), (3, 0)\}, \{(-1, 5), (0, 0), (3, 5)\}, \\ , \{(-1, 5), (0, 0), (3, 0)\}, \{(-1, 0), (0, 5), (3, 5)\}$$

$$\text{iii) } a^2 + 5 + 2 = 5 \Rightarrow a^2 = -2 \Rightarrow \text{امکان‌پذیر نیست}$$

پ) برد تابع سه‌عضوی باشد:

$$a^2 + a + 7 = 5 \Rightarrow a^2 + a + 2 = 0 \quad \text{امکان‌پذیر نیست}$$

پس در مجموع ۱۲ تابع با شرط مذکور می‌توان تعریف کرد.

تذکر: برای به دست آوردن تعداد توابع، در تمام حالت‌ها باید دامنه تمام مجموعه A فرض شود و فقط برد متغیر است.

تالیفی سید عادل حسینی

$$[3 - x^2] = |3 - x^2|, \quad 3 - x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow |3 - x^2| = 3 - x^2$$

$$3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}, \pm 1, 0$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.
روش اول:
به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

از نامعادله جذر می گیریم $\rightarrow 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2$$

از نامعادله جذر می گیریم $\rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$

پس حاصل عبارت داده شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1 - 2n+4 = 3$$

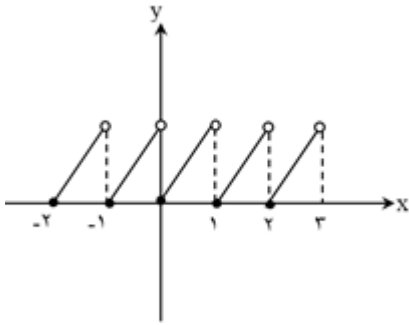
روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A = [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}]$$

$$= [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$

برای رسم نمودار تابع، محدوده اولیه x را به پنج زیربازه زیر تقسیم می کنیم:



$$-2 \leq x < -1, -1 \leq x < 0, 0 \leq x < 1, 1 \leq x < 2, 2 \leq x < 3$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - (-2) = x + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - (-1) = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

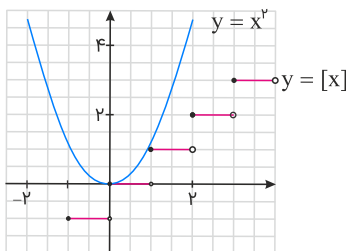
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - (1) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - (2) = x - 2$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازه $\sqrt{2}$ تشکیل شده است. پس دوتایی مرتب (n, L) به صورت $(5, \sqrt{2})$ می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

نمودار توابع $y = [x]$ و $y = x^2$ را رسم کرده ایم. این دو تابع در نقاط $x = 1$ و $x = 0$ برابرند:

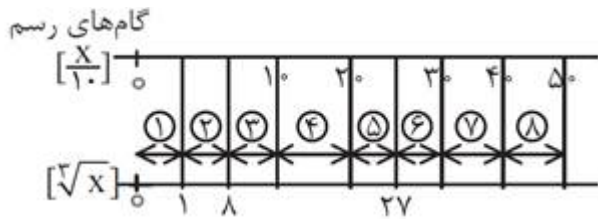


$$f(x) = \sqrt{x^2 - [x]} \Rightarrow D_f = x^2 - [x] \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq [x]$$

جاهایی را می خواهیم که نمودار x^2 بالای $[x]$ یا با آن برابر باشد مطابق شکل در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ ، دو نمودار با هم برابرند و در دیگر نقاط، نمودار x^2 بالای $[x]$ قرار دارد. بنابراین دامنه تابع برابر با \mathbb{R} است. به راحتی با عددگذاری هم می توانید تست را حل کنید.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مقادیر $[\frac{x}{10}]$ ده واحد، ده واحد مشخص می‌شود و $[\sqrt[3]{x}]$ به صورت مکعب کامل، مکعب کامل یعنی به ترتیب زیر هستند:

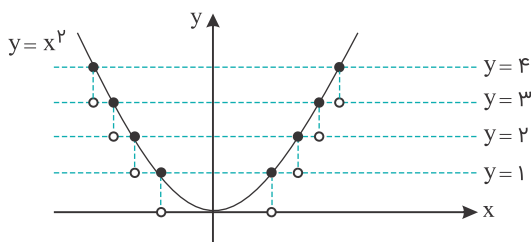


پس برای رسم $y = [\frac{x}{10}] + [\sqrt[3]{x}]$ فاصله‌های ۱ و ۲ و ... تا ۸ را باید در نظر گرفت، یعنی هشت پاره‌خط به وجود می‌آید.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می‌کنیم.

برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت‌هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می‌گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می‌کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $(-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گزینه ۱: $x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ تابع نیست.

گزینه ۲: $x = 0 \Rightarrow y = 0, 1$ تابع نیست.

گزینه ۳: $x = -1 \Rightarrow y = 0, \pm 1$ تابع نیست.

گزینه ۴:

$$x, y \geq 0, y^3 = x^2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^2}; x \geq 0$$

پس y تابعی از x است.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

اول ضابطه $f(\sqrt{x})$ را تعیین می‌کنیم. در تعیین ضابطه $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنه آن متفاوت با دامنه تابع $f(x)$ است.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

حالا ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2, \quad x \in (0, +\infty)$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

تابع خطی است که در $x = \pm 1$ تعریف نشده است، لذا این دو عدد ریشه مخرج هستند.

$$x^2 + c = 0 \Rightarrow 1 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = -1} \Rightarrow \underline{c^2 = 1}$$

$$y = \frac{a^2 x^3 + 2x^2 - x + b}{x^2 - 1} = \text{خط}; \quad x \neq \pm 1$$

چون تابع خط شده، پس صورت بر مخرج بخش‌پذیر است. صورت را بر مخرج تقسیم کرده و باقی‌مانده را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r|l} a^2 x^3 + 2x^2 - x + b & x^2 - 1 \\ \underline{-a^2 x^3 + a^2 x} & a^2 x + 2 \\ \hline 2x^2 + a^2 x - x + b & \\ \underline{-2x^2 + 2} & \\ \hline (a^2 - 1)x + b + 2 & \end{array}$$

$$(a^2 - 1)x + b + 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1$$

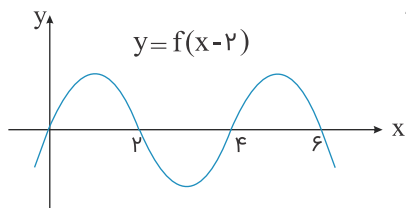
$$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow b^2 = 4$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 1 - 4 + 1 = -2$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

نمودار $y = f(x - 2)$ به صورت زیر خواهد بود:

پس دامنه تابع $y = \sqrt{f(x - 2)}$ به صورت $[0, 2] \cup [4, 6]$ است که دارای اعداد صحیح $\{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ است؛ یعنی شامل ۶ عدد صحیح است.



مدارس برتر ایران علوم تجربی دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

اول: یک بار x را برابر (۱) و یک بار برابر (-۱) می‌گذاریم:

$$2f(x+2) - xf(2-x) = 2x^2 + 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 2f(3) - f(1) = 2 + 1 = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow 2f(1) + f(3) = 2 + 1 = 3$$

دوم: با حل دستگاه زیر مقدار $f(3)$ را به دست می‌آوریم:

$$\times 2 \begin{cases} 2f(3) - f(1) = 3 \\ 2f(1) + f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f(3) - 2f(1) = 6 \\ 2f(1) + f(3) = 3 \end{cases}$$

طرفین معادلات فوق را باهم جمع می‌کنیم.

$$5f(3) = 6 + 3 = 9 \Rightarrow f(3) = \frac{9}{5}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

طبق معادله سؤال $x \neq 0$ است، حال باید داشته باشیم:

$$\left[\frac{3}{2}x \right] = \frac{3x}{2}$$

اگر $[a] = a$ باشد $a \in \mathbb{Z}$ است. پس:

$$\frac{3}{2}x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3}{2}x = k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x = \frac{2}{3}k$$

$$0 \leq \frac{2}{3}k \leq 5 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} 0 \leq k \leq 7/5 \xrightarrow{k \neq 0} 0 < k \leq 7/5$$

پس k می‌تواند اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ باشد. دقت کنید که اگر $k = 0$ باشد $x = 0$ است و مخرج کسر معادله اولیه را صفر می‌کند.

تالیفی سیدمحمدصالح ارشاد

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

برای عبارت $x - 1 + \frac{1}{x-1}$ دو حالت وجود دارد:

$$1) \quad x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2 \xrightarrow{+2} \underbrace{x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2}_{f(x)} \geq 4$$

$$2) \quad x - 1 + \frac{1}{x-1} \leq -2 \xrightarrow{+2} \underbrace{x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2}_{f(x)} \leq 0$$

باتوجه به نامساوی‌های فوق $f(x) \geq 4$ یا $f(x) \leq 0$ است. پس برد $f(x)$ شامل بازه $(0, 4)$ نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x - 3 \geq 0$ و $x - 4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x - 3|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x - 4|}_{\text{منفی}} = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \times \\ x = -2 \times \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده در فاصله $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

اول: $x = -[x^2 + 1] + 5 + [x]$ است و تمامی عبارت‌های سمت راست این تساوی اعداد صحیح هستند، پس x نیز عددی صحیح است.

اگر x صحیح باشد، $x^2 + 1$ نیز صحیح خواهد بود. پس تمامی جزء صحیح‌ها را می‌توانیم حذف کنیم زیرا اگر $x \in \mathbb{Z}$ آنگاه $[x] = x$ است.

دوم:

$$x^2 + 1 + x = 5 + x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

هر دو جواب به دست آمده صحیح هستند، پس قابل قبول‌اند. مجموع جواب‌ها برابر $0 = (-2) + 2$ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$x^2 = [x] + [-x] + 2 \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} & \text{غ ق ق} \\ x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = -1 + 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس این معادله جواب ندارد.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۳

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0)$$

می‌دانیم $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ است. بنابراین $\frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{2}$ می‌باشد. پس $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$ است.

به علاوه به ازای $x = 0$ تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ برابر صفر است. پس برد تابع f شامل صفر هم هست.

$$R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $x > 0$ باشد، $4 < x < 5$ باید باشد زیرا اگر $x \geq 5$ باشد $x[x] \geq 25$ و اگر $x \leq 4$ باشد، $x[x] \leq 16$ است. اگر $x \in (4, 5)$ باشد، $[x] = 4$ است. پس:

$$x[x] = 23 \xrightarrow{[x]=4} 4x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{4}$$

چون $\frac{23}{4} \notin (4, 5)$ است، پس به ازای $x > 0$ معادله جواب ندارد.

اگر $x < 0$ باشد، باید $-4 < x < -5$ باشد؛ زیرا اگر $-4 \leq x < 0$ باشد، $x[x] \leq 16$ و اگر $x \leq -5$ باشد، $x[x] \geq 25$ است. بنابراین داریم:

$$-5 < x < -4 \Rightarrow [x] = -5 \Rightarrow -5x = 23 \Rightarrow x = -\frac{23}{5} \in (-5, -4)$$

پس به ازای $x < 0$ معادله یک جواب دارد.

تالیفی سیدمحمد صالح ارشاد

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = 0$ غ.ق. ق. ← گزینه ۲ حذف می‌شود.

$x = 1$ غ.ق. ق. ← گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

از طرفی چون $x \neq 0$ است، پس گزینه ۴ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

اول: x را برابر ۲ قرار می‌دهیم تا مقدار $f(3)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} 2f(x+1) - x^2 f(3) &= 2x^2 - 4 \xrightarrow{x=2} 2f(3) - 4f(3) = 8 - 4 \\ -2f(3) &= 4 \Rightarrow f(3) = -2 \end{aligned}$$

دوم: برای به دست آوردن $f(0)$ باید x را برابر ۱ بگذاریم:

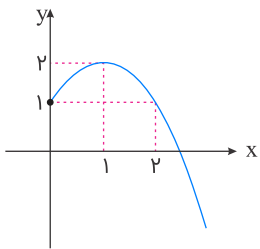
$$\begin{aligned} 2f(x+1) - x^2 f(3) &= 2x^2 - 4 \\ \xrightarrow{x=1} 2f(0) + 2 \times (-1)^2 &= 2(-1)^2 - 4 \Rightarrow 2f(0) = -4 \Rightarrow f(0) = -2 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $t = \sqrt{x+1}$ را متغیری جدید در نظر بگیریم، در نتیجه $x = t^2 - 1$ خواهد بود و داریم:

$$y = 2t - (t^2 - 1) = 1 + 2t - t^2$$

برد سهمی بالا با دامنه $t \geq 0$ ، برد تابع f است. سهمی موردنظر در شکل زیر رسم شده است:



پس برد f بازه $(-\infty, 2]$ است.

تالیفی سید عادل حسینی

اول: عبارت $-x^2 + 4x + 12$ را کمی ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 12 &= -(x^2 - 4x - 12) = -\underbrace{(x^2 - 4x + 4 - 16)}_{(x-2)^2} \\ &= -\left((x-2)^2 - 16\right) = -(x-2)^2 + 16 \\ f(x) &= \sqrt{-(x-2)^2 + 16} \xrightarrow{x=2+\sqrt{7}} f(2+\sqrt{7}) = \sqrt{-(2+\sqrt{7}-2)^2 + 16} \\ &= \sqrt{-(\sqrt{7})^2 + 16} = \sqrt{-7+16} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

برای پیدا کردن $f(2)$ در ضابطه $f(x)$ به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \xrightarrow{x=2} f(2) = \sqrt{-4 + 8 + 12} = \sqrt{16} = 4 \\ f(2+\sqrt{7}) - f(2) &= 3 - 4 = -1 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

ابتدا تابع $f^{-1}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1 \\ y &= (x+2)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x+2)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = |x+2| \\ \xrightarrow{x \leq -2} \sqrt{y+1} &= -(x+2) \Rightarrow -\sqrt{y+1} = x+2 \Rightarrow -\sqrt{y+1} - 2 = x \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= -\sqrt{x+1} - 2 \end{aligned}$$

حالا طول نقطهٔ تلاقی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= g(x) \Rightarrow -\sqrt{x+1} - 2 = \frac{2x-1}{-3} \\ \Rightarrow 3\sqrt{x+1} + 6 &= 2x-1 \Rightarrow 3\sqrt{x+1} = 2x-7 \end{aligned}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} 9(x+1) &= (2x-7)^2 \\ \Rightarrow 9x+9 &= 4x^2 - 28x + 49 \Rightarrow 4x^2 - 37x + 40 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x-8)(4x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=\frac{5}{4} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

دامنه $y = 2f(2-x) + x$ برابر است با $[-1, 3]$ ، پس:

$$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2-x \leq 3$$

پس عبارت درون f باید در فاصله $[-1, 3]$ باشد:

$$-1 \leq \frac{x}{3} \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 9$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

راه حل اول: ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(16)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow y = f(3x - 4)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطه تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = f(3x - 4) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(3x - 4)) = f^{-1}(y) = 3x - 4$$

$$\Rightarrow 3x = f^{-1}(y) + 4 \Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) + 4}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x) + 4}{3}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(16)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(16)$ را حساب می کنیم:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 16 + 4 = 20$$

$$g^{-1}(16) = \frac{20 + 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

راه حل دوم: فرض می کنیم $g^{-1}(16) = a$ ، پس داریم: $g(a) = 16$

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow g(a) = f(3a - 4) = 16 \Rightarrow f^{-1}(16) = 3a - 4$$

$$f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20 = 3a - 4 \Rightarrow a = \frac{24}{3} = 8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 6x + 2 = 3(x^2 + 2x) + 2 = 3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1) - 3 + 2 = 3(x^2 + 2x + 1) - 1 = 3(x+1)^2 - 1 \\ \Rightarrow y &= 3(x+1)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = 3(x+1)^2 \Rightarrow \frac{y+1}{3} = (x+1)^2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال}} \sqrt{\frac{y+1}{3}} = |x+1| \xrightarrow{x \leq -1} \sqrt{\frac{y+1}{3}} = -(x+1)$$

$$\Rightarrow x = -1 - \sqrt{\frac{y+1}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{\frac{x+1}{3}}$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 3 \Rightarrow a + b = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

طرفین عبارت بالا را به توان ۳ می‌رسانیم:

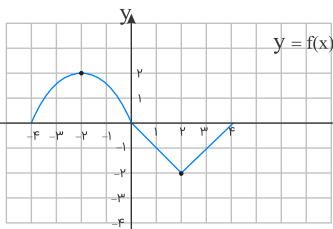
$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$y^3 = \underbrace{x + \sqrt{x^2 + 1}}_{a^3} + \underbrace{x - \sqrt{x^2 + 1}}_{b^3} + 3 \underbrace{\sqrt[3]{-1}}_{ab} \underbrace{(y)}_{a+b}$$

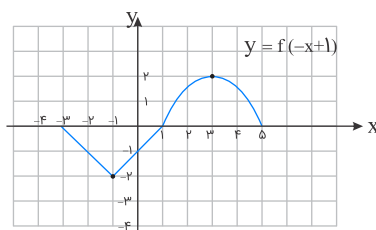
$$y^3 = 2x - 3y \Rightarrow y^3 + 3y = 2x \Rightarrow x = \frac{y^3 + 3y}{2} \Rightarrow f^{-1} = \frac{x^3 + 3x}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار رسم شده مربوط به $y = f\left(\frac{x}{\rho}\right)$ است. برای رسم تابع $f(x)$ کافی است طول نقاط را نصف کنیم.



برای رسم $y = f(-x + 1)$ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.



باتوجه به شکل، تابع $y = f(-x + 1)$ در بازه $[-1, 3]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$D_g : (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

x	-1	0	1	
x	-	-	+	+
(x-1)	-	-	-	+
f(x)=(x+1)h(x)	+	-	-	-
g(x)	+	-	+	-

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$\begin{cases} D_f : [-2, 4] \\ D_g : (-1, 3) \end{cases} \quad h(x) = 3f(2x) - 2g([x]) + 1$$

$$\begin{cases} -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \\ -1 < [x] < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow D_h : [0, 2]$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

باتوجه به شکل می‌بینیم که $g(x) = [x]$ و $f(x) = x - [x]$

$$f \circ g - g \circ f = f(g(x)) - g(f(x))$$

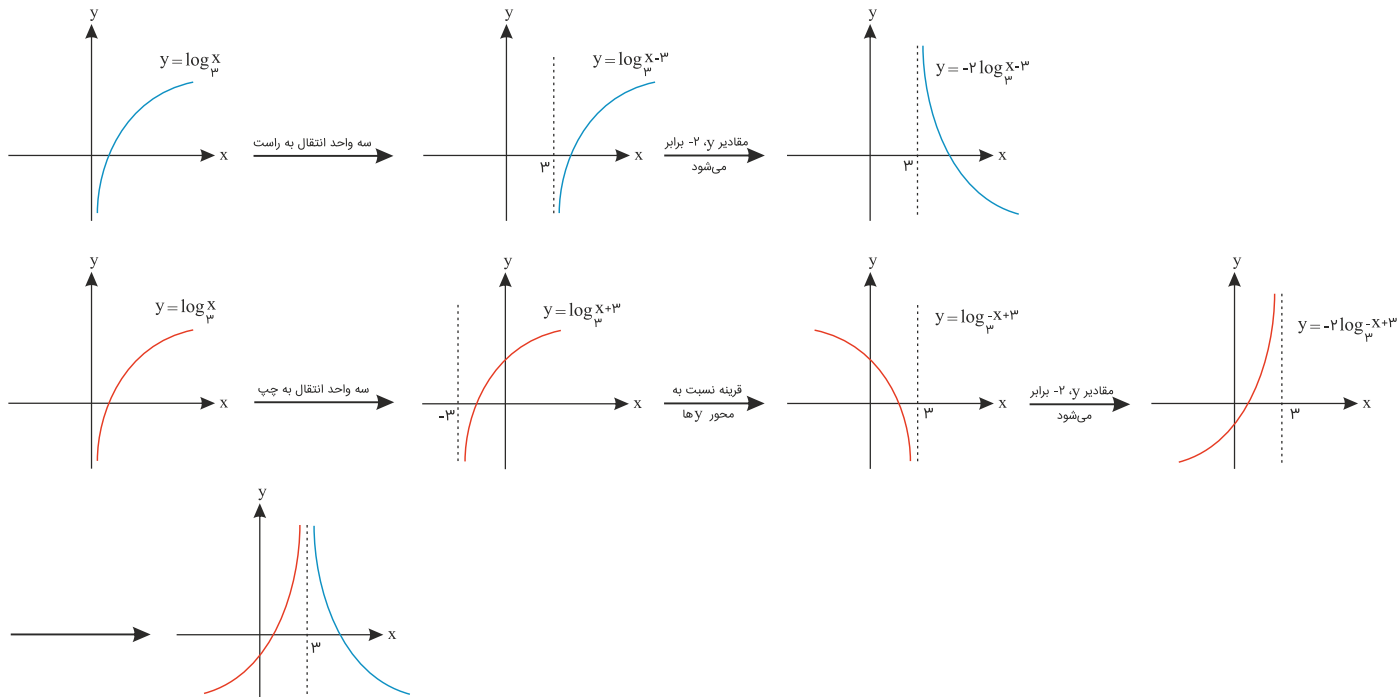
$$= ([x] - [[x]]) - [x - [x]]$$

$$\xrightarrow{\text{اگر } k \in \mathbb{Z} \text{ آنگاه } [x+k] = [x] + k} f \circ g - g \circ f = [x] - [x] - [x] + [x] = 0$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{e}}} x^{\sqrt{e}-6x+9} = \log_{\sqrt{e}-1} (x-3)^{\sqrt{e}} = -\sqrt{e} \log_{\sqrt{e}} |x-3|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{e} \log_{\sqrt{e}} x-3 & ; x > 3 \\ -\sqrt{e} \log_{\sqrt{e}} -x+3 & ; x < 3 \end{cases}$$



تالیفی محمدرضا کشاورزی

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} (y - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

دلیل اینکه چرا جلوی گزینه‌ها $x > 0$ نوشته این است که برد تابع f برابر $(0, +\infty)$ می‌باشد که همان دامنه f^{-1} می‌شود (بجز در نقطه صفر که مخرج برابر صفر می‌شود).

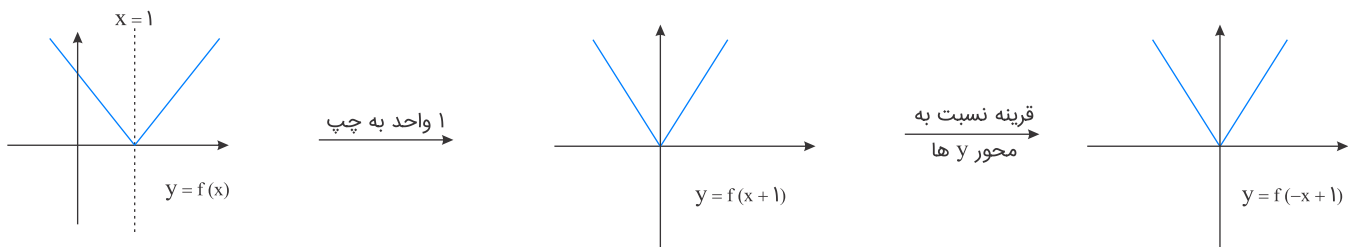
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

برای رسم تابع $f(1-x)$ باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) ابتدا در تابع $y = f(x)$ به جای x قرار دهیم $x+1$ ، یعنی تابع f را 1 واحد به سمت چپ ببریم تا تابع $y = f(x+1)$ ایجاد شود.

۲) در تابع مرحله قبل به جای x قرار دهیم $-x$ تا تابع $y = f(-x+1)$ ایجاد شود؛ یعنی تابع $y = f(x+1)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

حال اگر تابع قسمت ۱ و ۲ یکسان باشند، این یعنی تابع f ، تابعی است که اگر 1 واحد آن را به سمت چپ ببریم با تابعی که اگر 1 واحد به سمت چپ ببریم و سپس نسبت به محور y ها قرینه کنیم تفاوتی ندارد. پس $x = 1$ باید محور تقارن این تابع باشد. به شکل زیر دقت کنید:



تالیفی سیدمحمد صالح ارشاد

دامنه $f(2x-1)$ برابر با $[-\frac{1}{3}, 2]$ است، پس:

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq 2x-1 \leq 3$$

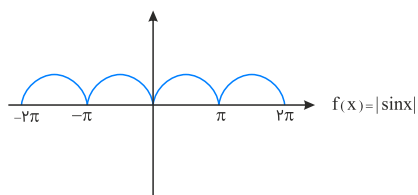
پس عبارت داخل f باید در فاصله $[-\frac{5}{3}, 3]$ باشد:

$$-\frac{5}{3} \leq [x] \leq 3 \Rightarrow -1 \leq x < 4$$

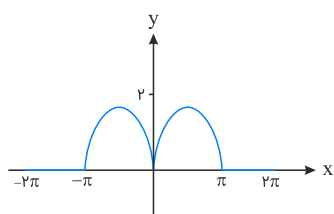
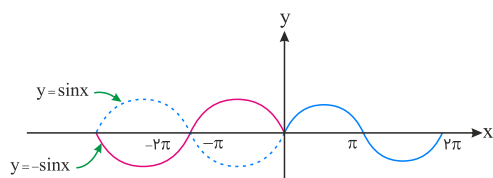
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

راه حل اول:

بهتر است $f(x) = |\sin x|$ و $g(x) = \sin|x|$ را در نظر گرفته و در x های مساوی، y های آن ها را جمع کنیم.



$$g(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x & ; x \geq 0 \\ \sin(-x) = -\sin x & ; x < 0 \end{cases}$$



راه حل دوم:

در تابع صادق است، پس گزینه ۲ یا ۳ درست است. $B(-\frac{\pi}{4}, 2)$ هم مشخص می کند که گزینه ۳ درست است.

ابتدا معادله برخورد تابع $y = x$ و $y = f^{-1}(2x - 1)$ (نیمساز ناحیه اول) را می‌نویسیم:

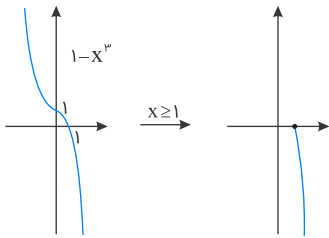
$$f^{-1}(2x - 1) = x \xrightarrow[\text{f می‌گیریم}]{\text{از طرفین تساوی}} f(f^{-1}(2x - 1)) = f(x) \Rightarrow 2x - 1 = f(x) \Rightarrow 2x - 1 = x + \sqrt{x}$$

$$x - 1 = \sqrt{x} \xrightarrow{x \geq 1} x^2 - 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

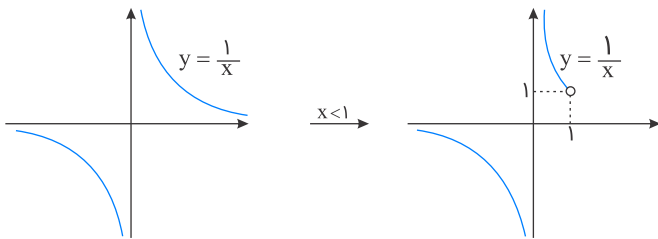
$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x \geq 1} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

تالیفی علی ناری ابیانه

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، برد ضابطه اول $(-\infty, 0]$ است. پس برد ضابطه دوم باید $(0, +\infty)$ باشد.



برد ضابطه دوم شامل اعداد منفی است که برای ما مهم نیست. به علاوه می‌دانیم اگر $0 < x < 1$ باشد، $\frac{1}{x} > 1$ است و $\frac{1}{x} + a > 1 + a$ می‌شود. یعنی فاصله $(1 + a, +\infty)$ در برد این تابع قرار می‌گیرد. برای اینکه برد تابع \mathbb{R} شود، ما نیاز داریم که $(0, +\infty)$ در برد ضابطه دوم قرار بگیرد، پس باید:

$$1 + a \leq 0 \Rightarrow a \leq -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$g(x) = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1}_{(x-1)^3} = (x-1)^3 + 1$$

برای اینکه از $f(x) = x^3$ به $g(x) = (x-1)^3 + 1$ برسیم باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست و سپس یک واحد به بالا ببریم. یعنی:

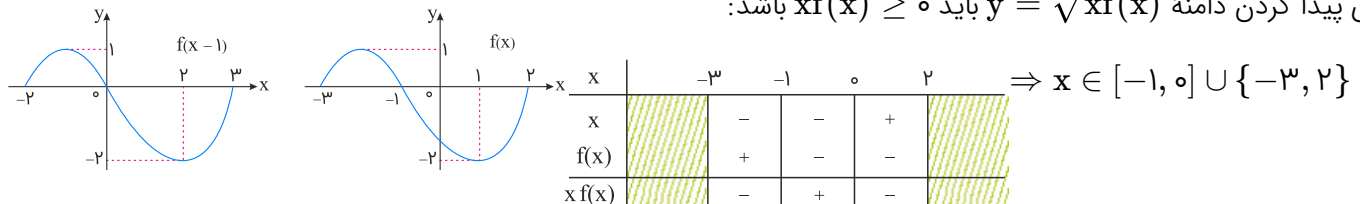
$$g(x) = f(x-1) + 1$$

می‌دانیم $f(2) = 8$ است.

$$A(2, 8) \xrightarrow{g(x)=f(x-1)+1} A'(2+1, 8+1) = (3, 9)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

سعی می‌کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کنیم:
برای پیدا کردن دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$f^{-1} \circ g(x) \geq x \xrightarrow{f \text{ صعودی}} g(x) \geq f(x)$$

$$\Rightarrow 8x - 6 \geq x^3 + x \Rightarrow x^3 - 7x + 6 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x+3) \leq 0$$

$$x > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

اول معادله $f(x) = -2$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 1 = -2 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2$$

حالا می‌خواهیم $f(g(x)) = -2$ باشد، پس $g(x) = -1$ است.

$$g(x) = x^2 + 4x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} : \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده است تا نمودار داده شده حاصل شود:

شکل

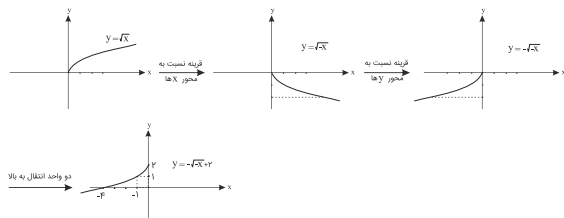
بنابراین ضابطه این تابع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد انتقال به بالا}} y = \sqrt{-x} + 2$$

$$-\sqrt{-x} + 2 = c - \sqrt{ax + b} \Rightarrow a = -1, b = 0, c = 2$$

$$\Rightarrow a + b + c = -1 + 0 + 2 = 1$$



تالیفی محمدرضا کشاورزی

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند. دامنهٔ تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x - f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

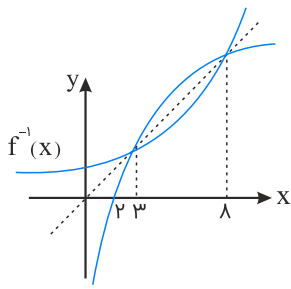
$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینهٔ هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می‌گیرد و برعکس.

در بازهٔ $[۳, ۸]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار

$y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و در نتیجه $x - f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت $f(x)$)

صحیح‌تر نامنفی می‌شود، بنابراین بازهٔ $[۳, ۸]$ دامنهٔ تعریف تابع داده‌شده است.



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

برای به دست آوردن برد تابع $g \circ f$ ابتدا باید ضابطهٔ آن را تشکیل دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - [x], \quad g(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1-f(x)}{f(x)} \\ &= \frac{1-x+[x]}{x-[x]} = \frac{1}{x-[x]} - 1 \end{aligned}$$

می‌دانیم $۰ < x - [x] < ۱$ ، از طرفی $x - [x]$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا:

$$\begin{aligned} ۰ < x - [x] < ۱ &\Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > ۱ \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > ۰ \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) > ۰ \Rightarrow R_{g \circ f} = (۰, +\infty) \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

ابتدا fog را می‌سازیم:

$$y = f(g(x) = x^2 - 1) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1} = \begin{cases} 1 & ; x^2 - 1 > 0 \Rightarrow -1 > x \text{ یا } x > 1 \\ -1 & ; x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

حال $h(x) = x^2$ را در این تابع ضرب می‌کنیم:

$$y = h(x) f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ -x^2 & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

که در بازه $(-1, 1)$ قرینه x^2 نسبت به محور x ها است و در خارج از این بازه همان x^2 است. در $x = \pm 1$ هم که مخرج $y = f(g(x)) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}$ تعریف نشده است، تابع y تعریف نمی‌شود.

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(-x + \sqrt{x^2 + 4} \right)$$

حاصل ضرب دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ برابر است با:

$$f(x) f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left(-x + \sqrt{x^2 + 4} \right) = \frac{1}{4} (x^2 + 4 - x^2) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

$$\Rightarrow f(x) f(-x) = 1$$

بنابراین اگر فرض کنیم $f(x) = \alpha$ باشد آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \alpha & \Rightarrow f^{-1}(\alpha) = x \\ f(-x) = \frac{1}{\alpha} & \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^{-1}(\alpha) + f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = x - x = 0$$

روش دوم: با استفاده از به دست آوردن ضابطه تابع وارون نیز می‌توان به جواب رسید.

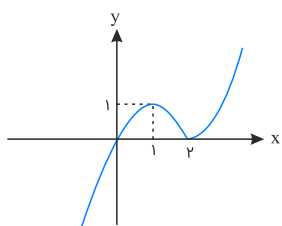
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطه تابع را به صورت تفکیک شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می‌کنیم $x \geq 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < 2$ باشد و ضابطه تابع را تعیین می‌کنیم.)
 ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.
 ج) باتوجه به این نکته که $D_{f^{-1}} = R_f$ ، دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطه آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \Rightarrow y = x(x-2) \\ x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow y = -x(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; x < 2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازه $[1, 2]$ است. برد تابع در این بازه $[0, 1]$ است. پس $D_{f^{-1}} = [0, 1]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدوده مشخص شده ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{+1} 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1 - y = (x-1)^2 \Rightarrow x-1 = \sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

نکته: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای معکوس‌پذیر از درجه $n \in \mathbb{N}$ باشد، $f^{-1}(x)$ تابعی از درجه $\frac{1}{n}$ خواهد بود. در این تست از آنجایی که $y = f(x) + f^{-1}(x)$ تابعی خطی و از درجه اول است، نتیجه می‌گیریم که $n = 1$ بوده است؛ یعنی خود f تابعی درجه اول است:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow f(x) + f^{-1}(x) = ax + b + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = x \left(a + \frac{1}{a} \right) + b - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x \left(a + \frac{1}{a} \right) + \left(b - \frac{b}{a} \right) = -2x + 4$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} = -2, \quad b \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 4$$

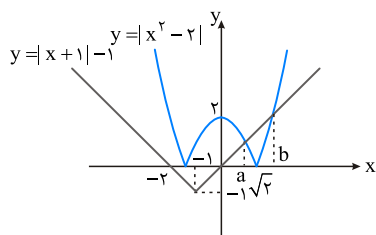
$$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b \left(1 - \frac{1}{(-1)} \right) = 4$$

$$\Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x + 2, \quad f^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(6) + f(4) = (-6 + 2) + (-4 + 2) = -6$$

تالیفی محمدرضا توجه

دو منحنی $y_1 = |x+1| - 1$ و $y_2 = |x^2 - 2|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a ، $0 < x < \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x + 1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} x = a = 1$$

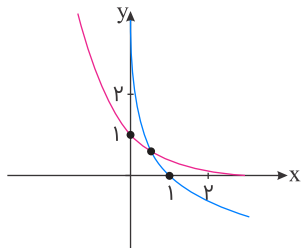
برای یافتن b ، $x > \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{x > \sqrt{2}} x = b = 2$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+1}{2} = 1.5$$

اول: اگر تابع نمایی $y = a^x$ وارون خود را قطع کند آنگاه $0 < a < 1$ است. ضابطه وارون این تابع $y = \log_a^x$ می‌باشد.



دوم: مطابق شکل هر دو تابع $y = a^x$ و $y = \log_a^x$ ($0 < a < 1$) نزولی هستند و طول و عرض نقطه برخورد در بازه $(0, 1)$ قرار دارد.

این تابع وارون خودش را روی خط $y = x$ قطع می‌کند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x - 15) > 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup (15, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x | x \in (-\infty, 0) \cup (15, +\infty), \log(x^2 - 15x) \leq 2\}$$

$$\log(x^2 - 15x) \leq \log_{10}^{100} \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x + 5) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, 20] (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**), (*)} x \in [-5, 0) \cup (15, 20]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

ابتدا نمودار را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، پس $y = -|x - ۴|$ می‌شود.

$$B \Rightarrow y_B = 0 \Rightarrow x_B = ۴$$

بار دیگر نمودار را a واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. ($a > 0$)

$$y = -|x - ۱ + a|$$

$$A \Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow x_A = ۱ - a$$

$$C \Rightarrow -|x - ۴| = -|x - ۱ + a| \Rightarrow \begin{cases} x - ۴ = x - ۱ + a \Rightarrow a = -۳ \quad \times \\ x - ۴ = -x + ۱ - a \Rightarrow ۲x = ۵ - a \Rightarrow x = \frac{۵ - a}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{۵ - a}{۲}$$

$$y = -\left| \frac{۵ - a}{۲} - ۴ \right| = -\left| \frac{-۳ - a}{۲} \right|$$

$$\xrightarrow{a > 0} y = -\frac{۳ + a}{۲} \Rightarrow y_C = -\frac{۳ + a}{۲}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{۲} AB \times |y_C| = ۹ \Rightarrow \frac{(۴ - ۱ + a) \times (۳ + a)}{۲} = ۱۸$$

$$\Rightarrow (۳ + a)^۲ = ۳۶ \Rightarrow \begin{cases} ۳ + a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \quad \checkmark \\ ۳ + a = -۶ \Rightarrow a = -۹ \quad \times \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مسئله را برای $x \geq 0$ که $f(x)$ اکیداً نزولی و $x < 0$ که $f(x)$ اکیداً صعودی است، حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{الف) } x \geq 0 &\Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right) > f(x) \Rightarrow \frac{x}{x-1} < x \Rightarrow \frac{x - x^2 + x}{x-1} < 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{\frac{2x - x^2}{x-1}}_P < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -\infty & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ \hline P & + & 0 & - & 0 & - \end{array} \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (2, +\infty) \xrightarrow{\cap(x \geq 0)} x \in (0, 1) \cup (2, +\infty) \quad (1)$$

$$\text{ب) } x < 0 \Rightarrow f\left(\frac{-x}{x-1}\right) > f(x) \Rightarrow \frac{-x}{x-1} > x$$

$$\Rightarrow \frac{-x - x^2 + x}{x-1} > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-x^2}{x-1}}_P > 0$$

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline P & + & 0 & + & - \end{array} \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{\cap(x < 0)} x < 0 \quad (2)$$

اجتماع جواب‌های (۱) و (۲) به دست آمده برابر است با: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$

تالیفی سیروس نصیری

اعداد صحیح ۲، -۱، ۰، ۱، ۲ و ۳ عضو دامنه g هستند. پس:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_f = (-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$$

$$g(-2) = 0 \xrightarrow{0 \notin D_f} -2 \notin D_{f \circ g}$$

$$g(-1), g(0) < 0 \xrightarrow{(-\infty, 0) \in D_f} -1, 0 \in D_{f \circ g}$$

$$g(1) = 0 \xrightarrow{0 \notin D_f} 1 \notin D_{f \circ g}$$

$$0 < g(2) < 4 \xrightarrow{(0, 4) \notin D_f} 2 \notin D_{f \circ g}$$

$$g(3) = 4 \xrightarrow{4 \in D_f} 3 \in D_{f \circ g}$$

پس اعداد صحیح ۰، -۱ و ۳ عضو دامنه تابع $f \circ g$ هستند.

تالیفی سیدمحمد صالح ارشاد

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2; x \neq 3$$

ضابطه وارون f را پیدا می‌کنیم:

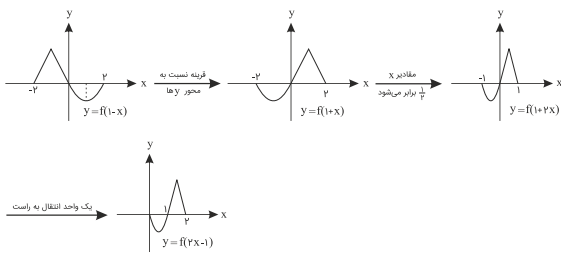
$$y = x + 2 \Rightarrow y - 2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$

می‌دانیم در تابع $f(x)$ ، $x \neq 3$ است. یعنی $3 + 2 = 5$ پس در برد f ، 5 نیست یعنی در دامنه $f^{-1}(x)$ ، 5 نیست، پس $f^{-1}(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{x-5} \Rightarrow a = 2, b = 5 \Rightarrow b - 2a = 5 - 2(2) = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$y = f(1-x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = f(1+x) \xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم برد دو}} y = f(1+2x) \xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به راست}} y = f(1+2(x-1)) = f(2x-1)$$



تالیفی محمدرضا کشاورزی

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S = a(x-1)^2 - 5$$

$$f(0) = a(-1)^2 - 5 = -4 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 - 5 = x^2 - 2x + 1 - 5 = x^2 - 2x - 4$$

$$y = f(g(x)) = x - 4$$

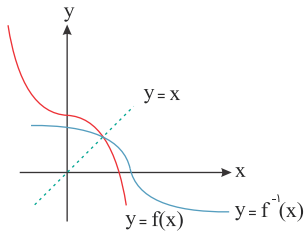
$$f(g(x)) = g^2(x) - 2g(x) - 4 = x - 4$$

$$x = 0 \Rightarrow f(g(0)) = g^2(0) - 2g(0) - 4 = 0 - 4 \Rightarrow g^2(0) - 2g(0) = 0$$

$$g(0)(g(0) - 2) = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \text{ یا } g(0) = 2$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

اول باید به کمک قرینه کردن نمودار داده شده نسبت به خط $y = x$ ، نمودار $y = f(x)$ را پیدا کنیم.

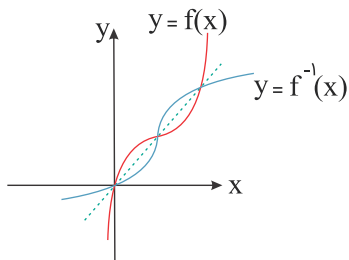
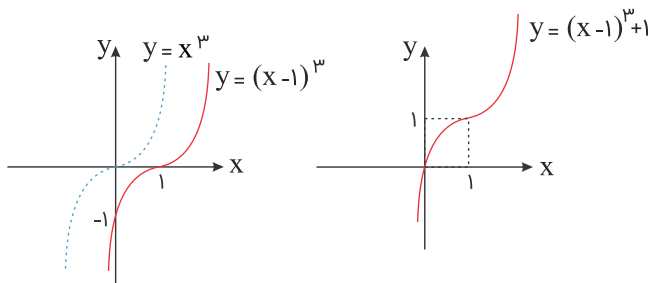


از بین گزینه‌های داده شده فقط نمودار حاصل می‌تواند مربوط به $f(x) = 2 - x^3$ باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس با قرینه کردن آن نسبت به خط $y = x$ ، نمودار وارون آن را پیدا می‌کنیم:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

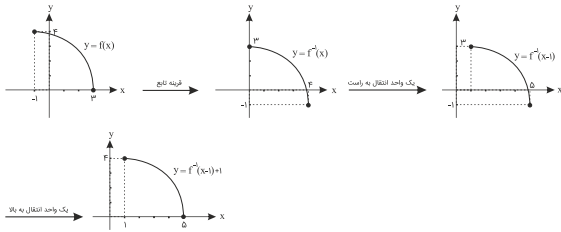
$$y = \frac{3^x - 2}{3^x + 2} \Rightarrow y3^x + 2y = 3^x - 2 \Rightarrow 2y + 2 = 3^x - y3^x$$

$$\Rightarrow 2y + 2 = 3^x(1 - y) \Rightarrow 3^x = \frac{2y + 2}{1 - y} \Rightarrow \log_3\left(\frac{2y + 2}{1 - y}\right) = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{2x + 2}{1 - x}\right)$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را نسبت به $y = x$ قرینه می‌کنیم، سپس یک واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا $y = f^{-1}(x-1) + 1$ به دست آید.



تالیفی محمدرضا کشاورزی

$$f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 1 - 1 \Rightarrow f(2x+1) = (2x+1)^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

$$-\frac{1}{p}f(2x-1) = -\frac{1}{p}((2x-1)^2 - 1) = -\frac{1}{p}(4x^2 - 4x + 1 - 1) = -2x^2 + 2x$$

طول رأس سهمی فوق برابر با $\frac{1}{p}$ است. $-\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2(-2)} = \frac{1}{2}$

$$\text{عرض رأس سهمی : } -\frac{1}{p}f(2x-1) = -2x^2 + 2x \xrightarrow{x=\frac{1}{p}} -2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{p}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

دامنه تابع معکوس ($D_{f^{-1}}$) همان برد تابع اصلی (R_f) است. بنابراین برای تعیین دامنه تعریف تابع معکوس، باید برد تابع اصلی را به دست آوریم. بعد از تعیین $D_{f^{-1}}$ ، ضابطه تابع معکوس را مشخص می کنیم. برای یافتن ضابطه تابع معکوس از رابطه $y = f(x)$ را برحسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $y = f^{-1}(x)$ به دست می آید.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 > x^2 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \\ \xrightarrow{|x|=\pm x} \sqrt{x^2 + 1} > -x &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x^2+1}} f(x) > 0 \\ \Rightarrow R_f = (0, +\infty) &\Rightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \end{aligned}$$

دامنه تابع معکوس به صورت $x > 0$ در می آید.

$$\begin{aligned} f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} &\Rightarrow y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1} \\ \xrightarrow{\text{به توان } 2} (y - x)^2 &= x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy = 1 \\ \Rightarrow 2xy = y^2 - 1 &\Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), x > 0 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

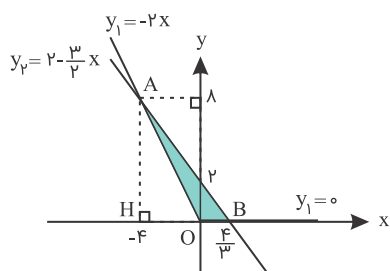
$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

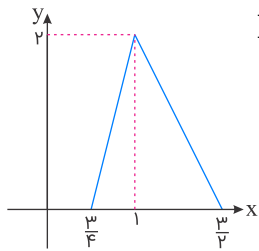
$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{2}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\triangle ABO$ برابر ۸ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

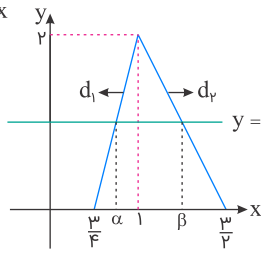
ابتدا تابع $f(2x-2)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار لازم است نمودار را ۲ واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس طول نقاط را نصف کرد.



$$D_{f \circ f(2x-2)} = \{x \mid x \in D_{f(2x-2)}, R_{f(2x-2)} \in D_{f(x)}\}$$

$$= \left\{x \mid x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right], R_{f(2x-2)} \in \left[\frac{-1}{2}, 1\right]\right\}$$

باتوجه به شکل، مقادیری را می‌خواهیم که زیر خط $y=1$ قرار بگیرد. برای محاسبه α و β باید معادلات خطی d_1 و d_2 را به دست آوریم.



$$d_1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}, 0\right), (1, 2) \Rightarrow a_{d_1} = \frac{2-0}{1-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

$$y-2 = 8(x-1) \Rightarrow y = 8x-6$$

$$d_2 \Rightarrow (1, 2), \left(\frac{3}{2}, 0\right) \Rightarrow a_{d_2} = \frac{2-0}{1-\frac{3}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$$

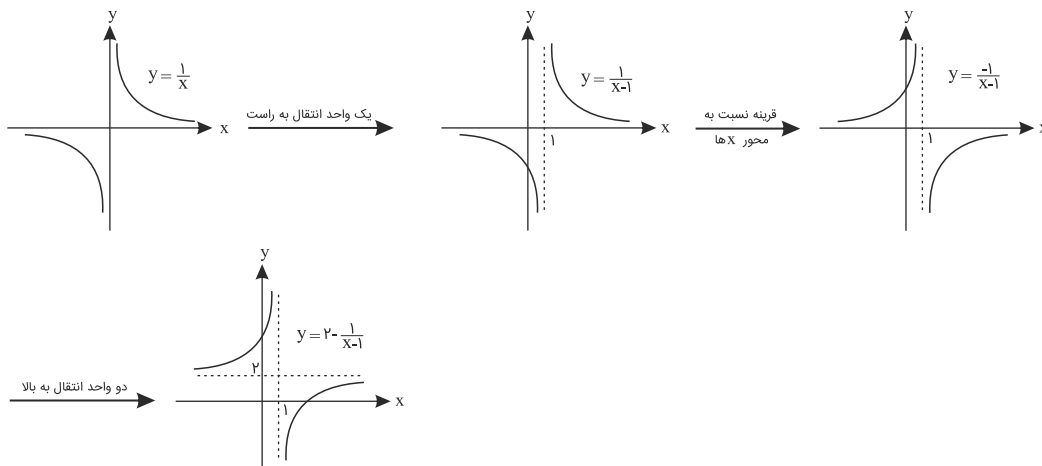
$$y-2 = -4(x-1) \Rightarrow y = -4x+6$$

$$f(2x-2) = \begin{cases} 8x-6 & ; \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \\ -4x+6 & ; 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-6=1 \Rightarrow x = \frac{7}{8} \\ -4x+6=1 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

پس دامنه تابع $f \circ f(2x-2)$ برابر $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$y = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2x-2-1}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$$



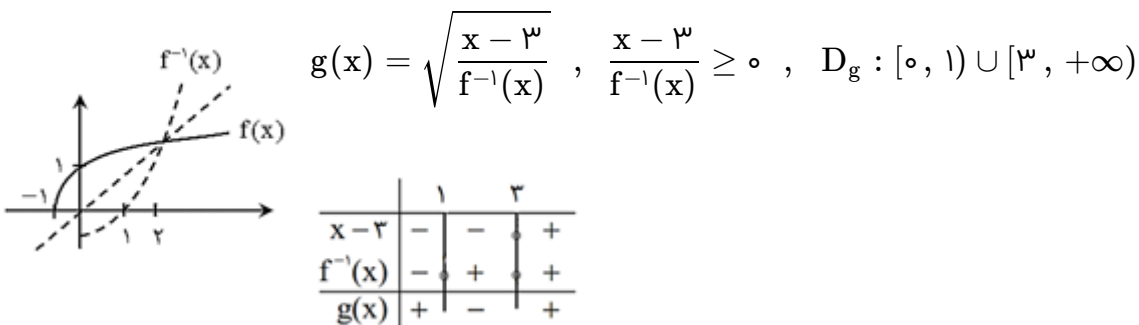
تالیفی محمدرضا کشاورزی

برای آنکه سهمی موردنظر در فاصله $(-1, 1)$ غیریکنوا باشد، باید رأس آن در این بازه قرار گیرد.

$$-1 < \frac{-2m}{2(m-1)} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{m}{1-m} < 1 \Rightarrow \left| \frac{m}{1-m} \right| = \frac{|m|}{|1-m|} < 1 \xrightarrow{m \neq 1} |m| < |1-m|$$

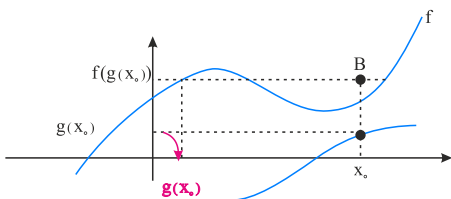
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (m-1+m)(m+1-m) < 0 \Rightarrow 2m < 1 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

تالیفی سیروس نصیری



مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

نقطه طولی برابر x_0 دارد، پس یا A یا B جواب است. در ترکیب ۲ تابع اول بازی با تابع داخلی شروع می‌شود. یعنی در $f(g(x_0))$ ابتدا $g(x_0)$ را می‌یابیم. حال به اندازه $g(x_0)$ از مبدأ دور می‌شویم و $g(x_0)$ را به عنوان ایکس، تحویل f می‌دهیم تا $f(g(x_0))$ به دست آید. به طول x_0 و عرض $f(g(x_0))$ نقطه‌ای در صفحه می‌گذاریم که B خواهد بود.



تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

راه حل اول:

$$f(x) = [x] + [-x]$$

$$y = f(f(x)) = [f(x)] + [-f(x)] = [[x] + [-x]] + [-[x] - [-x]]$$

عدد صحیح از جزء صحیح خارج می‌شود $\rightarrow y = [x] + [-x] - [x] - [-x] = 0$

راه حل دوم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

همان محور طول‌ها $(0 \text{ یا } -1) \in \mathbb{Z} = 0 \Rightarrow$

$$D_{f \circ f} = \mathbb{R} \quad R_f = \{0\}$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$f(x) = 2x - |2x + 5|$$

$$= \begin{cases} 2x - 2x - 5 = -5 & ; x \geq -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{اکیداً یکنوا نیست} \\ 2x + 2x + 5 = 4x + 5 & ; x < -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی است} \end{cases}$$

پس وارون تابع $y = 4x + 5$ را با شرط $x < -\frac{5}{2}$ باید پیدا کنیم:

$$y = 4x + 5 \Rightarrow \frac{y-5}{4} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}$$

دامنه تابع وارون را هم باید به دست آوریم که همان برد تابع f است:

$$x < -\frac{5}{2} \Rightarrow 4x < -10 \Rightarrow 4x + 5 < -5 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, -5)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

از نمودار مشخص است که $-1 \leq f(x) \leq 2$ است، پس $f(2x)$ هم در همین فاصله است.

$$-1 \leq f(2x) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -f(2x) \leq 1 \xrightarrow{+1} -1 \leq 1 - f(2x) \leq 2$$

رادیکال $\rightarrow 0 \leq \sqrt{1 - f(2x)} \leq \sqrt{2} \Rightarrow$ برد: $[0, \sqrt{2}]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

راه حل اول:

از طرفین معادله $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = \frac{3}{4}$ می‌گیریم:

$$g(g^{-1} \circ f^{-1}) = g\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = \log_f^{(2 \times (\frac{3}{4}) - 1)} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}$$

$$g \circ g^{-1} \circ f^{-1}(x) = f^{-1}(x) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} (x, \frac{-1}{2}) \in f^{-1} \\ (\frac{-1}{2}, x) \in f \end{cases}$$

پس داریم:

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 3 = -4$$

راه حل دوم:

می‌دانیم $(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ ، پس ابتدا تابع $f \circ g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(\log_f^{2x-1}) = 2(\log_{\frac{1}{2}}^{2x-1}) - 3 = 2\left(\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}^{2x-1}\right) - 3 \\ &= \log_{\frac{1}{2}}^{2x-1} - 3 = y \end{aligned}$$

حال وارون تابع $f \circ g(x)$ را می‌یابیم:

$$y = \log_{\frac{1}{2}}^{2x-1} - 3 \Rightarrow y + 3 = \log_{\frac{1}{2}}^{2x-1}$$

$$\Rightarrow 2^{y+3} = 2x - 1 \Rightarrow \frac{2^{y+3} + 1}{2} = x$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{2^{x+3} + 1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2^{x+3} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2^{x+3} = 2^{-1} \Rightarrow x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4$$

قدر مطلقها را با بازه‌بندی حذف می‌کنیم:

$$x < -3 : f(x) = 3x + (x + 3) + (2 - 4x) = 5 \quad \text{ثابت}$$

$$-3 \leq x \leq \frac{1}{2} : f(x) = 3x - (x + 3) + (2 - 4x) = -2x - 1 \quad (\text{نزولی اکید})$$

$$x > \frac{1}{2} : f(x) = 3x - (x + 3) + (-2 + 4x) = 6x - 5 \quad (\text{صعودی اکید})$$

پس تابع در فاصله $[-3, \frac{1}{2}]$ مدنظر است. برد f در این فاصله را پیدا می‌کنیم که همان دامنه f^{-1} است:

$$-3 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 6 \geq -2x \geq -1 \Rightarrow 5 \geq -2x - 1 \geq -2 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [-2, 5]$$

حالا ضابطه تابع وارون را می‌نویسیم:

$$y = -2x - 1 \Rightarrow y + 1 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

پس $f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2}$ با شرط $x \in [-2, 5]$ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

هر یک از توابع $f + g$ ، $f \circ f$ ، $f \circ g$ و $g \circ f$ را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در $x = 0$ بحث می‌کنیم.
بررسی گزینه اول:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - 2x & , x < 0 \\ 1 + 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f + g)(x) = -\frac{1}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = 1$$

بنابراین تابع $f + g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه دوم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , f(x) < 0 \\ 2f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , x < 0 \\ 4x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = -\frac{1}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = 0 \rightarrow \text{در } x = 0 \text{ ناپیوسته است}$$

بنابراین تابع $f \circ f$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه سوم:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & , f(x) < 0 \\ 1 & , f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2(-\frac{1}{2}) & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x) = g \circ f(0) = 1$$

پس تابع $g \circ f$ در $x = 0$ پیوسته است.
بررسی گزینه چهارم:

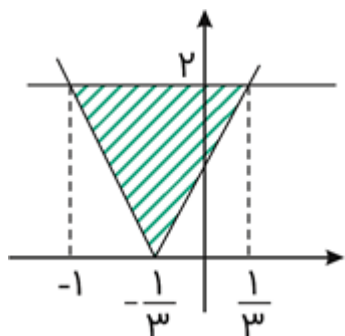
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , g(x) < 0 \\ 2g(x) & , g(x) \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع $g(x)$ این تابع همواره نامنفی است پس تابع $f \circ g$ برای ضابطه بالا تشکیل نشده و داریم:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -4x & , x < 0 \\ 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ g(x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g(x) = 2$$

بنابراین تابع $f \circ g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.



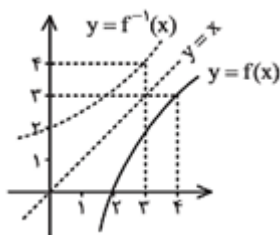
$$g \circ f(x) = \sqrt{3(3x^2 + 2x) + 1}$$

$$= \sqrt{(3x + 1)^2} = |3x + 1|$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

$$y = \sqrt{f^{-1}(x) - 4}, \quad f^{-1}(x) - 4 \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq 4 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_y : [3, +\infty)$$



مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

$$g(۲) = a \Rightarrow ۲ = g^{-1}(a)$$

فرض کنید $۳x - ۱ = a$ در این صورت:

$$f\left(\frac{۱+a}{۳}\right) = ۲g^{-1}(a) = ۴ \Rightarrow \frac{۱+a}{۳} = f^{-1}(۴)$$

$$\Rightarrow \frac{۱+a}{۳} = ۴ \Rightarrow a = ۱۱$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

$$g(x) = ۲ + ۲f(۳ - x) \Rightarrow f(۳ - x) = \frac{g(x) - ۲}{۲}$$

به سادگی دیده می‌شود اگر تابع g ، ۲ واحد به پایین انتقال یابد، در نقاط $x = ۱$ و $x = ۴$ محور طول‌ها را قطع می‌کند و تابع $\frac{g(x) - ۲}{۲}$ نیز در همین نقاط، صفر می‌شود، پس:

$$x = ۴ \Rightarrow f(۳ - x) = \frac{g(x) - ۲}{۲} \Rightarrow f(۳ - ۴) = ۰ \Rightarrow f(-۱) = ۰$$

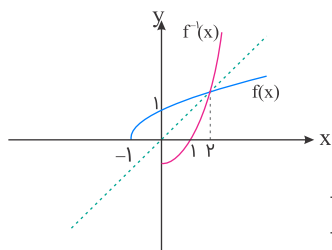
$$x = ۱ \Rightarrow f(۳ - x) = \frac{g(x) - ۲}{۲} \Rightarrow f(۲) = ۰$$

در نتیجه ریشه‌های f دو عدد -۱ و ۲ هستند، پس گزینه ۲ درست است.

تالیفی علی ناری ابیانه

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-3}{f^{-1}(x)}} \Rightarrow \frac{x-3}{f^{-1}(x)} \geq 0$$

از روی نمودار داده شده برای f سعی می‌کنیم نمودار f^{-1} را رسم کنیم و سپس آن را تعیین علامت کنیم:



		1	3	
$x-3$	-	-	0	+
$f^{-1}(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	+	-	+	

$$\Rightarrow D_g: [0, 1) \cup [3, +\infty)$$

توجه کنید از آنجاکه $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$ است، پس مقدار کمتر از صفر در دامنه g نمی‌باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

باتوجه به ضریب ۳ پشت تابع f برد تابع سه برابر می‌شود.

$$R_f = [0, 1] \Rightarrow R_{3f} = [0, 3] \quad (\text{I})$$

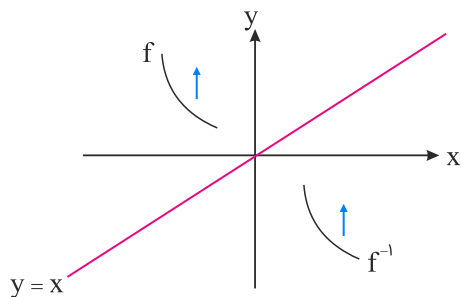
$$D_f = [-1, 2] \Rightarrow D_{3f(1-\frac{x}{3})} : -1 \leq 1 - \frac{x}{3} \leq 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq -\frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times -2} -2 \leq -x \leq 4$$

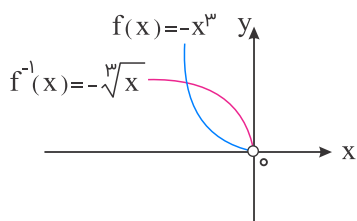
$$\Rightarrow D_{3f(1-\frac{x}{3})} = [-2, 4] \quad (\text{II}) \Rightarrow (\text{I}) \cap (\text{II}) = [0, 3]$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

با در نظر گرفتن یک حالت نقض می‌توان نشان داد گزینه ۲ درست نیست.



چون f و f^{-1} نسبت به $y = x$ قرینه‌اند، از نظر صعودی و نزولی مثل هم هستند و گزینه (۱) درست است. توابع $f(x) = -x^3$; $x < 0$ و $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$, $x < 0$ یکدیگر را روی $y = -x$ قطع می‌کنند.



پس ترکیب f و f^{-1} می‌تواند خود $y = x$ یا بخشی از آن باشد. می‌دانیم

$$\begin{cases} y = f(f^{-1}(x)) = x & ; x \in D_{f^{-1}} \\ y = f^{-1}(f(x)) = x & ; x \in D_f \end{cases}$$

راه حل اول:

ابتدا وارون تابع $y = \sqrt{x+3}$ را به دست می‌آوریم:

$$y^2 = x + 3 \Rightarrow y^2 - 3 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

$$D_f : x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow R_f = [0, +\infty)$$

می‌دانیم در توابع وارون‌پذیر، $R_f = D_{f^{-1}}$ و $D_f = R_{f^{-1}}$ پس داریم:

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad x \geq 0 \quad (1)$$

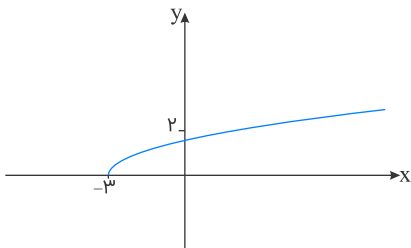
می‌خواهیم محدوده زیر محور x ها را محاسبه کنیم، پس داریم:

$$x^2 - 3 < 0 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \quad (2)$$

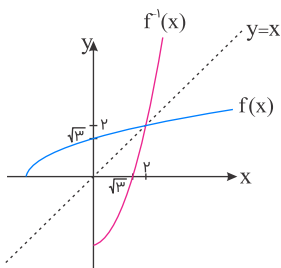
$$(1) \cap (2) \Rightarrow \underbrace{0}_a \leq x < \underbrace{\sqrt{3}}_b \Rightarrow b - a = \sqrt{3}$$

راه حل دوم:

از رسم شکل استفاده می‌کنیم:



حال نمودار را نسبت به محور $y = x$ قرینه می‌کنیم تا وارون آن را به دست آوریم:



باتوجه به شکل، تابع $f^{-1}(x)$ در بازه $[0, \sqrt{3}]$ در زیر محور x ها قرار دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اول دامنه $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 3 \Rightarrow D_g = [0, 3] \quad (\text{I})$$

می‌دانیم دامنه $g(x)$ با دامنه $g^2(x)$ یکسان است.
برای پیدا کردن دامنه $g(x^2)$ باید x^2 در فاصله $[0, 3]$ باشد:

$$0 \leq x^2 \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \quad (\text{II})$$

دامنه $f(x) = g^2(x) + g(x^2)$ برابر با اشتراک دامنه $g^2(x)$ و $g(x^2)$ است.

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) = [0, \sqrt{3}]$$

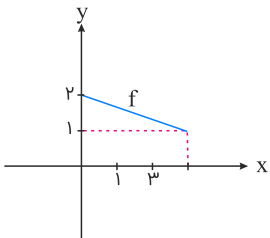
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

چون در مورد f صحبت خاصی نکرده، می‌توان آن را به صورت خطی در نظر گرفت و داریم:

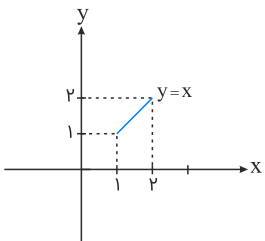
$$f : [0, 3] \rightarrow [1, 2] = R_f = D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1} : [1, 2] \rightarrow [0, 3] = R_{f^{-1}} = D_f$$

$$y = f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f = [1, 2]$$



می‌بینیم $y = f(f^{-1}(x)) = x$ به محور x ها برخورد نکرده است و لذا ریشه‌ای ندارد. منظور از صفر تابع، همان ریشه‌های معادله است.



تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

با داشتن ۲ نقطه معادله خط f را می‌نویسیم. g نیز از خانواده $y = \frac{k}{x}$ است که یک واحد به راست منتقل شده است و داریم:

$$(0, 1), (1, 3) \in f \Rightarrow m = \frac{3-1}{1-0} = 2 \Rightarrow y-1 = 2x \Rightarrow f(x) = 2x+1$$

$$f(x) = 2x+1 \Rightarrow y = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = \frac{x-1}{2} = f^{-1}(x)$$

$$g(x) = \frac{k}{x-1} \Rightarrow A(0, -1) \in g(x) = \frac{k}{x-1} \Rightarrow -1 = \frac{k}{-1} \Rightarrow 1 = k \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$h(x) = g(f^{-1}(x)) = g\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{x-1}{2}-1} = \frac{1}{\frac{x-1-2}{2}} \Rightarrow h(x) = \frac{2}{x-3}$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$f(x)$ وارون خودش است $\Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c$

$$2ax^2 + bx + c = 0 \text{ حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله: } \frac{c}{2a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

دامنه تابع $g \circ f$ از رابطه $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

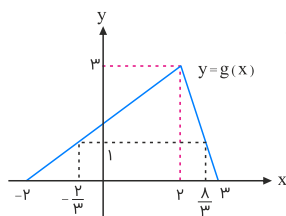
$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 & (1) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) : x \in \{0\}$$

گزینه ۲

۹۶

$f(x) = \log(x^2 - x)$ است، پس باید $x^2 - x > 0$ باشد؛ یعنی $x > 1$ یا $x < 0$ است؛ پس شرط دامنه $f \circ g(x)$ این است که $g(x) > 1$ یا $g(x) < 0$ باشد. باتوجه به نمودار تابع $y = g(x)$ اصلاً منفی نمی‌شود. پس باید فاصله‌هایی را پیدا کنیم که $g(x) > 1$ است که این اتفاق در فاصله $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ رخ می‌دهد. (برای به دست آوردن نقاطی که $g(x) > 1$ است، معادله خطوطی را که تابع $g(x)$ را می‌سازند تشکیل می‌دهیم و با $y = 1$ تلاقی می‌دهیم)



$$b - a = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نکته: $0 \leq x - [x] < 1$
ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 4x = -x^2 + 4x - 4 + 4 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 = -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(2x - [2x] - 2)^2 + 4$$

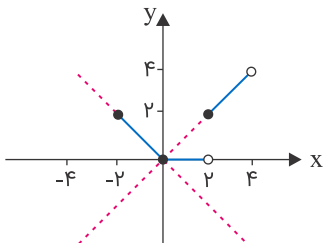
طبق نکته داریم:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2x - [2x] < 1 \xrightarrow{-2} -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1 \\ \xrightarrow{+4} 1 &< (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4 \\ \xrightarrow{\times(-1)} -4 &\leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1 \\ \xrightarrow{+4} 0 &\leq -(2x - [2x] - 2)^2 + 4 < 3 \\ \Rightarrow 0 &\leq g \circ f(x) < 3 \Rightarrow R_{g \circ f} = [0, 3) \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

نمودار تابع $y = x[\frac{x}{2}]$ را به صورت بازه‌بندی در محدوده گزینه‌ها رسم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -2 \leq x < 0 &\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = -1 \Rightarrow y = -x \\ 0 \leq x < 2 &\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 2 \leq x < 4 &\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 1 \Rightarrow y = x \end{aligned}$$



می‌دانیم تابع ثابت، هم صعودی است و هم نزولی؛ پس جواب، گزینه "۳" است.

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۵۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۵۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۵۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۶۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۸۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۹۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۹۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		
۶۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		

۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{2}{3})^-} [\frac{-2}{x}]$ کدام است؟

(۱) -۳

(۲) -۴

(۳) ۳

(۴) حاصل حد موجود نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲ تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 3 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی بازه $(-3, 3)$ در چند نقطه با طول صحیح حد ندارد؟

(۱) ۵ نقطه

(۲) ۲ نقطه

(۳) ۳ نقطه

(۴) هیچ نقطه

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} & ; x > 2 \\ \frac{x}{4} + a & ; x \leq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a چقدر است؟

(۱) $-\frac{1}{12}$

(۲) $-\frac{7}{12}$

(۳) $\frac{7}{12}$

(۴) $-\frac{1}{3}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۴ اگر $f(x) = \sin x$ باشد، در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{|f(x)|}$ روی کدام فاصله پیوسته است؟

(۱) $[0, \frac{\pi}{2}]$

(۲) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

(۳) $(\pi, 2\pi)$

(۴) $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۵ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; |x| \geq 1 \\ x[x] & ; |x| < 1 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۶ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) صفر
(۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۷ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & ; x < 1 \\ x^2 + ax & ; x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۰/۵
(۲) ۱/۲۵
(۳) ۱/۵
(۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۸ تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$ در بازه $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۹ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan^2 x} & ; x > \pi \\ a + \cos x & ; x \leq \pi \end{cases}$ در $x = \pi$ پیوسته باشد، مقدار a چقدر است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{4} + 1$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{4} - 1$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{4} + 1$
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۵

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

- (۱) $\frac{-1}{2}$ (۲) $\frac{1}{6}$
 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

تابع با ضابطه $f(x) = [x^2 - 3]$ روی بازه $[2, 2+k]$ پیوسته است، بیشترین مقدار k کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} - 1$ (۲) $\sqrt{5} - 2$
 (۳) $\sqrt{3} - 1$ (۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ، آنگاه تعداد نقاط ناپیوسته تابع g روی بازه $[-4, 4]$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
 (۳) ۳ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{4} x$ در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (۱) فقط در اعداد زوج پیوسته (۲) فقط در اعداد فرد پیوسته
 (۳) همواره ناپیوسته (۴) همواره پیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{[4 \cos^2 \pi x] - 12x}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) -20 (۲) -16
 (۳) 10 (۴) 12

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۵ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{24}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۱۶ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، حاصل $2a - b$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴۲
(۳) -۳۰ (۴) ۶

تالیفی رضا عابدی

۱۷ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۸ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax - \sqrt{x^2 + bx})$ برابر ۲ باشد حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۱۹ اگر $f(x) = \frac{2x+a+1}{x^3-x^2-x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -a} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

تالیفی علی شهبازی فراهانی

۲۰ اگر $f(x) = \frac{2x^2 - 20}{mx^2 + 18x + n}$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۲
(۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) -۲

تالیفی رضا عابدی

۲۱ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + 3x^f}{2x^3 + (a-1)x^f} = 2$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶/۵
(۴) ۷/۵

تالیفی علی شهبابی فراهانی

۲۲ حاصل عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{[x+2]}$ و $\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{[x+6]}{x+5}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ و تعریف نشده
(۲) تعریف نشده و $+\infty$
(۳) $-\infty$ و $+\infty$
(۴) 0 و تعریف نشده

تالیفی رضا عابدی

۲۳ بزرگ‌ترین بازه مقادیر x که به ازای آن بازه $(3x-1, 2x+3)$ یک همسایگی عدد -2 نیست، کدام است؟

- (۱) $[-\frac{1}{3}, +\infty)$
(۲) $(-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [-\frac{1}{3}, 4)$
(۳) $(-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty)$
(۴) $(-\infty, -\frac{5}{2}]$

تالیفی رضا عابدی

۲۴ حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
(۲) $-\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $-\frac{3}{2}$

تالیفی رضا عابدی

۲۵ حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر -2 است. $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۳/۵
(۲) ۴
(۳) ۴/۵
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۶ حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x-1}{2x-1} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1} \right]$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

۲۷ اگر باقی‌مانده $f(x)$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x+1) + xf(x^2+1)$ بر $x - 1$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۲

تالیفی سیروس نصیری

۲۸ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^f - bx^a + 3 - b}{x^a - 2x + 2 - b} = -2$ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۶
(۳) ۶ یا -۲
(۴) ۶ یا ۲

تالیفی رضا عابدی

۲۹ حاصل حد تابع $f(x) = \frac{1}{3 \tan x - 1}$ هنگامی که $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $+\infty$
(۳) -۱
(۴) صفر

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۰ حاصل عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x+4}{x+3}$ و $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{[x+5]}{x+3}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ و $-\infty$
(۲) $+\infty$ و تعریف نشده
(۳) $-\infty$ و تعریف نشده
(۴) $+\infty$ و $+\infty$

تالیفی رضا عابدی

۳۱ یک همسایگی به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن، زیر مجموعه $\left\{x : \left| \frac{x-3}{2x-1} \right| > 1\right\}$ است. a کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$
(۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{11}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۳۲ در تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) $-\infty$
(۴) موجود نیست

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۳۳ اگر $f(x) = \frac{2}{1 + 4 \tan x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x)$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

تالیفی رضا عابدی

۳۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است.)

(۲) ۳

(۱) -۳

(۴) حد ندارد.

(۳) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۳۵ حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} - 4^{x+2} + 25^{x-3}}{5^{2x-4} - 3^{x-2}}$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{12}$ (۱) $\frac{1}{25}$ (۴) $\frac{2}{25}$ (۳) $\frac{1}{5}$

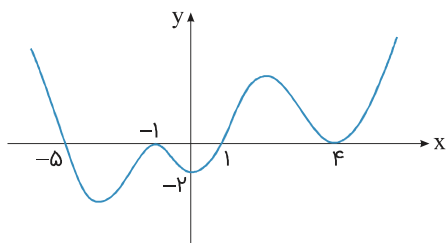
تالیفی رضا عابدی

۳۶ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|9 - x^2|}{ax^2 + |1 - x^2| + 7 + x} = -1$ باشد، آنگاه حد چپ این عبارت در نقطه $x = 3$ کدام است؟

(۲) $-1/2$ (۱) $1/2$ (۴) $-\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{5}{6}$

تالیفی رضا عابدی

۳۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. اگر $g(x) = \frac{-1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟



(۱) -۲

(۲) ۳

(۳) -۶

(۴) ۹

تالیفی علی شهبازی فراهانی

اگر $f(x) = \frac{x^2 - 5}{ax^2 + 6x + b}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
 (۲) $-\frac{2}{3}$
 (۳) $-\frac{3}{2}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

حد تابع $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} - 1)}{(x - 1)^3}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
 (۲) $\frac{1}{12}$
 (۳) $\frac{1}{18}$
 (۴) $\frac{1}{24}$

تالیفی رضا عابدی

اگر $f(x) = [x - \sqrt{x + 12}]$ و $g(x) = \frac{4x + 2}{x + 1}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) + [\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۵
 (۲) ۴
 (۳) ۳
 (۴) ۲

تالیفی علی ناری ابیانه

مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^2 - x}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 3x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
 (۲) صفر
 (۳) ∞
 (۴) $\frac{1}{3}$

تالیفی سیروس نصیری

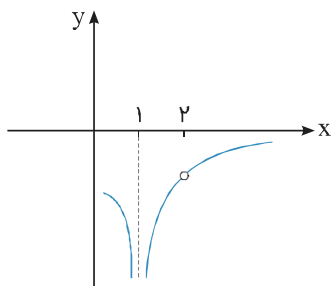
در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$
 (۲) $-\frac{1}{8}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{-x + a}{x^3 + bx^2 + cx + d}$ همانند شکل زیر باشد، کدام $a \times b \times c \times d$ است؟

۴۳



۸۰ (۱)

-۸۰ (۲)

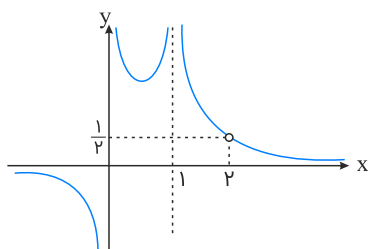
۴۰ (۳)

-۴۰ (۴)

تالیفی محمد درمان

نمودار تابع $f(x) = \frac{mx - 2}{(ax^2 + bx)(x + c)^2}$ به صورت زیر است. حاصل $a + b$ کدام است؟

۴۴



-۲ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

-۱ (۴)

تالیفی علی ناری ابیانه

اگر $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right)$ کدام است؟

۴۵

۲ (۲)

-۲ (۱)

(۴) موجود نیست.

۱ (۳)

تالیفی سیروس نصیری

حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{3 - x} - \sqrt{3}}$ کدام است؟

۴۶

 $\sqrt{6}$ (۲)

۲ (۱)

 $2\sqrt{2}$ (۴)

۳ (۳)

تالیفی رضا عابدی

اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 2}{x + 1} - mx + n \right) = -1$ باشد، حاصل $m - 2n$ کدام است؟

۴۷

۹ (۲)

-۷ (۱)

۷ (۴)

-۹ (۳)

تالیفی رضا عابدی

اگر نمودار $f(x) = \frac{c}{(x-a)^2(x-b)}$ اطراف $x=b$ به صورت زیر باشد، نمودار آن اطراف $x=a$ با شرط $a < b$ کدام است؟

۴۸



(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

تالیفی علی ناری ابیانه

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ ، کدام است؟

۴۹

- (۱) $+\infty$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) 0
- (۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۰ اگر $f(x) = \left[\frac{-5x + 3}{x - 1} \right]$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) -۲

تالیفی محمد درمان

۵۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + mx + n) \left[\frac{1}{x - 2} \right] = 4$ باشد، حاصل $m - 2n$ کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) -۸
(۳) ۲
(۴) -۲

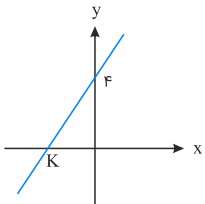
تالیفی رضا عابدی

۵۲ حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{-x^2+3x-2}}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد.
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) ۰

تالیفی رضا عابدی

۵۳ نمودار تابع خطی f در شکل زیر رسم شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = 9$ باشد، مقدار k چقدر است؟



- (۱) -۲
(۲) $-\frac{3}{4}$
(۳) -۳
(۴) $-\frac{4}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۵۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{5}{6}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

مقادیر حد راست و چپ تابع $f(x) = \frac{4 - [x]}{\left|\frac{x}{2} - 2\right|}$ وقتی $x \rightarrow 4$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) صفر، $+\infty$ (۲) صفر، $-\infty$
 (۳) $+\infty$ ، صفر (۴) $-\infty$ ، صفر

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ و $g(x) = \frac{x^2-4}{(x+[-x])^2}$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$
 (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

تالیفی امیر خمسه

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{4}}{x^4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{64}$ (۲) $\frac{1}{32}$
 (۳) $\frac{1}{128}$ (۴) $\frac{1}{8}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

اگر n عدد طبیعی باشد، حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n + 3x^2 - 1}{3x^n + 2x^2 + 5}$ به ازای مقادیر مختلف از n کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) -۱ (۲) ۱
 (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

حد عبارت $\left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام حالت متناهی نیست؟

- (۱) $x \rightarrow 0^-$ (۲) $x \rightarrow 0^+$
 (۳) $x \rightarrow -\infty$ (۴) $x \rightarrow +\infty$

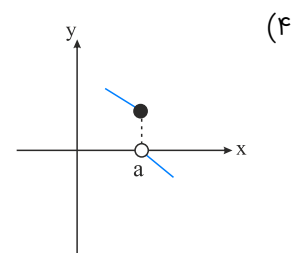
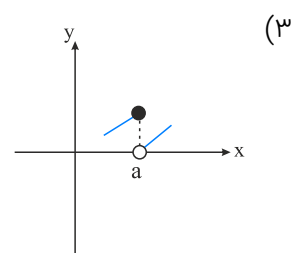
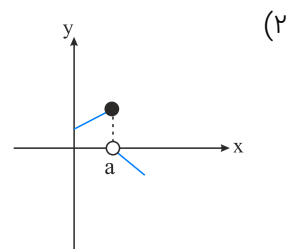
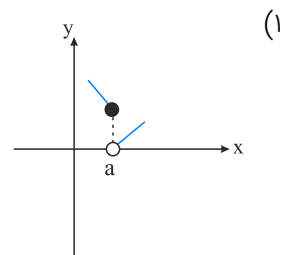
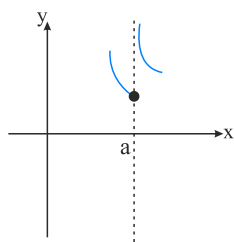
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{18}$
 (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{5}{36}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اگر شکل زیر بخشی از نمودار تابع f باشد، نمودار $\frac{1}{f}$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟



تالیفی علی ناری ابیانه

۶۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \tan x)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱
(۳) ۲ (۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۶۳ اگر حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{a-x} + 3^x - 12}{3^x - 3^{2-x}}$ عددی متناهی باشد، مقدار حد کسر داده شده کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱
(۳) -۲ (۴) ۲

تالیفی رضا عابدی

حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^3 - (1-x)^4}{(1-2x)^2 - (1-3x)^3}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{27}$
(۴) $-\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{1}{27}$

تالیفی رضا عابدی

حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{6x+1}{3x+1} \right]$ کدام است؟

(۲) ۳
(۴) ۱

(۱) ۴
(۳) ۲

تالیفی رضا عابدی

اگر $\lim_{x \rightarrow 3^3} \frac{\sqrt{3+\sqrt{3+x}} - n}{x-3^3} = m$ باشد، مقدار $3^6 m - n$ کدام است؟

(۲) $-\frac{5}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$

تالیفی رضا عابدی

حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-4x}}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$
(۴) ۱

(۱) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{2}$

تالیفی رضا عابدی



گزینه ۲

۱

می دانیم اگر $f(x) = \frac{-2}{x}$ باشد، آنگاه $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{\frac{2}{3}} = -3$ می شود. سؤال اینجاست که اگر $x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-$ آنگاه حاصل $\frac{-2}{x}$ از -3 بیشتر می شود و یا کمتر؟

$$x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^- \Rightarrow x < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-2}{x} < -3$$

بنابراین چون $\frac{-2}{x} < -3$ پس $\frac{-2}{x} \rightarrow (-3)^-$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-} \left[\frac{-2}{x} \right] = \left[\frac{-2}{\left(\frac{2}{3}\right)^-} \right] = \left[(-3)^- \right] = -4$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

گزینه ۴

۲

حد تابع در تمام نقاط بازه $(-3, 3)$ (حتی نقاط صحیح این بازه) با ضابطه $y = 3x^2$ محاسبه می شود (زیرا اگر $x \rightarrow n$ و $n \in \mathbb{Z}$ آنگاه x بر n منطبق نمی گردد و در همسایگی محذوف نقطه $x = n$ قرار می گیرد)؛ بنابراین در تمام نقاط بازه $(-3, 3)$ از جمله نقاط صحیح این بازه حد دارد؛ به عبارت دیگر نقطه ای در بازه $(-3, 3)$ وجود ندارد که تابع f در آن فاقد حد باشد.

$$n \in \mathbb{Z} : \lim_{x \rightarrow n} f(x) = \lim_{x \rightarrow n} 3x^2 = 3n^2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} \times \frac{(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})}{(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - (x+6)}{(x-2)(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{(x-2)(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} = \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

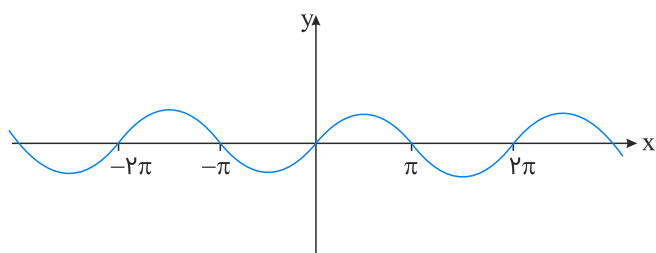
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \frac{1}{2} + a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + a = -\frac{1}{12} \Rightarrow a = -\frac{1}{12} - \frac{1}{2} = \frac{-1-6}{12} = -\frac{7}{12} \Rightarrow a = -\frac{7}{12}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

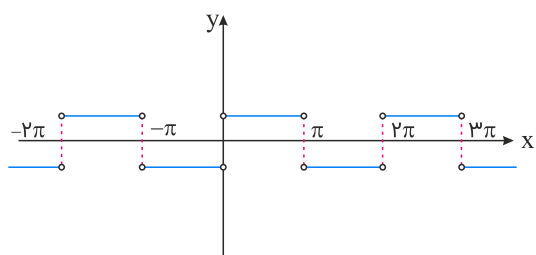
$$\frac{f(x)}{|f(x)|} = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} 1 & ; \sin x > 0 \\ -1 & ; \sin x < 0 \end{cases}$$

می‌دانیم نمودار تابع $\sin x$ به صورت زیر است:



نمودار تابع $\frac{\sin x}{|\sin x|}$ در قسمت‌هایی از نمودار $\sin x$ که بالای محور x است برابر با ۱ و در قسمتی که زیر محور x است برابر با -۱ است.

تذکر: تابع $\frac{\sin x}{|\sin x|}$ در نقاطی که $\sin x = 0$ است، تعریف نشده است.



باتوجه به نمودار رسم‌شده و گزینه‌های صورت سوال، تابع تنها در بازه $(\pi, 2\pi)$ پیوسته است.

مرز ضابطه ها خیلی شفاف مشخص نشده است. باتوجه به نامعادلات قدر مطلق، ضابطه ها را با مرز شفاف آن یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ x[x] & , \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R} پیوسته باشد، باید در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد. می‌دانیم خط $x = 3$ بالای خط $x = 1$ قرار دارد، بنابراین باید برای به دست آوردن نقطه برخورد آن با محور عرض ها از ضابطه $f(x) = ax + b$ استفاده کرد. بررسی پیوستگی تابع در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] \Rightarrow a + b = 1 \times 0 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (\text{I})$$

بررسی پیوستگی تابع در $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} ax + b = -a + b, \quad f(-1) = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = (-1)[-1^+] = (-1)(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow -a + b = 1 \quad (\text{II})$$

از دو رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \xrightarrow{(I)} a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow ax + b = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \xrightarrow{x=3} f(3) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x \rightarrow 0^-$ عبارت $x^3 - x$ به سمت 0^+ میل می کند یا 0^- . برای این کار از تغییر متغیر $x^3 - x = t$ استفاده می کنیم. با تعیین محدوده t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه های داده شده به دست می آوریم.

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow x^3 > x \Rightarrow x^3 - x > 0 \xrightarrow{x^3 - x = t} t > 0 \Rightarrow t \rightarrow 0^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ یا همان $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ باید از ضابطه بالا که مربوط به x های مثبت است، استفاده کنیم:

$$t \rightarrow 0^+ \Rightarrow t > 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{1-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1-t} = \sqrt{1-0} = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

تابع در $x = 1$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x = 1$ برابرند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{a+3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1+a$$

$$\Rightarrow 1+a = \sqrt{a+3} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a + 3 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \checkmark \\ a = -2 & \times \end{cases}$$

به ازای $a = -2$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{3}{4})$ را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{ax+3} = \sqrt{x+3}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{3}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4}+3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} + 1 \right]$$

$$= \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 = 2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1$$

عبارت خطی $x - \frac{1}{3}$ در نقاط صحیح کننده $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3} \right\}$ از بازه $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right)^+} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 [(-2)^+] + 1 = 2(-2) + 1 = -3$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^-} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^- \right] + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad f\left(\frac{5}{3}\right) = 3$$

پس f در $-\frac{5}{3}$ پیوستگی راست و در $\frac{5}{3}$ پیوستگی چپ دارد. در نهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش ۳ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{\cos 2x}} = \frac{-\sqrt{2}}{4 \times 1 \times (-1)} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = a + \cos \pi = a - 1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4} + 1$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۵

حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 1$ محاسبه می‌کنیم. برای این که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد، باید رابطه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$ برقرار باشد. این رابطه را بررسی کرده و مقداری از a را تعیین می‌کنیم که به ازای آن تابع پیوسته باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{-(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt[3]{(1 - \sqrt{x})^2(1 + \sqrt{x})}} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = 1$ فاقد حد است بنابراین به ازای هیچ مقدار a در $x = 1$ پیوسته نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در تابع به فرم $y = [f(x)]$ هر جا حاصل $f(x)$ برابر عدد صحیح شود، تابع در آن نقاط ناپیوسته است. بنابراین در بازه $(2, 2 + k)$ حاصل عبارت جبری $x^2 - 3$ نباید برابر یک عدد صحیح شود. (البته در نقطه شروع بازه در صورتی که تابع از راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی‌شود). ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = [x^2 - 3] = [x^2] - 3$$

سپس بررسی می‌کنیم عبارت $[x^2]$ در اولین نقطه‌ای که بعد از $x = 2$ برابر یک عدد صحیح می‌شود کدام نقطه است. آن نقطه را برابر $2 + k$ قرار داده و در نهایت مقدار k را محاسبه می‌کنیم.

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{اولین عدد صحیح بعد از ۴}} x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

پس تابع $f(x)$ به ازای $x = \sqrt{5}$ ناپیوسته می‌شود. $2 + k$ را برابر $\sqrt{5}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$2 + k = \sqrt{5} \Rightarrow k = \sqrt{5} - 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

ابتدا تعیین می‌کنیم مقادیر $f(x)$ به ازای $x \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ چند است:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

ضابطه $g(x)$ را باتوجه به مقادیر $f(x)$ تشکیل داده و بررسی می‌کنیم در بازه $[-4, 4]$ تابع در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1 ; x \in \mathbb{R}$$

در تمام نقاط بازه $[-4, 4]$ تابع $g(x) = -1$ (چون یک تابع ثابت است) پیوسته است. پس تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

اگر $x = 2k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin \frac{\pi}{4} x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k \in \mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و در نتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است.

حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x = 2k + 1$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطه فردی مانند $x = 1$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{4} x = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{4} = (-1)(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{4} x = (-1)^0 \sin \frac{\pi}{4} = (1)(1) = 1$$

$$f(1) = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{4} = (-1)(1) = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$ در اعداد فرد ناپیوسته است

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

ابتدا تعیین می کنیم حاصل $[۴\cos^۲\pi x]$ وقتی $x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+$ برابر چه عددی می شود. با توجه به این که حاصل حد برابر $\frac{۱}{۶}$ است، مقادیر a و b در نهایت مقدار $a + b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+ \Rightarrow x > \frac{۱}{۶} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos \pi x < \cos \frac{\pi}{۶}$$

دقت کنید که در ناحیه اول مثلثاتی با افزایش مقدار x ، مقدار $\cos x$ کاهش پیدا می کند. چون πx از $\frac{\pi}{۶}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $\cos \pi x$ از مقدار $\cos \frac{\pi}{۶}$ کمتر خواهد بود.

$$\xrightarrow{\cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \cos \pi x < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cos^۲ \pi x < \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\times ۴} ۴\cos^۲ \pi x < ۳ \Rightarrow ۴\cos^۲ \pi x \rightarrow ۳^- \Rightarrow [۴\cos^۲ \pi x] = ۲$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+$ برابر صفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{۱}{۶}$ است، اگر وقتی $x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسر عددی غیر از صفر باشد حاصل حد برابر صفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{۱}{۶}$ داده شده پس باید وقتی $x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+} ax + b = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۶} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۶} \Rightarrow a = -۶b \quad (I)$$

با فرض $a = -۶b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{ax + b} &= \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{-۶bx + b} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲(۱ - ۶x)}{b(-۶x + ۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۴ \end{aligned}$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} a = -۶b = -۶ \times ۴ = -۲۴$$

بنابراین $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -۲۴ + ۴ = -۲۰$$

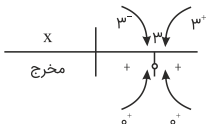
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+\lambda} - \lambda}{x} \times \frac{\sqrt[3]{(x+\lambda)^2} + 2\sqrt[3]{x+\lambda} + \lambda}{\sqrt[3]{(x+\lambda)^2} + 2\sqrt[3]{x+\lambda} + \lambda}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \lambda - \lambda}{x(\sqrt[3]{(x+\lambda)^2} + 2\sqrt[3]{x+\lambda} + \lambda)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\lambda)^2} + 2\sqrt[3]{x+\lambda} + \lambda} = \frac{1}{12}$$

$$f(0) = a \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 3$ برابر $3 - 5 = -2$ است؛ بنابراین برای آنکه حاصل حد داده شده برابر $-\infty$ شود، باید در هر دو حالت $x \rightarrow 3^+$ و $x \rightarrow 3^-$ حاصل مخرج کسر برابر 0^+ شود. یعنی باید $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج باشد تا در اطراف آن (در 3^+ و 3^-) تغییر علامت نداشته باشیم. در واقع یعنی تعیین علامت مخرج به صورت زیر باشد:



نکته: اگر عبارت $ax^2 + bx + c$ دارای ریشه مضاعف $x = \alpha$ باشد، آنگاه تجزیه آن به صورت $a(x - \alpha)^2$ خواهد بود.

$$2(x - 3)^2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 18 \end{cases} \Rightarrow 2a - b = -24 - 18 = -42$$

تالیفی رضا عابدی

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} 2^{1-2n} = \frac{1}{2^{-1+2n}} \rightarrow 0 \\ 2^{2n+1} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

راه حل اول:

با استفاده از قاعده پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{1-2n}(2^{4n} - 1)}{2^{1-2n}(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} - 1}{2^{4n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^{4n} + 3) - 3}{(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\frac{3}{2^{4n} + 3}}_0 = 1 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax - \sqrt{x^2 + bx}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ax - \left| x + \frac{b}{2} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((a+1)x + \frac{b}{2}) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow a+b = 3$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

ابتدا مخرج f را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$$

پس ضابطه f به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{2x + a + 1}{(x-1)^2(x+1)}$$

برای آنکه حد چپ و راست f در $x = a$ ، هر دو $+\infty$ شوند باید مخرج تابع f در $x = a$ ریشه مرتبه زوج داشته باشد، پس $a = 1$ و در نتیجه:

$$f(x) = \frac{2x + 2}{(x-1)^2(x+1)}$$

حالا حاصل حد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 2}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تالیفی علی شهبازی فراهانی

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2 - 20}{mx^2 + 18x + n} \right) = +\infty$$

حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 3$ ، برابر $2(3^2) - 20 = -2$ است؛ بنابراین برای آنکه حاصل حد داده شده برابر $+\infty$ شود، باید در هر دو حالت $x \rightarrow 3^+$ و $x \rightarrow 3^-$ ، حاصل مخرج کسر برابر 0^- شود؛ یعنی باید $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج باشد و در اطراف آن (در 3^+ و 3^-) تغییر علامت نداشته باشیم، بنابراین:

$$mx^2 + 18x + n = a(x-3)^2 = ax^2 - 6ax + 9a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6a = 18 \Rightarrow a = -3 \\ m = a = -3 \\ n = 9a = 9(-3) = -27 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{m} = -\frac{2}{3}$$

تالیفی رضا عابدی

اگر $n < ۴$ باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + ۳x^۴}{۲x^۳ + (a-1)x^۴} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۳x^۴}{(a-1)x^۴} = \frac{۳}{a-1}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{a-1} = ۲ \Rightarrow ۲a - ۲ = ۳ \Rightarrow a = ۲/۵$$

و اگر $n = ۴$ باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + ۳x^۴}{۲x^۳ + (a-1)x^۴} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+۳)x^۴}{۲x^۳ + (a-1)x^۴} = \frac{a+۳}{a-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a+۳}{a-1} = ۲ \Rightarrow ۲a - ۲ = a + ۳ \Rightarrow a = ۵$$

و اگر $n > ۴$ باشد، حاصل حد بی‌نهایت می‌شود؛ پس مجموع مقادیر ممکن برای a عبارت است از: $۲/۵ + ۵ = ۷/۵$

تالیفی علی شهبازی فراهانی

نکته: اعداد ۰^+ یا ۰^- را صفر حدی می‌نامیم. در واقع این اعداد به معنای صفر اصلی (صفر مطلق) نیستند، بلکه یک عدد بسیار نزدیک به صفر هستند؛ بنابراین توجه شود که:

تعریف نشده $\frac{\text{عدد}}{\text{مطلق}} = ۰$ (ب) $\frac{\text{عدد}}{\text{حدی}} = \infty$ (الف)

$\frac{\text{مطلق}}{\text{حدی}} = ۰$ (ت) $\frac{\text{حدی}}{\text{مطلق}} = ۰$ (پ) تعریف نشده

تعریف نشده $\frac{\text{مطلق}}{\text{مطلق}} = ۰$ (ج) $\frac{\text{حدی}}{\text{حدی}} = \text{مبهم}$ (ث)

در حالت کلی می‌توان گفت که اگر مخرج برابر صفر مطلق شود، حاصل کسر تعریف نشده است.

$$\lim_{x \rightarrow (-۵)^-} \frac{[x+۶]}{x+۵} = \frac{[(-۵)^- + ۶]}{(-۵)^- + ۵} = \frac{[۱^-]}{۰^-} = \frac{\text{مطلق}}{\text{حدی}} = ۰$$

$$\lim_{x \rightarrow (-۲)^+} \frac{x+۲}{[x+۲]} = \frac{(-۲)^+ + ۲}{[(-۲)^+ + ۲]} = \frac{۰^+}{[۰^+]} = \frac{\text{حدی}}{\text{مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

تالیفی رضا عابدی

برای آنکه بازه داده شده، یک همسایگی عدد -۲ نباشد، باید عدد -۲ در داخل این بازه قرار نگیرد، یعنی:

$$\underbrace{3x-1}_{-۲} \quad \text{یا} \quad \underbrace{2x+3}_{-۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq -۲ \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ 2x+3 \leq -۲ \Rightarrow 2x \leq -5 \Rightarrow x \leq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty) \quad (۱)$$

توجه کنید که در هر بازه باید عدد سمت راست بزرگتر از عدد سمت چپ باشد؛ بنابراین:

$$3x-1 < 2x+3 \Rightarrow x < ۴ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) = (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [-\frac{1}{3}, ۴)$$

تالیفی رضا عابدی

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{مجهول}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}} \times \frac{\sqrt[3]{(1-2x)^2} + (\sqrt[3]{1-2x} \times \sqrt[3]{1-x}) + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1-2x)^2} + (\sqrt[3]{1-2x} \times \sqrt[3]{1-x}) + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \times \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1-2x) - (1-x)) (\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})}{((1-x) - (1-2x)) (\sqrt[3]{(1-2x)^2} + \sqrt[3]{1-2x} \times \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})}{x(\sqrt[3]{(1-2x)^2} + \sqrt[3]{1-2x} \times \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$= \frac{-(1+1)}{1+1+1} = \frac{-2}{3}$$

روش دوم:

نکته: وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، آنگاه حد عبارت $\sqrt[n]{1 \pm x}$ با حد عبارت $(1 \pm \frac{x}{n})$ برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{2x}{3}) - (1 - \frac{x}{3})}{(1 - \frac{x}{2}) - (1 - \frac{2x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{3} + \frac{x}{3}}{-\frac{x}{2} + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{3}}{\frac{x}{2}} = -\frac{2}{3}$$

تالیفی رضا عابدی

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = -2$$

باتوجه به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جمله صورت بر بزرگ‌ترین جمله مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m + 3 = n - 2$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

و همچنین:

$$m + 3 = n - 2 \xrightarrow{m = -\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} + 3 = n - 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2}$$

بنابراین داریم:

$$m + n = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x-1}{2x-1} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x-1+1-1}{2x-1} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+1+3-3}{x-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x-2+1}{2x-1} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x-2+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{1}{2x-1} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{3}{x-1} \right] \\ &= 2 + [o^+] - (2 + [o^-]) = 2 + 0 - 2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

باقی‌مانده $f(x)$ بر $x - 2$ برابر ۳ است، یعنی:

$$f(2) = 3 \quad (*)$$

برای یافتن باقی‌مانده $f(x+1) + xf(x^2+1)$ بر $x-1$ کافی است به جای x مقدار یک قرار دهیم ($x-1=0 \Rightarrow x=1$) پس:

$$R = f(1+1) + (1)f(1^2+1) = f(2) + f(2) \xrightarrow{(*)} R = 6$$

تالیفی سیروس نصیری

سه حالت وجود دارد:

$$a < f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^f - bx^a + 3 - b}{x^a - 2x + 2 - b} = -2 \xrightarrow{a < f} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^f}{(x^a) \text{ یا } (-2x)} = \infty$$

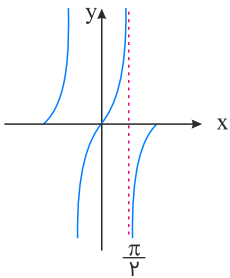
بنابراین در این حالت حاصل حد کسر برابر ∞ شده و غیرقابل قبول است.

$$a = f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{fx^f - bx^f + 3 - b}{x^f - 2x + 2 - b} = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f-b)x^f}{x^f} = -2 \Rightarrow f-b = -2 \Rightarrow b = 6$$

$$a > f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^f - bx^a + 3 - b}{x^a - 2x + 2 - b} = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx^a}{x^a} = -2 \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

تالیفی رضا عابدی

باتوجه به نمودار $\tan x$:



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{3^{\tan x} - 1} = \frac{1}{3^{+\infty} - 1} = \frac{1}{+\infty - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نکته: اعداد 0^+ یا 0^- را صفر حدی می‌نامیم. در واقع این اعداد به معنای صفر اصلی (صفر مطلق) نیستند، بلکه یک عدد بسیار نزدیک به صفر هستند؛ بنابراین توجه شود که:

$$\text{الف) } \frac{\text{عدد}}{\text{حدی } 0} = \infty$$

$$\text{ب) } \frac{\text{عدد}}{\text{مطلق } 0} = \text{تعریف نشده}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{[x + 5]}{x + 3} = \frac{[(-3)^- + 5]}{(-3)^- + 3} = \frac{[2^-]}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x + 4}{[x + 3]} = \frac{-3 + 4}{[(-3)^+ + 3]} = \frac{1}{[0^+]} = \frac{1}{\text{مطلق } 0} = \text{تعریف نشده}$$

تالیفی رضا عابدی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹
 قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

گام اول

الف) همسایگی مورد نظر زیر مجموعه ای از نامعادله داده شده است. پس ابتدا باید محدوده قابل قبول که از حل نامعادله به دست می آید را تعیین کنیم.

ب) توجه کنید که $x = \frac{1}{p}$ ریشه مخرج کسر بوده و به ازای آن کسر "تعریف نشده" می شود. پس در نهایت باید از محدوده جواب خارج کنیم.

گام دوم

$$\left| \frac{x-3}{2x-1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|x-3|}{|2x-1|} > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2}} |x-3| > |2x-1|$$

دو طرف نامعادله دارای مقادیر نامنفی هستند. پس با خیال راحت آن ها را به توان دو می رسانیم:

$$\begin{aligned} |x-3|^2 > |2x-1|^2 &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 > 4x^2 - 4x + 1 \\ \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 < 0 &\Rightarrow (3x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

با خارج کردن $x = \frac{1}{p}$ از محدوده جواب، مقادیری که x می تواند بپذیرد به صورت زیر خواهد بود:

$$x \in \left(-2, \frac{4}{3}\right) - \left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$$

همسایگی با بیشترین شعاع ممکن خواسته شده است. پس بازه $\left(-2, \frac{1}{p}\right)$ را که بزرگ تر است، انتخاب کرده و مرکز همسایگی را به دست می آوریم:

$$a = \frac{-2 + \frac{1}{p}}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

ابتدا حد تابع $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ را وقتی $x \rightarrow 0^-$ به دست می آوریم. اگر حاصل حد تابع محاسبه شده در قسمت قبل را L در نظر بگیریم، باید $\lim_{x \rightarrow L} f(x)$ را محاسبه کنیم.

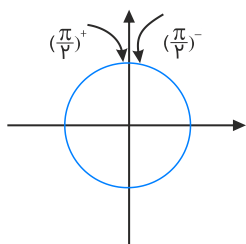
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{0 - 1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پس باید حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - |x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

باتوجه به دایره مثلثاتی زیر داریم:



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \frac{2}{1 + \infty} = \frac{2}{1 + (\frac{1}{\infty})^+} = \frac{2}{1 + 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \frac{2}{1 + \infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = 2 - 0 = 2$$

تالیفی رضا عابدی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) وقتی $x \rightarrow 0$ نتیجه می‌گیریم $x \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین $2x$ هم یک عدد غیر صحیح است. اگر $2x$ یک عدد غیر صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت $-1 = [2x] + [-2x]$.

ب) وقتی $x \rightarrow 0$ ، حاصل حد عبارت $\frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$ برابر $\frac{0}{0}$ بوده و مبهم است.

گام دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1 + x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos^2 x + \cos x)}{1 - \sqrt{1 + x^2}} \times \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{(1 - \cos x)(3)(2)}{1 - (1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \sin \frac{x}{2} \times \sin \frac{x}{2}}{4 \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{2}} = 3 \end{aligned}$$

نکته:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

راه دوم: با استفاده از هوییتال به رفع ابهام کسر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1 + x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{1 - \sqrt{1 + x^2}} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos^2 x (\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x (\sin x) \sqrt{1 + x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos^2 x (\sqrt{1 + x^2}) = 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \times 3 - 4^x \times 4^2 + 25^x \times 25^{-3}}{25^x \times 5^{-4} - 3^x \times 3^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25^x (3 \times (\frac{3}{25})^x - 16 (\frac{4}{25})^x + 25^{-3})}{25^x (5^{-4} - \frac{1}{9} (\frac{3}{25})^x)}$$

می‌دانیم که اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{3}{25})^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{4}{25})^x = 0$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25^x (0 - 0 + 25^{-3})}{25^x (5^{-4} - 0)} = \frac{25^{-3}}{5^{-4}} = \frac{5^{-6}}{5^{-4}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

نکته: در عبارت‌های نمایی مانند a^x ، اگر $x \rightarrow +\infty$ میل کند، آنگاه فقط عبارتی که دارای بزرگ‌ترین پایه است باقی می‌ماند.

$$\xrightarrow{25 > 3, 4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} - 4^{x+2} + 25^{x-3}}{5^{2x-4} - 3^{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25^{x-3}}{5^{2x-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{2x-6}}{5^{2x-4}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

تالیفی رضا عابدی

وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل کند، حاصل عبارت‌های $9 - x^2$ و $1 - x^2$ منفی می‌شود و قرینه این عبارت‌ها از داخل قدر مطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(9 - x^2)}{ax^2 - (1 - x^2) + 7 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{(a + 1)x^2 + x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(a + 1)x^2} = \frac{1}{a + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a + 1} = -1 \Rightarrow a + 1 = -1 \Rightarrow a = -2$$

برای محاسبه حد عبارت داده شده در $x \rightarrow 3^-$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccc} x & & & \\ \hline 9 - x^2 & - & \frac{3}{0} & + & \frac{3}{0} & - \end{array}$$

بنابراین در $x \rightarrow 3^-$ مقدار عبارت $9 - x^2$ مثبت بوده و خود آن از داخل قدر مطلق خارج می‌شود. همچنین بدیهی است که در $x \rightarrow 3^-$ مقدار عبارت $1 - x^2$ منفی بوده و قرینه آن از داخل قدر مطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9 - x^2}{-2x^2 - 1 + x^2 + 7 + x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9 - x^2}{-(x^2 - x - 6)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - x)(3 + x)}{-(x - 3)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 + x}{(x + 2)} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

تالیفی رضا عابدی

ریشه‌های تابع f عبارتند از: ۴ ، ۱ ، -۱ ، -۵ .
 f در $x = -۱$ و $x = ۴$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس a یا -۱ است یا ۴ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{f(x)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad \checkmark \\ \lim_{x \rightarrow 4} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{f(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \times \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1$$

b نیز -۵ یا ۱ است:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{-1}{f(x)} &= \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad \times \\ \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{-1}{f(x)} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \times \end{aligned} \right\} \Rightarrow b \neq -5$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{f(x)} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{f(x)} &= \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow a - b = -1 - 1 = -2$$

تالیفی علی شهبازی فراهانی

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

پس باید مخرج کسر در $x = 2$ صفر شود و تغییر علامت نیز ندهد پس:

$$ax^2 + 6x + b = a(x - 2)^2 \Rightarrow ax^2 + 6x + b = ax^2 - 4ax + 4a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a = -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ b = 4a \Rightarrow b = -6 \end{cases}$$

$$\text{پس } f(x) = \frac{x^2 - 5}{-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6} \text{ بنابراین:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-\frac{3}{2}x^2} = -\frac{2}{3}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} - 1)}{(x - 1)^3} = \frac{0}{0}$$

$$\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1) \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\sqrt[3]{x} - 1 = (\sqrt[3]{x} - 1) \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$\sqrt[4]{x} - 1 = (\sqrt[4]{x} - 1) \times \frac{(\sqrt[4]{x} + 1)}{\sqrt[4]{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[4]{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[4]{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1}{(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

بنابراین عبارت‌های به دست آمده را در صورت سؤال جایگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} - 1)}{(x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^3}{(x - 1)^3 (\sqrt{x} + 1) (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) (\sqrt[4]{x} + 1) (\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{1}{(2)(3)(2)(2)} = \frac{1}{24}$$

روش دوم:

نکته: وقتی توابع f و g به سمت ۱ میل کنند، آنگاه حد تابع $f - g$ با حد تابع $\frac{f^n - g^n}{n}$ برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} - 1)}{(x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{2}\right) \left(\frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{3}\right) \left(\frac{(\sqrt[4]{x})^4 - 1^4}{4}\right)}{(x - 1)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x - 1)}^3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}$$

تالیفی رضا عابدی

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x)$ ابتدا باید $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 4 - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{2}{x + 1}\right) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = [o^-] = -1$$

چون تابع f دارای جزء صحیح است، باید معلوم شود که داخل جزء صحیح o^+ ایجاد می‌شود یا o^- .
برای این کار می‌توان از ضرب مزدوج در صورت و مخرج تابع f استفاده کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\frac{(x - \sqrt{x + 12})(x + \sqrt{x + 12})}{x + \sqrt{x + 12}} \right] = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\frac{x^2 - x - 12}{x + \sqrt{x + 12}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\frac{(x - 4)(x + 3)}{x + \sqrt{x + 12}} \right] = [o^-] = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = -1$$

دقت کنید از طریق رسم نمودار $y_1 = x$ و $y_2 = \sqrt{x + 12}$ هم می‌توان فهمید داخل جزء صحیح o^- ایجاد می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4$$

دقت کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \sqrt{x + 12}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$$

و در نهایت چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) = 4$ ، پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f \circ f)(x) = 4$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) + \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) \right] = -1 + 4 = 3$$

تالیفی علی ناری ابیانه

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[p]{x^p + x} - \sqrt[p]{x^p - x}}{\sqrt[p]{x^p + 1} - \sqrt[p]{x^p - 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (-x)}{1 - (-3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

نکته:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{x^m + u(x)} - \sqrt[n]{x^m + v(x)}}{\sqrt[n]{x^m + f(x)} - \sqrt[n]{x^m + g(x)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u(x) - v(x)}{f(x) - g(x)}$$

دقت کنید که درجه توابع u, v, f و g از m کمتر است.

روش دوم (تشریحی):

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[p]{x^p + x} - \sqrt[p]{x^p - x}}{\sqrt[p]{x^p + 1} - \sqrt[p]{x^p - 3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[p]{x^p + x} - \sqrt[p]{x^p - x}}{\sqrt[p]{x^p + 1} - \sqrt[p]{x^p - 3x}} \times \frac{\sqrt[p]{(x^p + x)^p} + \sqrt[p]{x^p - x^p} + \sqrt[p]{(x^p - x)^p}}{\sqrt[p]{(x^p + x)^p} + \sqrt[p]{x^p - x^p} + \sqrt[p]{(x^p - x)^p}} \\ & \times \frac{\sqrt[p]{(x^p + 1)^p} + \sqrt[p]{(x^p + 1)(x^p - 3x)^p} + \sqrt[p]{(x^p - 3x)^p}}{\sqrt[p]{(x^p + 1)^p} + \sqrt[p]{(x^p + 1)(x^p - 3x)^p} + \sqrt[p]{(x^p - 3x)^p}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^p + x) - (x^p - x)}{(x^p + 1) - (x^p - 3x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[p]{(x^p + 1)^p} + \sqrt[p]{(x^p + 1)(x^p - 3x)^p} + \sqrt[p]{(x^p - 3x)^p}}{\sqrt[p]{(x^p + x)^p} + \sqrt[p]{x^p - x^p} + \sqrt[p]{(x^p - x)^p}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{p}{p}} + x^{\frac{p}{p}} + x^{\frac{p}{p}}}{x^{\frac{p}{p}} + x^{\frac{p}{p}} + x^{\frac{p}{p}}} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

تالیفی سیروس نصیری

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ حد تابع برابر $-\frac{1}{p}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگترین درجه صورت کسر با بزرگترین درجه مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگترین درجه x در صورت کسر ۱ است، پس $n = 1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی که $x \rightarrow +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^p + bx + c} \sim \sqrt{a}|x| + \frac{b}{2a}$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{1}|x| + \left(\frac{-3}{2}\right)}{ax - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{2x - \sqrt{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x^2 + 3x}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{-6(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

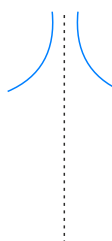
$$= \frac{-3}{-6(-2-2)} = \frac{-3}{(-6)(-4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

بدیهی است که $x = 2$ هم ریشهٔ مخرج و هم ریشهٔ صورت است، پس $a = 2$ است و درضمن باتوجه به نمودار مخرج ریشهٔ مضاعف $x = 1$ دارد و باتوجه به اینکه ضریب x^3 یک است، پس مخرج به صورت $(x-1)^2(x-2)$ است که برابر است با: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ ؛ اگر با مخرج متحدد قرار دهیم $b = -4$ ، $c = 5$ و $d = -2$ می‌شود:

$$a \times b \times c \times d = 2 \times (-4) \times 5 \times (-2) = 80$$

تالیفی محمد درمان

چون نمودار تابع اطراف $x = 1$ به صورت زیر است، مخرج کسر در $x = 1$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، یعنی عامل $(x-1)^2$ در مخرج موجود باشد، پس:



$$(x+c)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow c = -1$$

از طرفی نمودار، در $x = 2$ نقطه‌ای توخالی است، یعنی $x = 2$ هم ریشهٔ صورت است و هم ریشهٔ مخرج:

$$x = 2 \xrightarrow{\text{در صورت}} 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$x = 2 \xrightarrow{\text{در مخرج}} 2a + 2b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

در نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(ax^2 - 2ax)(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{ax(\cancel{x-2})(x-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1, b = -2 \Rightarrow a + b = -1$$

تالیفی علی ناری ایبانه

فرض می‌کنیم که $g(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}$ باشد:

$$g(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} = \frac{1-x}{x^4}$$

اگر $x \rightarrow 0$ آنگاه $\frac{1-x}{x^4} \rightarrow +\infty$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

تالیفی سیروس نصیری

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x} - \sqrt{3}} = \frac{0}{\sqrt{3} + 0 - \sqrt{3}} = \frac{0}{0}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{3} = (\sqrt{x} - \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \right) = \frac{x-3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3+x} \times \sqrt{3-x}}{\frac{x-3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} + \sqrt{3-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3+x} \times \cancel{\sqrt{3-x}}}{\cancel{\sqrt{3-x}} \left(-\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{6}}{(0+1)} = \sqrt{6}$$

تالیفی رضا عابدی

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 2 - mx(x+1) + n(x+1)}{x+1} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-m)x^2 + (4-m+n)x - 2 + n}{x+1} = -1$$

از آنجاکه حاصل حد کسر در بی‌نهایت برابر عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجه مخرج و صورت باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجه مخرج برابر ۱ است، پس بزرگ‌ترین درجه صورت نیز باید برابر ۱ باشد؛ بنابراین:

$$1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-m+n)x - 2 + n}{x+1} = -1 \Rightarrow \frac{4-m+n}{1} = -1$$

$$\xrightarrow{m=1} 4 - 1 + n = -1 \Rightarrow n = -4 \Rightarrow m - 2n = 1 - 2(-4) = 9$$

تالیفی رضا عابدی

باتوجه به شکل، وقتی $x \rightarrow b^+$ ، آنگاه $f(x) \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{c}{(x-a)^p (x-b)} = \frac{c}{0^+} = -\infty \Rightarrow c < 0$$

حال حد تابع در $x \rightarrow a$ را حساب می‌کنیم با شروط $c < 0$ و $a < b$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{(x-a)^p (x-b)} = \frac{c < 0}{0^-} = +\infty$$

پس گزینه ۴ درست است.

تالیفی علی ناری ایبانه

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} 3^{-2n+1} = \frac{1}{3^{2n-1}} \rightarrow 0 \\ 3^{2n} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{-2n+1}(3^{4n-1} - 1)}{3^{-2n+1}(2 \times 3^{4n-1} + 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{4n-1} - 1}{2 \times 3^{4n-1} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3^{4n-1}}(1 - \frac{1}{\cancel{3^{4n-1}}})}{\cancel{3^{4n-1}}(2 + \frac{1}{\cancel{3^{4n-1}}})} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{3^{4n-1}} \rightarrow 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f(x) = \left[\frac{-5x + 5 - 2}{x - 1} \right] = \left[-5 - \frac{2}{x - 1} \right]$$

$$f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = f\left(\frac{\overset{t}{x - 2}}{x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-5 - \frac{2}{x - 1} \right] = [-3^-] = -4 \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = [-5 + 0^+] = [-5^+] = -5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = -5 - (-4) = -1$$

تالیفی محمد درمان

نکته: حد تابع $[u]$ اگر $u \rightarrow \pm\infty$ میل کند، با حد تابع u برابر است (یعنی می‌توان از براکت صرف‌نظر کرد).
اگر $x \rightarrow 2$ میل کند، آنگاه عبارت $\frac{1}{x - 2}$ به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند؛ بنابراین طبق نکته گفته‌شده می‌توان از براکت صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + mx + n}{x - 2} = 4$$

از آنجاکه حاصل حد مخرج کسر به ازای $x = 2$ برابر صفر است و جواب حد عددی متناهی است، پس حاصل صورت کسر نیز به ازای $x = 2$ برابر صفر می‌شود. یعنی می‌توان گفت که در تجزیه صورت کسر حتماً عامل $(x - 2)$ وجود دارد. بنابراین فرض می‌کنیم:

$$x^2 + mx + n = (x - 2)(x + a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + mx + n}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + a)}{\cancel{x - 2}} = 2 + a = 4 \Rightarrow a = 2$$

پس:

$$x^2 + mx + n = (x - 2)(x + 2) = x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -4 \end{cases}$$

$$m - 2n = 0 - 2(-4) = 8$$

تالیفی رضا عابدی

می‌دانیم که عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید همواره نامنفی باشد.

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x^2 - 3x + 2) = -(x-1)(x-2)$$

$$\frac{x}{-x^2+3x-2} \quad \left| \quad \begin{array}{c} 1 \\ - \\ \hline 2 \\ + \\ \hline - \end{array} \right.$$

بنابراین اگر $x \rightarrow +\infty$ میل کند، آنگاه عبارت $-x^2 + 3x - 2$ منفی خواهد شد و رادیکال، تعریف نشده می‌شود، پس حاصل حد داده شده وجود ندارد.

تالیفی رضا عابدی

فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$ باشد. چون تابع f از نقطه $(0, 4)$ می‌گذرد، پس $f(0) = 4$ و بنابراین $b = 4$ است. در این صورت خواهیم داشت:

$$f(x) = ax + 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{4}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 4}{\frac{1}{a}x - \frac{4}{a}} = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

چون طبق شکل شیب خط مثبت است، پس $a = 3$ و بنابراین $f(x) = 3x + 4$ است. حال خواهیم داشت:

$$f(k) = 0 \Rightarrow 3k + 4 = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(a+2)}{2x}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}} \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \xrightarrow{\text{در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \times \frac{3x - \sqrt{4x^2 + 5}}{3x - \sqrt{4x^2 + 5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 4x^2 - 5}{2(x+1)(-3 - \sqrt{4x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-5(x-1)(x+1)}{12(x+1)} = \frac{5}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

$$\text{می‌دانیم: } \begin{cases} [x] = ۴ & \text{در همسایگی راست } ۴ \\ [x] = ۳ & \text{در همسایگی چپ } ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow ۴^+} \frac{۴ - [x]}{\left| \frac{x}{۲} - ۲ \right|} = \lim_{x \rightarrow ۴^+} \frac{۴ - ۴}{\left| \frac{x}{۲} - ۲ \right|} = ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow ۴^-} \frac{۴ - [x]}{\left| \frac{x}{۲} - ۲ \right|} = \lim_{x \rightarrow ۴^-} \frac{۴ - ۳}{|۲^- - ۲|} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۲x}{x} - \frac{۱}{x} = ۲ - \frac{۱}{\infty} = ۲^- , \quad \lim_{x \rightarrow ۲^-} [-x] = [-۲^-] = -۲$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} \frac{x^۲ - ۴}{(x - ۲)^۲} = \lim_{x \rightarrow ۲^-} \frac{x + ۲}{x - ۲} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$$

تالیفی امیر خمسه

$$L = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\frac{(۲ - \sqrt{۴ - x^۲})(۲ + \sqrt{۴ - x^۲})}{۲ + \sqrt{۴ - x^۲}} - \frac{x^۲}{۴}}{x^۴} = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\frac{x^۲}{۲ + \sqrt{۴ - x^۲}} - \frac{x^۲}{۴}}{x^۴}$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\frac{1}{۲ + \sqrt{۴ - x^۲}} - \frac{1}{۴}}{x^۲} = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{۲ - \sqrt{۴ - x^۲}}{۴(۲ + \sqrt{۴ - x^۲})^۲ x^۲} = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{۴ - (۴ - x^۲)}{۴(۲ + \sqrt{۴ - x^۲})^۲ x^۲}$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{x^۲}{۴(۲ + \sqrt{۴ - x^۲})^۲ x^۲} = \frac{1}{۴(۲ + ۲)^۲} = \frac{1}{۶۴}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

$$\text{اگر } n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3x^2 - 1}{3x + 2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{اگر } n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x^2 - 1}{3x^2 + 2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 1}{5x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{5x^2} = 1$$

$$\text{اگر } n > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n + 3x^2 - 1}{3x^n + 2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n}{3x^n} = \frac{2}{3}$$

حاصل این حد هیچ گاه برابر ۱- نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نکته: اگر عبارت داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می توان نتیجه گرفت جزء صحیح با عبارت داخل آن هم ارز است.
بررسی گزینه اول:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left(\frac{1}{x} \right) = 1$$

بررسی گزینه دوم:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{1}{x} \right) = 1$$

بررسی گزینه سوم:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

پس حاصل حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$ متناهی نیست.

بررسی گزینه چهارم:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = (+\infty)(0) = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[n]{x^n - 1}}{fx^n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{fx^n} = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{fx} = \frac{a}{f} = \frac{1}{f} \Rightarrow a = \frac{1}{f}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{f}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{fx - 1} = \frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{f}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{fx - 1} \times \frac{\frac{1}{f}x^n + \frac{1}{f}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^n}{\frac{1}{f}x^n + \frac{1}{f}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{f}x^n - x^n + 1}{(fx - 1)\left(\frac{1}{f}x^n + \frac{1}{f}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^n\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(x - 1)} \left(\frac{1}{f}x^n - \frac{x}{f} - \frac{1}{f} \right)}{\cancel{(x - 1)} \left(\frac{1}{f}x^n + \frac{1}{f}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^n \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f}}{f \times \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f} + \frac{1}{f} \right)} = \frac{1}{f} = \frac{1}{2f}$$

$$\frac{\frac{1}{f}x^n - x^n + 1}{2f} \quad \left| \quad \frac{x - 1}{\frac{1}{f}x^n - \frac{x}{f} - \frac{1}{f}} \right.$$

$$\frac{-\frac{1}{f}x^n + \frac{1}{f}x^n}{2f}$$

$$-\frac{1}{f}x^n + 1$$

$$+\frac{1}{f}x^n - \frac{1}{f}x$$

$$-\frac{1}{f}x + 1$$

$$+\frac{1}{f}x - 1$$

۰

روش دوم: (هویتال)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^2 - 1}}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3} - 2 \times \frac{1}{4}}{4} = \frac{4 - 3}{4} = \frac{1}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گزینه ۳

۶۱

باتوجه به شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

(عدد b فرضی است)
حال به بررسی تابع $\frac{1}{f}$ در اطراف $x = a$ می‌پردازیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b^+} = \left(\frac{1}{b}\right)^- \end{cases}$$

یعنی در تابع $\frac{1}{f}$ ، وقتی $x \rightarrow a^+$ ، نمودار از سمت راست باید به صفر میل کند (گزینه ۱ و ۳ درست هستند).

وقتی $x \rightarrow a^-$ ، تابع $\frac{1}{f}$ از چپ به عدد $\frac{1}{b}$ میل می‌کند، پس گزینه ۳ درست است.

تالیفی علی ناری ابیانه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر شده و در نتیجه حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده شده را ساده کرده و حد آن را به دست می آوریم:

$$1) \sin^2 x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \\ = (\sin x - \cos x)^2 \Rightarrow 1 - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$$

$$2) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{(1 - \tan x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\cos x - \sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2 \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{a-x} + 3^x - 12}{3^x - 3^{2-x}} = \frac{3^{a-1} + 3 - 12}{3 - 3} = \frac{3^{a-1} - 9}{0}$$

از آنجا که حد مخرج کسر برابر صفر است، پس حاصل حد صورت کسر نیز باید صفر باشد تا حالت $\frac{0}{0}$ اتفاق بیفتد.

$$3^{a-1} - 9 = 0 \Rightarrow 3^{a-1} = 9 = 3^2 \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{3-x} + 3^x - 12}{3^x - 3^{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{27}{3^x} + 3^x - 12}{3^x - \frac{9}{3^x}}$$

با استفاده از تغییر متغیر $3^x = t$ می توان نوشت:

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 3$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{27}{t} + t - 12}{t - \frac{9}{t}} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 12t + 27}{t^2 - 9} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(t-9)}{(t-3)(t+3)} = -1$$

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^5 - (1-x)^5}{(1-2x)^4 - (1-3x)^5} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$(1-x)^5 = (1-x)^4(1-x)^1 = (1-2x+x^2)(1-2x+x^2) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 1$$

توجه: در حالت کلی داریم:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^5 - (1-x)^5}{(1-2x)^4 - (1-3x)^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-6x+12x^2-8x^3) - (x^5-4x^4+6x^3-4x^2+1)}{(1-4x+4x^2) - (1-9x+27x^2-27x^3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 2x}{27x^3 - 23x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2)}{x(27x^2 - 23x + 5)} = -\frac{2}{5}$$

روش دوم:

نکته: وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، آنگاه حد عبارت $(1 \pm x)^n$ با حد عبارت $(1 \pm nx)$ برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^5 - (1-x)^5}{(1-2x)^4 - (1-3x)^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-5(2x)) - (1-5x)}{(1-2(2x)) - (1-3(3x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x + 5x}{-4x + 9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{5x} = -\frac{1}{5}$$

تالیفی رضا عابدی

توجه کنید که در محاسبه حد، اگر داخل براکت عدد صحیح شود باید آن عدد صحیح را به طور دقیق (2^+ یا 2^-) تعیین کرد؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{6x+1}{3x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{6x+2-1}{3x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2(3x+1)}{3x+1} - \frac{1}{3x+1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{1}{3x+1} \right] = [2 - 0^+] = [2^-] = 1$$

نکته: برخی از دانش‌آموزان عزیز راه‌حل نادرست زیر را انجام می‌دهند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{6x+1}{3x+1} \right] = \left[\frac{6}{3} \right] = [2] = 2$$

تالیفی رضا عابدی

از آنجاکه حد مخرج کسر برابر صفر است، پس حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بوده است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 33} (\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} - n) = 0 \Rightarrow \sqrt{3 + \sqrt{3 + 33}} - n = 0 \Rightarrow \sqrt{3 + 6} = n \Rightarrow n = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 33} \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} - 3}{x - 33} \times \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} + 3}{\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} + 3} = \lim_{x \rightarrow 33} \frac{3 + \sqrt{3 + x} - 9}{(x - 33)(\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 33} \frac{\sqrt{3 + x} - 6}{(x - 33)(\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} + 3)} \times \frac{\sqrt{3 + x} + 6}{\sqrt{3 + x} + 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 33} \frac{\cancel{x - 33}}{(x - 33)(\sqrt{3 + \sqrt{3 + x}} + 3)(\sqrt{3 + x} + 6)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3 + \sqrt{3 + 33}} + 3)(\sqrt{3 + 33} + 6)} = \frac{1}{6 \times 12} = \frac{1}{72} \Rightarrow m = \frac{1}{72}$$

$$36m - n = 36\left(\frac{1}{72}\right) - 3 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{-5}{2}$$

تالیفی رضا عابدی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-4x}}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-4x}}{x} \times \frac{\sqrt{(1-2x)^2} + \sqrt{1-2x} \times \sqrt[3]{1-4x} + \sqrt[3]{(1-4x)^2}}{\sqrt{(1-2x)^2} + \sqrt{1-2x} \times \sqrt[3]{1-4x} + \sqrt[3]{(1-4x)^2}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{(1-2x)^3} - (1-4x)}{x(1+1+1)} \times \frac{\sqrt{(1-2x)^3} + (1-4x)}{\sqrt{(1-2x)^3} + (1-4x)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^3 - (1-4x)^3}{(x)(3)(1+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-6x+12x^2-8x^3-1+8x-16x^2}{(x) \times 6} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^3-4x^2+2x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-8x^2-4x+2)}{6x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

روش دوم:

نکته: وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، آنگاه حد عبارت $\sqrt[n]{1 \pm x}$ با حد عبارت $\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)$ برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-4x})}{x} = \frac{\left(1 - \frac{2x}{2}\right) - \left(1 - \frac{4x}{3}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \frac{4x}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}$$

تالیفی رضا عابدی

۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۴۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۵۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۶۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>						
۵۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>						
۵۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>						
۵۸	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>								
۵۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>								
۶۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>								

اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، مقدار $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ کدام است؟

۱

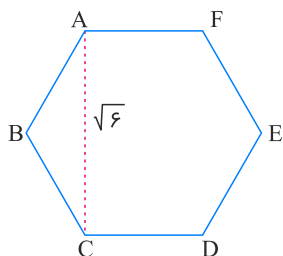
(۲) $0/72$

(۱) $0/76$

(۴) $0/24$

(۳) $0/68$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مساحت شش ضلعی منتظم زیر کدام است؟

۲

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۳) $6\sqrt{3}$

(۴) $12\sqrt{3}$

اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

۳

(۲) $\frac{13}{81}$

(۱) $\frac{13}{27}$

(۴) $\frac{17}{81}$

(۳) $\frac{17}{27}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مساحت مستطیل ABCD برابر با ۱۶ است. اگر زاویه حاده بین دو قطر برابر 30° باشد. طول قطر مستطیل چقدر است؟

۴

(۲) ۸

(۱) ۴

(۴) ۱۶

(۳) ۱۲

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۶۱

نقاط M, N و P به ترتیب روی اضلاع AB, BC و CA از مثلث ABC چنان قرار دارند که $\frac{AM}{MB} = 2$ ، $\frac{BN}{NC} = 3$ و $\frac{CP}{PA} = 4$. مساحت مثلث MNP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

- (۱) $\frac{3}{11}$
 (۲) $\frac{6}{17}$
 (۳) $\frac{4}{13}$
 (۴) $\frac{5}{12}$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد

اگر $\tan x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل عبارت $2 \sin x (3 \sin x + 5 \cos x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{5}$
 (۲) ۴
 (۳) $\frac{7}{3}$
 (۴) ۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{23}{64}$
 (۲) $\frac{65}{16}$
 (۳) $\frac{49}{16}$
 (۴) $\frac{17}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

حاصل عبارت $\frac{\sin 525^\circ + \cos 195^\circ}{2 \sin 105^\circ - \cos 285^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{9}$
 (۲) $\frac{4}{11}$
 (۳) $-\frac{6}{11}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ ، با فرض $\tan 20^\circ = \frac{1}{4}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$
 (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{7}{3}$
 (۴) $\frac{5}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

با کدام ضابطه $f(x)$ ، همواره تساوی $|f(x)| = (-1)^{[x]} f(x)$ برقرار است؟

- (۱) $\sin \pi x$
 (۲) $\cos \pi x$
 (۳) $\sin 2\pi x$
 (۴) $\cos 2\pi x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

اگر $\tan 25^\circ = 4/5$ باشد، حاصل $\frac{3 \sin 155^\circ - 2 \cos 295^\circ}{\cos 115^\circ + \cos 335^\circ}$ چقدر است؟

- (۲) $\frac{3}{2}$
(۴) $\frac{10}{3}$

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{5}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

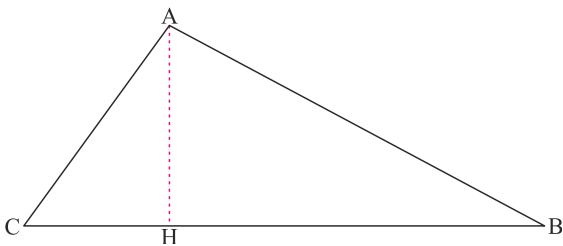
حاصل $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$ کدام است؟

- (۲) صفر
(۴) $\frac{1}{2}$

- (۱) -۱
(۳) ۱

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

در شکل زیر $AH = 3$ ، $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ و $\hat{C} = 2\hat{B}$. اندازه BC کدام است؟ (AH ارتفاع مثلث است.)



- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) $3\sqrt{3}$
(۳) $4\sqrt{2}$
(۴) $3\sqrt{2}$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

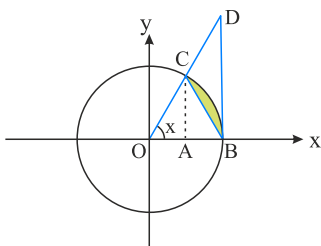
اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sin(285^\circ) + 2 \cos(435^\circ)}{3 \sin(195^\circ) + \cos(705^\circ)}$ کدام است؟

- (۲) $\frac{2a-1}{3a+1}$
(۴) $\frac{2a+1}{1-3a}$

- (۱) $\frac{2a+1}{3a+1}$
(۳) $\frac{2a-1}{1-3a}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

باتوجه به شکل زیر در دایره مثلثاتی، مساحت قسمت هاشورخورده، در کدام گزینه آمده است؟



- (۱) $\tan x - x$
(۲) $x - \sin x$
(۳) $5/(\sin x - x)$
(۴) $5/(x - \sin x)$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin^3 x (1 + \cot^2 x)}{\cos x}$ روی بازه $(0, \pi)$ کدام است؟



تالیفی محمدرضا کشاورزی

حاصل $2 \tan 10^\circ + \tan 40^\circ$ برابر است با:

۱۷

(۲) $\tan 50^\circ$

(۱) $\tan 40^\circ$

(۴) $\tan 70^\circ$

(۳) $\tan 20^\circ$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۵

معادله $2 \tan(x + \frac{5\pi}{2}) \cot(\pi - x) + \frac{\sin^2(3\pi - x)}{\sin^2(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + x)} = 6 \sin \frac{5\pi}{6}$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

۱۸

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \in \mathbb{Q} \\ -3 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ، آنگاه چند گزاره از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱۹

(الف) تابع متناوب است ولی دوره تناوب ندارد.

(ب) تابع غیر متناوب است.

(ج) به ازای همه $t \in \mathbb{Q}'$ ، $f(x+t) = f(x)$

(د) به ازای همه $t \in \mathbb{Q}$ ، $f(x+t) = f(x)$

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

تالیفی محمد درمان

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟ ۲۰

(۲) $\frac{3\pi}{2}$
(۴) $\frac{7\pi}{4}$

(۱) $\frac{5\pi}{4}$
(۳) $\frac{3\pi}{4}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

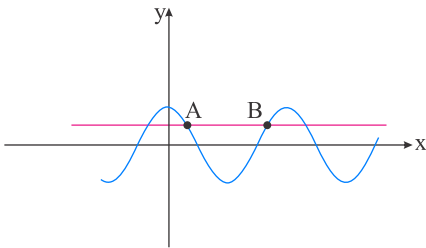
جواب‌های کلی معادلهٔ $2\cos^2(x + \frac{\pi}{7}) + 2\cos^2(x - \frac{5\pi}{14}) = 2$ است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ ۲۱

(۲) $2k\pi + \frac{5\pi}{14}$
(۴) $k\pi + \frac{5\pi}{14}$

(۱) $2k\pi + \frac{\pi}{7}$
(۳) $k\pi + \frac{\pi}{7}$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

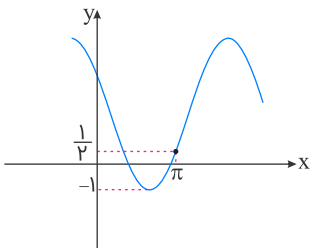
در شکل زیر نمودار توابع $y = \cos 2x$ و $y = \frac{1}{3}$ را رسم کرده‌ایم. طول پاره‌خط AB کدام است؟ ۲۲



(۱) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$
(۲) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$
(۳) $\frac{2\pi}{3}$
(۴) $\frac{\pi}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

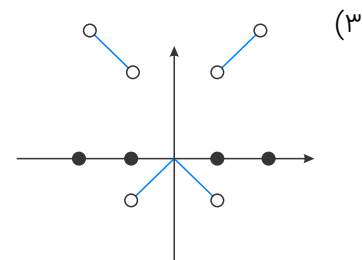
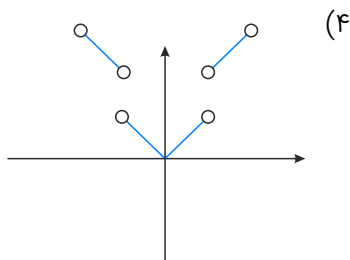
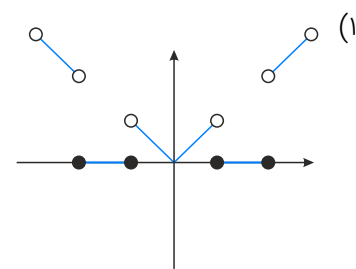
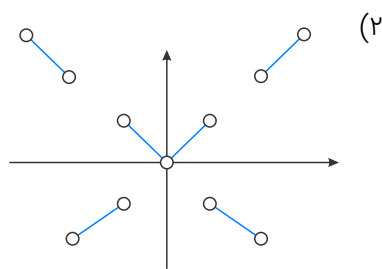
شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos(x + \frac{\pi}{3})$ است. $f(0)$ کدام است؟ ۲۳



(۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{7}{2}$
(۴) $\frac{9}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۴ اگر $g(x) = \sin(\pi x)$ و $f(x) = \frac{x}{|x|}$ باشد، نمودار $y = xf(g(x))$ در کدام گزینه درست رسم شده است؟



تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۲۵ معادله $\sin \frac{\pi[x]}{2} = (-1)^{[-x]} + \cos(\pi[x])$ در بازه $(0, 1393)$ چند ریشه دارد؟

(۲) ۶۹۶

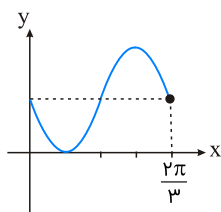
(۱) هیچ

(۴) بی‌شمار

(۳) ۱۳۹۲

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۴

۲۶ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟



(۱) صفر

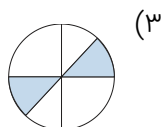
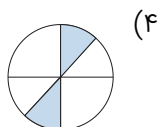
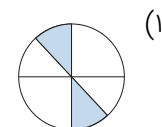
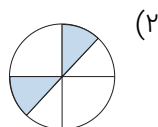
(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۷ در کدام ناحیه دایره مثلثاتی رابطه $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$ برقرار است؟



تالیفی محمدجواد محسنی

۲۸ اگر برد تابع $y = m^2 \cos\left(\frac{x}{m}\right) + m$ شامل ۹ عدد صحیح باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\sqrt{5} - 1$ (۲) $\sqrt{10} - 1$
 (۳) $\sqrt{5} + 1$ (۴) $\sqrt{3} + 1$

تالیفی محمدجواد محسنی

۲۹ اگر ماکزیمم تابع $y = 4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + k$ دو برابر مینیمم آن باشد، k کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳
 (۳) ۴ (۴) ۸

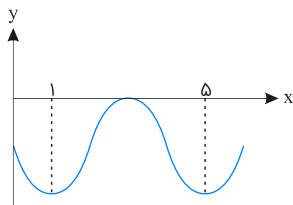
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۰ تابع $f(x) = \tan x$ را روی محور x ها به اندازه a منقبض کرده‌ایم و سپس b واحد به سمت راست برده‌ایم. در نتیجه این تابع در $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ اکیداً صعودی با برد \mathbb{R} شده است. $a \times b$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$
 (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

تالیفی محمد درمان

۳۱ اگر نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به شکل زیر باشد، مقدار $f\left(\frac{25}{3}\right)$ کدام است؟



- (۱) $-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۲) $-\frac{3}{2}$
 (۳) -1
 (۴) -2

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = -a \tan bx$ در آن اکیداً نزولی است، $(\frac{-1}{2\sqrt{b}}, \frac{1}{2\sqrt{b}})$ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) π^2
 (۲) $4\pi^2$
 (۳) $\frac{\pi^2}{4}$
 (۴) $\frac{\pi}{2}$

تالیفی محمدجواد محسنی

اگر $\cot x - \tan x = 3$ باشد، حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{12}$
 (۲) $\frac{12}{13}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{6}{13}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازهٔ $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{4}$
 (۲) $\frac{9\pi}{4}$
 (۳) $\frac{5\pi}{2}$
 (۴) $\frac{11\pi}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x \cdot \cos 2x = 1$ کدام است؟

- (۱) $k\pi$
 (۲) $2k\pi$
 (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$
 (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{4}$ که مجموع ماکزیمم و مینیمم آن نیز ۱۲ باشد، کدام است؟

- (۱) $3 - 6 \cos \frac{x}{8}$
 (۲) $6 - 3 \cos \lambda x$
 (۳) $6 - 3 \cos \frac{x}{8}$
 (۴) $3 - 6 \cos \lambda x$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{6})$ و دامنهٔ $(4, a)$ ، روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۵
 (۲) ۶
 (۳) ۹
 (۴) ۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

جواب‌های کلی معادله $\sin^2 2x - \sin^2 4x = \cos^2 4x - \cos^2 2x$ به کدام صورت است؟

۳۹

$$\frac{k\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{۱۶} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{۴} \quad (۱)$$

$$\frac{k\pi}{۱۲} \quad (۳)$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - (k^2 - 4)x + k = 0$ باشند، مقدار k برای آنکه نمودار تابع $y = |\tan x|$ خط $y = \frac{\alpha + \beta}{2}$ را در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ فقط در یک نقطه قطع کند، کدام است؟

۴۰

$$-۲ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

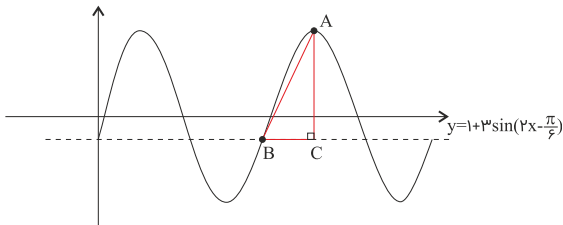
$$\text{هیچ مقدار } k \quad (۴)$$

$$\pm ۲ \quad (۳)$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

باتوجه به شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۴۱



$$\frac{4\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

تالیفی علی ناری ابیانه

دامنه تابع $f(x) = \frac{\tan(\frac{\pi + 2\pi x}{2})}{\sqrt{4 - x^2}}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۴۲

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{بی‌شمار} \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$ باشند، تابع $(g \circ f)(x)$ در کدام یک از بازه‌های زیر تعریف شده است؟

۴۳

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad (۲)$$

$$(0, \pi) \quad (۱)$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (۴)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad (۳)$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۱

دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟ ۴۴

π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۱)

2π (۴) $\frac{3\pi}{2}$ (۳)

تالیفی سیروس نصیری

تالیفی سیروس نصیری

حاصل عبارت $\frac{\cot(-\alpha) \cdot \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin(\pi - \alpha)}{\frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1)}$ به ازای ۴۵

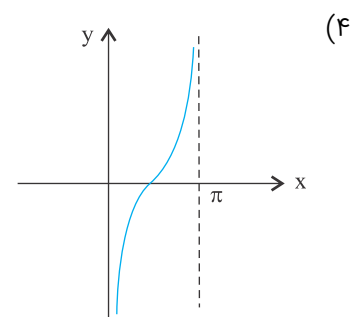
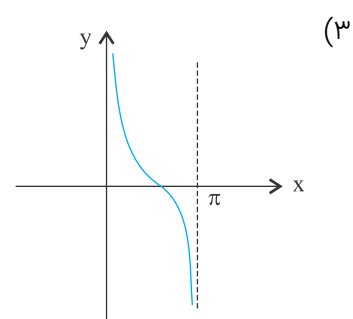
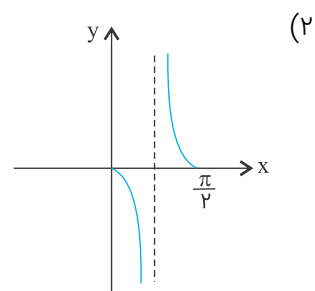
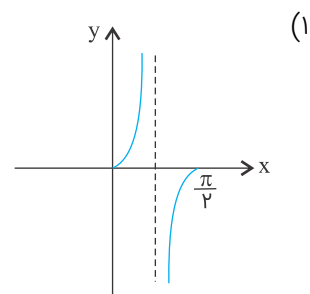
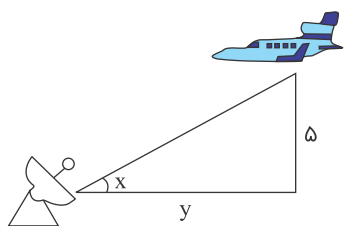
کدام است؟ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$-\frac{1}{4}$ (۲) +۴ (۱)

$-\frac{3}{4}$ (۴) + $\frac{4}{3}$ (۳)

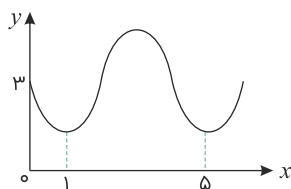
تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

هواپیمایی در ارتفاع ۵ کیلومتری از سطح زمین در حال پرواز است. راداری مطابق شکل این هواپیما را رصد می‌کند. نمودار y بر حسب x کدام است؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می‌باشد. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۲/۵

(۳) ۳

(۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

ساده شده کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$ کدام است؟

۴۸

(۲) $8 \sin^{-2} 2\theta$

(۱) $8 \cos^{-2} 2\theta$

(۴) $16 \sin^{-2} 2\theta$

(۳) $16 \cos^{-2} 2\theta$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

اگر $\sin 2\alpha = a$ باشد، حاصل $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ در بازه $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ کدام گزینه است؟

۴۹

(۲) $-a$

(۱) $\frac{-a}{2}$

(۴) $2a$

(۳) $\frac{-a}{4}$

تالیفی الهام مجد

اگر $f(x) = 3^x$ و $g(x) = \frac{f(\cos^2 x)}{f(\sin^2 x)}$ حاصل $g\left(\frac{\pi}{8}\right)$ چقدر است؟

۵۰

(۲) $3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(۱) ۱

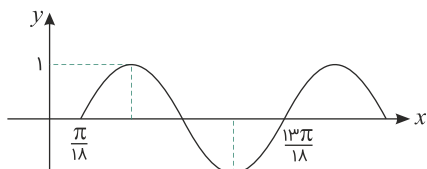
(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) ۹

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۴

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. کدام است $a + b$ ؟

۵۱



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

کمترین مقدار تابع $f(x) = \sin x (2 \sin x - 1)$ کدام است؟

۵۲

(۲) ۱

(۱) -۱

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $-\frac{1}{8}$

تالیفی سیروس نصیری

معادله $\cos([x]\pi) = \cos x$ در بازه $(0, 6)$ چند جواب دارد؟

۵۳

(۲) ۱

(۱) ۰

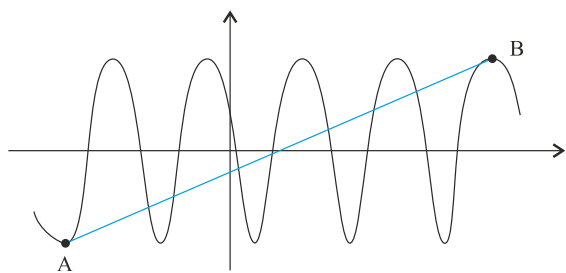
(۴) ۳

(۳) ۲

تالیفی محمد درمان

شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = -\frac{3}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ است. شیب پاره خط AB کدام است؟

۵۴

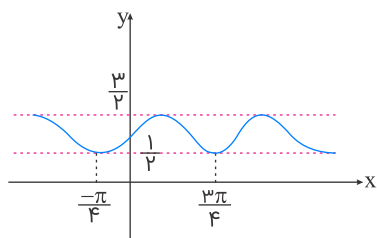


- (۱) $\frac{7}{6\pi}$
 (۲) $\frac{6}{7\pi}$
 (۳) $\frac{3}{2\pi}$
 (۴) $\frac{2}{3\pi}$

تالیفی علی ناری ابیانه

شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام است $a + b$ ؟

۵۵



- (۱) ۱
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) ۲
 (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

معادلهٔ مثلثاتی $\cos^6 x = \sin^6 x - \sin^4 x$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۵۶

- (۱) ۶
 (۲) ۵
 (۳) ۴
 (۴) ۳

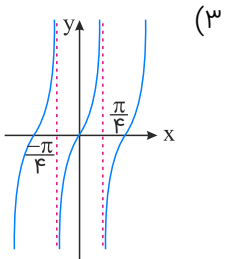
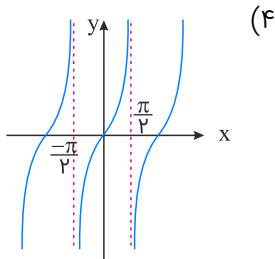
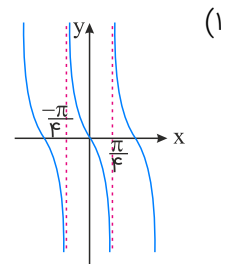
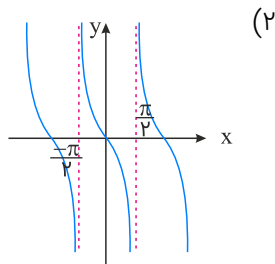
مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

معادلهٔ $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۵۷

- (۱) ۰
 (۲) ۲
 (۳) ۴
 (۴) ۸

تالیفی محمدرضا کشاورزی



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

دوره تناوب تابع $y = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x$ چقدر است؟ ۵۹

(۱) $\frac{\pi}{4}$

(۲) π

(۴) هر مقداری

(۳) $\frac{\pi}{2}$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

دوره تناوب تابع $y = \tan 4x + \cot 4x$ را T_1 و دوره تناوب تابع $y = \tan 4x - \cot 4x$ را T_2 می‌نامیم؛ آنگاه: ۶۰

(۲) $T_1 = 2T_2$

(۱) $T_1 = T_2$

(۴) $T_1 = T_2 + \frac{\pi}{2}$

(۳) $T_1 = \frac{T_2}{2}$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $4\sin^2 \alpha + 8\cos \alpha - 7 = 0$ کدام است؟ ۶۱

(۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

(۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

معادله $x \sin x - 1 = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ ، چند ریشه حقیقی دارد؟ ۶۲

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟ ۶۳

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $1 + \cos x = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}$ بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟ ۶۴

- (۱) مربع
(۲) مستطیل
(۳) مثلث قائم‌الزاویه
(۴) مثلث متساوی‌الساقین

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

برای تابع $f(x) = \sin x + \cos x$ و $g(x) = \sin^2 x$ می‌دانیم $f \circ g(x) = \sin^2 x$ است. در این صورت $f\left(\frac{1}{3}\right)$ چقدر است؟ ۶۵

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{8}{9}$
(۳) $-\frac{7}{8}$
(۴) $-\frac{8}{9}$

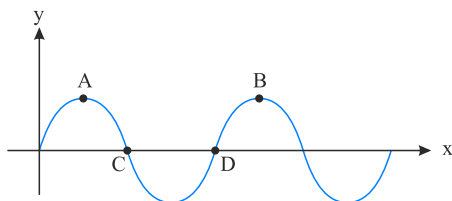
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

بزرگ‌ترین جواب معادله $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ ۶۶

- (۱) $\frac{11\pi}{6}$
(۲) $\frac{13\pi}{12}$
(۳) $\frac{11\pi}{12}$
(۴) $\frac{23\pi}{12}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

باتوجه به نمودار $y = a \sin \frac{x}{a}$ ، مساحت ذوزنقه حاصل از تقاطع نقاط A، B، C و D، 6π واحد مربع شده است؛ a کدام می‌تواند باشد؟ ۶۷

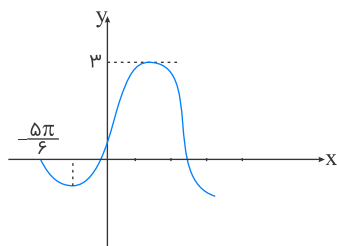


- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) -۴
(۴) -۲

تالیفی محمدجواد محسنی

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۶۸



(۱) ۱/۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) $1 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

معادله $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$ در بازه $[0, \pi]$ چند ریشه متمایز دارند؟

۶۹

(۲) ۲

(۱) ۳

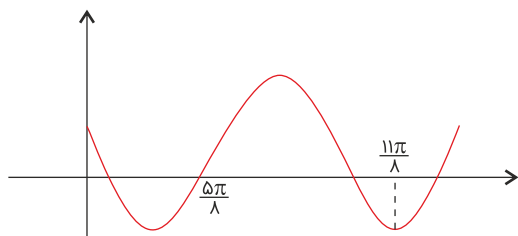
(۴) ۸

(۳) ۴

تالیفی محمدرضا کشاورزی

اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \sin(ax + b)$ به صورت شکل زیر باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۷۰

(۱) $-\frac{\pi}{\lambda}$ (۲) $\frac{\pi}{\lambda}$ (۳) $\frac{5\pi}{\lambda}$ (۴) $-\frac{5\pi}{\lambda}$

تالیفی علی ناری ابیانه

تابع $y = \tan x$ به ازای $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ کدام مقادیر را نمی‌پذیرد؟

۷۱

(۲) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (۱) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ (۴) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ (۳) $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$

تالیفی عزیزالله علی اصغری

معادله $\cos^2 x = 1 + \sqrt{\sin x}$ چند ریشه در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, 3\pi\right]$ دارد؟

۷۲

(۲) ۳

(۱) ۰

(۴) ۲

(۳) ۱

تالیفی محمدرضا کشاورزی



گزینه ۳

۱

می‌دانیم $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$ و $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ پس:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$$

ضمناً داریم: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25} = 0.68$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

گزینه ۲

۲

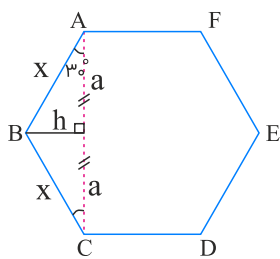
نکته: ضلع شش ضلعی $\times \sqrt{3}$ = قطر کوچک شش ضلعی

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{3} \times \text{ضلع} \Rightarrow \text{ضلع} = \sqrt{2}$$

مثلث متساوی‌الاضلاع $S = 6 \times S$: مساحت شش ضلعی منتظم

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{ضلع})^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = 3\sqrt{3}$$

اثبات نکته: باتوجه به شکل زیر داریم:



$$\cos(30^\circ) = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{x} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{قطر کوچک شش ضلعی: از طرفی} = \underbrace{2 \times a}_{\substack{\text{مثلث} \\ \text{ABC} \\ \text{متساوی‌الساقین است}}} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) = \sqrt{3} \times x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

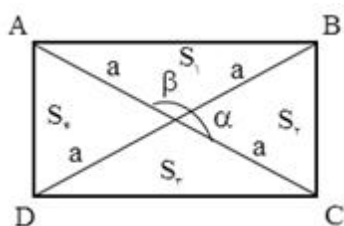
$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر قطرهای مستطیل ABCD را رسم کنیم، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود:



α و β مکمل‌اند پس $\sin \alpha = \sin \beta$ پس:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

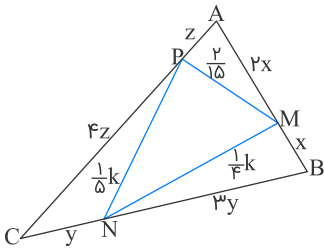
$$S_1 = S_3 = \frac{1}{2} a^2 \sin \beta$$

$$S_2 = S_4 = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$$

$$S_3 = \frac{16}{4} = 4 = \frac{1}{2} a^2 \sin 30^\circ \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow d = 2a = 8$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۶۱

فرض کنیم $S_{\triangle ABC} = k$ ، با توجه به معلومات مسئله، طول پاره‌خط‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم. حال داریم:



$$\frac{S_{\triangle APM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{r}(z)(r_x) \sin \hat{A}}{\frac{1}{r}(\Delta z)(r_x) \sin \hat{A}} = \frac{r}{15} \Rightarrow S_{\triangle APM} = \frac{r}{15}k$$

$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{r}(x)(r_y) \sin \hat{B}}{\frac{1}{r}(r_x)(r_y) \sin \hat{B}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4}k$$

$$\frac{S_{\triangle CPN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{r}(y)(r_z) \sin \hat{C}}{\frac{1}{r}(r_y)(\Delta z) \sin \hat{C}} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{\triangle CPN} = \frac{1}{5}k$$

$$S_{\triangle MNP} = k - \left(\frac{r}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)k = k - \frac{35}{60}k = \frac{5}{12}k$$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد

$$A = r \sin x (3 \sin x + 5 \cos x) = r \sin x \cos x \left(\frac{3 \sin x}{\cos x} + \frac{5 \cos x}{\cos x} \right) = r \sin x \cos x (3 \tan x + 5)$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \text{ می‌دانیم:}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{15}{34} \Rightarrow A = r \times \frac{15}{34} \left(3 \times \frac{3}{5} + 5 \right) = \frac{3 \times 15}{117} \times \frac{34}{51} = 6$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

$$\tan^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \tan^2 x + \cot^2 x + 1 = (\tan x + \cot x)^2 - 2 + 1 = (\tan x + \cot x)^2 - 1$$

می‌دانیم $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ است؛ پس:

$$(\tan x + \cot x)^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 1 \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ است. حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9}$$

با جایگذاری در (۱) داریم:

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} - 1 = \frac{81}{16} - 1 = \frac{81 - 16}{16} = \frac{65}{16}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$\frac{\sin(3 \times 18^\circ - 15^\circ) + \cos(18^\circ + 15^\circ)}{2 \sin(90^\circ + 15^\circ) - \cos(27^\circ + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{2 \cos 15^\circ - \sin 15^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 15^\circ - 1}{2 - \tan 15^\circ} = \frac{0/2 - 1}{2 - 0/2} = \frac{-0/1}{1/1} = -\frac{4}{9}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

در فرض تست مقدار $\tan 20^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویه 20° می‌نویسیم. عبارت نهایی را بر حسب $\tan 20^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ} = \frac{\sin(270^\circ - 20^\circ) + \sin(720^\circ - 20^\circ)}{\cos(540^\circ + 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{-\cos 20^\circ + \sin(-20^\circ)}{\cos(180^\circ + 20^\circ) - (-\sin 20^\circ)} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

$$\div \cos 20^\circ \rightarrow A = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{7}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

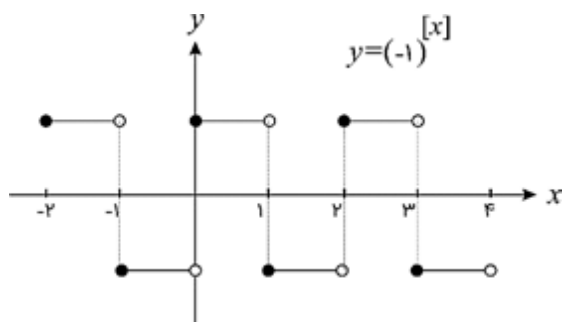
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

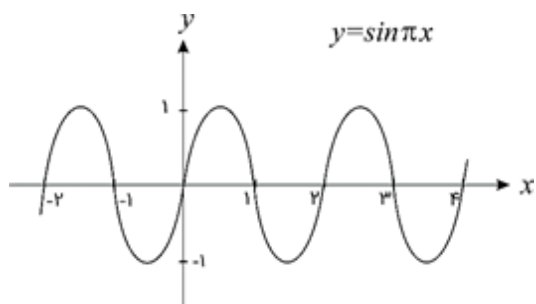
الف) می‌دانیم به ازای هر x دلخواه $|f(x)| \geq 0$ است.
 ب) $xy \geq 0$ همواره برقرار است هرگاه، x و y در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشد.

گام دوم

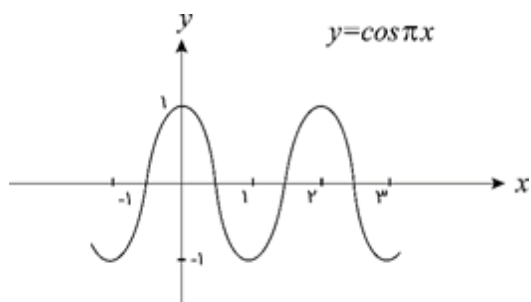
باتوجه به گام اول، نامساوی $(-1)^{[x]}f(x) \geq 0$ زمانی برقرار است که دو تابع $y = f(x)$ و $y = (-1)^{[x]}$ در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشند. ابتدا نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:



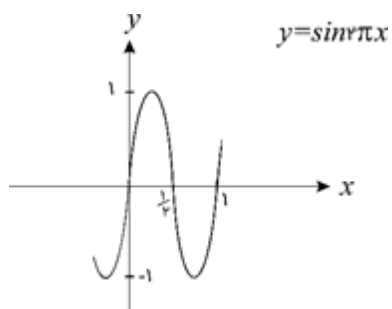
اکنون با رسم نمودار هریک از گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدامیک از آن‌ها در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است.
 گزینه ۱:



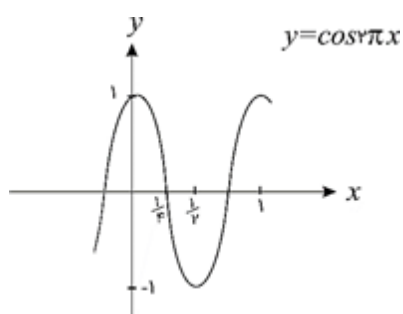
همان‌طور که مشاهده می‌شود، این تابع در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است، پس این گزینه جواب سؤال خواهد بود.
 گزینه ۲:



باتوجه به نمودار فوق، این تابع در بازه‌های زیادی از جمله در بازه $(\frac{1}{\pi}, 1)$ با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت نیست.



مقدار تابع در بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ منفی است در حالی که تابع $y = (-1)^{[x]}$ در این بازه دارای علامت مثبت است.
گزینه ۴:



با مقایسه نمودار بالا با نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ این گزینه هم جواب سؤال نیست.

گزینه ۱

۱۱

$$\frac{3 \sin 115^\circ - 2 \cos 295^\circ}{\cos 115^\circ + \cos 335^\circ} = \frac{3 \sin(180^\circ - 25^\circ) - 2 \cos(270^\circ + 25^\circ)}{\cos(90^\circ + 25^\circ) + \cos(360^\circ - 25^\circ)}$$

$$= \frac{3 \sin 25^\circ - 2 \sin 25^\circ}{-\sin 25^\circ + \cos 25^\circ} = \frac{\sin 25^\circ}{-\sin 25^\circ + \cos 25^\circ} = \frac{\tan 25^\circ}{-\tan 25^\circ + 1}$$

$$\xrightarrow{\tan 25^\circ = 0/4} \frac{0/4}{-0/4 + 1} = \frac{0/4}{0/6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

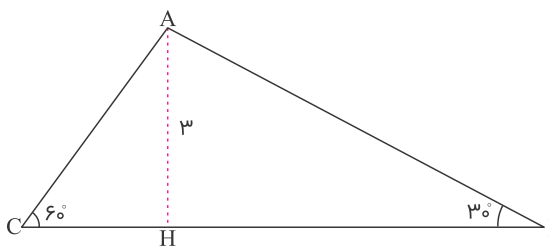
$$\frac{3\pi}{14} + \frac{11\pi}{14} = \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} = 0$$

$$\frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} = \pi \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} = 0$$

$$\cos \frac{7\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} = 0$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶



$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\hat{C} = 2\hat{B}} 2\hat{B} + \hat{B} = \frac{\pi}{2}$$

$$3\hat{B} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{3}$$

$$\triangle ACH : \sin 6^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{3}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle ABH : \sin 3^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 6$$

$$CB = CH + HB = AC \cos 6^\circ + AB \cos 3^\circ$$

$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$A = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 15^\circ\right) + 2 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4} - 15^\circ\right)}{3 \sin(\pi + 15^\circ) + \cos(4\pi - 15^\circ)} = \frac{-\cos 15^\circ + 2 \sin 15^\circ}{-3 \sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$$

$$\frac{-\cos 15^\circ + 2 \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{-1 + 2 \tan 15^\circ}{-3 \tan 15^\circ + 1} = \frac{-1 + 2a}{-3a + 1} = \frac{2a - 1}{1 - 3a}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۶

اگر روی دایره به اندازه 2π رادیان بچرخیم، مساحتی برابر با πr^2 به دست می‌آید. با دورانی به اندازه x مساحت قطاع OBC (اسلایس پیتزا) با یک تناسب ساده به دست می‌آید:

$$\frac{2\pi}{x} = \frac{\pi r^2}{?} \Rightarrow ? = \frac{x \pi r^2}{2\pi} = \frac{1}{2} x r^2$$

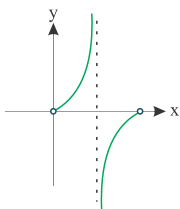
پس مساحت قطاع OBC به صورت $S_{OBC} = \frac{1}{2} x (r=1)^2 = \frac{x}{2}$ است. از مساحت این قطاع مساحت مثلث OBC را کسر می‌کنیم.

$$S_{OBC} = \frac{(AC)(OB)}{2} = \frac{(\sin x)(1)}{2}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{OBC} \text{ قطاع} - S_{OBC} \Delta = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}(x - \sin x)$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$f(x) = \frac{\sin^x x (1 + \cot^x x)}{\cos x} = \frac{\sin^x x \left(\frac{1}{\sin^x x}\right)}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$



تالیفی محمدرضا کشاورزی

روش اول: با توجه به رابطه $\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$ داریم:

$$2 \tan \lambda_0 + \tan \varphi_0 = 2 \cot \lambda_0 + \tan \varphi_0 = (\cot \varphi_0 - \tan \varphi_0) + \tan \varphi_0 = \cot \varphi_0 = \tan \omega_0$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} 2 \tan \lambda_0 + \tan \varphi_0 &= 2 \cot \lambda_0 + \tan \varphi_0 = \frac{2 \cos \lambda_0}{\sin \lambda_0} + \tan \varphi_0 \\ &= \frac{2 (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0)}{2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0} + \tan \varphi_0 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0} - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0} + \tan \varphi_0 \\ &= \cot \varphi_0 - \tan \varphi_0 + \tan \varphi_0 = \cot \varphi_0 = \tan \omega_0 \end{aligned}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۵

$$\tan\left(x + \frac{\omega\pi}{\nu}\right) = -\cot x, \quad \cot(\pi - x) = -\cot x$$

$$\sin(3\pi - x) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\nu\pi}{\nu} + x\right) = -\cos x, \quad \sin \frac{\omega\pi}{\nu} = \frac{1}{\nu}$$

$$2 \tan\left(x + \frac{\omega\pi}{\nu}\right) \cot(\pi - x) + \frac{\sin^2(3\pi - x)}{\sin^2\left(\frac{\nu\pi}{\nu} + x\right)} = \nu \sin \frac{\omega\pi}{\nu}$$

$$\Rightarrow 2(-\cot x)(-\cot x) + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \nu$$

$$\Rightarrow 2 \cot^2 x + \tan^2 x = \nu \xrightarrow{\tan^2 x = t} \frac{\nu}{t} + t - \nu = 0 \Rightarrow \frac{\nu + t^2 - \nu t}{t} = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - \nu t + \nu = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - \nu) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } \nu$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm 1 \text{ یا } \pm \sqrt{\nu}$$

پس $\tan x = \pm 1$ یا $\pm \sqrt{\nu}$ در بازه $\left(-\frac{\pi}{\nu}, \frac{\pi}{\nu}\right)$ دارای ۴ جواب است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

باتوجه به اینکه حاصل جمع یک عدد گویا با گنگ، قطعاً گنگ است و حاصل جمع یک عدد گویا با گویا قطعاً گویا است، پس اگر $t \in \mathbb{Q}$ باشد:

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + t \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x + t) = ۲ = f(x)$$

$$x \in \mathbb{Q}' \Rightarrow x + t \in \mathbb{Q}' \Rightarrow f(x + t) = -۳ = f(x)$$

ولی این خاصیت برای اعداد $t \in \mathbb{Q}'$ برقرار نیست، پس تابع متناوب است ولی چون کوچکترین مقدار مثبت t وجود ندارد، پس دوره تناوب ندارد و برای همین فقط گزینه‌های "الف" و "د" صحیح است.

تالیفی محمد درمان

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) + \cos\left(x - \frac{۳\pi}{\lambda}\right) = ۱$$

$$\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - \left(x - \frac{۳\pi}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right)}_{\sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)} = ۱$$

$$\Rightarrow ۲ \sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = ۱ \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{\lambda} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x + \frac{\pi}{\lambda} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲۴} \\ x = ۲k\pi + \frac{۱۷\pi}{۲۴} \end{cases} \xrightarrow{k=۰} x = \frac{\pi}{۲۴}, \frac{۱۷\pi}{۲۴}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} : \frac{\pi}{۲۴} + \frac{۱۷\pi}{۲۴} = \frac{۱۸\pi}{۲۴} = \frac{۳\pi}{۴}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

$$\begin{aligned}
 x + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \left(x - \frac{5\pi}{14}\right) &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow x - \frac{5\pi}{14} &= \left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow \cos^2\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + 2\cos^2\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right) &= 2 \\
 \Rightarrow \cos^2\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) &= 2 \\
 \Rightarrow \cos^2\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + 2 - 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) &= 2 \\
 \Rightarrow \cos^2\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 0 &\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\
 x + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = k\pi + \frac{\pi}{2} &\Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{14}
 \end{aligned}$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

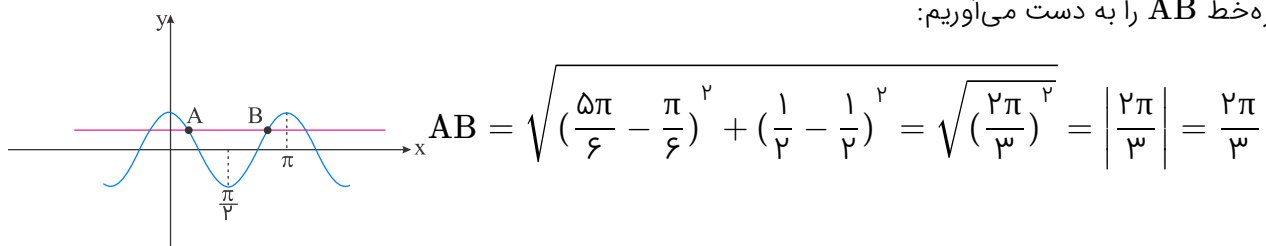
برای پیدا کردن نقاط تلاقی، توابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} &\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

باتوجه به این که دوره تناوب تابع $y = \cos 2x$ برابر π است، پس مقدار x ها باید کمتر از π باشد.

$$A \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$B \xrightarrow{k=1} x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

حالا طول پاره خط AB را به دست می‌آوریم:

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در توابع $y = a \cos(bx) + c$ ، $\max y = |a| + c$ و $\min y = -|a| + c$ است. باتوجه به شکل مقدار مینیمم تابع برابر -۱ است؛ پس داریم:

$$f(x) = b \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + a \Rightarrow \min = -|b| + a = -۱$$

باتوجه به شکل $b > ۰$ است، پس:

$$\min = -b + a = -۱ \Rightarrow a - b = -۱$$

از طرفی باتوجه به شکل $f(\pi) = \frac{۱}{۲}$ پس داریم:

$$f(\pi) = b \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + a = b \cos\left(\frac{۴\pi}{3}\right) + a = \frac{-b}{۲} + a = \frac{۱}{۲}$$

حالا با حل دستگاه مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a - b = -۱ \\ a - \frac{b}{۲} = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲ + ۳ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

در نهایت $f(۰)$ را به دست می‌آوریم:

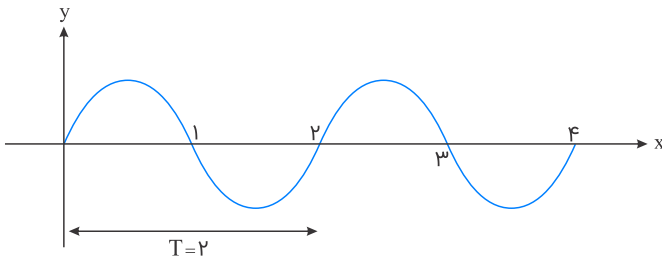
$$f(۰) = ۲ + ۳ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = ۲ + ۳\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۷}{۲}$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sin(\pi x)$$

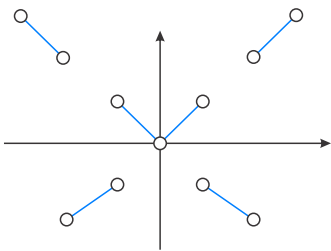
$$f(g(x)) = f(\sin(\pi x)) = \begin{cases} 1 & ; \sin(\pi x) > 0 \\ -1 & ; \sin(\pi x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = xf(g(x)) = \begin{cases} x & ; \sin(\pi x) > 0 \\ -x & ; \sin(\pi x) < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع $y = \sin(\pi x)$ به صورت زیر است:



پس نمودار تابع به صورت زیر می‌شود:



تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

می‌دانیم $\cos(\pi[x]) = (-1)^{[x]}$ در نتیجه:

$$\sin \frac{\pi[x]}{2} = (-1)^{[-x]} + (-1)^{[x]}$$

$$۱) x \in \mathbb{Z} : \sin \frac{\pi[x]}{2} = -۲ \text{ یا } ۲ \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$۲) x \notin \mathbb{Z} : \sin \frac{\pi[x]}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi[x]}{2} = k\pi \Rightarrow [x] = 2k \Rightarrow 2k < x < 2k + 1$$

پس تمام بازه‌های $(0, 1) \cup (2, 3) \cup \dots \cup (1392, 1393)$ ریشه‌های معادله هستند در نتیجه معادله بی‌شمار ریشه دارد.

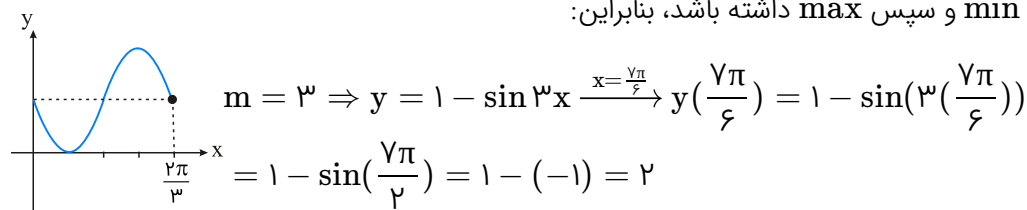
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۴

$$T = \frac{2\pi}{3} \quad \text{طبق نمودار}$$

$$T = \frac{2\pi}{|m|} \quad \text{از روی ضابطه}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

چون باتوجه به نمودار تابع باید ابتدا \min و سپس \max داشته باشد، بنابراین:



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

در ناحیه اول و سوم مثلثاتی مقدار تانژانت کمان بزرگتر از سینوس آن است؛ پس $\tan \alpha > \sin \alpha$ در ربع‌های اول و سوم تماماً برقرار است. حالا برای $\sin \alpha > \cos \alpha$ داریم:

$$\sin \alpha > \cos \alpha \xrightarrow{\substack{\div \cos \alpha \\ \cos \alpha > 0}} \tan \alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{در ربع اول}} \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha > \cos \alpha \xrightarrow{\substack{\div \cos \alpha \\ \cos \alpha < 0}} \tan \alpha < 1 \Rightarrow \alpha < \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$$

جواب را در دایره مثلثاتی نشان می‌دهیم:



تالیفی محمدجواد محسنی

ماکزیمم تابع مقدار $m^2 + m$ و مینیمم آن $-m^2 + m$ است، پس بازه $[-m^2 + m, m^2 + m]$ شامل ۹ عدد صحیح است. تعداد اعداد صحیح این بازه با تعداد اعداد صحیح بازه $[-m^2, m^2]$ برابر است. در این بازه عدد صفر قطعاً حضور دارد و تعداد اعداد مثبت و منفی صحیح آن برابر است، پس در $[0, m^2]$ باید ۴ عدد صحیح حضور داشته باشد؛ به راحتی می‌توان فهمید $2 \leq m < \sqrt{5}$ و فقط گزینه ۲ در آن صدق می‌کند.

تالیفی محمدجواد محسنی

ابتدا تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$y = 4 \sin x \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}_{-\cos x} + k = -4 \sin x \cos x + k$$

می‌دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، پس داریم:

$$y = -4 \sin x \cos x + k = -2 \underbrace{(2 \sin x \cos x)}_{\sin 2x} + k = -2 \sin 2x + k$$

در تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، $\max = |a| + c$ و $\min = -|a| + c$ است.

$$y = -2 \sin 2x + k \Rightarrow \begin{cases} \max = |-2| + k = 2 + k \\ \min = -|-2| + k = -2 + k \end{cases}$$

باتوجه به این که ماکزیمم دو برابر مینیمم است، داریم:

$$2 + k = 2(-2 + k) = -4 + 2k \Rightarrow k = 6$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$f(x) = \tan x \xrightarrow[\text{منقبض}]{x \rightarrow ax} f(x) = \tan ax$$

$$\xrightarrow[\text{انتقال به سمت راست}]{x \rightarrow x-b} f(x) = \tan a(x-b) = \tan(ax-ab)$$

باتوجه به اینکه تابع اکیداً صعودی با برد \mathbb{R} است، پس یک دوره تناوب است؛ یعنی $T = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3}$ و دوره تناوب $\tan ax$ برابر است با:

$$\tan ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = +3 \\ a = -3 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

و باتوجه به بازه $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ اولین جایی هست که مخرج تابع $f(x) = \tan(ax-ab)$ صفر می‌شود؛ یعنی:

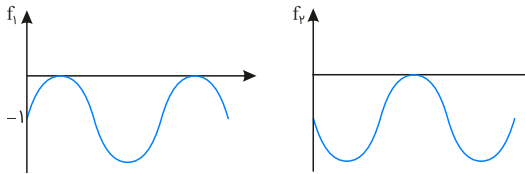
$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \cos(3x-3b) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} - 3b = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{اولین ریشه } \cos} \Rightarrow b = \frac{\pi}{12}$$

$$a \times b = 3 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

تالیفی محمد درمان

از شکل معلوم است دوره تناوب تابع $T = ۴$ است، پس $\frac{۲\pi}{|\pi b|} = ۴$ ؛ بنابراین $b = \pm \frac{1}{۲}$ است. چون تابع بر محور x مماس است، حداکثر مقدار آن صفر است، پس $a = -1$ است، چون حداکثر مقدار سینوس یک است. حال هر دو تابع $f_1(x) = -1 + \sin(\frac{\pi}{۲}x)$ و $f_2(x) = -1 + \sin(-\frac{\pi}{۲}x)$ را رسم می‌کنیم:

از نمودار معلوم است تابع $f(x) = -1 + \sin(-\frac{\pi}{۲}x)$ صحیح است؛ پس:



$$f\left(\frac{۲۵}{۳}\right) = -1 + \sin\left(-\frac{۲۵\pi}{۶}\right) = -1 - \sin\left(\frac{۲۵\pi}{۶}\right) = -1 - \sin\left(۴\pi + \frac{\pi}{۶}\right)$$

$$= -1 - \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -1 - \frac{1}{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

ابتدا معادله مثلثاتی داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$۲ \cos ۲x = \cot x (۲ \sin x + \tan x) \Rightarrow ۲(۲ \cos^2 x - 1) = ۲ \cot x \sin x + \cot x \tan x$$

$$\Rightarrow ۴ \cos^2 x - ۲ = ۲ \cos x + 1 \Rightarrow ۴ \cos^2 x - ۲ \cos x - ۳ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۴ + \sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{۴ + ۸}{۸} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \cos x = \frac{۳}{۲} \text{ غ.ق ق} \\ \cos x = \frac{۴ - \sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{۴ - ۸}{۸} = -\frac{۴}{۸} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

نکته: تابع $y = \tan x$ دارای دوره تناوب π است و باتوجه به اینکه $y = \tan ax$ دچار انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{a}$ می‌شود، در نتیجه دوره تناوب $y = \tan ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

نکته: بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع تناوبتاً اکیداً یکنوا است، همان طول دوره تناوب است.

در این سؤال طول بازه برابر $\frac{1}{۲\sqrt{b}} - \left(-\frac{1}{۲\sqrt{b}}\right)$ یعنی $\frac{1}{\sqrt{b}}$ است؛ پس:

$$\frac{\pi}{b} = \frac{1}{\sqrt{b}} \Rightarrow \sqrt{b} = \pi \Rightarrow b = \pi^2$$

تالیفی محمدجواد محسنی

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x = 3 \quad (*) \Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2}{3}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (**) \text{ می‌دانیم}$$

$$\sin 4x = \frac{2 \tan 2x}{1 + \tan^2 2x} = \frac{2 \left(\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}} = \frac{12}{13}$$

اثبات فرمول‌ها:

$$(*) : \cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \cot 2x$$

$$(**) : \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned}\sin^2 x - \cos^2 x &= (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از فرمول کمان‌های 2α داریم:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$$

بنابراین معادله مثلثاتی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$2 \sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازه $[0, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x = \frac{7\pi}{12}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

بنابراین مجموع تمام جواب‌های معادله در بازه $[0, \pi]$ برابر است با:

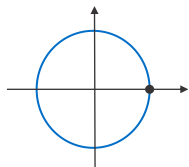
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi + \frac{18\pi}{12} = 2\pi + \frac{6\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

می‌دانیم: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos^2 x - 1) = 1 \Rightarrow 2\cos^3 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + 2\cos x + 1) = 0$$

$$1) \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$



$$2) 2\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

$$y = a \cos bx + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{f} \Rightarrow |b| = \lambda \Rightarrow b = \lambda$$

$$y = a \cos \lambda x + c \Rightarrow \begin{cases} y_{\max} = |a| + c \\ y_{\min} = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow |a| + c - |a| + c = 12 \Rightarrow c = 6$$

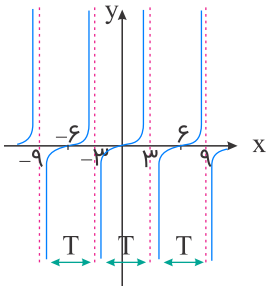
باتوجه به گزینه‌ها، گزینه ۲ جواب صحیح است.

تالیفی محمدرضا کشاورزی

نکته: دوره تناوب تابع $y = a \tan bx + c$ برابر است با: $T = \frac{\pi}{|b|}$
 دوره تناوب تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = 6$$

سپس تابع $y = \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل رسم‌شده، حداکثر مقدار a برابر ۹ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

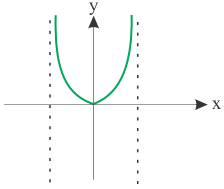
$$\begin{aligned} \sin^2 2x - \sin^2 4x &= \cos^2 4x - \cos^2 2x \\ \Rightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x &= \cos^2 4x + \sin^2 4x \\ \Rightarrow (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x \\ &= (\cos^2 4x + \sin^2 4x) - 2\sin^2 4x \cos^2 4x \\ \Rightarrow \sin^2 2x \cos^2 2x &= \sin^2 4x \cos^2 4x \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 4x &= \frac{1}{4} \sin^2 8x \Rightarrow \sin^2 4x = \sin^2 8x \\ \Rightarrow \frac{1 - \cos 8x}{2} &= \frac{1 - \cos 16x}{2} \Rightarrow \cos 8x = \cos 16x \\ \Rightarrow \begin{cases} 16x = 2k\pi + 8x \Rightarrow 8x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \\ 16x = 2k\pi - 8x \Rightarrow 24x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{12} \end{cases} \end{aligned}$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

$$۲x^۲ - (k^۲ - ۴)x + k = ۰$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{k^۲ - ۴}{۲}$$

تابع $y = |\tan x|$ را در بازه $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ رسم می‌کنیم:



فقط خط $y = ۰$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس:

$$y = \frac{\alpha + \beta}{۲} = \frac{k^۲ - ۴}{۴} = ۰ \Rightarrow k = \pm ۲$$

$$k = ۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \Rightarrow \text{غ.ق.ق}$$

$$k = -۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow \text{دو ریشه} \Rightarrow \text{ق.ق}$$

باتوجه به شکل، نقطه A دومین ماکزیمم با طول مثبت تابع ذکر شده است. اولین ماکزیمم این تابع وقتی است که کمان سینوس برابر $\frac{\pi}{۲}$ و دومین آن زمانی است که:

$$۲x - \frac{\pi}{۶} = ۲\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۲x = ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow A\left(\frac{۴\pi}{۳}, ۴\right)$$

برای تعیین نقطه B، به سادگی باید معادله خط افقی رسم شده را پیدا کنیم. کافی است قرار دهیم $x = ۰$:

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۱ + ۳ \sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = ۱ - \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}$$

$$۱ + ۳ \sin\left(۲x - \frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin\left(۲x - \frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x - \frac{\pi}{۶} = -\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۰ \\ ۲x - \frac{\pi}{۶} = \frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳} \\ ۲x - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶} \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

مختصات نقطه B برابر است با: $(\pi, -\frac{۱}{۲})$ و طول AC برابر است با: $۴ + \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۲}$

طول BC برابر است با $\frac{۴\pi}{۳} - \pi = \frac{\pi}{۳}$ ، پس:

$$S = \frac{۱}{۲} AC \cdot BC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۲} \times \frac{\pi}{۳} = \frac{۳\pi}{۴}$$

تالیفی علی ناری ابیانه

$$\frac{\pi + ۲\pi x}{۲} \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \pi x \neq k\pi \Rightarrow x \neq k (k \in \mathbb{Z}) \quad (۱)$$

$$۴ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow (-۲, ۲) - \{-۱, ۰, ۱\}$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

نکته:

$$\sin^2 x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\begin{cases} f(x) = \tan x \\ g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \sqrt{\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x}$$

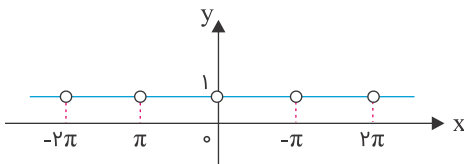
$$\Rightarrow \sin^2 x \geq 0 \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sin 2x > 0$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶

این تابع در نقاطی که $\sin x$ صفر می‌شود، تعریف نشده است و در سایر نقاط برابر ۱ می‌باشد.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} = \begin{cases} 1 & ; x \neq k\pi \\ \text{تعریف نشده} & ; x = k\pi \end{cases}$$

با رسم نمودار این تابع، ملاحظه می‌کنید که در هر π واحد، شکل تکرار شده است؛ پس دوره تناوب π می‌باشد.

تالیفی سیروس نصیری

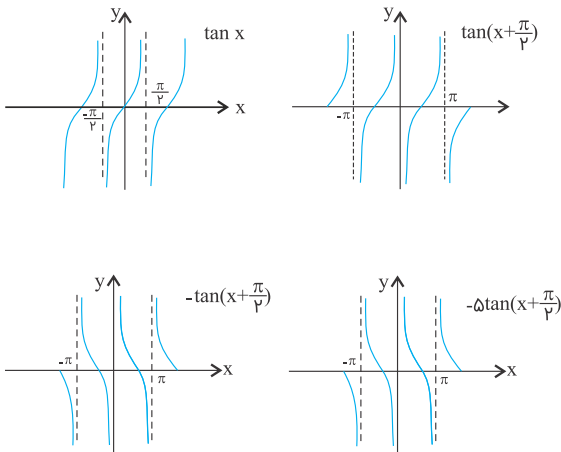
$$\begin{aligned} & \frac{\cot(-\alpha) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)}{\frac{1}{2}(\cos^2 \alpha + 1)} \\ &= \frac{-\cot \alpha \cdot (-\tan \alpha) + (-\cos \alpha) \cdot (-\sin \alpha) + (-\cos \alpha) \cdot (\sin \alpha)}{\frac{1}{2}(\cos^2 \alpha)} \\ &\Rightarrow \frac{1 + \cancel{\sin \alpha \cos \alpha} - \cancel{\sin \alpha \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \end{aligned}$$

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

در مثلث رسم شده داریم:

$$\tan x = \frac{\omega}{y} \Rightarrow y \cdot \tan x = \omega \Rightarrow y = \frac{\omega}{\tan x} \xrightarrow{\frac{1}{\tan x} = \cot x} y = \omega \cot x$$

باتوجه به اینکه $-\tan\left(\frac{\pi}{\nu} + x\right) = \cot x$ است، برای رسم $\cot x$ باید نمودار تانژانت را $\frac{\pi}{\nu}$ سمت چپ ببریم و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در $x = 0$ ، مقدار تابع برابر است با $y = 3$ ؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a = 3$. به سادگی نتیجه می شود که به ازای $x = \frac{25}{3}$ ، مقدار تابع برابر است با $y = 2/5$.

$$T = \frac{2\pi}{|\pi b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{\nu} \Rightarrow b = -\frac{1}{\nu} \checkmark, b = \frac{1}{\nu} \times, y = 3 + \sin\left(\frac{-\pi}{\nu}x\right)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{25}{3}} y = 3 + \sin\left(\frac{-25}{\nu}\pi\right) \Rightarrow y = 3 + \sin\left(-4\pi - \frac{\pi}{\nu}\right) \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{\nu} = \frac{5}{\nu} = 2/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

راه حل اول:

ابتدا حاصل $1 + \tan^2 \theta$ و $1 + \cot^2 \theta$ را بر حسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ به دست می‌آوریم:

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

می‌دانیم $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ و $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ است پس:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^4 \theta \sin^4 \theta} = \frac{1}{(\cos \theta \sin \theta)^4} \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

بنابراین:

$$\frac{1}{(\cos \theta \sin \theta)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta$$

راه حل دوم: (عددگذاری)

در صورتی که $\theta = \frac{\pi}{4}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{(1 + (\tan \frac{\pi}{4})^2)(1 + (\cot \frac{\pi}{4})^2)}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{(1+1)(1+1)}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 16$$

با جایگذاری $\theta = \frac{\pi}{4}$ در گزینه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تنها در گزینه "۴" صدق می‌کند:

$$16 \sin^{-4} 2\theta = 16 \left(\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)\right)^{-4} = 16$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \cos^p \alpha - \sin^p \alpha} &= \sqrt{1 - \underbrace{\sin^p \alpha}_{\cos^p \alpha} - \cos^p \alpha} = \sqrt{\cos^p \alpha (1 - \cos^p \alpha)} \\ &= \sqrt{\cos^p \alpha \cdot \sin^p \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^p} = |\sin \alpha \cdot \cos \alpha| \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}, \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0 : \sqrt{1 - \cos^p \alpha - \sin^p \alpha} &= -(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)\end{aligned}$$

می‌دانیم: $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$$\Rightarrow -\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \times a = -\frac{a}{2}$$

تالیفی الهام مجد

$$\frac{f(\cos^p x)}{f(\sin^p x)} = \frac{\mu \cos^p x}{\mu \sin^p x} = \mu^{\cos^p x - \sin^p x} = \mu^{\cos 2x} \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = \mu^{\cos \frac{\pi}{\lambda}} = \mu^{\frac{\sqrt{p}}{p}}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع در بازهٔ بین $\frac{\pi}{18}$ و $\frac{13\pi}{18}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.
 ب) دوره تناوب تابع $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.
 ج) داریم:

$$y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) = a + 2 \sin bx$$

باتوجه به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینهٔ نمودار رسم شده خواهد بود.
 د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{18}, 0\right)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

همچنین باتوجه به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \xrightarrow{b > 0} b = 3$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$0 = a - 2 \cos\left(3 \times \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{2}\right) = a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = a + 2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

$$f(x) = 2 \sin^2 x - \sin x = 2 \left(\sin^2 x - \frac{1}{2} \sin x \right)$$

$$f(x) = 2 \left(\sin^2 x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right)$$

$$f(x) = 2 \left(\left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{-\frac{1}{4}} -\frac{5}{4} \leq \sin x - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{25}{16} \Rightarrow 0 \leq 2 \left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{25}{8}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{8}} -\frac{1}{8} \leq f(x) \leq \frac{25}{8}$$

تالیفی سیروس نصیری

$$\overbrace{0 < x < 1 \vee 2 \leq x < 3 \vee 4 \leq x < 5}^I \Rightarrow I \cap II : \emptyset$$

$$\xrightarrow{\cos[x]\pi=1} \cos x = 1 \Rightarrow \underbrace{x = 2k\pi}_{II}$$

$$\overbrace{1 \leq x < 2 \vee 3 \leq x < 4 \vee 5 \leq x < 6}^I \Rightarrow I \cap II : \{\pi\}$$

$$\xrightarrow{\cos[x]\pi=-1} \cos x = -1 \Rightarrow \underbrace{x = (2k+1)\pi}_{II}$$

تالیفی محمد درمان

نقطه A دومین مینیمم با طول منفی است. تابع f وقتی مینیمم است که $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 1$ باشد. اگر قرار دهیم

$$x_A = -\frac{9\pi}{8}, \text{ طول نقطه A محاسبه می‌شود: } 2x - \frac{\pi}{4} = -(2\pi + \frac{\pi}{4})$$

می دانیم دوره تناوب تابع f، T = π است. دقت کنید نقطه B به اندازه ۴/۵T از A جلوتر است، یعنی:

$$x_B = -\frac{9\pi}{8} + \frac{9\pi}{4} = \frac{27\pi}{8}$$

مختصات نقاط A و B: $A(-\frac{9\pi}{8}, -\frac{3}{4})$ و $B(\frac{27\pi}{8}, \frac{3}{4})$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{3}{4})}{\frac{27\pi}{8} - (-\frac{9\pi}{8})} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{36\pi}{8}} = \frac{3}{9\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

تالیفی علی ناری ابیانه

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطه $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

باتوجه به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{3}{2}$ ، مینیمم تابع $\frac{1}{2}$ و دوره تناوب π است. پس:

$$\begin{cases} 1 + \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \\ 1 - \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

باتوجه به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{2}$ و $2b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته

$$\text{جواب } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ دارد، در نتیجه } a + b = 2 \text{ یا } a + b = -2 \text{ صحیح است.}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$$\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x} \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x(2 \sin 2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

k	x
۰	$\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}$
۱	$\frac{11\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$

پس معادله ۴ جواب دارد.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= \frac{5}{8} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x &= \frac{5}{8} \Rightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x = -\frac{3}{8} \\ \Rightarrow \sin^2 2x &= \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

دو دور دایره مثلثاتی $0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 4\pi$

تابع \sin در هر دور دایره مثلثاتی دو بار $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ و دو بار $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؛ بنابراین \sin در یک دور چهار جواب دارد. پس در دو دور دایره مثلثاتی، هشت جواب دارد.

بنابراین $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ هشت جواب دارد.

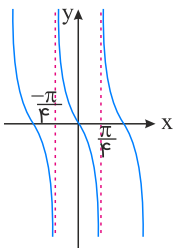
تالیفی محمدرضا کشاورزی

$$\begin{aligned} \text{می دانیم: } \cot x - \tan x &= 2 \cot 2x \\ \Rightarrow \frac{2}{\tan x - \cot x} &= \frac{2}{-2 \cot 2x} = \frac{-1}{\cot 2x} = -\tan 2x \end{aligned}$$

دوره تناوب $y = -\tan 2x$ برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$$

برای رسم تابع $y = -\tan 2x$ ابتدا تابع $\tan 2x$ را رسم می‌کنیم و سپس نسبت به محور y قرینه می‌کنیم.

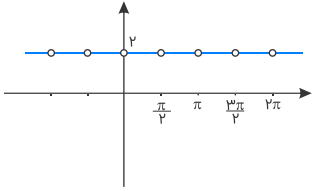


تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$y = (\tan x + \cot x)^{\nu} - \tan^{\nu} x - \cot^{\nu} x$$

$$= \tan^{\nu} x + \cot^{\nu} x + \nu \tan x \cot x - \tan^{\nu} x - \cot^{\nu} x = \nu \tan x \cot x = \nu$$

$$D_y : \begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{\nu}, k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\nu}$$



تالیفی محمدرضا کشاورزی

$$y = \tan \lambda x + \cot \lambda x = \frac{\sin \lambda x}{\cos \lambda x} + \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda x} = \frac{\sin^2 \lambda x + \cos^2 \lambda x}{\sin \lambda x \cos \lambda x}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\nu} \sin \lambda x} = \frac{\nu}{\sin \lambda x} \Rightarrow T_1 = \frac{\nu \pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\frac{\lambda}{\nu}}$$

$$y = \tan \lambda x - \cot \lambda x = \frac{\sin \lambda x}{\cos \lambda x} - \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda x} = \frac{\sin^2 \lambda x - \cos^2 \lambda x}{\cos \lambda x \sin \lambda x}$$

$$= \frac{-(\cos^2 \lambda x - \sin^2 \lambda x)}{\frac{1}{\nu} \sin \lambda x} = \frac{-\cos \lambda x}{\frac{1}{\nu} \sin \lambda x} = -\nu \cot \lambda x = \frac{-\nu}{\tan \lambda x} \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{\pi}{\frac{\lambda}{\nu}}}{\frac{\pi}{\lambda}} \Rightarrow T_1 = \nu T_2$$

نکته: تابع $y = a \sin bx + c$ دارای دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکته: تابع $y = a \tan bx + c$ دارای دوره تناوب $\frac{\pi}{|b|}$ است.

تالیفی محمدرضا کشاورزی

$$۴ \sin^۲ \alpha + \lambda \cos \alpha - ۷ = ۰ \Rightarrow ۴(1 - \cos^۲ \alpha) + \lambda \cos \alpha - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴ - ۴ \cos^۲ \alpha + \lambda \cos \alpha - ۷ = ۰ \Rightarrow ۴ \cos^۲ \alpha - \lambda \cos \alpha + ۳ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - \lambda x + ۳ = ۰$$

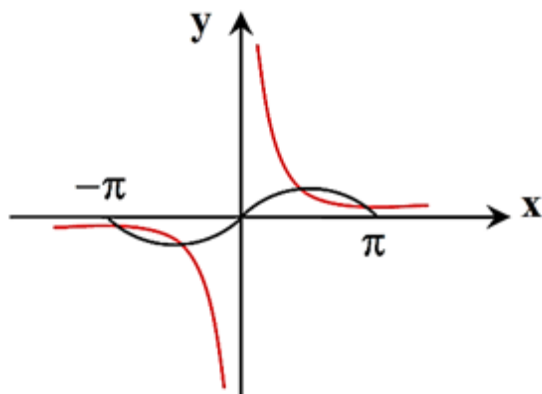
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 48}}{8} = \frac{\lambda \pm ۴}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{۲} & \checkmark \\ x = \frac{3}{۲} & \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}; k \in \mathbb{Z}$$

تالیفی محمدرضا محمدهاشمی

$$x \sin x - 1 = ۰ \Rightarrow x \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{x}$$

کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{x}$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست بیاوریم. برای این منظور هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



باتوجه به شکل، واضح است که معادله داده شده در بازه $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ ریشه حقیقی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

اگر $x \in [-1, 1]$ ، آنگاه:

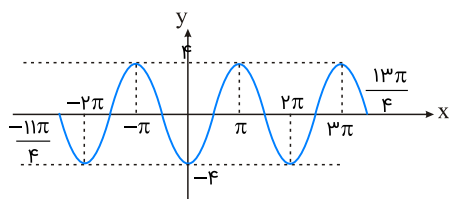
$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3\pi \leq -3\pi x \leq 3\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{\pi}{4} + 3\pi \Rightarrow \frac{-11\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{13\pi}{4}$$

حال با در نظر گرفتن $\theta = \frac{\pi}{4} - 3\pi x$ ، ضابطه تابع مفروض سؤال، به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -4 \cos \theta ; \quad \frac{-11\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{13\pi}{4}$$

که شکل آن به صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta = -\pi$ ، $\theta = \pi$ و $\theta = 3\pi$ ، بیشترین مقدار خود را دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

ابتدا معادله مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x) = 0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازه $[0, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases}$$

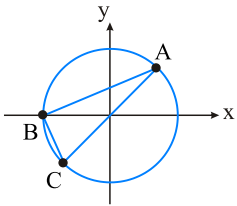
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x = 0$ و $x = 2\pi$ عبارت $1 - \cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\widehat{AC} = \pi \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$$



بنابراین مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin x + \cos x) = \sin^2 x$$

می‌دانیم $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin^2 x$ است؛ پس:

$$f(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1$$

اگر $\sin x + \cos x = t$ فرض کنیم داریم:

$$f(t) = t^2 - 1$$

مقدار $f\left(\frac{1}{3}\right)$ را می‌خواهیم:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{8}{9}$$

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مساحت دوزنقه برابر است با:

$$\frac{\text{مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$$

ارتفاع دوزنقه داده شده برابر با مقدار ماکسیمم تابع است که همان a می شود؛ توجه کنید a می تواند هر علامتی داشته باشد، چراکه اگر مثبت باشد که ایرادی نیست و اگر منفی هم باشد منفی داخل کمان به بیرون سینوس هدایت می شود و با منفی خود a از بین می رود؛ فعلاً فرض می گیریم a مثبت است.

اما برای قاعده ها مقدار AB برابر با T (دوره تناوب) و CD برابر با $\frac{T}{2}$ است. از طرفی:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{a}} = 2\pi a \Rightarrow S = \frac{a \times (2\pi a + \pi a)}{2} = \frac{3\pi a^2}{2} = 6\pi \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

که مقدار -2 در گزینه ها حضور دارد.

تالیفی محمدجواد محسنی

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = a + b \sin x$$

مقدار تابع در $\frac{5\pi}{6}$ - صفر است. پس:

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 2a$$

بنابراین: $y = a + 2a \sin x$. به علاوه با توجه به اینکه $y(0) > 0$ می باشد، پس $a > 0$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می دهد که $\sin x = 1$ باشد.

$$\max = 3 \Rightarrow a + 2a = 3 \Rightarrow a = 1$$

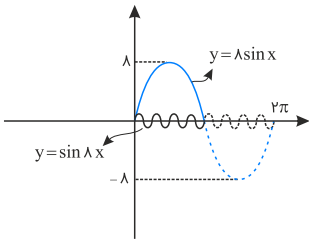
$$\Rightarrow y = 1 + 2 \sin x$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 4x \cos 4x = 2 \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin 8x = 2 \sin x \Rightarrow \sin 8x = 8 \sin x$$



در نقاط $x = \pi$ و $x = 0$ برخورد دارند.

تالیفی محمدرضا کشاورزی

با دقت در شکل می‌توان پی برد که فاصله دو نقطه با طول‌های $\frac{11\pi}{\lambda}$ و $\frac{5\pi}{\lambda}$ معادل $\frac{3T}{4}$ است.

$$\frac{3T}{4} = \frac{11\pi}{\lambda} - \frac{5\pi}{\lambda} = \frac{6\pi}{\lambda} \Rightarrow T = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2$$

چون نمودار بعد از $x = \pi$ نزولی است، علامت a حتماً منفی است: $a = -2$ یعنی:

$$f(x) = -\sin(2x - b) \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow -\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{\lambda} - b\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{\lambda} - b\right) = 0$$

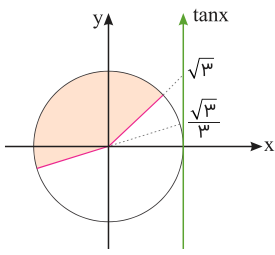
$x = \frac{5\pi}{\lambda}$ دومین صفر نمودار f با طول مثبت است، پس:

$$\frac{5\pi}{\lambda} - b = \pi \Rightarrow b = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{\pi}{\lambda}}{-2} = \frac{-\pi}{2\lambda} \text{ و در آخر داریم:}$$

تالیفی علی ناری ابیانه

از روی دایره مثلثاتی واضح است که مقادیر $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ را نمی‌پذیرد.



تالیفی عزیزالله علی اصغری

$$\begin{aligned} 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{\sin x} \geq 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \\ \Rightarrow x = \pi, 2\pi, 3\pi$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰

۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰

۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰

۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰

۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰

۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰

۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰

۷۱
۷۲

۱ اگر $x \geq 0$; $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \\ -\sqrt{-x} \end{cases}$ مشتق اول و دوم تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه $x = 0$ چگونه است؟

- (۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم دارد.
 (۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.
 (۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد.
 (۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲ اختلاف شیب مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۱
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

تالیفی رضا عابدی

۳ اگر برای $x > 0$ داشته باشیم: $f(x) = x + \frac{x}{x + \frac{x}{x + \frac{x}{x + \dots}}}$ مقدار $f'(-2 + 2\sqrt{5})$ کدام است؟

- (۱) $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
 (۳) $1 - \frac{\sqrt{5}}{4}$
 (۴) $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

تالیفی سیدعادل حسینی

۴ اگر $f(x) = 4 + \sqrt{x + 3}$ باشد، مشتق تابع $y = f(x^2 f(x))$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{49}{4}$
 (۲) $\frac{25}{4}$
 (۳) $\frac{49}{24}$
 (۴) $\frac{25}{24}$

تالیفی رضا عابدی

۵ در تابع $f(x) = |x^3 - 3x - 2|$ داریم $f'_+(a) - f'_-(a) = 6b$ اگر $b \in \mathbb{N}$ آنگاه حاصل $f''(a - b)$ کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) -۶
 (۳) ۱۲
 (۴) -۱۲

تالیفی امیر خمسه

۶ اگر $۲x^۲ + x - ۹ = f'(x+۳) + ۶f(x^۳+۳)$ باشد، مقدار $f'(۳)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{۱}{۶}$
 (۲) $\frac{۱}{۶}$
 (۳) $-\frac{۱}{۳}$
 (۴) $\frac{۱}{۳}$

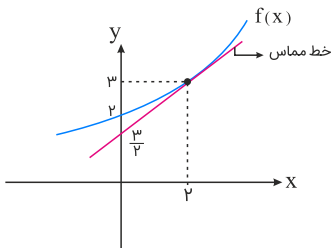
تالیفی رضا عابدی

۷ اگر $۵\sqrt{x} + ۵ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-۳h) - f(x+۲h)}{h}$ باشد، حاصل $f'(۴)$ کدام است؟

- (۱) -۴
 (۲) -۳
 (۳) -۲
 (۴) -۱

تالیفی رضا عابدی

۸ شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f'(x) - ۳f(x)}{x^۲ - ۳x + ۲}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{۹}{۴}$
 (۲) $-\frac{۹}{۴}$
 (۳) $\frac{۹}{۲}$
 (۴) $-\frac{۹}{۲}$

تالیفی علی شهرابی فراهانی

۹ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = (x^۲ - ۴)f(x)$ ، حاصل $g'(۲)$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) -۲
 (۳) -۴
 (۴) موجود نیست.

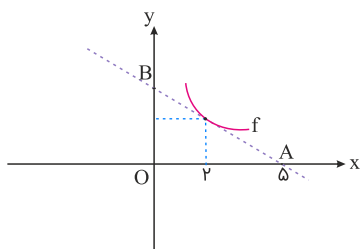
تالیفی محمدرضا توجه

۱۰ مشتق تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^۲ + ۲x - ۸} + \sqrt{x^۲ + ۷x + ۱۲}}{\sqrt{x-۲} + \sqrt{x+۳}}$ در نقطه $x = ۵$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۳}$
 (۲) $\frac{۱}{۶}$
 (۳) $\frac{۱}{۱۲}$
 (۴) $\frac{۱}{۱۸}$

تالیفی رضا عابدی

مساحت مثلث OAB در شکل زیر برابر است با ۵. حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2 - 3h)}{4h}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{10}$
 (۲) $\frac{3}{10}$
 (۳) $\frac{7}{10}$
 (۴) $-\frac{7}{10}$

تالیفی عباس حسینی

حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)g(1) - f(1+h)g(1+h)}{3h^2 - 2h}$ برابر می‌شود با:

- (۱) $-2(fg)'(1)$
 (۲) $-(fg)'(1)$
 (۳) $-\frac{1}{2}(fg)'(1)$
 (۴) $\frac{1}{2}(fg)'(1)$

تالیفی امیر زراندوز

اگر $3f(3) = 4f'(3) = 12$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(3+3h) - f^2(3-2h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
 (۲) ۳۶
 (۳) ۶۰
 (۴) ۱۲۰

تالیفی رضا عابدی

مشتق تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ در $x = 3$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

اگر برای هر عدد حقیقی x ، $f(x) = f(x-2)$ و f مشتق‌پذیر باشد، آنگاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6-2h) - f(2)}{h}$ چند برابر $f'(8)$ است؟

- (۱) -۱
 (۲) -۲
 (۳) -۴
 (۴) -۸

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + 2}$ در نقاطی به طول‌های ۱ و b دارای خط مماس قائم است. مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) ۵
 (۴) -۵

تالیفی علی شهبازی فراهانی

تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{4}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

۱۷

- (۱) $\frac{5}{4}$
 (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{7}{4}$
 (۴) $\frac{1}{4}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

تابع $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ ، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۱۸

- (۱) -1
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) 1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

تابع $f(x) = \left[|x| - \frac{x}{3}\right]$ در چند نقطه از بازه $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ مشتق ناپذیر است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)

۱۹

- (۱) 2
 (۲) 3
 (۳) 4
 (۴) 5

تالیفی سید عادل حسینی

تابع $f(x) = [ax^2 - 2x]$ در بازه $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + 1\right)$ مشتق پذیر است. کدام گزینه می تواند باشد؟

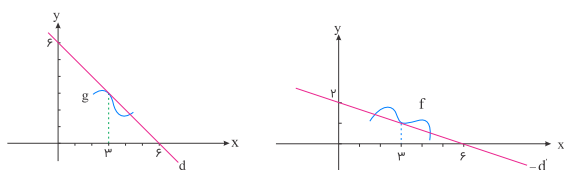
۲۰

- (۱) -1
 (۲) 2
 (۳) 1
 (۴) -2

تالیفی محمد جواد محسنی

در شکل زیر نمودار تابع f و g رسم شده اند، حاصل عبارت $(f \circ g)'(3)$ کدام است؟

۲۱



- (۱) $-\frac{1}{3}$
 (۲) $-\frac{1}{3}$
 (۳) $-\frac{1}{2}$
 (۴) $-\frac{1}{2}$

تالیفی رضا عابدی

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۲۲

- (۱) -2
 (۲) -1
 (۳) 1
 (۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

اگر شیب خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن برابر با ۴ باشد، حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h^2 - 2h}$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) ۲
(۳) -۴
(۴) ۴

تالیفی علی شهبازی فراهانی

اگر f در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ باشد، مشتق تابع $y = f(x - f(x))$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) -۴
(۳) -۱۰
(۴) -۲۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

- (۱) -۸
(۲) -۶
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

تابع $f(x) = (3x^2 + ax + b)[-x]$ در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- (۱) -۷۲
(۲) -۱۴۴
(۳) -۳۶
(۴) -۱۲

تالیفی محمد درمان

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ باشد، مشتق تابع $y = f^3\left(\frac{f^2(x)}{x}\right)$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) -۹
(۲) ۹
(۳) ۶
(۴) -۶

تالیفی علی ناری ابیانه

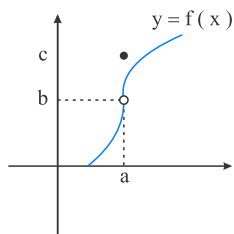
اگر $f(x) = |ax + b| \cdot [1 - x]$ و $f'_+(2) = -4$ باشد، حاصل $f'_-(2)$ کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) -۲
(۳) ۴
(۴) ۲

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

نمودار تابع f مطابق شکل زیر است. کدام گزینه در مورد مشتق‌پذیری تابع $g(x) = (x - a)f(x)$ در $x = a$ درست است؟

۲۹



(۱) $g(x)$ در $x = a$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

(۲) $g(x)$ در $x = a$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است.

(۳) $g(x)$ در $x = a$ پیوسته است و $g'(a) = b$.

(۴) $g(x)$ در $x = a$ پیوسته است و $g'(a) = c$.

تالیفی محمدرضا توجه

تابع $f(x) = (x+1)^2[x^2]$ در بازه (a, b) مشتق‌پذیر است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۳۰

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) $1 + \sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{2}$

تالیفی علی ناری ایبانه

اگر $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{7-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{7-x}$ باشد، حاصل $f'fg + g'f'$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟

۳۱

(۱) -۹

(۲) -۲

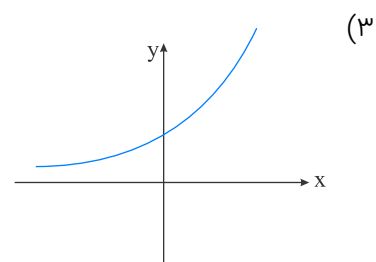
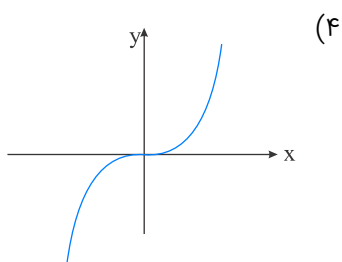
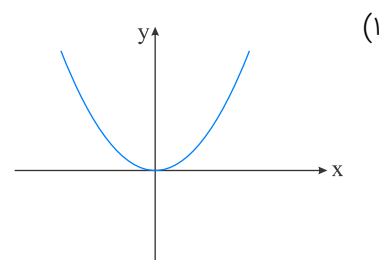
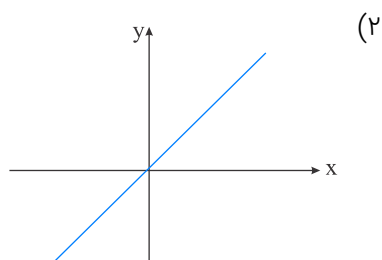
(۳) ۶

(۴) ۳

تالیفی رضا عابدی

تابع f به‌گونه‌ای است که مقدار آن در هر نقطه با مشتق آن برابر است. کدام گزینه می‌تواند نمودار تقریبی این تابع باشد؟

۳۲



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در تابع $f(x) = x^2 - 2x - 2$ ، اگر $f'(a) + f'(b) = 0$ باشد، a و b کدام‌یک از اعداد زیر می‌توانند باشند؟

۳۳

(۱) ۱ و -۱

(۲) ۰ و ۴

(۳) $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{2}$

(۴) $1 - \sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$

تالیفی علی شهرابی فراهانی

۳۴ اگر $f'(3) = 4$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-5h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) -۱۲
(۳) ۲۸
(۴) -۲۸

تالیفی رضا عابدی

۳۵ تابع $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3 + [x]^2}}$ در چند نقطه $(-2, 2)$ مشتق‌پذیر نیست؟

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

تالیفی محمد درمان

۳۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، حاصل $f'g - g'f$ در نقطه $x = 5$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

تالیفی رضا عابدی

۳۷ به موازات خطی که نقاط مشتق‌ناپذیر $f(x) = |\sqrt[3]{x} - 1|$ را به هم وصل می‌کند، خط مماس بر تابع رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ مماس کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$
(۲) $1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$
(۳) $1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}$
(۴) $1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$

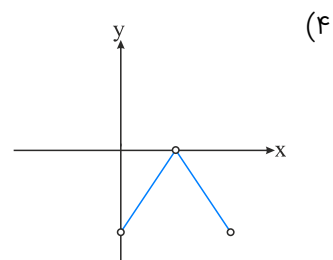
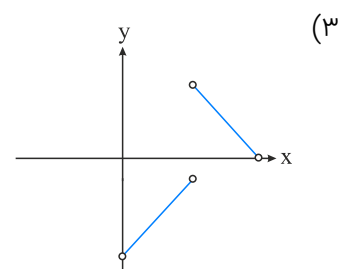
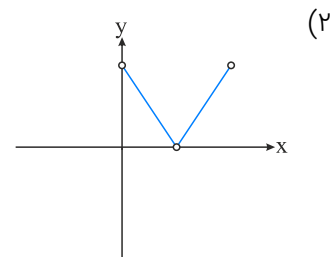
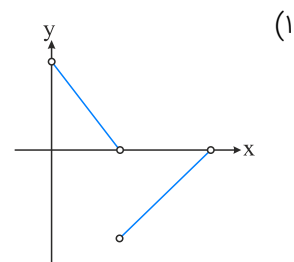
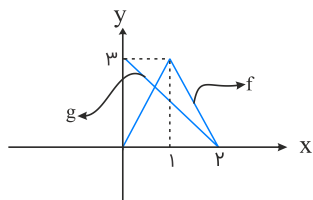
تالیفی امیر خسته

۳۸ اگر $f(4) = 2$ و $f'(4) = 3$ و $g(x) = f(2f(x^2))$ باشد، مقدار $g'(2)$ چقدر است؟

- (۱) ۲۴
(۲) ۳۶
(۳) ۷۲
(۴) ۴۸

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

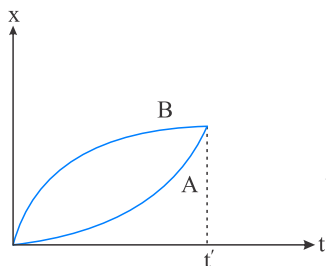
نمودار توابع f و g را با شرط $h(x) = f(x)g(x)$ در نظر بگیرید. نمودار $h'(x)$ کدام می‌تواند باشد؟



تالیفی امیر خمسه

دو دوندۀ A و B در یک مسیر صاف با مبدأ و مقصد یکسان شروع به دویدن می‌کنند؛ اگر نمودار مکان برحسب زمان آن‌ها مطابق شکل زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۴۰



(۱) دوندۀ B زودتر به مقصد می‌رسد.

(۲) بیشترین فاصله این دو دونده هنگامی رخ می‌دهد که سرعت آن‌ها برابر شود.

(۳) اگر سرعت متوسط دو دونده از $t = 0$ تا $t = a$ یکسان شود، دو مقدار متفاوت برای a وجود دارد.

(۴) دوندۀ A زودتر می‌رسد.

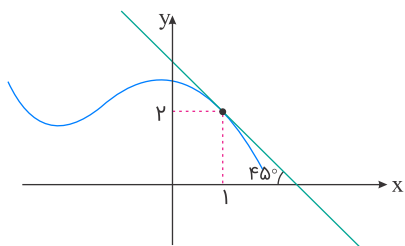
تالیفی محمدجواد محسنی

اگر تابع $F(x)$ کاملاً در همه نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F\left(\frac{1}{x}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ آنگاه $F'\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) -۱۶
(۳) ۱۶
(۴) -۴

تالیفی محمد درمان

نمودار تابع $y = f(x)$ و خط مماس بر آن رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - 1}$ کدام است؟



- (۱) -۲
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) ۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 2} - x)$ و $g(x) = \log(\sqrt{x^2 + 2} + x)$ باشند، آنگاه حاصل $\frac{f'(2)}{g'(2)}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) $\log 2$
(۴) $-\log 2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & ; x \geq 1 \\ -|x| + [x] & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(2 + 3h^2) - f^3(2 - 2h^2)}{h^3 - h^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲۴۰۰
(۲) -۲۴۰۰
(۳) ۴۸۰
(۴) -۴۸۰

تالیفی رضا عابدی

اگر در تابع $f(x) = -x^2 + ax + b$ داشته باشیم: $f'(2) + f'(8) = 0$ مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۱۰

تالیفی سید عادل حسینی

۴۶ اگر تابع f مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(2h+1)}{3h} = 4$ باشد، مشتق تابع $y = f(2\sqrt{x} - x^3)$ در $x = 1$ چقدر است؟

- (۱) -۴
(۲) ۸
(۳) ۴
(۴) -۸

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

۴۷ تابع $f(x) = |x^2 - x| \sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$ در چند نقطه مشتق ندارد ولی خط مماس دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

تالیفی محمد درمان

۴۸ مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 1)(x^4 - 2) \dots (x^4 - 17)$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱۶!
(۲) ۱۵!
(۳) -۱۵!
(۴) -۱۶!

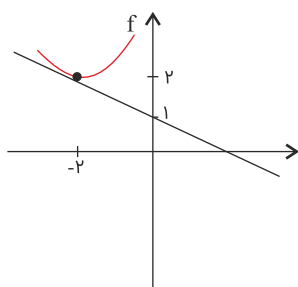
تالیفی رضا عابدی

۴۹ در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx$ داریم $f'(1) = -f'(3)$. اگر مساحت مثلثی که نمودار تابع f' با محورهای مختصات می‌سازد برابر با ۲ باشد، مقدار $f(1)$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۵/۰
(۲) ۱
(۳) ۵/۱
(۴) ۲

تالیفی علی شهرابی فراهانی

۵۰ در شکل زیر، خط d بر منحنی تابع $y = f(x)$ مماس است. اگر $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ باشد، مقدار $g'(-2)$ کدام است؟



- (۱) ۳/۴
(۲) ۱/۴
(۳) ۱/۲
(۴) -۱/۲

تالیفی علی ناری ابیانه

۵۱ تابع $f(x) = (x^2 - 1)|x^2 + 3x + 2|$ در نقطه $x = a$ مشتق‌ناپذیر است. مقدار $f'_+(a)$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) -۶
(۳) ۳
(۴) -۳

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۶

۵۲ اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب ۴ و خط $۲y - ۳x = ۱$ بر تابع f در نقطه $x = ۱$ واقع بر منحنی، بر منحنی مماس باشد، خط مماس بر f در نقطه‌ای به طول -۷ واقع بر آن، محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(۲) $۱۱/۵$

(۱) $۱۰/۵$

(۴) $۱۳/۵$

(۳) $۱۲/۵$

تالیفی علی شهبازی فراهانی

۵۳ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ ، با بیشترین شیب ممکن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

(۲) $-\frac{5}{3}$

(۱) $-\frac{4}{3}$

(۴) $-\frac{8}{3}$

(۳) $-\frac{7}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۴ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $y = [x^2] - [x]$ در بازه $[۰, ۲]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است)

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

تالیفی محمدجواد محسنی

۵۵ اگر $f(x+2) = -f(x)$ باشد و $f(x)$ در \mathbb{R} مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع $f(3x^2 + 2x)$ چندبرابر مشتق تابع $f(4x - 3)$ در $x = ۱$ است؟

(۲) -۲

(۱) ۲

(۴) -۴

(۳) ۴

تالیفی محمد درمان

۵۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2\sqrt{2} + h) - f'(2\sqrt{2})}{h}$ کدام است؟

(۲) $\frac{17}{27}$

(۱) $\frac{1}{27}$

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{-7}{27}$

تالیفی محمدجواد محسنی

۵۷ اگر در تابع $f(x)$ برای هر عدد حقیقی x ، $f(x) = f(x+3)$ و f مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(12)}{h}$ چندبرابر $f'(6)$ است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

تالیفی رضا عابدی

۵۸ اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ برابر ۴۴ می‌باشد. $[a - 1]$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

تالیفی نرگس کارگر

۵۹ اگر f یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $f \circ f'$ از درجه ۳۰ باشد، آنگاه $f' \circ f'$ از درجه چند است؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۳۰
(۴) ۳۵

تالیفی رضا عابدی

۶۰ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $f(x) = \begin{cases} |x-2| & ; x > 1 \\ \sqrt[5]{x^2 - 4x} & ; x \leq 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

تالیفی رضا عابدی

۶۱ مشتق دوم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 15x + 64}{x\sqrt{x-7}}$ در $x = 8$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$
(۲) $-\frac{7}{36}$
(۳) $\frac{25}{36}$
(۴) $\frac{39}{72}$

تالیفی علی ناری ایبانه

۶۲ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in \mathbb{Z} \\ x[x] & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در چند نقطه از بازه $[-2, 2]$ مشتق‌ناپذیر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

تالیفی سید عادل حسینی

۶۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{x+2} - 4}{1 - \sqrt[3]{x-1}}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

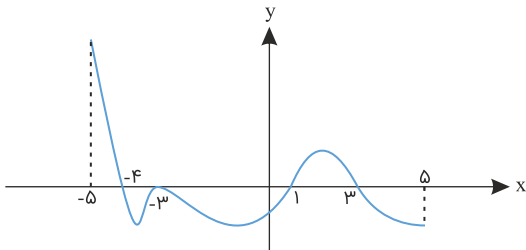
مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

۶۴ برای تابع پیوسته f می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}$ است. در این صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲
(۳) ۱ (۴) -۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۶۵ اگر نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، طول بزرگ‌ترین بازه مشتق‌پذیری $y = |xf(x) - f(x)|$ کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۷

تالیفی محمدجواد محسنی

۶۶ اگر در تابع $F(x) = (2x^3 + mx^2 + 2nx + h)[x]$ ، نقطه $x_0 = 3$ مشتق‌پذیر و نقطه $x_0 = 1$ گوشه باشد، $n - m + h$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱
(۳) ۲۶ (۴) ۱۷

تالیفی محمد درمان

۶۷ اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & ; x > a \\ x^2 + x & ; x \leq a \end{cases}$ در \mathbb{R} مشتق‌پذیر باشد، تابع $g(x) = |f(x-1)|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

- (۱) ۲ نقطه (۲) ۳ نقطه
(۳) ۱ نقطه (۴) به‌ازای هیچ مقدار a مشتق‌پذیر نیست.

تالیفی امیر خمسه

۶۸ تابع $f(x) = (x^2 - 2x)[-|x|]$ در بازه $(-1, 3)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

تالیفی محمدرضا توجه

۶۹ مقدار مشتق تابع $y = \sqrt[3]{5x^2} - \sqrt{3x} + \sqrt{x} + 5$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{73}{96}$
(۲) $\frac{43}{96}$
(۳) $\frac{53}{96}$
(۴) $\frac{83}{96}$

تالیفی محمد درمان

۷۰ اگر تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 16} = \frac{1}{4}$ ، مشتق تابع $y = \frac{1}{x} f(x^2)$ در نقطه $x = 2$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$
(۲) ۴
(۳) $\frac{9}{2}$
(۴) ۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۷۱ اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد ($f(a) \neq 0$) و $f'_+(a) = -\infty$ و $f'_-(a) = +\infty$ ، نمودار تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ در همسایگی $x = a$ کدام است؟



تالیفی محمد درمان

۷۲ تابع $f(x) = |2 \cos x + 1|$ در فاصله $[a, b]$ مشتق‌پذیر است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
(۲) $\frac{\pi}{3}$
(۳) $\frac{2\pi}{3}$
(۴) $\frac{4\pi}{3}$

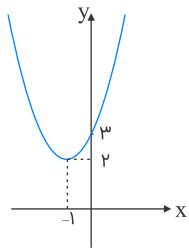
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۷۳ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 2}{x^3 - 8} = 2$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(-2-h) + 1}{h^2 - 2h} = -1$ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی تابع fog در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

- (۱) ۳۳
(۲) ۳۱
(۳) -۳۱
(۴) -۳۳

تالیفی علی ناری ابیانه

۷۴ باتوجه به نمودار تابع f، مقدار $\frac{f''(2)}{f'(-3)}$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{2}$
(۴) -۱

تالیفی امیر خمسه

۷۵ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

- (۱) $-x + \sqrt{1+x^2}$
(۲) $x - \sqrt{1+x^2}$
(۳) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(۴) $\sqrt{1+x^2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۷۶ توابع $g(x)$ و $g'(x)$ مشتق‌پذیر هستند و $f(x) = g(\sqrt{x})$. اگر $f''(4) = f'(4) = 2$ باشد، $g''(2)$ کدام است؟

- (۱) ۳۶
(۲) ۳۴
(۳) ۱۸
(۴) ۱۷

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۷۷ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{5 - f(x)} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) -۳
(۴) ۳

تالیفی رضا عابدی

خط گذرا از دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ در نقطه $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x}$ وقتی $x \rightarrow 3$ ، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر $f(x) = |2x - 1|$ باشد، مشتق راست تابع $y = f(f(\frac{1}{x}))$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) صفر
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۲

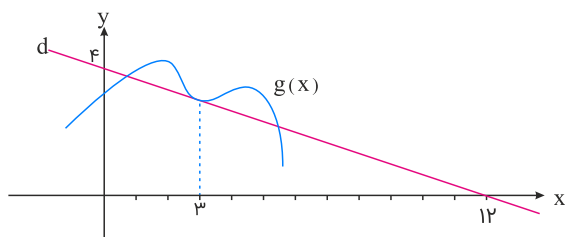
تالیفی امیر زراندوز

اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

- (۱) $4g''(0)$
(۲) $5g''(0)$
(۳) $4g''(0) + 20$
(۴) $5g''(0) + 20$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر خط d بر منحنی $g(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g^2(x) - 7g(x) + 12}{x - 3}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $-\frac{1}{4}$
(۴) $-\frac{1}{3}$

تالیفی رضا عابدی

به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $(m+2)y = mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{1+x^2}$ است؟

- (۱) $m > -1$
(۲) $m < -1$
(۳) $m > 1$
(۴) $m < 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ ، همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

کدام تابع زیر در $x = 1$ مشتق پذیر نیست؟

۸۴

$$f(x) = (x-1)^2 [x] \quad (۲)$$

$$f(x) = (x-1)|x-1| \quad (۱)$$

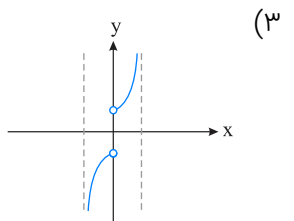
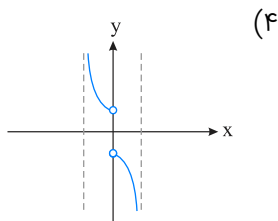
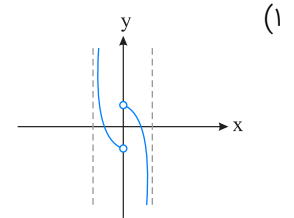
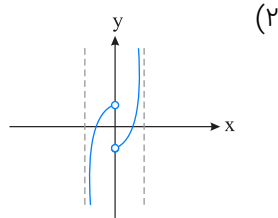
$$y = (x-1)[x] \quad (۴)$$

$$y = \sqrt[3]{(x-1)^4} \quad (۳)$$

تالیفی علی ناری ابیانه

نمودار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{1-|x|}$ شبیه کدام شکل زیر است؟

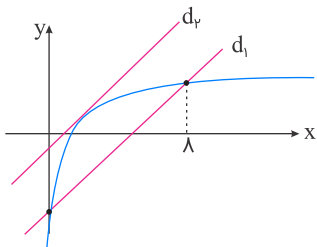
۸۵



تالیفی علی ناری ابیانه

در شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{4x-5}{x+1}$ است. اگر خطوط d_1 و d_2 موازی باشند، خط d_2 با چه طولی محور x ها را قطع می‌کند؟

۸۶



$$+2 \quad (۱)$$

$$\frac{+1}{2} \quad (۲)$$

$$+1 \quad (۳)$$

$$\frac{+3}{2} \quad (۴)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر معادله خط مماس بر تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی آن به شکل $y = 3x + 1$ باشد، مقدار تقریبی $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ چقدر است؟

۸۷

$$3\pi - 5 \quad (۲)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\pi + 1 \quad (۴)$$

$$2\pi - 2 \quad (۳)$$

تالیفی محمدرضا توجه

اگر $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 + 1)(x^6 + 1)$ ، حاصل $f'(2) + f(2)$ کدام است؟

۸۸

- (۱) 12×2^{11} (۲) 11×2^{12}
 (۳) $12 \times 2^{11} - 1$ (۴) $11 \times 2^{12} - 1$

تالیفی علی ناری ابیانه

مشتق چپ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

۸۹

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

تابع $f(x) = (x - a)^m \sqrt[n]{(x - a)^n}$ ، $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ، آنگاه $m + n$ کدام می‌تواند باشد؟

۹۰

- (۱) ۱ (۲) ۲
 (۳) ۳ (۴) ۴

تالیفی علی ناری ابیانه

برای تابع $f(x) = m|x - 2| + n|x + 2|$ ، رابطه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2 + 2) - f(h^2 - 2) + 3}{h^2} = 6$ برقرار است. حاصل $4n - m$ کدام است؟

۹۱

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰
 (۳) ۸ (۴) ۶

تالیفی رضا عابدی

اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + b}{x^2 - 1} & ; x \neq 1 \\ c & ; x = 1 \end{cases}$ و $f'(1) = 1$ باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟

۹۲

- (۱) -۱۰ (۲) -۶
 (۳) -۴ (۴) -۲

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

اگر $f(x) = (1 - x - \sqrt{1 + x^2})^{\lambda}$ و $h(x) = (1 - x + \sqrt{1 + x^2})^{\lambda}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $h' \sqrt{\frac{f}{h}} + f' \sqrt{\frac{h}{f}}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

(۲) ۵۱۲

(۱) ۱۰۲۴

(۴) ۱۲۸

(۳) ۲۵۶

تالیفی رضا عابدی

اگر تابع $f(x) = (x^2 + x - 2) |x^2 + 2x - 3|$ در نقطه $x = m$ مشتق ناپذیر باشد، حاصل $\frac{f'_+(m)}{f'_-(m)}$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) -۱

(۴) ۲

(۳) -۲

تالیفی رضا عابدی

اگر $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(3h+2)}{4h}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{2}{9}$ (۱) $\frac{2}{9}$ (۴) $-\frac{64}{361}$ (۳) $-\frac{32}{361}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) -۱

(۴) $\frac{1}{2}x$ (۳) x

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

تابع $f(x) = (x-b) \sqrt[3]{(x-a)^2}$ ، $a < b$ است. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(۲) فقط $+\infty$ (۱) فقط $-\infty$ (۴) $+\infty$ یا $-\infty$

(۳) صفر

تالیفی علی ناری ابدانه

۹۸ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x^3-1} = \frac{1}{6}$ باشد، b کدام است؟

(۲) ۶

(۱) $\frac{26}{3}$

(۴) ۹

(۳) ۳

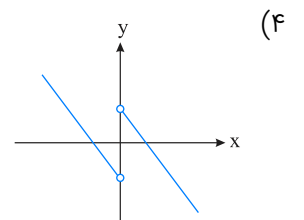
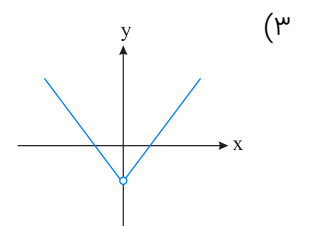
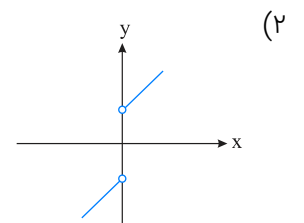
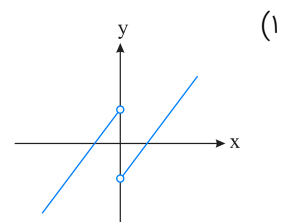
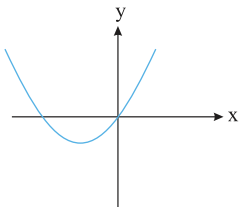
مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

۹۹ نقطه $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله نقطه M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه $x = 7$ کدام است؟

(۲) $\frac{15}{8}$ (۱) $\frac{15}{16}$ (۴) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{7}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۰۰ اگر نمودار f به صورت زیر باشد، نمودار مشتق تابع $g(x) = f(2 - |x|)$ کدام است؟



تالیفی علی ناری ابدانه

۱۰۱ اگر $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$ حاصل $f'(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2)$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
 (۲) $\sqrt{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۷

۱۰۲ نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{2}{3}$ در نقاط $(1, 3)$ و $(5, \frac{-23}{3})$ مماس موازی محور طول‌ها دارد. مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $\frac{-1}{3}$
 (۳) 3
 (۴) -3

تالیفی علی ناری ابیانه

۱۰۳ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$ در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۰۴ بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن روی منحنی به معادله $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور x قرار دارد، چقدر است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۳
 (۳) ۸
 (۴) ۴

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۶

۱۰۵ می‌خواهیم یک صفحه چاپی شامل ۶۰ سانتی‌متر مربع مطلب چاپ‌شده باشد، ضمناً در هر طرف ۵ سانتی‌متر و در بالا و پایین ۳ سانتی‌متر حاشیه داشته باشیم. طول خطوط چاپ شده چقدر باشد که کاغذ به کار رفته مینیمم گردد؟

- (۱) ۵
 (۲) $7/5$
 (۳) ۱۰
 (۴) $12/5$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

اگر M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع زیر در بازه $[0, 2]$ باشد، حاصل $\frac{M}{m}$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{x}{3} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - \frac{4}{3} & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(۲) -۶۳

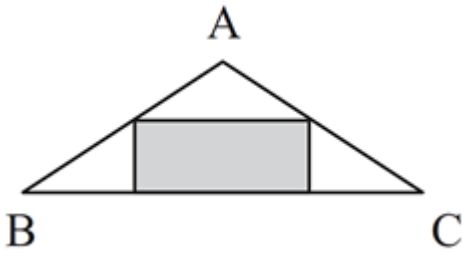
(۱) ۶۳

(۴) -۷

(۳) ۷

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

مساحت مثلث ABC برابر ۱۸ و $BC = ۴$ می‌باشد. بیشترین مساحت مستطیل محاط درون مثلث ABC (مطابق شکل زیر) چقدر است؟



(۱) ۶

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) ۴

(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ در بازه $(1, 4)$ قرار می‌گیرد؟

(۲) $-3 < a < 2/5$

(۱) $-3 < a < 1/5$

(۴) $-5 < a < 2/5$

(۳) $-5 < a < 1/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

کدام تابع ماکزیمم مطلق دارد ولی مینیمم مطلق ندارد؟

(۲) $y = -2^x$

(۱) $y = \log x$

(۴) $y = \sin^2 x + 2 \cos x$

(۳) $y = 1 - |1 - x|$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور x ها انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه $A(1, 5)$ و $B(7, -2)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

با شرط $f(x) = x^3 - 3x; x \leq 1$ در تابع با ضابطه $g(x) = x^3 + x$ بیشترین مقدار $g \circ f$ کدام است؟

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۳۰ (۴)

۱۲ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1+x} & ; x < 0 \\ |1+x| & ; x \geq 0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

تالیفی سیدعادل حسینی

ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

۲ (۴)

۱ (۳)

تالیفی سیدعادل حسینی

غلظت یک دارو در خون پس از تزریق از رابطه $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 6}$ به دست می‌آید که در آن t زمان برحسب ساعت است. چند ساعت پس از تزریق، غلظت دارو در خون به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

 $2\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۱) $\sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{12}$ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 4x - 1$ فقط در فاصله $(-\infty, 2)$ صعودی اکید باشد، مقدار b کدام است؟

۱ (۲)

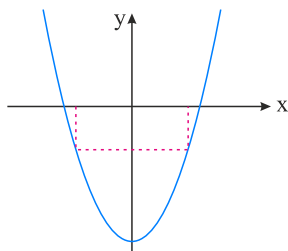
-۱ (۱)

 $\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

تالیفی سیروس نصیری

بیشترین مقدار مساحت مستطیلی که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش پایین محور x ها و روی سهمی $y = x^2 - 27$ قرار دارند، کدام است؟



(۱) ۵۴

(۲) ۶۳

(۳) ۱۰۸

(۴) ۸۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۱۸ مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^3 - 3x^2}$ بر روی \mathbb{R} کدام است؟

(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۳) صفر

(۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۱۹ مجموعه طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ کدام است؟

(۱) $\{-\sqrt{3}\}$ (۲) $\{\sqrt{3}\}$ (۳) $\{-\sqrt{3}, 1\}$ (۴) $\{\sqrt{3}, 1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۲۰ بیشترین مساحت از مستطیل‌هایی که دو رأس آن بر روی نیم‌بیضی به معادله $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور x ها باشند، کدام است؟

(۱) ۶

(۲) $3\sqrt{5}$ (۳) $4\sqrt{3}$

(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۱۲۱ حداکثر مقدار عبارت $\frac{1}{5 + \sin^2 x - 2 \sin x}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

تالیفی سیروس نصیری

اگر خط $y = 3x - 2$ بر نمودار $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ مماس باشد، آنگاه حاصل جمع طول و عرض نقطه اکسترمم نسبی $f(x)$ کدام است؟

(۲) $1/5$

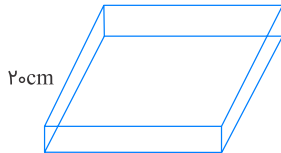
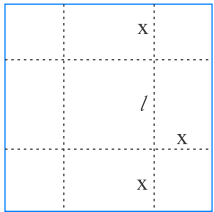
(۱) $1/75$

(۴) $2/5$

(۳) $2/25$

تالیفی میلاد منصوری

یک ورق مربعی شکل به ضلع ۲۰ سانتی‌متر داریم. با برش دادن خط‌چین‌ها، دور انداختن مربع‌های گوشه و تا زدن لبه‌ها یک جعبه می‌سازیم. چه طولی را از لبه‌ها تا کنیم تا حجم جعبه حداکثر شود؟



(۱) $10/3$

(۲) $5/3$

(۳) $20/3$

(۴) ۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

فرض کنید غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $c(t) = \frac{t}{54 + t^3}$ به دست آید. بیشترین مقدار غلظت ممکن در خون چند خواهد بود؟

(۲) $1/81$

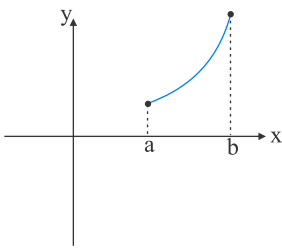
(۱) $1/27$

(۴) $1/16$

(۳) $2/27$

تالیفی مهدی ملازمضانی

نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. رفتار توابع $\sqrt[3]{f(x)}$ و $\frac{-1}{f(x)}$ به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟



(۱) صعودی اکید - صعودی اکید

(۲) نزولی اکید - صعودی اکید

(۳) صعودی اکید - نزولی اکید

(۴) نزولی اکید - نزولی اکید

تالیفی سیروس نصیری

تابع $f(x) = \left[\frac{2}{1+x^2} \right] x$ چند نقطه بحرانی دارد؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) بیشمار

(۳) ۲

تالیفی سید عادل حسینی

بیشترین مقدار مساحت مستطیل‌هایی که دو رأس آن روی محور x ‌ها و دو رأس دیگری بالای محور x ‌ها و روی سهمی $y = 4x - x^2$ قرار دارند، کدام است؟

$$\frac{32}{3\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\frac{32}{3\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{28}{3\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\frac{28}{3\sqrt{3}} \quad (3)$$

تالیفی علی شهبازی فراهانی

تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

$$5 \quad (2)$$

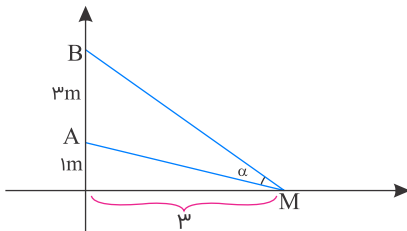
$$4 \quad (1)$$

$$\text{بی‌شمار} \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

باتوجه به شکل زیر، دو نقطه A و B به بلندی ۱ و ۴ بر روی محور قائم و نقطه M در فاصله ۳ متری از پای قائم قرار گرفته است. نقطه M را چقدر و در چه جهتی باید جابه‌جا کنیم که زاویه AMB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد؟



$$(1) \text{ یک متر - راست}$$

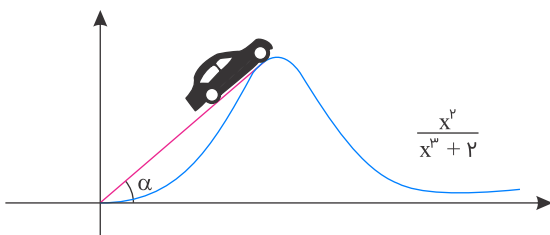
$$(2) \text{ یک متر - چپ}$$

$$(3) \text{ دو متر - راست}$$

$$(4) \text{ دو متر - چپ}$$

تالیفی محمد امین نباخته

اتومبیلی روی تابع $(x \geq 0)$ ؛ $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2}$ حرکت می‌کند. زاویه α خط واصل اتومبیل و مبدأ با محور x ‌ها است. در این صورت اتومبیل در نقطه‌ای با کدام طول باشد تا زاویه α حداکثر شود؟



$$\sqrt[3]{4} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx + 1$ در آن نزولی است، بازه $(-3, 2)$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

$$-14 \quad (2)$$

$$14 \quad (1)$$

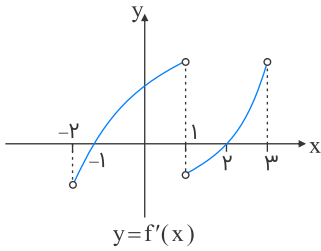
$$-13 \quad (4)$$

$$13 \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نمودار مشتق تابع پیوسته $f(x)$ به صورت زیر است. مجموعه نقاط اکسترمم تابع f کدام است؟

۱۳۲



(۱) $\{-1, 1\}$

(۲) $\{-1, 2\}$

(۳) $\{1, 2\}$

(۴) $\{-1, 1, 2\}$

تالیفی سیروس نصیری

کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است؟

۱۳۳

(۱) مینیمم مطلق دارد.

(۲) ماکزیمم مطلق دارد.

(۳) دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.

(۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

در ساخت یک کیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱۳۴

(۲) ۱

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt[3]{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

تابع $f(x) = \begin{cases} |\log x| & ; 0 < x < 2 \\ [x] & ; 2 \leq x < 5 \\ \frac{1}{3}x^3 - 9x & ; x \geq 5 \end{cases}$ مفروض است. مجموعه نقاط بحرانی این تابع کدام است؟

۱۳۵

(۲) $[2, 5] \cup \{1\}$

(۱) $(2, 5) \cup \{1\}$

(۴) $\{1, 2, 3, 4\}$

(۳) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

تالیفی سیروس نصیری

بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن ۶ باشد، کدام است؟

۱۳۶

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) ۳

(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(8, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = x\sqrt{x}$ کدام است؟

۱۳۷

(۲) $3\sqrt{5}$

(۱) $2\sqrt{11}$

(۴) $5\sqrt{2}$

(۳) $4\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۳۸ اگر $f(x) = x^2 - 2x + 4$ و $g(x) = x^3 + x$ ، کمترین مقدار تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۲) ۲۴

(۱) ۲۱

(۴) ۳۰

(۳) ۲۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۳۹ در بین تمام مثلث‌های متساوی‌الساقین با محیط ۳، ماکزیمم مساحت کدام است؟

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۱۴۰ برد تابع $f(x) = [\sqrt{x} - \sqrt{9-x}]$ شامل چند عضو است؟

(۲) ۷

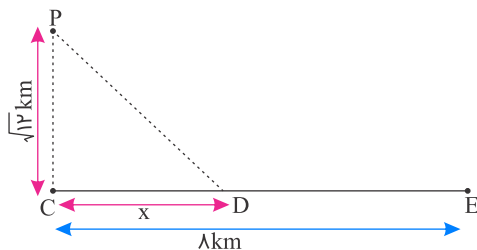
(۱) ۶

(۴) ۵

(۳) ۴

تالیفی سیروس نصیری

۱۴۱ دو نفر شرکت‌کننده A و B درون دو قایق در نقطه P قرار دارند. آن‌ها می‌خواهند به دو روش مختلف خود را به نقطه E (در ۸ کیلومتری نقطه C) واقع در ساحل برسانند. شرکت‌کننده A می‌خواهد کل مسیر را با قایق طی کند ولی شرکت‌کننده B ابتدا خود را به نقطه D از ساحل می‌رساند و سپس تا نقطه E پیاده‌روی می‌کند. با فرض اینکه سرعت حرکت قایق 2 km/h و سرعت پیاده‌روی در ساحل 4 km/h باشد، حداکثر فاصله زمانی رسیدن این دو شرکت‌کننده به مقصد تقریباً چند دقیقه است؟



(۱) ۷۵ min

(۲) ۵۱ min

(۳) ۴۲ min

(۴) ۸۸ min

تالیفی مهدی ملازمزانی

۱۴۲ کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ ، کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{6}$

(۱) $-\frac{1}{9}$

(۴) صفر

(۳) $-\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۴۳ برد تابع با ضابطه $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1]$ (۲) $[0, 2]$
 (۳) $[1, 2]$ (۴) $(1, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۴۴ تابع $f(x) = |x^3 + x - 1|$ چند نقطه بحرانی با طول مثبت دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۳
 (۳) ۲ (۴) ۴

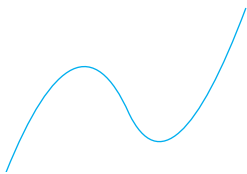
تالیفی سیروس نصیری

۱۴۵ اگر حاصل ضرب طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x^2 - 4x + c|$ برابر با ۶ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
 (۳) ۴ (۴) ۶

تالیفی علی شهبابی فراهانی

۱۴۶ نمودار تابع $y = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 6x$ به صورت زیر است. مجموع مقادیر m که به ازای آن معادله $x^3 = \frac{3}{4}x^2 + 6x + m$ دو ریشه متمایز دارد، کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) $-3/5$
 (۳) -4 (۴) $-6/5$

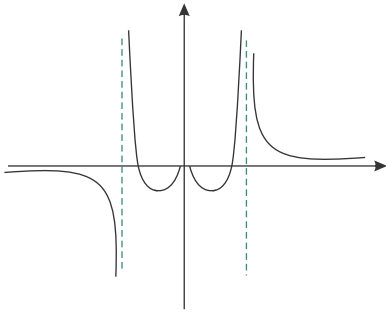
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۴۷ اگر $a > 0$ و ثابت و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{3a+x}{\sqrt{a^3x}}$ کدام است؟

- (۱) $4a$ (۲) $3a$
 (۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۴۸ تابع f در \mathbb{R} پیوسته و نمودار مشتق آن به صورت زیر است. تابع f در چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟



- (۱) دو
(۲) سه
(۳) چهار
(۴) پنج

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۱۴۹ اگر $A = 3\sin^2 \alpha + 4$ و $B = 3\cos^2 \alpha + 2$ باشد، حداکثر مقدار AB کدام است؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۳۵
(۳) ۲۰/۲۵
(۴) ۱۴

تالیفی سیروس نصیری

۱۵۰ فاصله دو نقطه اکسترمم متوالی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $2\sqrt{2}$

تالیفی سیدعادل حسینی

۱۵۱ مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

- (۱) $\{-2, 2\}$
(۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$
(۳) $\{-2, 0, 2\}$
(۴) $\{-7, 0, 1\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۵۲ بزرگ‌ترین حجم مخروط، از بین مخروط‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر واحد باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{81}$
(۲) $\frac{\pi}{12}$
(۳) $\frac{3\pi}{32}$
(۴) $\frac{4\pi}{27}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۱۵۳ مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| \sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$
(۲) $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$
(۳) $\{0, 1\}$
(۴) $\{\frac{2}{3}, 2\}$

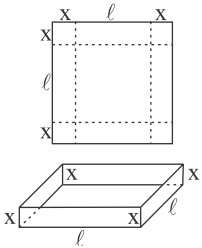
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

اگر مشتق تابع به صورت $f'(x) = (ax - 2)(x^3 - 3x + 2)$ باشد، مجموع مقادیر a که به ازای آن‌ها، تابع f حداکثر یک اکسترمم نسبی داشته باشد، کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) +۱
(۳) ۳
(۴) -۳

تالیفی امیر خمسه

یک ورق فلزی مربع شکل را مطابق شکل برش می‌دهیم و یک جعبه در باز تولید می‌کنیم. اگر ماکزیمم حجم جعبه تولید شده 2000 cm^3 باشد، طول ضلع مربع کدام است؟



(۱) ۲۰

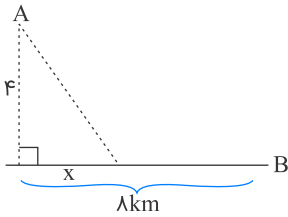
(۲) ۲۵

(۳) ۲۷

(۴) ۳۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مانی در درون قایقی در نقطه A قرار دارد و می‌خواهد به نقطه B برسد. برای این کار باید مسیری را در قایق پارو بزند و پس از آن مسیری را در خشکی پیاده‌روی کند. اگر سرعت قایق ۲ کیلومتر و سرعت پیاده‌روی ۴ کیلومتر بر ساعت باشد، چند کیلومتر پیاده‌روی کند تا در کمترین زمان به مقصدش برسد؟



(۱) $\frac{8}{\sqrt{3}}$

(۲) $8 - \frac{8}{\sqrt{3}}$

(۳) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(۴) $8 - \frac{4}{\sqrt{3}}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله $y = (x - 2)^2$ روی بازه $[0, 2]$ است، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

(۲) $\frac{10}{9}$

(۴) $\frac{11}{9}$

(۱) $\frac{28}{27}$

(۳) $\frac{32}{27}$

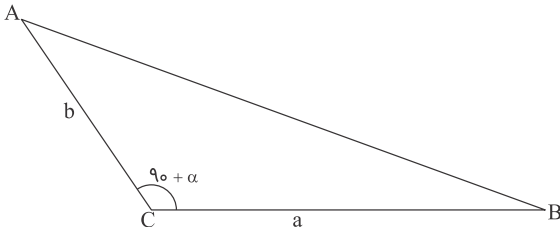
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

اگر $F(x)$ تابعی با دامنه \mathbb{R} و مشتق‌پذیر باشد و $F(x) \neq 0$ در رابطه $F'(x) = -2x$ صدق کند، حاصل ضرب طول نقاط بحرانی $F'(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $-\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $-\frac{1}{2}$

تالیفی محمد درمان

در مثلث ABC داریم: $a + b = 2$ و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}$. در این صورت بیشترین مقدار مساحت مثلث ABC چقدر است؟



- (۱) $\frac{4\sqrt{5}}{27}$
 (۲) $\frac{8}{27}$
 (۳) $\frac{16}{27}$
 (۴) $\frac{8\sqrt{5}}{27}$

تالیفی محمد گودرزی

اگر $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{2}{x}$ و $g(x) = \sin x$ باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع $y = fog(x)$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) -1
 (۳) $-\frac{1}{2}$
 (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $y = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{2}{3}$
 (۴) فاقد ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

تابع $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳

تالیفی سیدعادل حسینی

۱۶۳ کمترین فاصله نقاط روی نمودار تابع $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ از خط $y = x - 1$ کدام است؟

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $2\sqrt{2}$

(۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

تالیفی سید عادل حسینی

۱۶۴ دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(4, 7)$ و خط به معادله $y = x - 1$ در صفحه محورهای مختصات مفروض اند. نقطه M بر روی خط مفروض؛ با کدام طول انتخاب شود به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

(۲) صفر

(۱) -۱

(۴) ۳

(۳) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۶۵ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

(۲) $4/5$

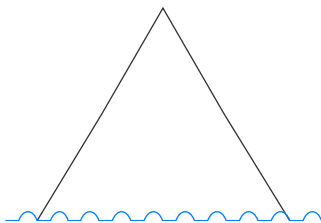
(۱) ۴

(۴) ۸

(۳) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۶۶ با یک طناب ۲۰ متری یک زمین به شکل مثلث متساوی الساقین کنار دریا می‌سازیم، طوری که قاعده آن نیاز به طناب کشی ندارد. حداکثر مساحت این زمین چقدر است؟



(۱) ۲۵

(۲) ۷۵

(۳) ۵۰

(۴) $50\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۶۷ چند تا از توابع زیر قطعاً غیر یکنوا هستند؟ ($abc \neq 0$)

(الف) $y = ax^3 + bx + c$

(ب) $y = x^6 + ax + b$

(ج) $y = a\sqrt{x} + b$

(د) $y = \frac{ax}{1+x^2}$

(۲) ۴

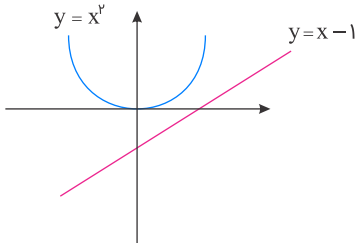
(۱) ۱

(۴) ۳

(۳) ۲

تالیفی سیروس نصیری

روی نقشه جغرافیایی، لبه دو خشکی که از هم فاصله دارند، معادلاتی به صورت $y = x^2$ و $y = x - 1$ دارند. برای ساختن یک پل به کوتاه‌ترین طول، از کدام نقطه از سهمی اقدام به ساخت کنیم؟



(۱) ۱

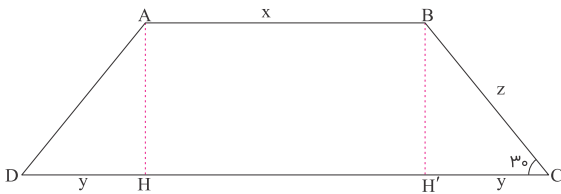
(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۰

(۴) $\frac{3}{2}$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

زاویه بین ساق و قاعده یک دوزنقه متساوی‌الساقین 30° و محیط آن ۵۰ سانتی‌متر است. اگر مساحت آن ماکزیمم شود، طول قاعده کوچک آن چقدر است؟



(۱) $1/88$

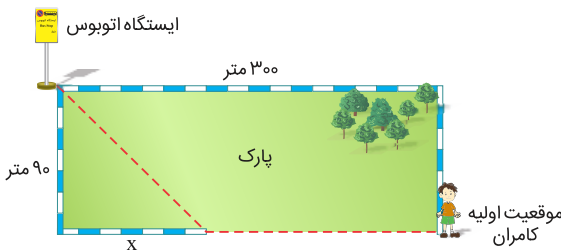
(۲) $3/88$

(۳) $5/88$

(۴) ۵

تالیفی مهدی ملارمضانی

کامران می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۳۰۰ متری غرب و ۹۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت 4 m/s از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت 2 m/s عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x کدام باشد تا او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟



(۱) $300\sqrt{2}$

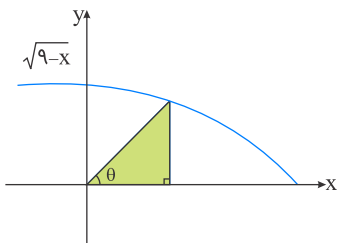
(۲) $300\sqrt{3}$

(۳) $600\sqrt{2}$

(۴) $600\sqrt{3}$

تالیفی علی شهرابی فراهانی

اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه زیر ماکزیمم باشد، $\tan \theta$ کدام است؟



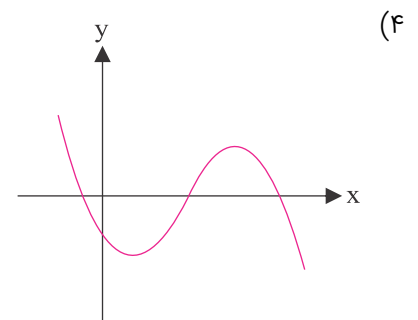
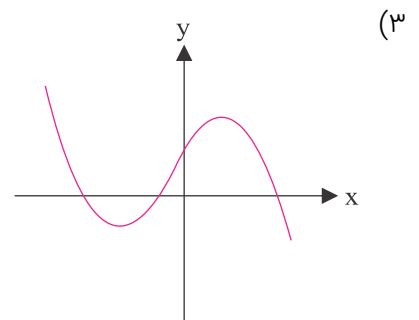
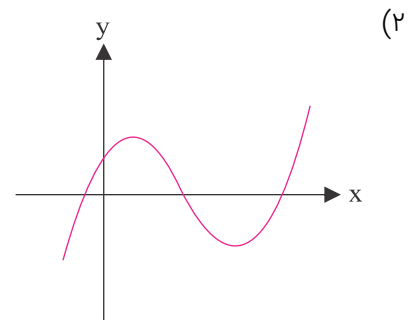
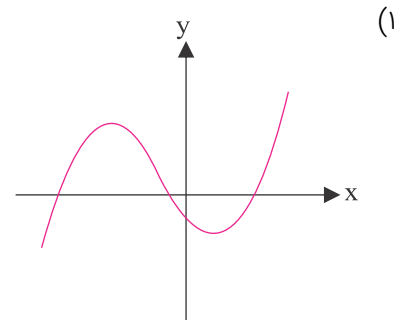
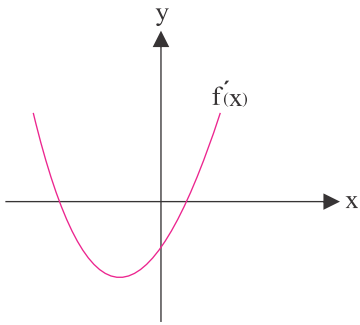
(۱) ۱

(۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۷۳ بزرگ‌ترین طول نقطه بحرانی برای تابع $f(x) = (2x^2 - 5x)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

$$\frac{25}{16} \quad (2)$$

$$1 \quad (4)$$

(۱) صفر

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

تالیفی عزیزالله علی اصغری

۱۷۴ در کدام گزینه هر نقطه دلخواه از دامنه تابع، یک نقطه بحرانی نیست؟

$$y = x - [x] \quad (۱)$$

$$y = [x^2] \quad (۲)$$

$$y = \cos 2x + 2\sin^2 x \quad (۴)$$

$$y = \begin{cases} 2 & ; x \geq 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۷۵ اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟

$$25\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$36 \quad (۲)$$

$$28\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$40 \quad (۴)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۷۶ مجموع بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = (2 \cos x - 1)(1 + \cos x)$ چقدر است؟

$$\frac{9}{8} \quad (۲)$$

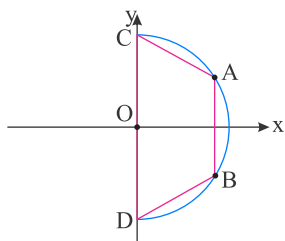
$$\frac{7}{8} \quad (۱)$$

$$2 \quad (۴)$$

$$\frac{-9}{8} \quad (۳)$$

تالیفی سیروس نصیری

۱۷۷ درون نیم‌دایره‌ای به مساحت 8π دوزنقه متساوی‌الساقینی محاط کرده‌ایم. بیشترین مساحت دوزنقه کدام است؟



$$6\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$12\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$24\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$12\sqrt{2} \quad (۴)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۷۸ تابع $f(x) = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x^2}$ در فاصله (a, b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

$$1 \quad (۱)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

تالیفی سیروس نصیری

۱۷۹ کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{2}{x^2}$ کدام است؟

$$1 \quad (۱)$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$2 \quad (۴)$$

$$\sqrt{3} \quad (۳)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۸۰ اگر a, b, c, d چهار عدد حقیقی مثبت و $a = 4b$ باشد، حداقل مقدار $A = \frac{a}{b} + \frac{4b}{c} + \frac{c}{27d} + \frac{d}{a}$ چقدر است؟

- (۱) ۴
 (۲) $\frac{4}{24}$
 (۳) $4 + \frac{4}{27}$
 (۴) $4 + \sqrt[3]{2}$

تالیفی سیروس نصیری

۱۸۱ هزینه حرکت یک اتومبیل شامل هزینه سوخت و استهلاک آن است. اگر هزینه سوخت برابر با v^2 و هزینه استهلاک آن برابر با $250t$ باشد، اتومبیل با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه‌ها طی یک مسافت یک کیلومتری حداقل شود؟ (v سرعت اتومبیل بر حسب کیلومتر بر ساعت و t مدت زمان حرکت بر حسب ساعت است.)

- (۱) ۱۰
 (۲) ۵
 (۳) ۸
 (۴) ۱۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۸۲ در تابع $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$ وقتی x در دامنه $f(x)$ تغییر می‌کند، حدود $f(x)$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- (۱) $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$
 (۲) $[-2, 2\sqrt{2}]$
 (۳) $[-2, 2]$
 (۴) $[-2\sqrt{2}, 2]$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:

$$f'_+(0) = f'_-(0)$$

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:

$$f''_+(0) = f''_-(0)$$

گام دوم

ابتدا ضابطه معکوس تابع $f(x)$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $(f^{-1})'(x)$ و $(f^{-1})''(x)$ در نقطه $x = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف مثبت)}} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} ; x \geq 0$$

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow y = -\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف منفی)}} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{2}} ; x < 0$$

پس ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & ; x \geq 0 \\ -x^{\frac{1}{2}} & ; x < 0 \end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$$

همچنین داریم:

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & ; x > 0 \\ -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'_+(0) = (f^{-1})'_-(0) = 0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$(f^{-1})''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & ; x > 0 \\ \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (f^{-1})''_+(0) &= -\frac{1}{4} \\ (f^{-1})''_-(0) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f^{-1})''_+(0) \neq (f^{-1})''_-(0)$$

گزینه ۳

۲

$$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \left(\frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt{1 - (1 - x^2)}}{x(\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x(\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{|x|}{\sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

برای محاسبه مشتق چپ نیز به همین صورت عمل می‌کنیم و فقط در مراحل آخر داریم:

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x(\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{|x|}{\sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{-x}{\sqrt{2}x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'_+(\circ) - f'_-(\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

تالیفی رضا عابدی

گزینه ۴

۳

$$f(x) = x + \frac{x}{f(x)} \Rightarrow (f(x))^2 - xf(x) - x = 0$$

$$\Delta = x^2 + 4x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 + 4x})$$

از آنجا که طبق فرض $x > 0$ است، باید $f(x) > 0$ باشد؛ بنابراین $f(x) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 + 4x})$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4x}) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{(x+2)^2 - 4})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2 - 4}} \right) \Rightarrow f'(-2 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

تالیفی سیدعادل حسینی

می‌دانیم که:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

بنابراین:

$$y = f(x^2 f(x)) \Rightarrow y' = (x^2 f(x))' f'(x^2 f(x))$$

$$y' = (2xf(x) + x^2 f'(x)) f'(x^2 f(x))$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1) = (2f(1) + f'(1)) f'(f(1)) \Rightarrow f(1) = 4 + \sqrt{1+3} = 6$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}$$

$$f'(f(1)) = f'(6) = \frac{1}{2\sqrt{6+3}} = \frac{1}{6}$$

بنابراین:

$$y'(1) = \left(2 \times 6 + \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{49}{24}$$

تالیفی رضا عابدی

نکته: تابع $f(x) = |g(x)|$ در ریشه ساده و غیرمکرر g مشتق ندارد.چون تفاضل مشتق چپ و راست در نقطه a ، عددی طبیعی است؛ پس قطعاً f در نقطه a مشتق‌ناپذیر است. با تجزیه f طول نقطه a مشخص می‌شود.

$$f(x) = |x^3 - x - 2x - 2| = |(x^2 - 1)x - 2(x + 1)| = |(x + 1)(x^2 - x - 2)|$$

$$\Rightarrow f(x) = |(x + 1)^2(x - 2)| = (x + 1)^2|x - 2|$$

 $(x + 1)^2$ منفی نیست و از قدر مطلق بیرون می‌آید. در نتیجه $a = 2$ خواهد بود.

$$x > 2 \Rightarrow f(x) = (x + 1)^2(x - 2) \Rightarrow f'_+(2) = (2 + 1)^2 = 9$$

$$x < 2 \Rightarrow f(x) = (x + 1)^2(2 - x) \Rightarrow f'_-(2) = (2 + 1)^2(-1) = -9 \Rightarrow b = \frac{9 - (-9)}{6} = 3$$

واضح است که $a - b = -1$ است و عامل صفرکننده در تابع f است.

$$f'(x) = -2(x + 1)(x - 2) \Rightarrow f''(x) = -2(x - 2) \xrightarrow{x=-1} f''(-1) = 6$$

دقت کنید عامل قدر مطلق در همسایگی $x = -1$ همواره منفی است.

تالیفی امیر خمسه

$$f'(x+3) + 6f(x^3+3) = 2x^2 + x - 9 \xrightarrow{x=0} f'(3) + 6(f(3)) = -9$$

$$\Rightarrow f'(3) + 6f(3) + 9 = 0 \Rightarrow (f(3) + 3)' = 0 \Rightarrow f(3) = -3$$

$$f'(x+3) + 6f(x^3+3) = 2x^2 + x - 9$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2f'(x+3)f(x+3) + 18x^2 f'(x^3+3) = 4x + 1$$

$$\xrightarrow{x=0} 2f'(3)f(3) = 1 \xrightarrow{f(3)=-3} f'(3) = -\frac{1}{6}$$

تالیفی رضا عابدی

راه حل اول:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x+2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x+2h) + f(x) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$$

$$= -3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x)}{-3h} - 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = -3f'(x) - 2f'(x)$$

$$= -5f'(x) \Rightarrow -5f'(x) = 5\sqrt{x} + 5 \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{x} - 1 \Rightarrow f'(4) = -3$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+mh) - f(x+nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k}\right)f'(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x+2h)}{h} = \left(\frac{-3-2}{1}\right)f'(x) = -5f'(x)$$

$$-5f'(x) = 5\sqrt{x} + 5 \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{x} - 1 \Rightarrow f'(4) = -3$$

تالیفی رضا عابدی

خط مماس بر تابع f در نقطه $x = 2$ ، از دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(0, \frac{3}{4})$ می‌گذرد. شیب این خط را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{3}{4} - 3}{0 - 2} = \frac{3}{4} \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}$$

حالا حاصل حد داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 3f(x)}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f(x) - \overbrace{3}^{f(2)})}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-1} \\ &= f'(2) \times \frac{f(2)}{2-1} = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

تالیفی علی شهبابی فراهانی

باتوجه به تعریف مشتق تابع $y = g(x)$ در نقطه معلوم $x = 2$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} g'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(x) - 0}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \times \lim_{x \rightarrow 2} ([x] + [-x]) = 4(-1) = -4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} f(x) = -1 \text{ بنابراین } f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ دقت کنید:}$$

تالیفی محمدرضا توجه

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 7x + 12}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+4} \times \sqrt{x-2} + \sqrt{x+4} \times \sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}} \\ &= \frac{\sqrt{x+4}(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}} = \sqrt{x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \Rightarrow f'(5) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

تالیفی رضا عابدی

مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S = \frac{OA \cdot OB}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\omega \times OB}{2} \Rightarrow OB = 2$$

پس مختصات نقاط A و B برابر است با:

$$A(\omega, 0), B(0, 2)$$

شیب خط AB برابر است با:

$$m = \frac{2 - 0}{0 - \omega} = -\frac{2}{\omega}$$

که برابر است با مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول 2 یعنی: $f'(2) = -\frac{2}{\omega}$
برای محاسبه حد خواسته شده آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2 - 3h)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 - 3h) - f(2)}{-3h} \times \frac{-(-3)}{3} = \frac{3}{3} f'(2) \\ &= \frac{3}{3} \times \frac{-2}{\omega} = -\frac{2}{\omega} \end{aligned}$$

تالیفی عباس حسینی

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)g(1) - f(1+h)g(1+h)}{3h^2 - 2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{h(3h - 2)}$$

حد عبارت $(3h - 2)$ وقتی $h \rightarrow 0$ برابر -2 است، لذا:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{h(3h - 2)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1))}{-2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1)}{h} = \frac{1}{2} (fg)'(1) \end{aligned}$$

تالیفی امیر زراندوز

راه حل اول:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(3+h) - f'(3-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} \times \frac{f(3+h) + f(3-h)}{1} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} \right) \times \lim_{h \rightarrow 0} (f(3+h) + f(3-h)) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+h) - f(3-h) + f(3) - f(3)}{h} \right) \times (f(3) + f(3)) \\
&= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} \right) \times 2f(3) \\
&= \left(3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{3h} - (-2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-2h} \right) \times 2f(3) \\
&= (3f'(3) - (-2)f'(3)) \times 2f(3) = 10f'(3)f(3) = 10 \times 3 \times 4 = 120
\end{aligned}$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a-nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k} \right) f'(a)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} &\times \lim_{h \rightarrow 0} (f(3+h) + f(3-h)) \\
&= \left(\frac{3 - (-2)}{1} \right) f'(3) \times 2f(3) = 10f'(3)f(3) = 10 \times 3 \times 4 = 120
\end{aligned}$$

تالیفی رضا عابدی

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\Rightarrow f'(3) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

از فرض مسئله متوجه می‌شویم تابع f متناوب با دوره تناوب $T = ۲$ است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6 - 2h) - f(2)}{h} = -2f'(6) = -2f'(8)$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۶

نکته: اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$ در ریشه‌های ساده معادله $g(x) = 0$ دارای مماس قائم است.

در اینجا $x = 1$ و $x = b$ ریشه‌های داخل رادیکال هستند:

$$x^2 + ax + 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها ۱ و b هستند}} \begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها: } 1 \times b = 2 \\ \text{جمع ریشه‌ها: } 1 + b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$a - b = -3 - 2 = -5$$

تالیفی علی شهبابی فراهانی

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{f(2) - 9}{0} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(2) = 9$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h)}{1} = f'(2) = \frac{3}{2}$$

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = 1 \times \sqrt{f(x)} + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \times x \Rightarrow g'(2) = 3 + \frac{3}{2} \times 2 = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = 2$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \Rightarrow u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x))$$

اکنون ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

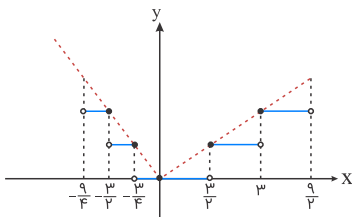
$$f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{xf(x)+2}} \right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}x - x\sqrt{x+2} + 2}} \right) \\ \Rightarrow y'(2) &= \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{3 - 4 + 2}} \right) = (-1) \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} \left[-\frac{4}{3}x \right] & ; x < 0 \\ \left[\frac{2}{3}x \right] & ; x \geq 0 \end{cases}$$

باتوجه به نمودار $f(x)$ ، واضح است که در بازه $(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ ، در نقاط $x = -\frac{3}{4}$ ، $x = \frac{3}{4}$ و $x = 3$ مشتق ناپذیر است.

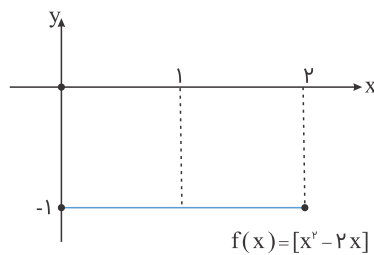
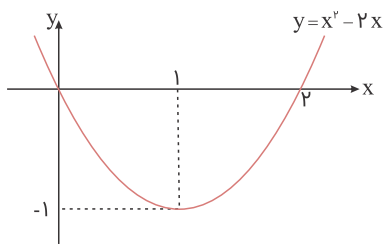
نکته: تابع y در بازه $[a, b]$ به شرطی مشتق‌پذیر است که علاوه بر مشتق‌پذیری در بازه (a, b) دارای مشتق راست در a باشد.
 نکته: تنها نقاطی که در آن‌ها توابع براکتی احتمال ناپیوستگی دارند، نقاطی است که داخل براکت یک عدد صحیح شود.
 بررسی گزینه‌ها:

$a = -1$: در این صورت تابع به $f(x) = [-x^2 - 2x]$ تبدیل می‌شود و انتظار داریم که تابع در $(-1, 0)$ پیوسته باشد؛ اما $f(-1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 0$ و تابع پیوسته نیست.

$a = 2$: در این صورت تابع به $f(x) = [2x^2 - 2x]$ تبدیل می‌شود و انتظار داریم که تابع در $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ پیوسته باشد؛ اما در $x = 1$ داریم: $f(1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ و تابع پیوسته نیست.

برای $a = -2$ هم مشابه اتفاقی که برای $a = 2$ پیش آمد رخ می‌دهد.

$a = 1$: در این صورت تابع به $f(x) = [x^2 - 2x]$ تبدیل می‌شود و انتظار داریم که تابع در بازه $[1, 2)$ پیوسته باشد. با رسم $f(x) = [x^2 - 2x]$ از روی $y = x^2 - 2x$ داریم:



پس به ازای $a = 1$ مطلوب مسئله رخ می‌دهد.

$$(f \circ g)'(3) = g'(3)f'(g(3))$$

ابتدا معادله خط d را می‌یابیم:

$$m_d = \frac{0 - 6}{6 - 0} = -1 \Rightarrow \text{معادله خط } d: y - 0 = -1(x - 6) \Rightarrow y = -x + 6$$

مقدار $g(3)$ با مقدار $y = -x + 6$ در $x = 3$ برابر است:

$$g(3) = -3 + 6 = 3$$

شیب خط مماس بر تابع $g(x)$ در $x = 3$ با شیب خط d برابر است: $g'(3) = -1$

$$(f \circ g)'(3) = g'(3)f'(g(3)) = -1 \times f'(3) = -f'(3)$$

$f'(3)$ با شیب خط d' برابر است:

$$f'(3) = m_{d'} = \frac{0 - 2}{6 - 0} = -\frac{1}{3}$$

$$(f \circ g)'(3) = -f'(3) = \frac{1}{3}$$

تالیفی رضا عابدی

وقتی $x \rightarrow 2$ ، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \rightarrow 2$ ، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = 2$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + b = 0 \quad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{2 \times 2}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با استفاده از رابطه (I) مقدار b برابر است با:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right) + b = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

از گفته سؤال می‌فهمیم که: $f'(1) = 4$
حد داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h^2 - 2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h(h-2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-2} = (-1-1)f'(1) \times \frac{1}{-2} = f'(1) = 4 \end{aligned}$$

نکته: اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+nh) - f(a+mh)}{h} = (n-m)f'(a)$$

تالیفی علی شهبابی فراهانی

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5 \xrightarrow{\text{پس } x=1 \text{ ریشه صورت است}} f(1) = 0$$

می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$ است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 5$$

حالا از تابع $f(x - f(x))$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (f(x - f(x)))' &= (x - f(x))' \times f'(x - f(x)) = (1 - f'(x)) \times f'(x - f(x)) \\ \xrightarrow{x=1} &(1 - f'(1)) \times f'(1 - f(1)) = (1 - 5) \times f'(1 - 0) = -4f'(1) = -4(5) = -20 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

هنگامی که $x = 1$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ در نتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیرصفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{a+b} - 2 = 0 \Rightarrow a+b = 4$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{4\sqrt{a+b}} = \frac{3}{2} \xrightarrow{a+b=4} a = 12 \Rightarrow b = -8$$

راه اول:

چون تابع $[-x]$ در $x_0 = 2$ ناپیوسته است، پس تابعی که در آن ضرب می‌شود باید عامل $(x-2)^2$ داشته باشد (چرا؟) تا هم پیوسته و پس از آن مشتق‌پذیر شود.
بنابراین:

$$3(x-2)^2 = 3x^2 + ax + b$$

بعد از صفر قرار دادن به دست می‌آید:

$$a = -12$$

$$b = 12$$

تالیفی محمد درمان

چون وقتی $x \rightarrow 1$ ، حد مخرج کسر به صفر میل می‌کند و جواب حد برابر با $\frac{1}{2}$ است، کسر باید ابهام $\frac{0}{0}$ بدهد؛ یعنی صورت کسر نیز در $x \rightarrow 1$ برابر با صفر شود:

$$f(1) + 1 = 0 \Rightarrow f(1) = -1$$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{f(x) - (-1)}{x - 1}}_{f'(1)} \times \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = 1$$

با استفاده از فرمول مشتق $y = f^n(u) \Rightarrow y' = n f^{n-1}(u) \times u' f'(u)$ داریم:

$$\begin{aligned} y' &= 3f^2\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) \times \left(\frac{f^2(x)}{x}\right)' f'\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) \\ &= 3f^2\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) \times \frac{2f(x)f'(x) \cdot x - f^2(x)}{x^2} \times f'\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) \\ \xrightarrow{x=1} y'(1) &= 3f^2(1) \times (2(-1)(1) - 1) \times f'(1) = 3 \times (-3) \times 1 = -9 \end{aligned}$$

تالیفی علی ناری ابدانه

تابع $[1 - x]$ در $x = 2$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست ندارد، بنابراین $f'_+(2)$ به شرطی وجود دارد که $ax + b$ به ازای $x = 2$ برابر صفر باشد پس $2a + b = 0$ و یا $b = -2a$.

$$f(x) = |ax - 2a| [1 - x] = |a| |x - 2| [1 - x]$$

$$f'_+(2) = |a| \times 1 \times (-2) = -2|a| = -4 \Rightarrow |a| = 2$$

$$f'_-(2) = |a| \times (-1) \times (-1) = |a| = 2$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

ابتدا پیوستگی تابع g را در $x = a$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a) f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (x - a) f(x) = 0$$

$$g(a) = 0$$

بنابراین g در $x = a$ پیوسته است. حال تعریف مشتق g را در $x = a$ می‌نویسیم:

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

پس g در $x = a$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر با b است.

تالیفی محمدرضا توجه

تابع f در نقاطی که داخل جزء صحیح عددی صحیح شود، ناپیوسته و فاقد مشتق است، مگر عددی که داخل جزء صحیح را صحیح و مینیمم کند:

$$x^y = k \Rightarrow x = \pm\sqrt[k]{k} \Rightarrow x = 0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \dots$$

تابع $[x^y]$ در $x = 0$ مینیمم دارد و پیوسته و مشتق‌پذیر است؛ پس تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.
تابع f در $x = -1$ نیز به دلیل داشتن عامل صفر کننده با توان دو مشتق‌پذیر است:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^y [x^y] - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)[x^y] = 0$$

با حذف دو نقطه 0 و -1 از نقاط بالا بزرگ‌ترین بازه‌ی باز که f در آن مشتق‌پذیر است عبارت است از $(-\sqrt{2}, 1)$ و بیشترین مقدار $b - a = 1 + \sqrt{2}$.

نکته: تابع $f(x) = (x-a)^n [x]$ ، $a \in \mathbb{Z}$ ، $n \in \mathbb{N}$:

الف) اگر $n = 1$ ، f در a پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

ب) اگر $n \geq 2$ ، f در a پیوسته و مشتق‌پذیر است.

تالیفی علی ناری ابیانه

$$f'fg + g'f^2 = f(f'g + g'f) = f(fg)'$$

$$fg = (\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x})(\sqrt{x-2} - \sqrt{7-x}) = x-2 - (7-x) = 2x-9 \Rightarrow (fg)' = 2$$

$$f(fg)' = (\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x}) \times 2 \xrightarrow{x=3} (1+2) \times 2 = 6$$

تالیفی رضا عابدی

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه "۱": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) < 0$ و $y > 0$ ؛ پس برابر نیست.

گزینه "۲": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y < 0$ ؛ پس برابر نیست.

گزینه "۳": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

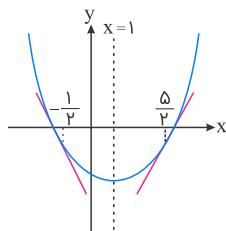
به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

گزینه "۴": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y < 0$ ؛ پس برابر نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در تابع درجه دو، نقاطی که نسبت به محور تقارن سهمی (خط $x = -\frac{b}{2a}$) قرینه‌اند، مشتقشان قرینه هم است. در تابع $f(x) = x^2 - 2x - 2$ ، معادله محور تقارن، خط $x = 1$ است؛ پس باید دنبال اعدادی باشیم که میانگینشان ۱ می‌شود. این ویژگی فقط در اعداد گزینه (۳) وجود دارد.



تالیفی علی شهبایی فراهانی

راه حل اول:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-\Delta h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-\Delta h) - f(3) + f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3-2h) - f(3)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3-\Delta h) - f(3)}{h} \right)$$

برای محاسبه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{h}$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$-2h = t \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{t}{2} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{-\frac{t}{2}} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{t} = -2f'(3)$$

برای محاسبه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-\Delta h) - f(3)}{h}$ نیز به روش بالا عمل می‌کنیم:

$$-\Delta h = t \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{t}{\Delta} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-\Delta h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{-\frac{t}{\Delta}} = -\Delta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3+t) - f(3)}{t} = -\Delta f'(3)$$

پس حالا عبارت داده شده برابر است با:

$$-2f'(3) - (-\Delta f'(3)) = 3f'(3) = 3 \times 4 = 12$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k} \right) f'(a)$$

بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-\Delta h)}{h} = \left(\frac{-2 - (-\Delta)}{1} \right) f'(3) = 3f'(3) = 12$$

تالیفی رضا عابدی

به دلیل اینکه زیر رادیکال هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، بنابراین تنها نقاط مشتق‌ناپذیر، نقاط ناپیوستگی $[x]$ است که نقاط $x = 0, \pm 1$ است که البته $x = 0$ به دلیل وجود عامل صفر کننده مکرر در صورت تابع مشتق‌پذیر است.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{3 + [x]^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3 + [x]^2}} = 0$$

تالیفی محمد درمان

$$f'g - g'f = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2} \right) \times g^2 = \left(\frac{f}{g} \right)' \times g^2$$

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{(x-1)(x-4)}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-4} \Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' \times g^2 = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} \times (x-1) \xrightarrow{x=5} \frac{1}{2 \times 1} \times 4 = 2$$

تالیفی رضا عابدی

نقاط مشتق‌ناپذیر، ریشه زیر رادیکال و ریشه درون قدر مطلق است.

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow m = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

$$x < 1 \Rightarrow f(x) = 1 - \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = -1$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{27}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{معادله مماس : } \begin{cases} y - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{27}}\right) \xrightarrow{x=0} y = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ y - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1\left(x + \frac{1}{\sqrt{27}}\right) \xrightarrow{x=0} y = 1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

توجه: اگر عبارت داخل قدر مطلق مثبت بیرون آید، مماس به موازات خط قاطع گفته شده قابل رسم نخواهد بود.

تالیفی امیر خمسه

$$f(۴) = ۲, f'(۴) = ۳$$

$$g(x) = f(۲f(x^۲)) \Rightarrow g'(x) = ۲ \times ۲x \times f'(x^۲) \times f'(۲f(x^۲))$$

$$\Rightarrow g'(۲) = ۸f'(۴)f'(۲f(۴)) = ۸ \times ۳ \times f'(۴) = ۸ \times ۳ \times ۳ = ۷۲$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

$$A \Big|_0^۲, B \Big|_۳^0 \in g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{۶ - ۳x}{۲}$$

تابع f را باید به صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم:

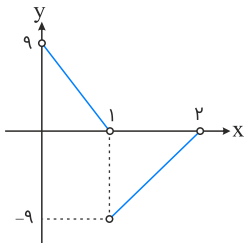
$$0 \leq x \leq 1: A \Big|_0^0, B \Big|_۳^1 \in f \Rightarrow m = \frac{۳ - 0}{1 - 0} = ۳ \Rightarrow y = ۳x$$

$$1 < x \leq 2: A \Big|_۳^1, B \Big|_0^۲ \in f \Rightarrow m = \frac{۳ - 0}{1 - ۲} = -۳ \Rightarrow y - 0 = -۳(x - ۲)$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{۶ - ۳x}{۲} \times ۳x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ -۳(x - ۲) \times \frac{۶ - ۳x}{۲} & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} ۹x - \frac{۹}{۲}x^۲ & ; 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{۹}{۲}x^۲ - ۱۸x + ۱۸ & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} ۹ - ۹x & ; 0 < x < 1 \\ ۹x - ۱۸ & ; 1 < x < 2 \end{cases}$$



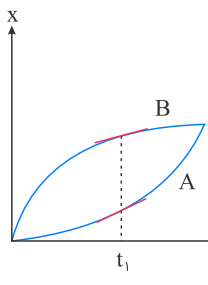
تالیفی امیر خمسه

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های ۱ و ۴: باتوجه به نمودار از لحظه‌ای که دو دونه به هم می‌رسند به بعد، دوندۀ A جلوتر خواهد بود و این به این معنا است که دوندۀ A زودتر به مقصد می‌رسد؛ اما به شرطی که حرکت آن‌ها ادامه می‌داشت اما در لحظه $t = t'$ حرکت آن‌ها تمام می‌شود و هر دو باهم به مقصد می‌رسند.

گزینه ۲: باتوجه به نمودار، در لحظه $t = t_1$ بیشترین مقدار فاصله رخ می‌دهد و در این لحظه شیب خط مماس بر منحنی دو نمودار یکسان است و از آنجا که شیب نمودار مکان برحسب زمان، تعیین‌کننده سرعت لحظه‌ای است، می‌توان گفت در این لحظه سرعت دو دونه برابر است.

گزینه ۳: سرعت متوسط از لحظه $t = 0$ تا $t = a$ برابر شیب خط واصل بین دو نمودار در این دو نقطه است؛ باتوجه به آنکه مبدأ زمانی برای هر دو متحرک در $t = 0$ در نظر گرفته شده است، باید در هنگام $t = a$ مکان دو متحرک هم یکسان باشد که این اتفاق فقط یکبار رخ می‌دهد. به بیان دیگر اگر توابع مکان برحسب زمان دونده‌های A و B را به ترتیب $A(t)$ و $B(t)$ بنامیم باید داشته باشیم:



$$\frac{A(a) - A(0)}{a - 0} = \frac{B(a) - B(0)}{a - 0} \Rightarrow A(a) = B(a)$$

تالیفی محمدجواد محسنی

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F\left(\frac{1}{x}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{t} - \frac{1}{2}} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{2}{t}\left(t - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \left(-\frac{t}{2}\right) \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{t - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} F'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow F'\left(\frac{1}{2}\right) = -16 \end{aligned}$$

تالیفی محمد درمان

می‌دانیم شیب خط مماس رسم شده روی تابع $f(x)$ برابر $f'(1)$ است. از طرفی شیب خط رسم شده برابر تانژانت زاویه‌ای است که با قسمت مثبت محور x ها می‌سازد.
پس داریم:

$$f'(1) = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$$

از طرف دیگر سؤال از ما حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - 1}$ را می‌خواهد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 2)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} \times (\sqrt{x} + 1) = f'(1) \times (1 + 1) = -1 \times 2 = -2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$f(x) + g(x) = \log(\sqrt{x^2 + 2} - x) + \log(\sqrt{x^2 + 2} + x)$$

$$= \log(x^2 + 2 - x^2) = \log 2$$

$$f(x) + g(x) = \log 2$$

از طرفین تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) + g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -g'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1 \Rightarrow \frac{f'(2)}{g'(2)} = -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(2 + 3h^2) - f^3(2 - 2h^2)}{h^3 - h^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + 3h^2) - f(2 - 2h^2)}{h^2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2 + 3h^2) + f(2 + 3h^2)f(2 - 2h^2) + f^2(2 - 2h^2)}{h - 1} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + 3h^2) - f(2 - 2h^2)}{h^2} \times \left(\frac{3f^2(2)}{-1} \right)
 \end{aligned}$$

با فرض $h^2 = t$ ، اگر $h \rightarrow 0$ آنگاه $t \rightarrow 0^+$ ؛ بنابراین:

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2 + 3t) - f(2 - 2t)}{t} \times (-3f^2(2)) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(3 \times \frac{f(2 + 3t) - f(2)}{3t} \right) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-2 \times \frac{f(2 - 2t) - f(2)}{-2t} \right) \times (-3f^2(2)) \\
 &= (3f'(2) - (-2)f'(2))(-3f^2(2)) = -15f'(2)f^2(2)
 \end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ در همسایگی} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2^3 - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4 \\ f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(2) = 10 \end{cases}$$

$$A = -15 \times 10 \times 16 = -2400$$

تالیفی رضا عابدی

$$f'(2) = -f'(8)$$

می‌دانیم که در سهمی $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ، شیب خطوط مماس بر نمودار آن در نقاط با عرض یکسان قرینه یکدیگر هستند؛ بنابراین این نقاط نسبت به محور تقارن سهمی متقارن هستند. حال اگر طول این نقاط را α و β بنامیم داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{B}{A}$$

در این سؤال داریم:

$$2 + 8 = a \Rightarrow a = 10 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 10x + b$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x + b + 16 - 40 - b}{x - 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x - 24}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)(x - 6)}{x - 4} = 2
 \end{aligned}$$

تالیفی سید عادل حسینی

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(2h+1)}{3h} \stackrel{0}{=} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(1-h) - 2f'(2h+1)}{3} = -f'(1) \Rightarrow -f'(1) = 4 \Rightarrow f'(1) = -4$$

$$y = f(2\sqrt{x} - x^3) \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3x^2\right)f'(2\sqrt{x} - x^3) \Rightarrow y'(1) = -2f'(1) = -2(-4) = 8$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

$$f(x) = |x(x-1)| \sqrt[3]{x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

این تابع در $x = \pm\sqrt{2}$ مماس قائم دارد، زیرا $f'(\pm\sqrt{2}) = +\infty$ (به کمک تعریف بروید!)
 اما تابع در $x = 1$ چون ریشه ساده قدر مطلق است، مشتق‌ناپذیر و گوشه است؛ بنابراین نمی‌توان مماس واحد رسم کرد و در $x = 0$ نیز تابع مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است.
 زیرا:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{-2}|x|\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = 0$$

پس فقط در $x = \pm\sqrt{2}$ مماس دارد.

تالیفی محمد درمان

نکته: اگر $f(x) = g(x)h(x)$ و $g(a) = 0$ باشد (g را عامل صفرکننده در $x = a$ گوئیم)، آنگاه:

$$f'(a) = g'(a)h(a)$$

عبارت $(x^F - 16)$ تابع $f(x)$ را در $x = 2$ صفر می‌کند؛ بنابراین:

$$f(x) = (x^F - 16) \times \left(\frac{1}{F}(x^F - 1)(x^F - 2) \dots (x^F - 15)(x^F - 17)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق در } x=2} (Fx^3) \times \left(\frac{1}{F}(x^F - 1)(x^F - 2) \dots (x^F - 15)(x^F - 17)\right)$$

$$\xrightarrow{x=2} 32 \times \frac{1}{F} \times (15)(14) \dots (1)(-1) = -16 \times 15 \times 14 \times \dots \times 1 = -16!$$

تالیفی رضا عابدی

نکته: اگر نقاط به طول‌های α و β روی سهمی f ، نسبت به محور تقارن سهمی متقارن باشند، آنگاه داریم:

$$f'(\alpha) = -f'(\beta)$$

پس در اینجا $x = 1$ و $x = 3$ نسبت به محور تقارن سهمی متقارن‌اند:

$$x_S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{1+3}{2} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -4$$

تابع f' را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

مساحت مثلثی که یک خط با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$S = \frac{|\text{طول از مبدأ} \times \text{عرض از مبدأ}|}{2}$$

در f' ، عرض از مبدأ و طول از مبدأ را حساب می‌کنیم:

$$b = \text{عرض از مبدأ}$$

$$0 = 2ax + b \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \text{طول از مبدأ}$$

پس:

$$\frac{\left| b \times \frac{-b}{2a} \right|}{2} = 2 \xrightarrow{\frac{b}{a} = -4} \frac{\left| b \times \frac{4}{2} \right|}{2} = 2 \Rightarrow |b| = 2$$

حالا از تساوی $b = -4a$ ، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$|b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow 2 = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \Rightarrow -2 = -4a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(۱) f برابر با $a + b$ است. در هر دو حالت آن را حساب می‌کنیم:

$$(1) a = -\frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow a + b = 1/2$$

$$(2) a = \frac{1}{2}, b = -2 \Rightarrow a + b = -1/2$$

باتوجه به شکل $f(-2) = 2$ و $f'(-2) = -\frac{1}{2}$ چون f از $(-2, 2)$ می‌گذرد و شیب خط مماس بر f در $x = -2$ برابر $-\frac{1}{2}$ است:

$$\begin{aligned} g'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x}{f(x)} + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + f(x)}{(x + 2)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2 + f(x) - 2}{(x + 2)f(x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)} \left(1 + \frac{f(x) - 2}{x + 2}\right) = \frac{1}{2} (1 + f'(-2)) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

تالیفی علی ناری ابیانه

$$f(x) = (x^2 - 1) |(x + 1)(x + 2)|$$

در نقطه $x = -1$ عامل صفرکننده پشت قدر مطلق باعث مشتق‌پذیری f در این نقطه می‌شود، پس در $x = a = -2$ تابع f مشتق‌ناپذیر است.

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = -(x^2 - 1)(x + 1) \underbrace{(x + 2)}_{\text{عامل صفرکننده}} \Rightarrow f'_+(-2) = -(x^2 - 1)(x + 1) \Big|_{x = -2} = 3$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

ابتدا مختصات نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی را از روی خط مماس در این نقطه پیدا می‌کنیم:

$$2y - 3x = 1 \xrightarrow{x=1} 2y - 3 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

چون دوره تناوب تابع f برابر با ۴ و $f(1) = 2$ ، پس:

$$f(-7) = f(-7 + 2 \times 4) = f(1) = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

شیب خط $2y - 3x = 1$ برابر با $\frac{3}{2}$ است، پس $f'(1) = \frac{3}{2}$ است.

نکته: اگر T دوره تناوب تابع f باشد، آنگاه T دوره تناوب تابع f' نیز محسوب می‌شود (حتی ممکن است اعداد کمتر از T دوره تناوب f' باشند).

$$\text{پس } f'(-7) = f'(1) = \frac{3}{2}$$

حالا معادله خط مماس بر f در نقطه $\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$ را می‌نویسیم:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x + 7) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{25}{2}$$

عرض از مبدأ این خط، عدد $\frac{25}{2}$ است.

تالیفی علی شهبازی فراهانی

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4x - 1$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^2 + 4x - 1$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2, \quad f(2) = \frac{10}{3} \Rightarrow A \left(2, \frac{10}{3} \right)$$

$$\text{شیب خط مماس: } m = f'(2) = -4 + 8 - 1 = 3$$

$$\text{عرض از مبدأ: } y - \frac{10}{3} = 3(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{10}{3} - 6 = \frac{-8}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

نقاطی که در آن‌ها، داخل براکت مقداری صحیح شود، می‌توانند ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر باشند؛ لذا x و x^2 را برابر با مقدار صحیح قرار می‌دهیم و در بازه مطلوب نقاط $2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 0$ به دست می‌آیند.

$$x = \sqrt{3} : y(\sqrt{3}) = 2 \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$x = 1 : y(1) = 0 \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} y = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مشتق‌پذیر} , \quad x = \sqrt{2} : y(\sqrt{2}) = 1 \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} y = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

توجه کنید که از پیوسته بودن تابع در $x = 1$ نمی‌توان به طور قطع نتیجه گرفت که مشتق‌پذیر است اما از آنجا که تابع در بازه $(0, 1)$ ، برابر با مقدار ثابت صفر است، پس مشتق‌پذیر است. همچنین در نقاط $0, 2$ که ابتدا و انتهای بازه هستند، مشتق وجود ندارد. بنابراین در بازه $[0, 2]$ چهار نقطه مشتق‌ناپذیر وجود دارد.

تالیفی محمدجواد محسنی

اگر $f(x+2) = -f(x)$ باشد، پس $f(x+4) = f(x)$ و اگر از دو طرف مشتق بگیریم:

$$f'(x+4) = f'(x) \quad (*)$$

حال:

$$(f(3x^2 + 2x))' = (6x + 2) f'(3x^2 + 2x) |_{x=1} = 8f'(5) \quad \text{(I)}$$

$$(f(4x - 3))' = 4f'(4x - 3) |_{x=1} = 4f'(1) \quad \text{(II)}$$

$$\frac{\text{(I)}}{\text{(II)}} : \frac{8f'(5)}{4f'(1)} \xrightarrow{(*) \Rightarrow f'(1)=f'(5)} \frac{8f'(1)}{4f'(1)} = 2$$

تالیفی محمد درمان

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(\sqrt[2]{x^2 + h}) - f'(\sqrt[2]{x^2})}{h} = f''(\sqrt[2]{x^2})$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x)(2x)(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = \sqrt[2]{x^2} : f''(\sqrt[2]{x^2}) = 9^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(\sqrt[2]{x^2})(\sqrt[2]{x^2})(9)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

تالیفی محمدجواد محسنی

$$f(x) = f(x + 3) \Rightarrow \begin{cases} f(6 + h) = f(6 + h + 3) = f(9 + h) \\ f(6) = f(6 + 3) = f(9) \\ f(9) = f(9 + 3) = f(12) \end{cases} \Rightarrow f(12) = f(6)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9 + h) - f(12)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6 + h) - f(6)}{h} = f'(6)$$

تالیفی رضا عابدی

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| [ax]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2) \overbrace{[2a]}^{2a}}{(x-2)} = \lambda a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| [ax]}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-\overbrace{(x-2)(x+2)}^f (2a-1)}{x-2} = -\lambda a + f$$

$$\Rightarrow \lambda a - (-\lambda a + f) = 44 \Rightarrow 16a = 44 \Rightarrow a = 11 \Rightarrow [a-1] = [2] = 2$$

دقت کنید که اگر $f'_-(2) - f'_+(2)$ را حساب می‌کردیم خواهیم داشت:

$$-\lambda a + f - \lambda a = 44 \Rightarrow -16a = 40 \Rightarrow a = \frac{-40}{16} = \frac{-5}{2} = -2/5$$

که در این صورت $a \notin \mathbb{N}$.

تالیفی نرگس کارگر

نکته: اگر چندجمله‌ای f از درجه n و چندجمله‌ای g از درجه m باشد، آنگاه $f \circ g$ یا $g \circ f$ از درجه mn است.

نکته: اگر f از درجه n باشد، آنگاه f' از درجه $n-1$ است.

فرض کنید f یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آنگاه:

$$f \circ f' \text{ درجه} = n \times (n-1) = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{W}} n = 6$$

$$f' \circ f' \text{ درجه} = (n-1) \times (n-1) = 5 \times 5 = 25$$

تالیفی رضا عابدی

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ مرزی $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 2| = |1 - 2| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[5]{x^2 - 4x} = \sqrt[5]{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در } x = 1 \text{ ناپیوسته است} \Rightarrow \text{در } x = 1 \text{ مشتق‌ناپذیر است}$$

نکته: تابع قدرمطلق در ریشه مرتبه یک داخل قدرمطلق مشتق‌ناپذیر است.

تابع در $x = 2$ مشتق‌ناپذیر است $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$

نکته: در توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، تابع در ریشه‌های عبارت زیر رادیکال مشتق‌ناپذیر است (البته به شرطی که مرتبهٔ (توان) آن ریشه از فرجه رادیکال بیشتر نباشد).

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است. تابع در $x = 4$ نیز مشتق‌ناپذیر است ولی چون $x = 4$ در بازه $x \leq 1$ قرار ندارد قابل قبول نیست.

پس تابع در ۳ نقطه مشتق‌ناپذیر است.

تالیفی رضا عابدی

نکته: اگر $y = f(x)g(x)$ و توابع f و g در a مشتق‌پذیر از مرتبه دوم باشند و f در $x = a$ عامل صفر کننده با توان ۲ داشته باشد، برای محاسبه $y''(a)$ کافی است از عامل صفر کننده دو بار مشتق بگیریم و در بقیه تابع ضرب کنیم و در آخر $x = a$ را جایگذاری کنیم.

ابتدا تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16x + 64 + x}{x\sqrt[3]{x-7}} = \frac{(x-8)^2 + x}{x\sqrt[3]{x-7}} = \underbrace{\frac{(x-8)^2}{x\sqrt[3]{x-7}}}_{y_1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x-7}}}_{y_2}$$

اکنون مشتق دوم توابع y_1 و y_2 را جداگانه محاسبه و باهم جمع می‌کنیم.

باتوجه به اینکه تابع y_1 دارای عامل صفر کننده $(x-8)^2$ با توان ۲ می‌باشد، طبق نکته کافی است ابتدا از عامل صفر کننده دو بار مشتق بگیریم و در بقیه تابع ضرب کنیم و در آخر $x = a$ را جایگذاری کنیم:

$$y_1 = (x-8)^2 \times \frac{1}{x\sqrt[3]{x-7}} \Rightarrow y_1'' = 2 \times \frac{1}{x\sqrt[3]{x-7}}$$

$$\Rightarrow y_1''(8) = 2 \times \frac{1}{8\sqrt[3]{8-7}} = \frac{1}{4}$$

حال مشتق دوم y_2 را به دست می‌آوریم:

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{x-7}} = (x-7)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y_2' = -\frac{1}{3}(x-7)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow y_2'' = \frac{4}{9}(x-7)^{-\frac{7}{3}}$$

$$\Rightarrow y_2''(8) = \frac{4}{9}(8-7)^{-\frac{7}{3}} = \frac{4}{9}$$

بنابراین مشتق دوم تابع f در نقطه $x = 8$ برابر است با:

$$\Rightarrow f''(8) = y_1''(8) + y_2''(8) = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36}$$

گزینه "۳" درست است.

این تابع در x های صحیح ($x \neq 0$)، فقط از راست پیوسته است؛ زیرا: ($a \in \mathbb{Z}$)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a^2 - a$$

بنابراین در اعداد صحیح بازه $(-2, 2)$ (غیر از صفر) ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. اما در $x = 0$ نیز مشتق ناپذیر است؛ زیرا:

$$f'_+(\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x[x]}{x} = 0 \neq f'_-(\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[x]}{x} = -1$$

در ابتدا و انتهای بازه یعنی $x = 2$ ، $x = -2$ نیز مشتق ناپذیر است. بنابراین تابع در نقاط $-2, -1, 0, 1$ و 2 مشتق ناپذیر است.

تالیفی سید عادل حسینی

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{x+2} - 4}{1 - \sqrt{x-1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{2\sqrt{x+2}}}{\frac{-1}{3\sqrt{(x-1)^2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۶

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)}{h} = \frac{f(1)}{0}$$

برای اینکه حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)}{h}$ موجود باشد، باید $f(1) = 0$ باشد. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \overbrace{f(1)}^0}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$$

باتوجه به تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow f'(1) = -1$$

حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)}{h}$ را به دست می آوریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)}{h} = -2f'(1) = -2 \times (-1) = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

ریشه‌های ساده‌ی تابع داخل قدر مطلق باعث به وجود آمدن نقاط گوشه و در نتیجه مشتق‌ناپذیری می‌شوند.
 نکته: عامل صفرکننده باعث تغییر نقاط مشتق‌ناپذیر به مشتق‌پذیر می‌شود. به‌عنوان مثال اگر $x = 0$ برای تابع $f(x)$ نقطه گوشه و مشتق‌ناپذیر محسوب شود، برای تابع $xf(x)$ دیگر نمی‌تواند نقطه مشتق‌ناپذیر باشد.
 در اینجا داریم:

$$y = |xf(x) - f(x)| = |(x-1)f(x)|$$

نقاط $x = -4$, $x = 1$ و $x = 3$ ریشه ساده هستند، اما عامل $(x-1)$ باعث می‌شود که نقطه $x = 1$ از میان نقاط مشتق‌ناپذیر حذف شود؛ پس بزرگ‌ترین بازه مشتق‌پذیری $(-4, 3)$ و طول آن ۷ است.

تالیفی محمدجواد محسنی

باتوجه به سؤال و ناپیوستگی $[x]$ در $x_0 = 1, 3$ باید:

$$2x^3 + mx^2 + 2nx + h = 2(x-1)(x-3)^2 = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 18$$

$$m = -14$$

$$\Rightarrow n = 15 \quad \Rightarrow 15 - (-14) + (-18) = 11$$

$$h = -18$$

تالیفی محمد درمان

اولاً که تابع باید در a پیوسته باشد.

$$a^3 + 1 = a^2 + a \Rightarrow a^3 - a^2 - a + 1 = 0$$

$$a^2(a-1) - (a-1) = 0 \Rightarrow (a-1)(a^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

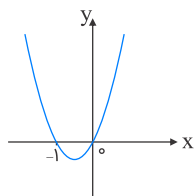
مشتق چپ و راست در $a = 1$ برابر با ۳ است ولی مشتق چپ و راست در $a = -1$ برابر نیست.

$$f'_+(-1) = 3, \quad f'_-(-1) = -1$$

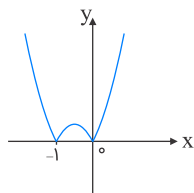
پس $a = 1$ قابل قبول است.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & ; x > 1 \\ x^2 + x & ; x \leq 1 \end{cases}$$

تابع را رسم می‌کنیم.



در نتیجه $|f(x)|$ به فرم زیر است.



یعنی در 0 و -1 مشتق‌ناپذیر است؛ پس $|f(x-1)|$ در 0 و 1 مشتق‌ناپذیر است.

نقاط مشکوک به مشتق‌ناپذیری تابع، نقاط با طول صحیح می‌باشند زیرا در این نقاط تابع مشکوک به ناپیوستگی و لذا مشتق‌ناپذیری است. این نقاط در بازه مطرح شده عبارتند از $x = 0, 1, 2$ یعنی سه نقطه. حال مشتق‌پذیری تابع f در این نقاط بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)[-|x|]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)[-|x|] \\ = (-2)(-1) = 2$$

یعنی تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-2)[-|x|] - 1}{x - 1}$$

این حد موجود نیست (حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$ است) یعنی تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست. (در واقع حتی پیوسته هم نیست!)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)[-|x|]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x[-|x|]$$

این حد هم موجود نیست، حد راست برابر -6 و حد چپ برابر -4 است؛ بنابراین تابع در $x = 2$ هم مشتق‌پذیر نیست علی‌رغم اینکه پیوسته است.

یعنی تابع در دو نقطه $x = 1, 2$ از بازه مذکور مشتق ندارد.

تالیفی محمدرضا توجه

$$y' = \frac{10x - \frac{3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3x + \sqrt{x}}}}{3\sqrt{\left(5x^2 - \sqrt{3x + \sqrt{x}} + 5\right)^2}} \Bigg|_{x=1} = \frac{10 - \frac{7}{4}}{3 \times 4} = \frac{73}{96}$$

تالیفی محمد درمان

در عبارت $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 16} = \frac{1}{4}$ حد مخرج صفر است ولی حد کسر، عددی حقیقی است؛ پس باید حد صورت هم صفر باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} (f(x) - 2) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2 \xrightarrow{\text{پیوسته بودن}} f(4) = 2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 16} = \frac{1}{4} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x-4} \times \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4} &\Rightarrow \frac{1}{8} f'(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow f'(4) = 2 \end{aligned}$$

حال مشتق تابع $y = \frac{1}{x} f(x^2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-1}{x^2} f(x^2) + \frac{1}{x} f'(x^2)(2x) \\ \Rightarrow y'(2) &= \frac{-1}{4} f(4) + \frac{1}{2} f'(4)(4) = \frac{-1}{4}(2) + 2(2) = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

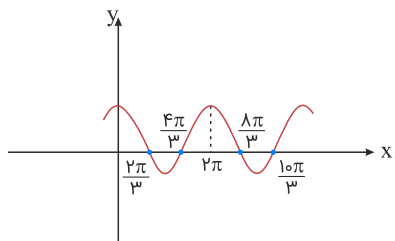
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$y = \frac{1}{F} \Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow \begin{cases} y'_+(a) = \frac{-f'_+(a)}{f^2(a)} = +\infty \\ y'_-(a) = \frac{-f'_-(a)}{f^2(a)} = -\infty \end{cases}$$

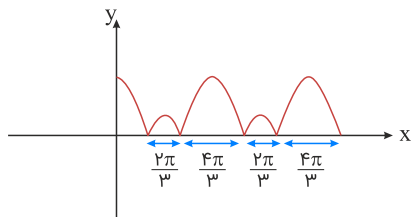
باتوجه به مشتق چپ و راست $y = \frac{1}{f}$ ، گزینه ۱ صحیح است. چون نیم‌ماس راست از زوایای کمتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود، بنابراین شیب آن به $+\infty$ میل می‌کند ولی نیم‌ماس چپ از مقادیر بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود که شیب آن به $-\infty$ میل می‌کند.

تالیفی محمد درمان

نمودار تابع $y = 2 \cos x + 1$ را نگاه کنید:



نمودار $f(x) = |2 \cos x + 1|$ به شکل زیر خواهد بود:



نمودار تابع در فاصله‌هایی به طول‌های $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3}$ مشتق‌پذیر است؛ پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع مشتق‌پذیر است، به طول $\frac{4\pi}{3}$ است.

تذکر: تابع در نقاطی که عبارت داخل قدر مطلق صفر می‌شود، یعنی در $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ دارای نقطه گوشه است و مشتق‌پذیر نیست.

در هر دو حد داده شده، چون مخرج کسرها صفر می‌شوند و حاصل حدود برابر با عدد حقیقی شده‌اند، باید ابهام $\frac{0}{0}$ داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 2}{x^3 - 8} = 2 \Rightarrow g(2) + 2 = 0 \Rightarrow g(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{12} g'(2) = 2 \Rightarrow g'(2) = 24$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(-2-h) + 1}{h^2 - 2h} = -1 \Rightarrow f''(-2-h) + 1 = 0 \Rightarrow f''(-2) = -1 \Rightarrow f(-2) = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(-2-h) + 1)(f'(-2-h) - f(-2-h) + 1)}{h(h-2)} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(f(-2-h) + 1)}{-h}}_{f'(-2)} \times \frac{(f'(-2-h) - f(-2-h) + 1)}{-(h-2)} = -1$$

$$\Rightarrow f'(-2) \times \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{2} = -1 \Rightarrow f'(-2) \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow f'(-2) = \frac{-2}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow f(g(2)) = f(-2) = -1 \\ (f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 24f'(-2) = 24 \times \frac{-2}{3} = -16 \end{cases}$$

$\Rightarrow y + 1 = -16(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = 31$ عرض از مبدأ خط مماس

تالیفی علی ناری ابیانہ

نکته: با داشتن رأس تابع درجه دوم و یک نقطه آن، معادله درجه دوم به فرم $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ نوشته می‌شود که $S(\alpha, \beta)$ رأس تابع است.

$$y = a(x + 1)^2 + 2 \xrightarrow{A(0,3) \in f} 3 = a(0 + 1)^2 + 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = (x + 1)^2 + 2$$

$$f'(x) = 2(x + 1) \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f'(-3) = -4 \\ f''(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{f''(2)}{f'(-3)} = -\frac{1}{2}$$

تالیفی امیر خمسه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به طوری که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

گام دوم

باتوجه به گام اول و با فرض اینکه $u = x + \sqrt{1+x^2}$ است، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u}$$

$$\begin{aligned} y = f(x + \sqrt{1+x^2}) &\Rightarrow y' = (x + \sqrt{1+x^2})' f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

گزینه ۱

از طرفین رابطه $f(x) = g(\sqrt{x})$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} &\Rightarrow f'(4) = g'(2) \times \frac{1}{2 \times 2} \\ \Rightarrow 2 = \frac{g'(2)}{4} &\Rightarrow g'(2) = 8 \end{aligned}$$

از طرفین رابطه $f'(x) = \frac{g'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{g''(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - g'(\sqrt{x}) \times \frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} \\ \xrightarrow{x=4} f''(4) &= \frac{g''(2) - g'(2) \times \frac{1}{2}}{(2 \times 2)^2} \Rightarrow 2 = \frac{g''(2) - 4}{16} \\ \Rightarrow 32 &= g''(2) - 4 \Rightarrow g''(2) = 36 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

حد صورت کسر به ازای $x = 2$ برابر صفر است؛ ولی چون مقدار حد کسر عددی مخالف صفر است، پس حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رخ داده است؛ بنابراین مقدار حد مخرج کسر نیز به ازای $x = 2$ برابر صفر است.

$$5 - f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 5$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{5 - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{f(2) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{-(f(x) - f(2))} \\ &= (2-3) \times \frac{-1}{f'(2)} = \frac{1}{f'(2)} \Rightarrow \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(2) = 3 \end{aligned}$$

تالیفی رضا عابدی

گام اول

الف) معادله خط گذرا از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
ج) خط در نقطه $x = 3$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 3)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow f(3) = 1$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده شده را به دست می‌آوریم.
روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} -(f(x) + 5) \frac{(f(x) - f(3))}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} -(f(x) + 5)(f'(3)) = -(f(3) + 5)f'(3) = -6 \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \frac{f^2(3) + 4f(3) - 5}{3 - 3} = \frac{1 + 4 - 5}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f'(x)f(x) + 4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3) + 4f'(3)}{-1} \\ &= \frac{2 \left(-\frac{1}{2}\right)(1) + 4 \left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1 - 2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \end{aligned}$$

$$y = f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} y' = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) f'\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{-1}{4} \times f'\left(\frac{1}{2}\right) f'\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{-1}{4} f'\left(\frac{1}{2}\right) f'(0)$$

داریم $x = 0$ در همسایگی راست: $f(x) = -(2x - 1) \Rightarrow f'(x) = -2 \Rightarrow f'(0) = -2$

داریم $x = \frac{1}{2}$ در همسایگی راست: $f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{-1}{4} \times 2 \times (-2) = 1$$

تالیفی امیر زراندوز

ابتدا ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^{\omega} \Rightarrow f'(x) = 1 + \omega g'(x) (g(x))^{\omega-1}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1 + \omega g'(0) (g(0))^{\omega-1}$$

باتوجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(0)=g(0)=1} 1 = 1 + \omega g'(0) (1)^{\omega-1} \Rightarrow \omega g'(0) = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$$

در محاسبه ضابطه تابع $f''(x)$ با عبارت $g'(x) (g(x))^{\omega-1}$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(0) = 0$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفرشونده تابع $f'(x)$ در نقطه $x = 0$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(0) = 0 + \omega g''(0) (g(0))^{\omega-1}$$

$$\xrightarrow{\substack{x=0 \\ g(0)=1}} f''(0) = \omega g''(0) (1)^{\omega-1} = \omega g''(0)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

معادله خط d را می‌یابیم:

$$d \text{ شیب خط} = m_d = \frac{0 - 4}{12 - 0} = -\frac{1}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 12) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 4$$

مقدار تابع $g(x)$ در $x = 3$ با مقدار $y = -\frac{1}{3}x + 4$ در $x = 3$ برابر است، یعنی:

$$g(3) = -\frac{1}{3} \times 3 + 4 = 3 \Rightarrow g(3) = 3$$

همچنین شیب خط مماس بر $g(x)$ در $x = 3$ با شیب خط d برابر است، یعنی:

$$g'(3) = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g^2(x) - 7g(x) + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g(x) - 3)(g(x) - 4)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{g(x) - g(3)}{x - 3} \right) \times \lim_{x \rightarrow 3} (g(x) - 4)$$

$$= g'(3) \times (g(3) - 4) = -\frac{1}{3} \times (3 - 4) = \frac{1}{3}$$

تالیفی رضا عابدی

گام اول

الف) دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.
 ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m + 2)y = mx \Rightarrow y = \left(\frac{m}{m+2}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+2}\right)$ است. کافی است ضابطه $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2}$$

می‌دانیم $1 < \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} < -1$ همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m+2} > -1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{m+m+2}{m+2} > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -1 \\ \frac{m}{m+2} < 1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m-m-2}{m+2} < 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های دو معادله فوق داریم: $m > -1$

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 4a - 2b + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -8 + 2 = -6 \Rightarrow 4a - 2b = -10 \Rightarrow 2a - b = -5$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2, f'_+(-2) = -4a + b \\ 3x^2 - 1 & ; x < -2, f'_-(-2) = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a + b = 11 \\ 2a - b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -2a = 6 \Rightarrow a = -3, b = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - x + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$$

$$f(1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

روش اول:

از راه فرمول تعریف مشتق گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)|x-1| - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0$$

f در 1 مشتق‌پذیر است.

$$\text{گزینه ۲: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 [x] - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)[x] = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)}_0 \times \lim_{x \rightarrow 1} [x] = 0$$

f در 1 مشتق‌پذیر است.

$$\text{گزینه ۳: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^3} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-1} = 0$$

f در 1 مشتق‌پذیر است.

$$\text{گزینه ۴: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x] - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [x] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0$$

f در 1 فاقد مشتق است.

روش دوم:

با دقت در گزینه‌ها، می‌توان دید همگی آن‌ها دارای عامل صفر کننده $x-1$ هستند:

$$\text{گزینه ۱: } f(x) = (x-1)|x-1| \Rightarrow f'(x) = |x-1| + (x-1)(|x-1|)' \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$\text{گزینه ۲: } f(x) = (x-1)^2 [x] \Rightarrow f'(x) = 2(x-1)[x] \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$\text{گزینه ۳: } f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x-1} + (x-1)(\sqrt[3]{x-1})' = 0$$

$$\text{گزینه ۴: } f(x) = (x-1)[x] \Rightarrow f'(x) = 1 \times [x] \Rightarrow f'_+(1) = 1, f'_-(1) = 0$$

پس در گزینه ۴، f در 1 مشتق‌پذیر نیست.

تالیفی علی ناری ابیانه

روش اول:

ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

سپس مقادیر مشتق تابع f را در نقاط 1^- ، $(-1)^+$ و صفر پیدا می‌کنیم:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-|x|} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1-|x|} - 0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1+x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{-1}{2}$$

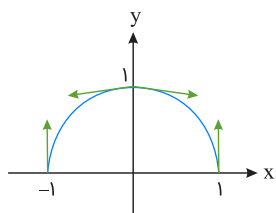
$$\text{به همین ترتیب: } f'_-(0) = \frac{1}{2}$$

در نتیجه گزینه ۴ درست است.

تذکر: به جای استفاده از فرمول تعریف مشتق، می‌توان از طریق مشتق‌گیری از توابع هم به نتایج بالا رسید.

روش دوم:

از طریق رسم شکل تابع به راحتی می‌توان نمودار مشتق را رسم کرد:



$$f'_+(-1) \rightarrow +\infty, \quad f'_-(1) \rightarrow -\infty$$

می‌دانیم تابع در $x = \pm 1$ مماس قائم دارد. چون تابع بعد از -1 صعودی است، پس $f'_+(-1) \rightarrow +\infty$ و چون قبل از 1 نزولی است، داریم $f'_-(1) \rightarrow -\infty$. از روی شکل معلوم است که $f'_+(0) < 0$ و $f'_-(0) > 0$ پس گزینه ۴ درست است.

تالیفی علی ناری ابدانه

می‌دانیم خطوط موازی دارای شیب برابر هستند، پس داریم: $a_{d_1} = a_{d_2}$
با توجه به شکل نقاط $(0, y_2)$ و (λ, y_1) روی خط d_1 هستند. ابتدا مقادیر y_2 و y_1 را به دست می‌آوریم:

$$y_1 = \frac{f(\lambda) - \omega}{\lambda + 1} = \frac{32 - \omega}{9} = 3 \Rightarrow (\lambda, 3)$$

$$y_2 = \frac{f(0) - \omega}{0 + 1} = -\omega \Rightarrow (0, -\omega)$$

حالا می‌توانیم با داشتن دو نقطه شیب خط d_1 را به دست آوریم.

$$a_{d_1} = \frac{3 - (-\omega)}{\lambda - 0} = +1 \Rightarrow a_{d_1} = a_{d_2} = +1$$

از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر +1 قرار می‌دهیم تا محل برخورد خط d_2 و تابع را بیابیم.

$$y' = \frac{f - (-\omega)}{(x+1)^2} = +1 \Rightarrow 9 = (x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

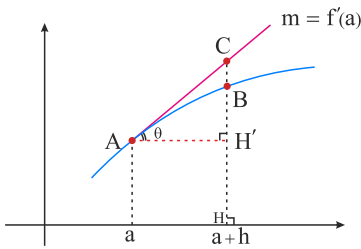
با توجه به شکل مقدار $x = -4$ غیرقابل قبول است.

حالا با داشتن شیب خط d_2 و یک نقطه از آن معادله آن را بیابیم.

$$a_{d_2} = +1, (2, 1) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{y=0} x = 1$$

خط d_2 محور طول‌ها را در نقطه $x = 1$ قطع می‌کند.

باتوجه به تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس مطابق شکل زیر می‌توان مقدار تقریبی تابع f را در نقطه‌ای به طول $a + h$ محاسبه نمود:



$$f(a + h) = BH = BH' + H'H = BH' + f(a) \quad (1)$$

از سوی دیگر $\tan \theta = \frac{CH'}{AH'}$ بنابراین:

$$f'(a) = \frac{CH'}{h} \Rightarrow CH' = f'(a)h \quad (2)$$

اما از آنجایی که CH' و BH' تقریباً برابرند:

$$(1), (2) \Rightarrow f(a + h) \simeq f(a) + f'(a)h$$

بنابراین می‌توان مقدار تقریبی $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ را با همین الگو پیدا کرد: (از آنجایی که: $\frac{\pi}{3} \simeq 1/047$)

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \simeq f(1) + f'(1)\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)$$

اما از آنجایی که خط $y = 3x + 1$ در $x = 1$ بر $y = f(x)$ مماس است، می‌توان نتیجه گرفت:

الف) $f(1) = 4$

ب) $f'(1) = 3$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \simeq 4 + 3\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) = \pi + 1$$

تالیفی محمدرضا توجه

اگر طرفین تساوی داده شده را در $x - 1$ ضرب کنیم، داریم:

$$(x - 1)f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)(x^6 + 1) \\ = (x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^6 + 1) = (x^6 - 1)(x^6 + 1) = x^{12} - 1$$

$$\Rightarrow (x - 1)f(x) = x^{12} - 1 \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} f(x) + (x - 1)f'(x) = 12x^{11}$$

$$\xrightarrow{x=2} f(2) + f'(2) = 12 \times 2^{11}$$

تالیفی علی ناری ابیانه

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید همواره نامنفی باشد.
 ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.
 ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

گام دوم

ابتدا دامنه تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1 - x^p \geq 0 \Rightarrow x^p \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته است (باتوجه به اینکه گزینه "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطه $x = 0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^p}}}{x} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکننده صورت و مخرج حذف شود:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^p}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^p})^2}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - 1 + x^p}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^p}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}} \end{aligned}$$

چون داریم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

بنابراین:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^p}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 0}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \Rightarrow f'(a) \Rightarrow +\infty$$

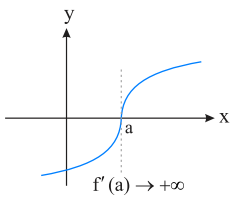
در نتیجه f در a مشتق پذیر نیست، پس عامل صفرکننده نباید بیرون رادیکال باشد، پس: $m = 0$
برای تعیین عدد n ، چون f در a فاقد مشتق است، باید $n < 3$ یعنی $n = 1$ یا $n = 2$:

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[n]{x-a} \Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x-a} - 0}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt[n]{(x-a)^{n-1}}} = +\infty$$

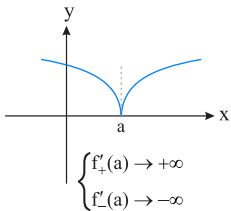
$$n = 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^n}$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{(x-a)^n} - 0}{x-a} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt[n]{x-a}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt[n]{x-a}} = -\infty \end{cases}$$

پس $n = 1$ درست است و $m + n$ برابر با ۱ است.
نکته ۱: نمودار تابع $f(x) = \sqrt[n]{x-a}$ به صورت زیر است:



نکته ۲: نمودار تابع $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^n}$ به صورت زیر است:



تالیفی علی ناری ابدانه

حاصل حد مخرج کسر برابر با صفر است ولی چون حاصل حد داده شده عددی متناهی است، پس حاصل حد صورت کسر نیز برابر با صفر بوده است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(h^f + 2) - f(h^f - 2) + 3) = 0 \Rightarrow f(2) - f(-2) + 3 = 0 \Rightarrow 4n - 4m = -3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^f + 2) - f(h^f - 2) + 3}{h^f} = 6$$

با فرض $h^f = t$ ، اگر $h \rightarrow 0$ آنگاه $t \rightarrow 0^+$ بنابراین:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2+t) - f(-2+t) + 3}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+t) - f(-2)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2) - f(-2) + 3}{t} = f'_+(2) - f'_+(-2) = 6$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) = m(x-2) + n(x+2) \Rightarrow f'_+(2) = m+n$$

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow f(x) = -m(x-2) + n(x+2) \Rightarrow f'_+(-2) = -m+n$$

$$f'_+(2) - f'_+(-2) = 6 \Rightarrow m+n - (-m+n) = 6 \Rightarrow m = 3$$

$$4n - 4m = -3 \xrightarrow{m=3} 4n - 12 = -3 \Rightarrow n = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 4n - m = 9 - 3 = 6$$

تالیفی رضا عابدی

$$\text{شرط پیوستگی: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{x^2-1} = c \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{2x} = c \Rightarrow \frac{a}{2} = c$$

از طرفی باید صورت کسر به ازای $x = 1$ برابر صفر باشد پس:

$$a + b = 0$$

$$x \neq 1 \Rightarrow y = \frac{ax-a}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-a}{(x+1)^2}$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow \frac{-a}{4} = 1 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow c = -2$$

پس:

$$a - b + c = -10$$

$$A = h' \sqrt{\frac{f}{h}} + f' \sqrt{\frac{h}{f}} = \frac{h'f + f'h}{\sqrt{hf}} = \frac{(fh)'}{\sqrt{fh}}$$

$$fh = (1 - x - \sqrt{1 + x^2})^{\lambda} (1 - x + \sqrt{1 + x^2})^{\lambda} = ((1 - x)^{\lambda} - (1 + x^{\lambda}))^{\lambda} = (-2x)^{\lambda} = 2^{\lambda} x^{\lambda}$$

$$A = \frac{2^{\lambda} \times \lambda x^{\lambda-1}}{2^{\lambda} x^{\lambda}} \xrightarrow{x=2} A = \frac{2^{\lambda} \times 2^{\lambda-1} \times 2^{\lambda-1}}{2^{\lambda} \times 2^{\lambda}} = 1024$$

تالیفی رضا عابدی

نکته: تابع $f = g|u|$ در ریشه‌های ساده $u = 0$ مشتق‌ناپذیر است مگر آنکه آن ریشه ساده، ریشه تابع g نیز باشد.

$$f(x) = (x+2)(x-1)|(x+3)(x-1)|$$

ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق هستند ولی چون $x=1$ ریشه عبارت پشت قدر مطلق نیز هست، پس تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین تابع فقط در نقطه $x=m=-3$ مشتق‌ناپذیر است.

x	-3	1
(x+3)(x-1)	+ -	- +

$$\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow f(x) = -(x+3)(x+2)(x-1)^2 \\ x \rightarrow (-3)^- \Rightarrow f(x) = (x+3)(x+2)(x-1)^2 \end{cases}$$

نکته: اگر در تابع $f(x) = g(x)h(x)$ ، $g(a) = 0$ باشد، آنگاه: $f'(a) = g'(a)h(a)$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow f'(x) = -(x+2)(x-1)^2 \Rightarrow f'_+(-3) = -(-1)(-4)^2 = -16 \\ x \rightarrow (-3)^- \Rightarrow f'(x) = (x+2)(x-1)^2 \Rightarrow f'_-(-3) = (-1)(-4)^2 = -16 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f'_+(-3)}{f'_-(-3)} = -1$$

تالیفی رضا عابدی

$$f\left(\frac{x}{\nu}\right) = \frac{x^\nu - 1}{x^\nu + \nu}$$

از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$\frac{1}{\nu} f'\left(\frac{x}{\nu}\right) = \frac{\lambda x}{(x^\nu + \nu)^\nu}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\nu - h) - f(\nu h + \nu)}{\nu h} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(\nu - h) - \nu f'(\nu h + \nu)}{\nu} = \frac{-f'(\nu) - \nu f'(\nu)}{\nu} = \frac{-\nu f'(\nu)}{\nu} = -f'(\nu)$$

$$\frac{1}{\nu} f'\left(\frac{x}{\nu}\right) = \frac{\lambda x}{(x^\nu + \nu)^\nu} \xrightarrow{x=\nu} \frac{1}{\nu} f'(\nu) = \frac{\nu \nu}{\nu \nu^\nu}$$

$$\Rightarrow f'(\nu) = \frac{\nu \nu}{\nu \nu^\nu} \Rightarrow -f'(\nu) = -\frac{\nu \nu}{\nu \nu^\nu}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $g \circ f(x) = g(f(x))$ و $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنه تعریف تابع $g \circ f(x)$ به صورت زیر است:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، ابتدا ضابطه $g \circ f(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطه $g(f(x))$ کافی است در ضابطه $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-1, 1), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{g \circ f} = (-1, 1)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow y = g \circ f(x) = x \Rightarrow f'(x) g'(f(x)) = y' = 1 \quad ; \quad -1 < x < 1$$

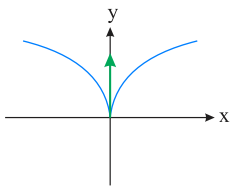
باتوجه به فرمول‌های تعریف مشتق، در اینجا $f'_-(a) - f'_+(a)$ خواسته شده است.
روش اول:
با استفاده از فرمول تعریف مشتق:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-b) \sqrt[3]{(x-a)^3} - 0}{x-a} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-b)}{\sqrt[3]{x-a}} = \frac{a-b}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-b)}{\sqrt[3]{x-a}} = \frac{a-b}{0^-} = +\infty \end{cases} \quad (a < b)$$

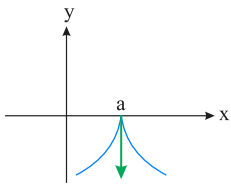
$$\Rightarrow f'_-(a) - f'_+(a) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

روش دوم:

با بررسی نمودار تابع در اطراف $x = a$ می‌دانیم تابع $y = \sqrt[3]{x^3}$ به صورت زیر است که در $x = 0$ نیم‌مماس‌های قائم دارد.



چون $a < b$ ، تابع f در نزدیکی $x = a$ منفی است و نمودار f به صورت زیر است. چون قبل از a نمودار صعودی است، پس $f'_-(a) \rightarrow +\infty$ و بعد از a نمودار نزولی است، پس $f'_+(a) \rightarrow -\infty$ و در نتیجه:



$$f'_-(a) - f'_+(a) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

تالیفی علی ناری ابیان

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 3}{x^3 - 1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b} - 3}{0} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{a+b} = 3 \Rightarrow a+b = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 3}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{3x^2} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{a+b}}}{3} = \frac{\frac{a}{2 \times 3}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a+b = 9 \Rightarrow 3+b = 9 \Rightarrow b = 6$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبدأ مختصات از رابطه $T = \sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید.
 ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطه T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y = \sqrt{x + \lambda}$ را جایگزین می‌کنیم تا T بر حسب متغیر x به دست آید.

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{y = \sqrt{x + \lambda}} T = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x + \lambda})^2} = \sqrt{x^2 + x + \lambda}$$

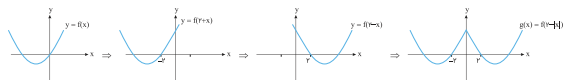
از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x = 7$ حساب می‌کنیم:

$$T' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + \lambda}}$$

$$\Rightarrow T'(7) = \frac{2(7) + 1}{2\sqrt{7^2 + 7 + \lambda}} = \frac{14 + 1}{2\sqrt{49 + 7 + \lambda}} = \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{2 \times 8} = \frac{15}{16}$$

گزینه ۱

برای رسم تابع $g(x)$ ، ابتدا نمودار تابع $f(2 + x)$ را با انتقال نمودار f به اندازه ۲ واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم، سپس از طریق قرینه‌یابی نسبت به محور y ها نمودار تابع $f(2 - x)$ رسم می‌شود و در آخر قسمت‌های سمت چپ محور y ها را حذف کرده و قرینه قسمت سمت راست را در سمت چپ محور y ها رسم می‌کنیم تا تابع $g(x) = f(2 - |x|)$ رسم شود:



نمودار تابع g در دو نقطه مماس افقی دارد؛ یعنی g' در دو نقطه باید برابر با صفر شود. چون نمودار g شامل سهمی‌هایی با دهانه روبه‌بالا است، پس ضرب x^2 در معادلات آن‌ها مثبت است؛ پس g' برابر با تابع خطی با شیب مثبت است؛ بنابراین گزینه ۱ درست است.

تالیفی علی ناری ابدانه

گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{4 - x}) \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \cdot g(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2) = \frac{(g(2))^2}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۷

تابع f در نقاطی مماس موازی محور طول‌ها (مماس افقی) دارد که در آن‌ها شیب مماس بر منحنی برابر با صفر باشد؛ پس قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ x = 5 \Rightarrow 75a + 10b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 72a + 8b = 0 \Rightarrow b = -9a$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b + c + \frac{2}{3} = 3 \Rightarrow a + b + c = \frac{7}{3} \quad (1)$$

$$f(5) = -\frac{23}{3} \Rightarrow 125a + 25b + 5c + \frac{2}{3} = -\frac{23}{3}$$

$$\Rightarrow 125a + 25b + 5c = -\frac{25}{3} \Rightarrow 25a + 5b + c = -\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow 24a + 4b = -4 \Rightarrow \begin{cases} 6a + b = -1 \\ b = -9a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -3, c = 5$$

تالیفی علی ناری ابیانه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

(الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.
 (ب) مشتق تابع $g \circ f(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع $g \circ f$ را در نقطه $x = 0$ به طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \\ g(x) = \left(\frac{3}{4} + a\right)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} + a \end{cases}$$

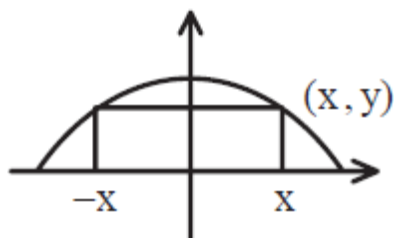
$$\Rightarrow (g \circ f)'_+(0) = f'_+(0)g'_+(f(0)) = 4\left(\frac{3}{4} + a\right) = 3 + 4a$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \\ g(x) = \left(\frac{3}{4} - a\right)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'_-(0) = f'_-(0)g'_-(f(0)) = 2\left(\frac{3}{4} - a\right) = \frac{3}{2} - 2a$$

باتوجه به قسمت (الف) از گام اول، تابع $g \circ f$ در $x = 0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(g \circ f)'_+(0) = (g \circ f)'_-(0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$



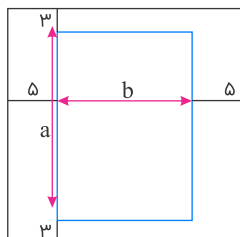
$$S = 2xy = 2x\left(\frac{y}{x}\sqrt{9-x^2}\right)$$

$$S = \frac{4}{x}\sqrt{9x^2-x^4}$$

$$S' = \frac{4}{9} \frac{18x - 4x^3}{\sqrt{9x^2-x^4}} \xrightarrow{S'=0} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{\max} = \frac{4}{3} \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{9 - \frac{9}{2}} = 6$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۶

ابعاد کاغذ را $a + 6$ و $b + 10$ در نظر می‌گیریم و داریم:



$$\begin{cases} y = (b + 2(5))(a + 2(3)) \\ ab = 60 \end{cases}$$

$$y = \frac{ab}{60} + 6b + 10a + 60 \Rightarrow y = 120 + 6b + 10\left(\frac{60}{b}\right)$$

$$y' = 0 + 6 - \frac{600}{b^2} = 0 \Rightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = 10$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم، پیوستگی و مشتق‌پذیری f را در $x = 1$ که عدد تغییر ضابطه است کنترل می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{x}{3} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - \frac{4}{3} & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 - \frac{x}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = l_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - \frac{4}{3} = 1 + 1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = l_2 \end{cases}$$

پس تابع f در $x = 1$ پیوسته است. $l_2 = l_1 = f(1) = \frac{2}{3}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - \frac{1}{3} & ; 0 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\ f'(1^+) = 3 \end{cases}$$

پس f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست و $x = 1$ بحرانی است. $f'(1^-) \neq f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in (0, 1) \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin (1, 2) \end{cases}$$

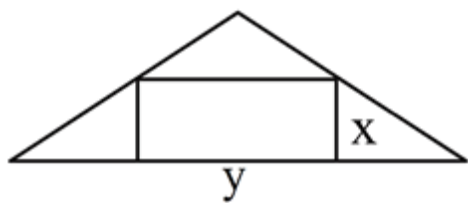
پس $x = \frac{1}{3}$ اکسترمم تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27}$

همچنین مقدار تابع در $x = 1$ برابر $\frac{2}{3}$ است.

حال مقدار تابع را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه می‌یابیم:

$$f(0) = 0, \quad f(2) = \frac{14}{3}$$

$$\text{پس } M = \frac{14}{3} \text{ و } m = -\frac{2}{27} \text{ ، بنابراین } \frac{M}{m} = \frac{\frac{14}{3}}{-\frac{2}{27}} = -63$$



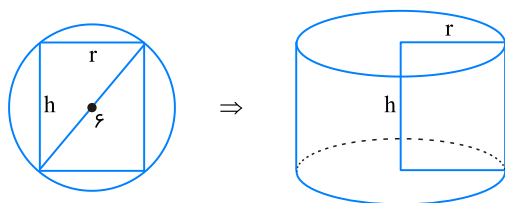
$$18 = \frac{1}{2} h \times 4 \Rightarrow h = 9$$

$$\frac{9-x}{9} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4 - \frac{4}{9}x$$

$$S = xy = x\left(4 - \frac{4}{9}x\right) = 4x - \frac{4}{9}x^2$$

$$S' = 0 \Rightarrow 4 - \frac{8}{9}x = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow S = 9$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵



می‌دانیم قطر مستطیل محاط درون دایره، برابر با قطر دایره است پس طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$h^2 + r^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = 36 \Rightarrow r = \sqrt{36 - h^2}$$

حجم استوانه حاصل از دوران مستطیل برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi(36 - h^2)h = 36\pi h - \pi h^3$$

می‌خواهیم حجم استوانه بیشترین مقدار باشد پس ابتدا معادله $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = 36\pi - 3\pi h^2$$

$$V'_h = 0 \Rightarrow 36\pi - 3\pi h^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\pi h^2 = 36\pi \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی \mathbb{R} و از جمله روی بازه $(1, 4)$ پیوسته است. برای یافتن نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم. می‌دانیم این معادله روی بازه $(1, 4)$ ریشه خواهد داشت در صورتی که رابطه $f'(1)f'(4) < 0$ برقرار باشد؛ بنابراین داریم:

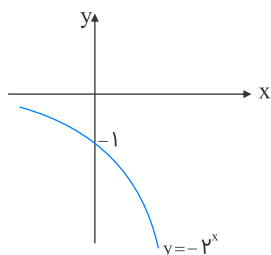
$$f(x) = x^3 + ax^2 - \lambda x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - \lambda$$

$$\begin{cases} f'(1) = 3 + 2a - \lambda = 2a - 5 \\ f'(4) = 4\lambda + 8a - \lambda = 3\lambda + 8a \end{cases} \xrightarrow{f'(1)f'(4) < 0} \lambda(a + 5)(2a - 5) < 0$$

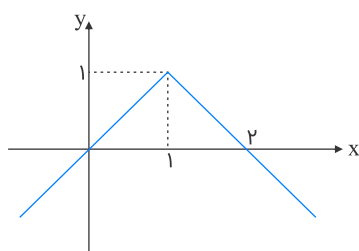
$$\Rightarrow -5 < a < 2/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گزینه ۱: چون برد تابع $y = \log x$ برابر با \mathbb{R} است، پس تابع ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.
گزینه ۲: نمودار $y = -2^x$ را رسم کرده‌ایم. برد تابع $(-\infty, 0)$ است و ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.



گزینه ۳: نمودار مربوط به تابع $y = 1 - |1 - x|$ به ما می‌گوید که برد $(-\infty, 1]$ است و تابع ماکزیمم مطلق دارد ولی مینیمم مطلق ندارد. ماکزیمم مطلق در $x = 1$ رخ می‌دهد و برابر با ۱ است.



گزینه ۳:

$$y = \sin^2 x + 2 \cos x = (1 - \cos^2 x) + 2 \cos x = -\cos^2 x + 2 \cos x + 1$$

اگر فرض کنید $\cos x = t$ ، باتوجه‌به اینکه $-1 \leq t \leq 1$ است، پس تابع $f(t) = -t^2 + 2t + 1$ حتماً ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد. به‌سادگی می‌توانید مقادیر آن‌ها را پیدا کنید.

گام اول

فاصله میان دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام دوم

نقطه موردنظر را $M(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$|MB| = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکسیمم مقدارش، کافی است ریشه مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25} - \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-2(1 - \alpha)}{2\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} - \frac{-2(7 - \alpha)}{2\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} - \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} \frac{(7 - \alpha)^2}{(7 - \alpha)^2 + 4} = \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2((7 - \alpha)^2 + 4) = (7 - \alpha)^2((1 - \alpha)^2 + 25)$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2(7 - \alpha)^2 + 4(1 - \alpha)^2 = (7 - \alpha)^2(1 - \alpha)^2 + 25(7 - \alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4(1 - \alpha)^2 = 25(7 - \alpha)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2(1 - \alpha) = \pm 5(7 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\alpha = 35 - 5\alpha \Rightarrow 3\alpha = 33 \Rightarrow \alpha = 11 \\ 2 - 2\alpha = -35 + 5\alpha \Rightarrow 7\alpha = 37 \Rightarrow \alpha = \frac{37}{7} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها، $\alpha = 11$ قابل قبول است.

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$ ، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$ ، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x; x \leq 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	\nearrow		\searrow	

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x \leq 1$ ، در نقطه $x = -1$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

بنابراین با شرط $x \leq 1$ داریم: $f(x) \leq 2$
به این ترتیب بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$(g \circ f)_{\max} = g(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

هر دو ضابطه، در دامنه‌شان پیوسته هستند. همچنین تابع در $x = 0$ پیوسته است، بنابراین تابع f در \mathbb{R} پیوسته است. حال برای مشتق تابع f داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ندارد؛ زیرا مشتق چپ و مشتق راست در این نقطه برابر نیستند. همچنین در $x = -1$ نیز خط مماس بر نمودار قائم خواهد بود. بنابراین در این نقطه نیز مشتق وجود ندارد.

تالیفی سید عادل حسینی

فرض می‌کنیم y_0 مقدار ماکزیمم مطلق تابع باشد، در این صورت خط $y = y_0$ باید بر نمودار f مماس باشد، یعنی معادله $f(x) = y_0$ جواب مضاعف داشته باشد. داریم:

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x} = y_0 \Rightarrow y_0 x - \sqrt{x} + y_0 = 0$$

با قرار دادن $t = \sqrt{x}$ داریم:

$$y_0 t^2 - t + y_0 = 0$$

برای اینکه این معادله جواب مضاعف داشته باشد، باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4y_0^2 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$$

چون مقادیر تابع مثبت است، $y_0 = -\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول است.

تذکر: می‌توانستیم ابتدا $f'(x)$ را به دست آوریم و سپس $f'(x) = 0$ را حل کنیم که چون این راه حل طولانی‌تر و دارای محاسبات و معادله پیچیده‌تر است، راه کوتاه‌تر را انتخاب کردیم.

تالیفی سیدعادل حسینی

به دنبال ماکزیمم مطلق تابع در بازه $t \in [0, +\infty)$ است.

$$c'(t) = \frac{2(t^2 + 6) - 2t(2t)}{(t^2 + 6)^2} = \frac{12 - 2t^2}{(t^2 + 6)^2}$$

$$\Rightarrow c'(t) = 0 \Rightarrow 12 - 2t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 6 \Rightarrow t = \sqrt{6}h$$

مقدار تابع در نقطه بحرانی و همچنین بحرانی اول و آخر بازه:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow c(t) = 0 \\ t = \sqrt{6} \Rightarrow c(t) = \frac{2\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ (max)} \\ t = +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 0 \end{cases}$$

پس حداکثر غلظت دارو در $t = \sqrt{6}h$ اتفاق می‌افتد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c > 0 \quad (1)$$

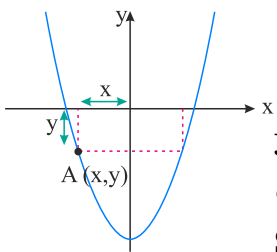
اگر قرار باشد (۱) همواره در $(-\infty, 2)$ برقرار باشد باید $a = 0$ و معادله $2bx + c = 0$ ریشه $x = 2$ داشته باشد.

$$x = 2 \Rightarrow 4b + c = 0 \Rightarrow b = -1$$

تالیفی سیروس نصیری

باتوجه به شکل زیر، اگر مساحت مستطیل را با S نشان دهیم:

$$S = 2xy \xrightarrow{y = x^2 - 27} S = 2x(x^2 - 27) = 2x^3 - 54x$$



اکنون حدود تغییرات x را به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{3} \xrightarrow{\text{باتوجه به شکل}} x = -3\sqrt{3}$$

$$\text{تابع مساحت: } S(x) = 2x^3 - 54x; \quad x \in [-3\sqrt{3}, 0]$$

$$S'(x) = 6x^2 - 54 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$$

$$S_{\max} = S(-3) = -6(9 - 27) = 108$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq 0$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R} برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$x^2 - 3$	+	-

$$\Rightarrow |x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & ; x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} : 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} : -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{3}) = 6, \quad f'_-(\sqrt{3}) = -6 \Rightarrow f'_+(\sqrt{3}) \neq f'_-(\sqrt{3})$$

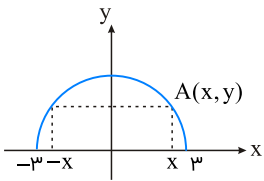
$$f'_+(-\sqrt{3}) = -6, \quad f'_-(-\sqrt{3}) = 6 \Rightarrow f'_+(-\sqrt{3}) \neq f'_-(-\sqrt{3})$$

تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	-	+	
$f(x)$		\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow
		max	min	max	min	

بنابراین مجموعه نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ به صورت $\{-\sqrt{3}, 1\}$ است.

نقطه A را بر روی نیم‌بیضی $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ در نظر می‌گیریم.



این نقطه دارای مختصات $A(x, \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2})$ است. فرض می‌کنیم طول مستطیل $2x$ و عرض آن y باشد پس داریم:

$$S = 2xy = 2x\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right) = \frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2} = \frac{4}{3}\sqrt{9x^2-x^4}, \quad -3 < x < 3$$

برای یافتن بیشترین مساحت، ابتدا معادله $S'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{18x - 4x^3}{2\sqrt{9x^2 - x^4}} \right)$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 18x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(9 - 2x^2) = 0$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} 2x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} S_{\max} &= \frac{4}{3}\sqrt{9x^2-x^4} = \frac{4}{3}\sqrt{9\left(\frac{9}{2}\right)-\frac{81}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{81}{2}-\frac{81}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{81}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{36}{6} = 6 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

$$A = \frac{1}{(\sin x - 1)^2 + 4}$$

می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ است، پس:

$$-2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4$$

حداکثر مقدار A زمانی رخ می‌دهد که $(\sin x - 1)^2$ به حداقل خود یعنی صفر برسد. پس:

$$\max(A) = \frac{1}{0+4} = \frac{1}{4}$$

تالیفی سیروس نصیری

نقطه به طول $x = ۲$ روی $y = ۳x - ۲$ یعنی $A(۲, ۴)$. بنابراین نقطه تماس $A(۲, ۴)$ است. در نتیجه:

$$۴ = ۴a + ۲b + ۲ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۲ \Rightarrow ۲a + b = ۱ \quad (۱)$$

از طرفی شیب خط مماس، $y = ۳x - ۲$ برابر ۳ است. یعنی:

$$f'(۲) = ۳ \Rightarrow ۲ax + b = ۳ \xrightarrow{x=۲} ۴a + b = ۳ \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۲a + b = ۱ \\ ۴a + b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱, b = -۱$$

بنابراین $f(x) = x^2 - x + ۲$. اکسترمم این تابع از نوع min است و با مشتق اول محاسبه می‌شود.

$$f'(x) = ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x_{\min} = \frac{۱}{۲}$$

و بنابراین $y_{\min} = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱/۷۵$. لذا:

$$x_{\min} + y_{\min} = ۰/۵ + ۱/۷۵ = ۲/۲۵$$

تالیفی میلاد منصوری

از شکل معلوم است که $l + ۲x = ۲۰$ ، همچنین حجم جعبه برابر است با:

$$V = l^2 \cdot x \xrightarrow{x=\frac{۲۰-l}{۲}} V = l^2 \left(\frac{۲۰-l}{۲}\right) = ۱۰l^2 - \frac{۱}{۲}l^3$$

$$\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی } l \in [۰, ۲۰]} V' = ۲۰l - \frac{۳}{۲}l^2 = ۰ \rightarrow \begin{cases} l = ۰ \\ l = \frac{۴۰}{۳} \end{cases}$$

دقت کنید که ابتدا و انتهای بازه نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

$$\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی و بحرانی اول و آخر بازه}} \begin{cases} l = ۰ \Rightarrow V = ۰ \\ l = \frac{۴۰}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow V = l^2 \cdot x = \frac{۱۶۰۰۰}{۲۷} \quad (\max) \\ l = ۲۰ \Rightarrow V = ۰ \end{cases}$$

پس در صورتی که $x = \frac{۱۰}{۳}$ cm از هر لبه تا کنیم، حجم آن حداکثر می‌شود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

برای به دست آوردن بیشترین غلظت دارو، ابتدا باید مدت زمانی را که طول می‌کشد پس از تزریق، غلظت این دارو به بیشترین حد خود برسد را به دست آوریم. سپس مقدار تابع در آن لحظه، نشان‌دهنده بیشترین غلظت ممکن است. پس داریم:

$$c'(t) = \frac{(\omega t + t^3) - 3t^3}{(\omega t + t^3)^2} = 0 \Rightarrow \omega t - 2t^3 = 0 \Rightarrow 27 = t^3 \Rightarrow t = 3$$

x	۰	۳	∞
c'(x)	+	۰	-
c(x)	۰	$\frac{1}{27}$	۰

از جدول مشاهده می‌شود که بیشترین غلظت دارو در زمان ۳ رخ داده است و برابر است با $\frac{1}{27}$.

تالیفی مهدی ملازمضانی

باتوجه به نمودار دامنه تابع $[a, b]$ و به ازای آن برد تابع در یک بازه مثبت قرار دارد (یعنی بالای محور xها است)، پس مقدار $f(x)$ همواره مثبت است. از طرفی تابع f صعودی اکید است، پس $f'(x) > 0$ است.

$$g(x) = \frac{-1}{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))^2} \xrightarrow{f' > 0, f > 0} g'(x) > 0$$

$$h(x) = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)^2}} > 0$$

پس g و h هر دو صعودی اکیدند.

تالیفی سیروس نصیری

عبارت داخل جزء صحیح را در نظر بگیرید. داریم:

$$x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$$

می‌توانیم عبارت جزء صحیحی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left[\frac{2}{1 + x^2} \right] = \begin{cases} 2 & ; x = 0 \\ 1 & ; x \in [-1, 1] - \{0\} \\ 0 & ; x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \end{cases}$$

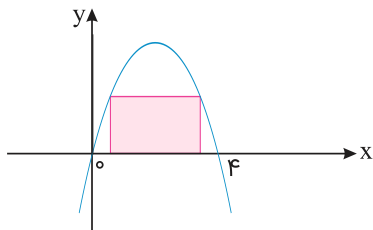
بنابراین برای تابع f داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [-1, 1] \\ 0 & ; x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \end{cases}$$

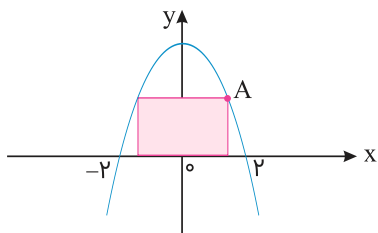
واضح است که این تابع در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. همچنین در $\mathbb{R} - [-1, 1]$ تابع ثابت صفر است و بی‌شمار نقطه بحرانی دارد.

تالیفی سید عادل حسینی

برای مسئله، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



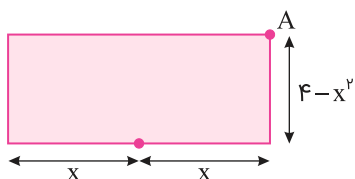
برای حل راحت‌تر، سهمی را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم:



معادله سهمی را می‌نویسیم:

$$y = 4(x+2) - (x+2)^2 = (x+2)(4-x-2) = 4 - x^2$$

نقطه A روی سهمی $y = 4 - x^2$ است، پس می‌توانیم مختصات آن را به صورت $A(x, 4 - x^2)$ بنویسیم:



مساحت مستطیل را بر حسب x می‌نویسیم:

$$S = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$$

ریشه‌های S' را حساب می‌کنیم:

$$S' = 8 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

پس ماکزیمم S برابر است با:

$$S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \left(4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{3} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

باتوجه به وجود عبارت $[x]$ در ضابطه تابع $f(x)$ ، ابتدا بازه $[-1, 2]$ را به زیربازه‌های کوچکتر تقسیم کرده و ضابطه تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

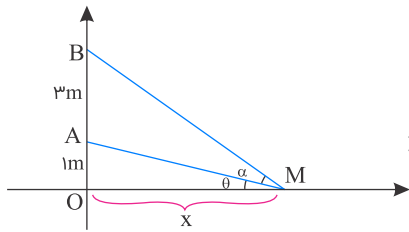
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \sin \pi x$$

باتوجه به اینکه ضابطه تابع $f(x)$ در بازه $[0, 1]$ به صورت خط افقی $y = 0$ است پس هر $x \in [0, 1]$ می‌تواند یک نقطه بحرانی تابع $f(x)$ باشد، همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ یعنی $x = -1, 2$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 2]$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

اگر شیب پاره‌خط AM و BM را به ترتیب m_1 و m_2 در نظر بگیریم، داریم:



$$m_1 = -\tan \theta = \frac{-OA}{OM} = \frac{-1}{x}$$

$$m_2 = -\tan(\alpha + \theta) = \frac{-OB}{OM} = \frac{-3}{x}$$

باتوجه به زاویه α ، داریم:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{x} - \left(-\frac{3}{x}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{3}{x}\right)} \right|$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} \right| = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{2}{x + \frac{3}{x}} \quad (*)$$

می‌دانیم با افزایش α ، $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد و چون تابع α در بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است، حداکثر α بیشترین مقدار $\tan \alpha$ را تعیین می‌کند. حال باتوجه به رابطه $(*)$ ، برای ماکزیم کردن $\tan \alpha$ باتوجه به ثابت بودن صورت کافی است عبارت مخرج را مینیمم کنیم. بنابراین:

$$y = x + \frac{3}{x}$$

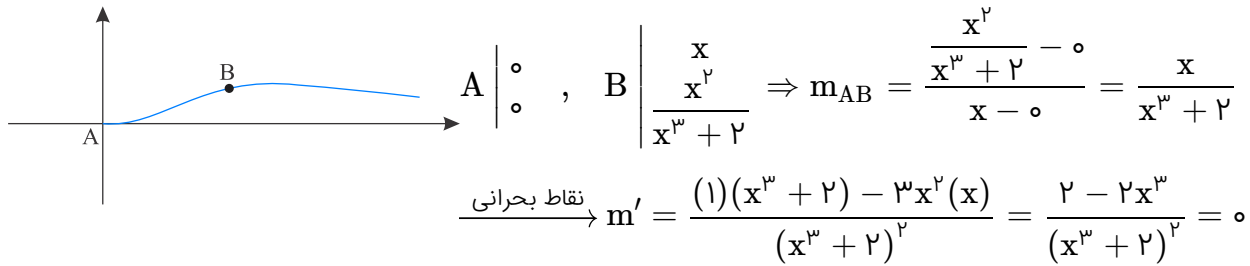
$$y' = 1 - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} & \text{ق.ق} \\ x = -\sqrt{3} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین نقطه M باید یک متر به سمت چپ جابه‌جا شود.

نکته: چون حاصلضرب x و $\frac{3}{x}$ برابر مقداری ثابت است $\left(x \times \frac{3}{x} = 3\right)$ ، مجموع این دو عبارت زمانی مینیمم می‌شود که هر دو با هم برابر باشد.

$$x = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} & \text{ق.ق} \\ x = -\sqrt{3} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

هرچقدر زاویه α بزرگتر باشد، $\tan \alpha$ (شیب خط واصل) هم بزرگتر خواهد بود؛ پس شیب خط AB را حداکثر می‌کنیم:



$$\Rightarrow x = 1 \xrightarrow{x \in (\circ, +\infty)} \begin{cases} x = \circ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \circ} m = \circ \\ x = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3} \text{ (max)} \\ x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} m = \circ \end{cases}$$

پس حداکثر شیب خط واصل در نقطه‌ای به طول $x = 1$ رخ می‌دهد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2x^2 + 2ax + b$$

باتوجه به اینکه تابع فقط در بازه $(-3, 2)$ نزولی است، پس $x = 2$ و $x = -3$ ریشه‌های $f'(x)$ است.

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow -1 = \frac{-2a}{2} \Rightarrow a = 1 \\ P = x_1 \times x_2 = 2 \times -3 = -6 \Rightarrow -6 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -12 \end{cases} \Rightarrow a - b = 1 - (-12) = 13$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

چون تابع $f(x)$ پیوسته است، پس $x = 1 \in D_f$ است. f' را تعیین علامت می‌کنیم.

x	-1	1	2
f'	-	+	-

در f' در ۳ نقطه تغییر علامت داده است. f' در $\{-1, 2\}$ از منفی به مثبت و در $\{1\}$ از مثبت به منفی تغییر علامت داده است. پس f دو مینیمم و یک ماکزیمم دارد.

تالیفی سیروس نصیری

عبارت $x^2 - 3$ روی بازه $[-1, 1]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x \in [-1, 1] : |x^2 - 3| = -(x^2 - 3) = 3 - x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = x|x^2 - 3| = x(3 - x^2) = 3x - x^3$$

حال معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \xrightarrow{f'(x)=0} 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)		-	+	-
f(x)		↘	↗	↘

تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 1]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-1) = -2$ مینیمم مطلق تابع و $f(1) = 2$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x = -1$ و $x = 1$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکستریم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینه سوم نادرست است.

گام اول

الف) حجم مخروطی به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$



گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم. باتوجه به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{3}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعده مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 h = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{h} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (\text{I})$$

برای محاسبه مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازه l را به دست آوریم. با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (\text{II})$$

اکنون با استفاده از رابطه مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطه (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(\text{II})} S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \xrightarrow{(\text{I})} S = \pi \times \frac{1}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \frac{\pi \sqrt{h^3 + 1}}{h}$$

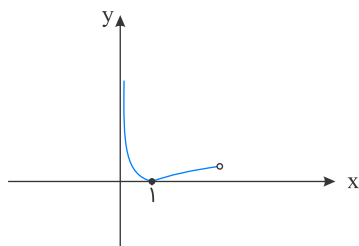
برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{h^3+1}} \times h - \sqrt{h^3+1}}{h^2} = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{3h^3 - 2h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow h^3 - 2 = 0 \Rightarrow h^3 = 2 \Rightarrow h = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[3]{2}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{3}$ ، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

تابع $|\log x|$ در فاصله $(0, 2)$ فقط یک نقطه بحرانی $x = 1$ دارد که در این نقطه تابع شکستگی دارد و مشتق چپ و راست آن نابرابر است.



تابع $[x]$ در تمام نقاط بازه $(2, 5)$ بحرانی دارد، زیرا یا مشتق صفر است و یا وجود ندارد. تابع $\frac{1}{3}x^3 - 9x$ فقط ریشه‌های مشتقش بحرانی است.

$$y' = x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$x = \pm 3$ در فاصله $(5, +\infty)$ قرار ندارد، پس این ضابطه فاقد نقطه بحرانی است. حال به بررسی نقاط مرزی تابع می‌پردازیم.

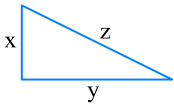
$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \log 2$$

$$f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \frac{125}{3} - 27, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$$

پس تابع در $x = 2$ و $x = 5$ ناپیوسته و در نتیجه بحرانی است. در مجموع نقاط بحرانی $\{1\} \cup [2, 5]$ می‌باشد.

تالیفی سیروس نصیری

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x ، y و z به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x + z = 6 \Rightarrow z = 6 - x$$

از طرفی طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = z^2 \xrightarrow{z=6-x} x^2 + y^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - 12x \Rightarrow y = \sqrt{36 - 12x} \Rightarrow y = 2\sqrt{9 - 3x}$$

اکنون مساحت مثلث را به صورت تابعی بر حسب x می‌نویسیم:

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(2\sqrt{9-3x}) = x\sqrt{9-3x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادله $S'_x = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = \sqrt{9-3x} - \frac{3x}{2\sqrt{9-3x}} = \frac{2(9-3x) - 3x}{2\sqrt{9-3x}} = \frac{18-9x}{2\sqrt{9-3x}}$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow 18 - 9x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{y=2\sqrt{9-3x}} y = 2\sqrt{9-6} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده شده برابر است با:

$$S_{\max} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

نقطه $M(\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y = x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصله میان دو نقطه A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - ۱)^2 + (\alpha\sqrt{\alpha} - ۰)^2} = \sqrt{\alpha^2 - ۱۶\alpha + ۶۴ + \alpha^3} = \sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - ۱۶\alpha + ۶۴}$$

برای مینیمم کردن فاصله MA ، ابتدا معادله $(MA)'_{\alpha} = ۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'_{\alpha} = \frac{۳\alpha^2 + ۲\alpha - ۱۶}{۲\sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - ۱۶\alpha + ۶۴}}$$

$$(MA)'_{\alpha} = ۰ \Rightarrow ۳\alpha^2 + ۲\alpha - ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \alpha = -\frac{۱۶}{۶} \end{cases} \quad \text{غ ق ق (*)}$$

* دامنه تابع $y = x\sqrt{x}$ به صورت بازه $[۰, +\infty)$ است.

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{\min} = \sqrt{(۲ - ۱)^2 + (۲\sqrt{۲})^2} = \sqrt{۳۶ + ۸} = \sqrt{۴۴} = ۲\sqrt{۱۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنه تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x - 2, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 4 = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	\vdots	\nearrow

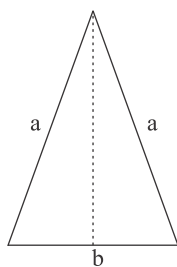
$$g(x) = x^3 + x, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq 3 \Rightarrow g(f(x)) \geq g(3)$$

$$\Rightarrow (g \circ f)_{\min} = g(3) = 3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$$



دو ساق برابر مثلث را a و قاعده را b در نظر می‌گیریم و داریم:

$$P = 2a + b = 3 \Rightarrow a = \frac{3-b}{2}$$

$$S = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2} \sqrt{\left(\frac{3-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$S = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{9-6b+b^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{9-6b}{4}} = \frac{b}{4} \sqrt{9-6b}$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{9b^2 - 6b^3}$$

$$S' = \frac{1}{4} \times \frac{18b - 18b^2}{2\sqrt{9b^2 - 6b^3}} = 0 \Rightarrow 18b(1-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$P = 2a + b = 3 \xrightarrow{b=1} 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$a = b = 1$$

پس مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \xrightarrow{a=1} S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

فرض می‌کنیم $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-x}$ باشد.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 9-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow D_g = [0, 9]$$

حال نقاط بحرانی g را به دست می‌آوریم.

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Rightarrow \text{(ریشه حقیقی ندارد)}$$

$$g(0) = -3, g(9) = 3 \Rightarrow R_g = [-3, 3]$$

توجه کنید که مجموع دو عبارت مثبت هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود.

چون برد تابع $g(x)$ به صورت $[-3, 3]$ است، پس برد تابع $f(x) = [g(x)]$ برابر $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ خواهد بود، یعنی ۷ عضو دارد.

اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطه $x = vt$ یا معادل آن $t = \frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

$$D \text{ تا } P \text{ مسیر}: t_1 = \frac{PD}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{12 + x^2}$$

$$E \text{ تا } D \text{ مسیر روی پیاده روی}: t_2 = \frac{DE}{v} = \frac{\lambda - x}{4}$$

$$E \text{ به } P \text{ کل زمان از}: t = t_1 + t_2 \Rightarrow t(x) = \frac{1}{v} \sqrt{12 + x^2} + \left(2 - \frac{1}{4}x\right); x \in [0, 8]$$

برای آنکه فاصله زمانی رسیدن دو شرکت کننده حداکثر باشد، لازم است شرکت کننده B خود را در کوتاهترین زمان ممکن به E برساند، پس باید به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t باشیم. نقطه بحرانی t را به دست می آوریم:

$$t'(x) = \frac{1}{v} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 12}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 12}}{4\sqrt{x^2 + 12}}$$

$$\Rightarrow t'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 12} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + 12 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

دقت کنید که ابتدا و انتهای بازه یعنی ۰ و ۸ هم بحرانی هستند.

$$t(0) = \frac{1}{v} \sqrt{12} + 2 = \sqrt{3} + 2 = 3/7$$

$$t(2) = \frac{1}{v} \sqrt{12 + 4} + 2 - \frac{1}{4} = 2 + 1/5 = 3/5$$

$$t(8) = \frac{1}{v} \sqrt{12 + 64} = \frac{1}{v} \sqrt{76} = \frac{1}{v} (8/7) = 4/35$$

x	0	2	8
t'(x)	-	0	+
t(x)	3/7	3/5	4/35

بر طبق جدول وقتی x (یعنی فاصله D از C) برابر ۲ است، زمان رسیدن شرکت کننده B به نقطه E ، کمترین زمان ممکن یعنی ۳/۵ ساعت را دارا است و هنگامی که $x = 8$ باشد (مسیر با قایق طی شده)، یعنی شرکت کننده A در مدت زمان ۴/۳۵ ساعت خود را به نقطه E رسانده است. پس حداکثر فاصله زمانی رسیدن دو شرکت کننده A و B برابر است با:

$$4/35 - 3/5 = 0/85h \xrightarrow{\times 60} 51 \text{ min}$$

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x^3 \geq -x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq \sqrt[3]{-x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq -x \Rightarrow x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq 0$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R} برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدوده تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنه تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}} : \frac{2-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_f = (0, 2]$$

به ازای $0 < x \leq 2$ ، $|x| = x$ است پس ضابطه تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x) = (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}} = (x + x) \sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2x \sqrt{\frac{2-x}{x}} \stackrel{(*)}{=} 2 \sqrt{\frac{x^2(2-x)}{x}} = 2 \sqrt{2x - x^2}$$

(*) چون $x > 0$ است پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطه $x = 2$ محاسبه می‌کنیم. ضابطه تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = 2\sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 - 2x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 2\sqrt{2-1} = 2$$

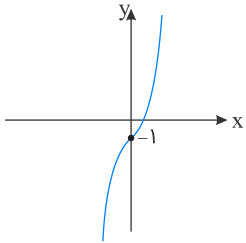
$$f(2) = 2\sqrt{4-4} = 0$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازه $[0, 2]$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

اگر $P(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، در این صورت نقاط بحرانی تابع $|P(x)|$ از حل معادلات $P(x) = 0$ و $P'(x) = 0$ به دست می‌آید.

الف) حل معادله $x^3 + x - 1 = 0$: فرض می‌کنیم $g(x) = x^3 + x - 1$ باشد. چون $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ می‌باشد، پس g اکیداً صعودی است و $g(0) < 0$ است پس نمودار آن به صورت زیر است:



پس $g(x) = 0$ یک ریشه مثبت دارد.

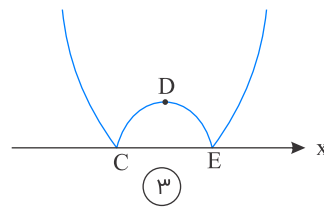
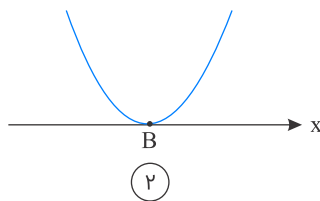
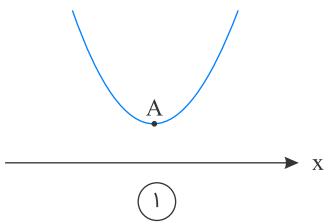
ب) حل معادله $g'(x) = 0$:

ریشه حقیقی ندارد $\Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 = 0$

پس تابع $f(x)$ فقط یک نقطه بحرانی دارد که آن هم طول مثبت دارد.

تالیفی سیروس نصیری

نمودار تابع $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ به یکی از سه شکل زیر است:



در هر ۳ حالت نقطه رأس سهمی، بحرانی است؛ پس در تابع داده شده، $x = 2$ حتماً بحرانی است.

چون حاصل ضرب طول نقاط بحرانی ۶ شده، پس تابع باید بیش از یک نقطه بحرانی داشته باشد. در نتیجه فقط شکل (۳) می‌تواند جواب باشد. دو نقطه بحرانی دیگر هم ریشه‌های سهمی هستند که ضربشان می‌شود $c = \frac{c}{a} = p$ ، پس:

$$x_C \times x_D \times x_E = 6 \Rightarrow \underbrace{x_D}_2 \times \underbrace{(x_C x_E)}_c = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

در نتیجه: $f(0) = |c| = 3$

تالیفی علی شهبازی فراهانی

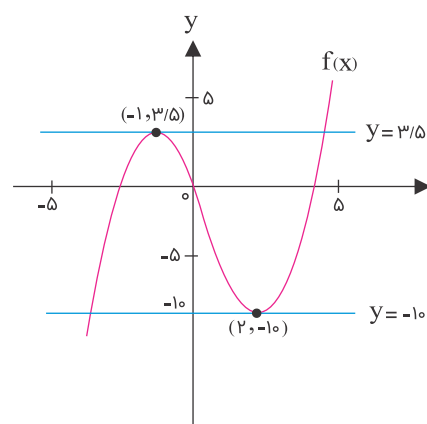
$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x-2)(x+1)$$

با کمک جدول می‌توانیم نمودار را دقیق رسم کنیم.

	-1	2	
y'	+	-	+
y	↗	↘	↗
	max	min	

$$y(-1) = 3/5$$

$$y(2) = -10$$



حالا می‌خواهیم معادله $x^3 = \frac{3}{2}x^2 + 6x + m$ دو ریشه داشته باشد؛ یعنی نمودار توابع $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$ و $y = m$ در ۲ نقطه باید باهم برخورد کنند. در این صورت $m = 3/5$ یا $m = -10$ است، پس مجموع مقادیر m برابر است با: $-10 + 3/5 = -6/5$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = 2$ ، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{6 + x}{\sqrt[4]{\lambda x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادله $y' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{6 + x}{\sqrt[4]{\lambda x}} = (6 + x)(\lambda x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$y' = (\lambda x)^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}(6 + x)(\lambda x)^{-\frac{5}{4}} = (\lambda x)^{-\frac{5}{4}}(\lambda x - 12 - 2x) = \frac{6x - 12}{\sqrt[4]{(\lambda x)^5}}$$

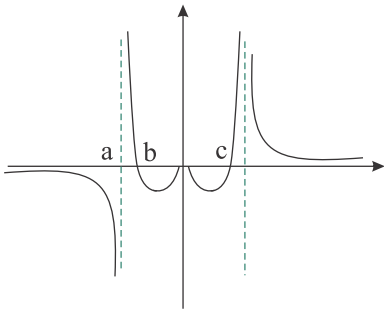
$$y' = 0 \xrightarrow{x \neq 0} 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(2)$ است و داریم:

$$y(2) = \frac{6 + 2}{\sqrt[4]{\lambda(2)}} = \frac{8}{\sqrt[4]{16}} = \frac{8}{2} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

نقاطی که علامت f' عوض می‌شود، همان نقاط اکسترم نسبی است یعنی نقاط a, b, c .



مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۹

ابتدا $A + B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A + B = (3\sin^2 \alpha + 4) + (3\cos^2 \alpha + 2) = 9$$

چون $A + B = 9$ و مقداری ثابت است، پس حداکثر مقدار AB زمانی رخ می‌دهد که $A = B$ باشد. پس:

$$A = B = \frac{9}{2} \Rightarrow \max(AB) = \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{81}{4} = 20.25$$

تالیفی سیروس نصیری

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^p - 1} & ; |x| \geq 1 \\ \sqrt{1 - x^p} & ; |x| < 1 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \mid |x^p - 1| \geq 0\} = \mathbb{R}$$

تابع f روی \mathbb{R} پیوسته است.

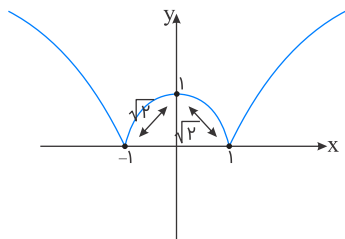
$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^p - 1}} & ; |x| > 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1 - x^p}} & ; |x| < 1 \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ مشتق‌ناپذیر و همچنین $f'(0) = 0$ است. بنابراین طول نقاط بحرانی تابع f ، مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ است. در این نقاط با جدول تعیین علامت f' داریم:

x	-1	0	1
f'	$-$	$+$	$-$
f	\searrow	\nearrow	\searrow
	min نسبی	max نسبی	min نسبی

بنابراین نقاط $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ مینیمم نسبی و نقطه $(0, 1)$ ماکزیمم نسبی است. فاصله دو اکسترمم متوالی در این تابع برابر $\sqrt{2}$ خواهد بود.

نمودار تابع f به صورت زیر است:



تالیفی سید عادل حسینی

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه به گام اول، نقاطی از دامنه تابع f که در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف نشده است را می‌یابیم.

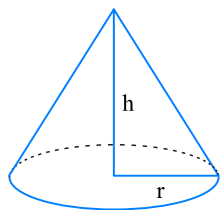
$$f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 28) = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 7x^2 - 28 = 0 \Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

به‌ازای $x = 0$ ، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و در نتیجه این تابع تعریف نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = 1 \Rightarrow r = 1 - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=1-h} V = \frac{1}{3}\pi(1-h)^2 h = \frac{1}{3}\pi(h^3 - 2h^2 + h)$$

برای ماکسیم کردن حجم مخروط، ابتدا معادله $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = \frac{1}{3}\pi(3h^2 - 4h + 1)$$

$$V'_h = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4h + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{(زیرا } r + h = 1 \text{ غ ق ق)}$$

بنابراین به ازای $h = \frac{1}{3}$ ، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{\max} = \frac{1}{3}\pi \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{81}$$

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x - 2|$ ، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x = 2$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x < 2 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است پس ضابطهٔ تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ -\sqrt[3]{x^2} - \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ \frac{-5x+4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases}$$

ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 : 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \\ x < 2 : -5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x = 0$ ریشهٔ مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف نشده است؛ از طرفی به ازای $x = 2$ داریم:

$$f'_+(2) = \frac{10-4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f'_-(2) = \frac{-10+4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{4} \Rightarrow f'(2) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به صورت $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$ است.

ریشه ساده یا مکرر مرتبه فرد f' طول نقطه اکسترمم نسبی است.

$$f'(x) = (ax - 2)(x^3 - x - 2x + 2) = (ax - 2)(x(x^2 - 1) - 2(x - 1))$$

$$f'(x) = (ax - 2)(x - 1)^2(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{a} \\ x = 1 \text{ مضاعف} \\ x = -2 \end{cases}$$

اگر $\frac{2}{a} = 1$ باشد، آنگاه $x = 1$ ریشه مکرر مرتبه فرد f' است و اکسترمم است و اگر $\frac{2}{a} = -2$ باشد، آنگاه $x = -2$ ریشه مضاعف f' است و اکسترمم نیست. پس فقط $a = -1$ می‌باشد. دقت کنید در حالت $a = 2$ تابع f' اکسترمم خواهد داشت.

تالیفی امیر خمسه

فرض کنید طول ضلع مربع برابر a است. در این صورت می‌دانیم $2x + l = a$ است.

$$V = l^2 x = l^2 \left(\frac{a - l}{2} \right) = \frac{1}{2} (al^2 - l^3)$$

در صورتی حجم ماکزیمم است که مشتق آن صفر باشد.

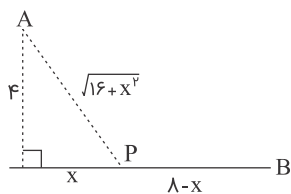
$$V' = \frac{1}{2} (2al - 3l^2) = 0 \Rightarrow l(2a - 3l) = 0 \Rightarrow l = \frac{2a}{3}$$

$$\begin{aligned} \max(V) &= 2000 = \frac{1}{2} (al^2 - l^3) \xrightarrow{l = \frac{2a}{3}} 4000 = a \left(\frac{2a}{3} \right)^2 - \left(\frac{2a}{3} \right)^3 \\ 4000 &= a \left(\frac{4a^2}{9} \right) - \left(\frac{8a^3}{27} \right) = \frac{12a^3 - 8a^3}{27} = \frac{4a^3}{27} = 4000 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = 4000 \\ \Rightarrow a^3 &= 1000 \times 27 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1000 \times 27} = 10 \times 3 = 30 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

از رابطه فیثاغورس معلوم است که طول مسیر قایق سواری برابر است با: $\sqrt{16+x^2}$

زمان قایق سواری $\frac{\sqrt{16+x^2}}{2}$ و زمان پیاده روی $\frac{8-x}{4}$ است؛ پس زمان کل برابر است با:



$$t = \frac{\sqrt{16+x^2}}{2} + \frac{8-x}{4}$$

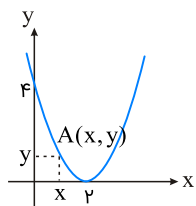
$$\Rightarrow t' = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{16+x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{16+x^2} = 2x \Rightarrow 16+x^2 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{مسیر پیاده روی}} 8-x = 8 - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نقطه $A(x, y)$ روی منحنی $y = (x-2)^2$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x, (x-2)^2)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجاد شده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S = xy \xrightarrow{y_A=(x-2)^2} S = x(x-2)^2 ; 0 < x < 2$$

$$S'_x = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(x-2+2x) = (x-2)(3x-2)$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow (x-2)(3x-2) = 0 \xrightarrow{x \neq 2} 3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید:

$$S_{\max} = x(x-2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)^2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی F' ، باید نقاطی را پیدا کنیم که $F'' = 0$ یا F'' موجود نباشد.

$$F'(x) = -2xF(x) \quad (*) \xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} F''(x) = -2xF'(x) - 2F(x)$$

$$\xrightarrow{(*)} F''(x) = -2x(-2xF(x)) - 2F(x) = -2F(x)(-2x^2 + 1)$$

بدیهی است نقطه‌ای وجود ندارد که F'' موجود نباشد، اما باتوجه به اینکه $F(x) \neq 0$ است، $F'' = 0$ در نقاط $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ به دست می‌آید که همان نقاط بحرانی F' است و حاصل ضرب آن‌ها $\frac{-1}{2}$ می‌شود.

تالیفی محمد درمان

باتوجه به اینکه $S = \frac{1}{2}ab \sin(90^\circ + \alpha)$ ، پس:

$$S = \frac{1}{2}ab \cos \alpha \xrightarrow{b=2-a} S = \frac{1}{2}a(2-a) \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4-a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}a^2(2-a) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^3 \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$\Rightarrow S'_{(a)} = a - \frac{3}{4}a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{4}{3} \quad \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین $b = \frac{2}{3}$ و $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. پس:

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

تالیفی محمد گودرزی

تابع f اکیداً صعودی است. چراکه عبارت‌های $\sqrt{x^3}$ و $-\frac{2}{x}$ به ازای مقادیر دامنه یعنی $x > 0$ هر دو اکیداً صعودی هستند. به علاوه می‌توانیم با مشتق‌گیری هم آن را ثابت کنیم. از طرفی $1 \leq \sin x \leq -1$ می‌باشد. اگر $\sin x = t$ در نظر بگیریم، تابع $y = f \circ g(x) = \sqrt{t^3} - \frac{2}{t}$ می‌شود، پس ماکزیمم این تابع را وقتی $1 \leq t \leq -1$ است، می‌خواهیم.

$$y = \sqrt{t^3} - \frac{2}{t}, \quad t \in [-1, 1]$$

سریع‌ترین راه‌حل این است که بگوییم چون $y = \sqrt{t^3} - \frac{2}{t}$ اکیداً صعودی است بیشترین مقدار آن در $t = 1$ رخ می‌دهد.

$$y(1) = \sqrt{1} - \frac{2}{1} = 1 - 2 = -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq x \Rightarrow -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq 0$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ روی \mathbb{R} برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

دامنه تابع f : $D_f = (0, +\infty) - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2}$$

نقطه بحرانی، نقطه‌ای است که مشتق تابع در آن برابر صفر است یا مشتق در آن وجود ندارد. از طرفی دامنه تابع f با دامنه مشتق آن یکسان است؛ بنابراین برای پیدا کردن طول نقاط بحرانی، کافی است معادله $f' = 0$ را حل کنیم.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\sqrt[6]{x^7} = 1 \Rightarrow \sqrt[6]{x^7} = \frac{2}{9} \xrightarrow{x \in D_f} x = \sqrt[7]{\left(\frac{2}{9}\right)^6}$$

تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد.

تالیفی سید عادل حسینی

مختصات نقطه‌ای از نمودار تابع f را که از خط $y = x - 1$ کمترین فاصله را دارد، $(\alpha, f(\alpha))$ در نظر می‌گیریم.

$$d(\alpha) = \frac{|f(\alpha) - \alpha + 1|}{\sqrt{2}}$$

فاصله نقطه مورد نظر از خط

d باید کمترین مقدار باشد. حال چون f و خط $y = x - 1$ نقطه برخوردی ندارند (باتوجه به گزینه‌ها)، پیدا کردن کمترین مقدار d معادل است با پیدا کردن کمترین مقدار تابع $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha + 1$ (صرف نظر از علامت آن). بنابراین داریم:

$$g'(\alpha) = f'(\alpha) - 1 = 4\alpha^3 - 3\alpha - 1 = (\alpha - 1)(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)$$

$$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = -\frac{1}{2}$$

x		$-\frac{1}{2}$		1		
g'		-	o	-	o	+
g						

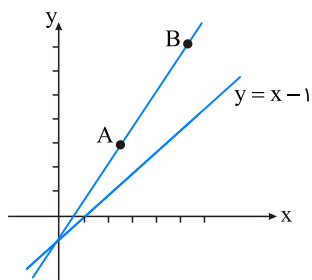
min

با تعیین علامت g' درمی‌یابیم که $\alpha = 1$ طول نقطه مینیمم تابع g است.

$$\Rightarrow d_{\min} = d(1) = \frac{|f(1) - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

تالیفی سید عادل حسینی

دو نقطه A و B و خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط $y = x - 1$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - 1$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{4 - 2} (x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x - 1$$

با مساوی قرار دادن معادله دو خط، نقطه برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$2x - 1 = x - 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow M(0, -1)$$

بنابراین طول نقطه M برابر با صفر است.

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^2 + x - 2|$ ، ضابطه تابع را ساده تر می کنیم، داریم:

$$f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2| = (x-1)|(x+2)(x-1)|$$

ریشه های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x+2) & ; x \geq 1 \text{ یا } x \leq -2 \\ -(x-1)^2(x+2) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ پیوسته است پس ضابطه $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-1)(3x+3) & ; x > 1 \text{ یا } x < -2 \\ -(x-1)(3x+3) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

اکنون ریشه های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می آوریم:

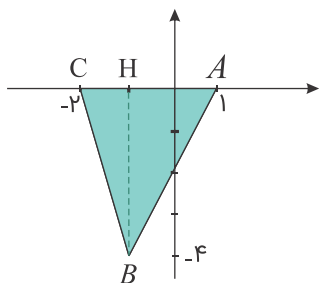
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1, x < -2 : (x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ -2 < x < 1 : -(x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

باتوجه به اینکه $f'_-(1) = f'_+(1) = 0$ است پس $x = 1$ نیز نقطه بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف نشده است. داریم:

$$\left. \begin{aligned} f'_+(-2) &= -(-2-1)(-3) = -9 \\ f'_-(-2) &= (-2-1)(-3) = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2) \text{ وجود ندارد}$$

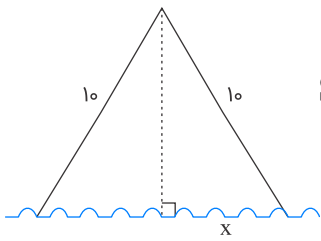
بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطه بحرانی $A(1, 0)$ ، $B(-1, -4)$ و $C(-2, 0)$ است. مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{12}{2} = 6$$



راه حل اول:

طول قاعده مثلث را $2x$ در نظر می‌گیریم. در این صورت از رابطه فیثاغورس ارتفاع مثلث برابر است با: $\sqrt{100 - x^2}$ و مساحت مثلث برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} \times 2x \times \sqrt{100 - x^2} = x\sqrt{100 - x^2} \quad ; x \in (0, 10)$$

پیدا کردن ماکزیمم مطلق تابع:

$$S' = \sqrt{100 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

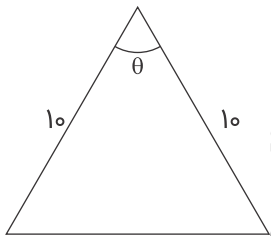
$$= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow x^2 = 50$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{50} \xrightarrow{\substack{\text{نقاط بحرانی} \\ \text{و اول و آخر بازه}}} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} S = 0 \\ x = \sqrt{50} \Rightarrow S = 50 \text{ (max)} \\ x = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 10} S = 0 \end{cases}$$

پس حداکثر مساحت مثلث ۵۰ است.

راه حل دوم:

اگر زاویه رأس را θ در نظر بگیریم، مساحت مثلث برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin \theta = 50 \sin \theta$$

حداکثر مقدار $\sin \theta$ برابر است با ۱، چون حداکثر آن زمانی اتفاق می‌افتد که $\sin \theta = 1$ باشد، یعنی $\hat{\theta} = 90^\circ$ باشد. در این صورت مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

توابع را بررسی می‌کنیم:

$$\text{الف) } y' = 3ax^2 + b$$

مشتق این تابع، درجه دوم است و ممکن است گاهی مثبت و گاهی منفی باشد.

$$\text{ب) } y' = 4x^3 + a$$

x	$-\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$
y'	- ۰ +

این تابع قطعاً غیر یکنوا است.

ج) تابع $\sqrt[3]{x}$ همواره صعودی اکید است، پس تابع $a\sqrt[3]{x} + b$ یکنوای اکید است.

$$\text{د) } y' = a \times \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

اگر y' را تعیین علامت کنیم گاهی مثبت و گاهی منفی خواهد بود، پس این تابع قطعاً غیر یکنوا است.

تالیفی سیروس نصیری

راه اول: نقطه‌ای روی $y = x^2$ به مختصات $A(\alpha, \alpha^2)$ در نظر گرفته و فاصله آن را از خط $-x + y + 1 = 0$ می‌یابیم. AB طول پل موردنظر است:

$$AB = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-\alpha + \alpha^2 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}$$

مخرج کسر که ثابت است. برای مینیمم طول AB که همان طول پل است باید $|-\alpha + \alpha^2 + 1|$ حداقل شود که کافی است عبارت $y = -\alpha + \alpha^2 + 1$ را حداقل کنیم.

$$y' = -1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

طول نقطه‌ای از سهمی $y = x^2$ که برای احداث پل ارتباطی بین ۲ تکه خشکی مناسب است.

راه دوم: کوتاه‌ترین فاصله یک منحنی از یک خط، جایی است که بتوان مماس موازی $y = x - 1$ کشید، یعنی $y' = 2x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$.

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

در مثلث AHD داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{z} \Rightarrow AH = \frac{1}{2}z \quad (1)$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} : S = \left(\frac{AB + DC}{2} \right) AH \quad (2)$$

باتوجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{array}{l} DC = 2y + x \\ AB = x \end{array} \right\} \xrightarrow{(1), (2)} S = (x + y) \times \frac{z}{2} \quad (3)$$

$$\text{محیط ذوزنقه} : 2x + 2y + 2z = 50 \Rightarrow x + y + z = 25 \Rightarrow x + y = 25 - z \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow S = \frac{1}{2}(25z - z^2) \xrightarrow{\max(\text{مساحت})} S' = \frac{1}{2}(25 - 2z) = 0 \Rightarrow z = 12.5$$

$$\triangle ADH : z^2 = y^2 + (AH)^2 \xrightarrow{(1)} z^2 = y^2 + \frac{1}{4}z^2 \Rightarrow \frac{3}{4}z^2 = y^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{4} \times (12.5)^2} = \frac{12.5}{2} \times \sqrt{3} \simeq 6.25 \times 1.7 \Rightarrow y \simeq 10.62$$

$$\xrightarrow{(4)} x + 10.62 = 25 - 12.5 \Rightarrow x = 1.88$$

تالیفی مهدی ملازمضانی

با استفاده از رابطه $t = \frac{x}{V}$ ، مدت زمان حرکت کامران در هر دو مسیر را حساب می‌کنیم:

$$\text{مسیر پیاده‌رو} : t_1 = \frac{x_1}{V_1} = \frac{300 - x}{4}$$

$$\text{مسیر پارک} : t_2 = \frac{x_2}{V_2} = \frac{\sqrt{90^2 + x^2}}{2} = \frac{\sqrt{8100 + x^2}}{2}$$

کل زمان حرکت برابر است با:

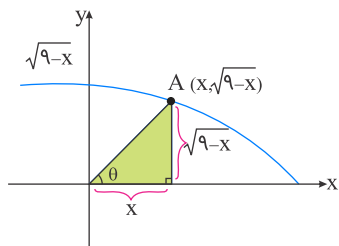
$$t = t_1 + t_2 = \frac{300 - x}{4} + \frac{\sqrt{8100 + x^2}}{2}$$

ریشه t' را حساب می‌کنیم:

$$t' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{8100 + x^2}} = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2\sqrt{8100 + x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{8100 + x^2} \Rightarrow 4x^2 = 8100 + x^2 \Rightarrow x^2 = 2700 \Rightarrow x = 30\sqrt{3}$$

تالیفی علی شهبابی فراهانی



نقطه $A(x, \sqrt{9-x})$ را روی منحنی $y = \sqrt{9-x}$ در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث برابر است

$$S = \frac{x\sqrt{9-x}}{2}$$

برای اینکه مساحت ماکزیمم شود مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \frac{1}{2} \times \sqrt{9-x} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} \times \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{9-x} = \frac{x}{2\sqrt{9-x}}$$

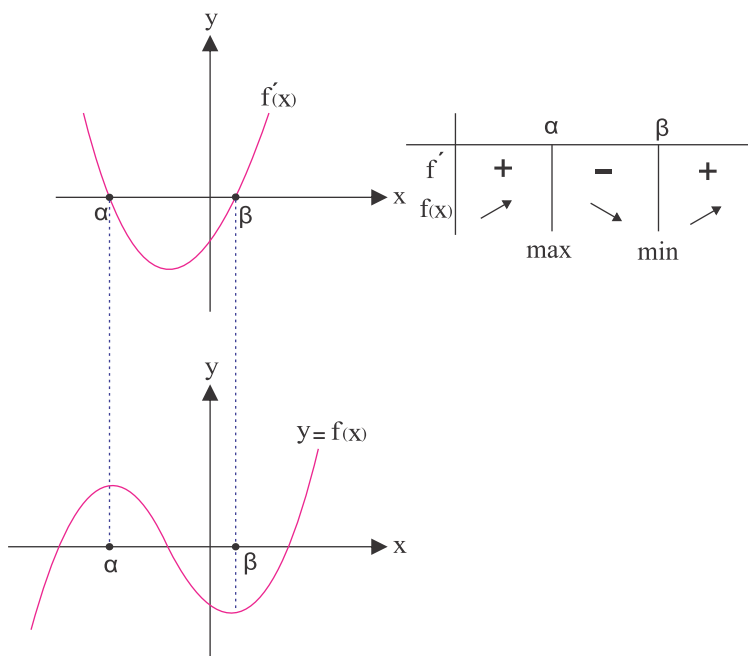
$$\Rightarrow 2(9-x) = x \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

به ازای $x = 6$ مساحت ماکزیمم می‌شود. حالا $\tan \theta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{9-x}}{x} \xrightarrow{x=6} \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

از نمودار زیر به جدول زیر می‌رسیم:



پس گزینه ۱ صحیح است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

برای یافتن نقاط بحرانی از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = (4x - 5)\sqrt[3]{x^2} + \frac{4x^2 - 10x}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{(12x^2 - 15x) + (4x^2 - 10x)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{16x^2 - 25x}{3\sqrt[3]{x}}$$

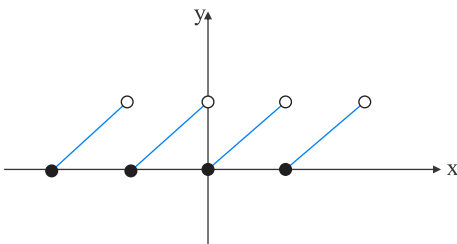
در $x = 0$ مشتق وجود ندارد (تعریف نشده است)، پس $x = 0$ یک نقطه بحرانی برای این تابع است. حال ریشه‌های $f'(x) = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{16x^2 - 25x}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x(16x - 25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{25}{16} \end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی این تابع $x = 0$ ، $x = \frac{25}{16}$ هستند که بزرگ‌ترین طول را $x = \frac{25}{16}$ در میان آن‌ها دارد؛ بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تالیفی عزیزالله علی اصغری

نمودار تابع در گزینه ۱ به صورت زیر است:



تابع در تمام نقاط صحیح ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

پس این نقاط بحرانی هستند ولی در سایر نقاط مشتق‌پذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: در تابع $f(x) = [x^2]$ در نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح می‌شود، تابع ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. البته به جز $x = 0$. به علاوه در سایر نقاط تابع ثابت خواهد بود و مشتق در آن‌ها صفر است.

پس این نقاط هم بحرانی هستند؛ بنابراین تمام نقاط دامنه بحرانی محسوب می‌شوند.

گزینه ۳: تابع در $x = 0$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. \Leftarrow بحرانی است. در سایر نقاط ثابت است و مشتق صفر می‌شود. \Leftarrow بحرانی است.

گزینه ۴: ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + 2\sin^2 x = (1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x = 1$$

چون تابع ثابت است، پس تمام نقاط آن بحرانی محسوب می‌شوند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y ، به صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 50$$

$$\Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$$

$$\Rightarrow f = 3x + 4y = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$ ، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = 3 + 4\left(\frac{-2x}{2\sqrt{50 - x^2}}\right) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 = \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x > 0} 9(50 - x^2) = 16x^2$$

$$\Rightarrow 450 - 9x^2 = 16x^2 \Rightarrow 25x^2 = 450 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18}$$

$$y = \sqrt{50 - x^2} = \sqrt{50 - 18} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$f_{\max} = 3x + 4y = 3(\sqrt{18}) + 4(4\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

این تابع، یک تابع درجه دوم کسینوسی است.

$$y = (2 \cos x - 1)(1 + \cos x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

در این مدل توابع $(a \cos^2 x + b \cos x + c)$ کافی است که سه عدد a و -1 و $\frac{-b}{2a}$ (به شرطی که $1 < \left| \frac{-b}{2a} \right|$ باشد) را به جای $\cos x$ قرار دهیم و مقادیر به دست آمده را مقایسه کنیم:

$$\cos x = 1 \Rightarrow y = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow y = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

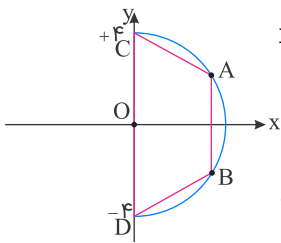
پس $\max(y) = 2$ و $\min(y) = -2$ می‌باشد.

$$\max(y) + \min(y) = 2 - 2 = 0$$

تالیفی سیروس نصیری

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = 8\pi \Rightarrow r = 4$$

اگر $O(0, 0)$ مرکز دایره با شعاع ۴ باشد، معادله دایره برابر است با:



$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 16 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{16 - y^2}$$

اگر مختصات نقطه A به صورت $A(x, y)$ باشد، داریم:

$$S_{\text{دو زونقه}} = \frac{AB + DC}{2} \times x = \frac{2y + 8}{2} \times \sqrt{16 - y^2}$$

$$S_{\text{دو زونقه}} = (y + 4)(\sqrt{16 - y^2})$$

برای محاسبه بیشترین مساحت مشتق می‌گیریم.

$$S' = \sqrt{16 - y^2} + (y + 4) \left(\frac{-2y}{2\sqrt{16 - y^2}} \right)$$

مشتق را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$S' = \sqrt{16 - y^2} + (y + 4) \left(\frac{-y}{\sqrt{16 - y^2}} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} 16 - y^2 &= y^2 + 4y \Rightarrow 2y^2 + 4y - 16 = 0 \\ \Rightarrow y^2 + 2y - 8 &= 0 \Rightarrow (y + 4)(y - 2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -4 \end{cases} &\text{ غ.ق.ق} \end{aligned}$$

$$S(2) = (2 + 4) \sqrt{16 - 4} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$f'(x)$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{3}{5} \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} \right) - 3 \times \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{5} \times \frac{3x + 2x}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x}}$$

x	0	2
f'	+	-
	0	+

تابع f در فاصله $(0, 2)$ نزولی اکید است، پس حداکثر مقدار $b - a$ برابر با ۲ است.

تالیفی سیروس نصیری

نقطه $A(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ را بر روی منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ در نظر می‌گیریم. فاصله مبدأ مختصات از نقطه A برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + \left(\frac{2}{\alpha^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}$$

برای مینیمم کردن فاصله OA ، ابتدا معادله $(OA)'_{\alpha} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(OA)'_{\alpha} = \frac{2\alpha - \frac{16\alpha^3}{\alpha^5}}{2\sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}}$$

$$(OA)'_{\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha - \frac{16}{\alpha^4} = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{16}{\alpha^4} \Rightarrow \alpha^6 = 8 \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ ، به ازای $\alpha = \sqrt[3]{2}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{\min} = \sqrt{(\sqrt[3]{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt[3]{2})^4}} = \sqrt{2 + \frac{4}{4}} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

نکته: برای هر n عدد حقیقی مثبت x_1, x_2, \dots, x_n داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

در این سؤال $a = 4b$ ، پس $\frac{a}{b} = 4$ است و در نتیجه:

$$A = 4 + \frac{4b}{c} + \frac{c}{2\sqrt{d}} + \frac{d}{a} \geq 4 + 3\sqrt[3]{\frac{4b}{c} \times \frac{c}{2\sqrt{d}} \times \frac{d}{a}}$$

$$\Rightarrow A \geq 4 + 3\sqrt[3]{\frac{2}{2\sqrt{d}}} = 4 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow A \geq 4 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow \min A = 4 + \sqrt[3]{2}$$

تالیفی سیروس نصیری

کل هزینه‌ها برابر است با $P = v^2 + ۲۵۰t$ ، چون قرار است مسافت یک کیلومتری را طی کند، داریم: $v = \frac{1}{t}$ و از آن داریم:
 $t = \frac{1}{v}$ پس هزینه حرکت این اتومبیل برابر است با:

$$P = v^2 + \frac{۲۵۰}{v} \Rightarrow P' = ۲v - \frac{۲۵۰}{v^2} = \frac{۲v^3 - ۲۵۰}{v^2} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲v^3 = ۲۵۰ \Rightarrow v^3 = ۱۲۵$$

$$\Rightarrow v = ۵ \xrightarrow{v \in [۰, +\infty)} \begin{cases} v = ۰ \Rightarrow \lim_{v \rightarrow ۰} (v^2 + \frac{۲۵۰}{v}) = +\infty \\ v = ۵ \Rightarrow P = ۷۵ \text{ (min)} \\ v = +\infty \Rightarrow \lim_{v \rightarrow +\infty} (v^2 + \frac{۲۵۰}{v}) = +\infty \end{cases}$$

پس به ازای $v = ۵$ کمترین هزینه برای طی مسیر صرف می‌شود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$f(x) = x - \sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad D_f = [-2, 2]$$

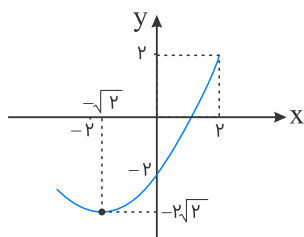
$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\begin{cases} y' = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} * \\ y' \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

* دقت کنید از عمل $y' = 0$ که باید با به توان ۲ رساندن طرفین $-1 = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ حل شود، ۲ جواب $x = \pm\sqrt{2}$ به دست می‌آید که $x = \sqrt{2}$ در معادله $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ صادق نیست و فقط $x = -\sqrt{2}$ جواب است!

x	-۲	$-\sqrt{2}$	۲
f(x)	-۲	$-2\sqrt{2}$ ↓ min	۲ ↓ max

$$R_f \in [-2\sqrt{2}, 2]$$

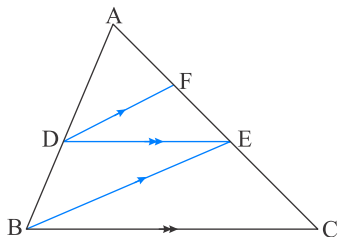


تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۸	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۴۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۵۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۵۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۷۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۸۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۶۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۷۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۹۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۷۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۹۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۵۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۶۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۸۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۹۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۸	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۶۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۶۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۷۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۸۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۹۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۰۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۲۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۴۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۱۰۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۲۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۳۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۱۰۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۳۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۱۰۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۱۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۳۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۴۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۰۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۱۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۲۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۴۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۱۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۲۰	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۳۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۵۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۱۵۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶۱	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۸۱	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		
۱۵۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۸۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>		
۱۵۳	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۳	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				
۱۵۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				
۱۵۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۶۵	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۷۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				
۱۵۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۶۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				
۱۵۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۷	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				
۱۵۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۶۸	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				
۱۵۹	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				
۱۶۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۷۰	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۸۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>				

در شکل زیر اگر $\frac{EF}{AC} = \frac{6}{49}$ باشد، $\frac{DE}{BC}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱



$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{7} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

تالیفی صبا مهدوی

در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

۲

$$20 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

$$30 \quad (4)$$

$$25 \quad (3)$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۳

$$20 \quad (2)$$

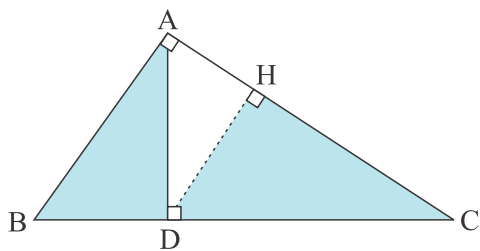
$$18 \quad (1)$$

$$28 \quad (4)$$

$$24 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

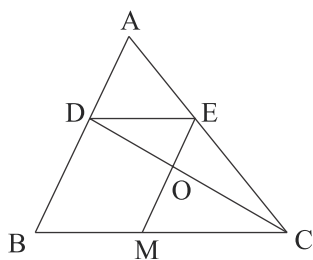
در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه HCD و ABD ، کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{7}$
 (۲) $\frac{4}{7}$
 (۳) $\frac{16}{21}$
 (۴) $\frac{8}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

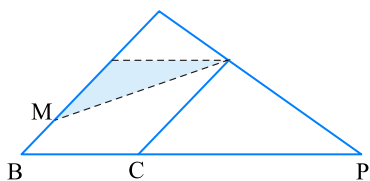
در شکل زیر $S_{ODE} = \frac{9}{16} S_{OMC}$ و چهار ضلعی $DEMB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت ذوزنقه $DECB$ چندبرابر مساحت ADE است؟



- (۱) ۳
 (۲) $\frac{40}{9}$
 (۳) $\frac{49}{9}$
 (۴) $\frac{41}{9}$

تالیفی ایمان نخستین

در شکل زیر نقطه M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده چندبرابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟

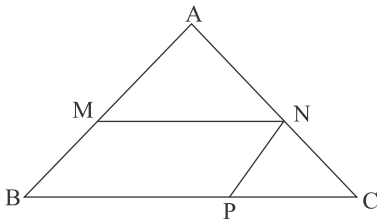


- (۱) $\frac{1}{12}$
 (۲) $\frac{1}{9}$
 (۳) $\frac{1}{8}$
 (۴) $\frac{3}{16}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

۷



(۱) ۴۸

(۲) ۵۲

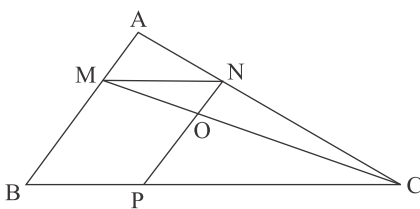
(۳) ۵۴

(۴) ۵۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟

۸



(۱) ۶۳

(۲) ۶۰

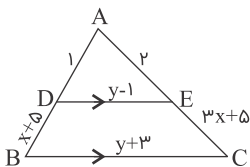
(۳) ۷۰

(۴) ۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

اگر در شکل زیر $DE \parallel BC$ باشد، مقدار $2x + 5y$ کدام است؟

۹



(۱) ۱۵

(۲) ۱۶

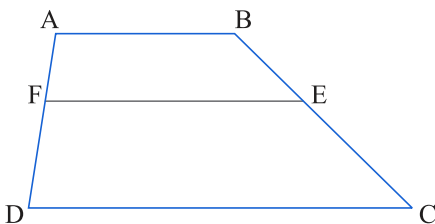
(۳) ۱۷

(۴) ۱۸

تالیفی محمد علی نیک بخش

در دوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{5}{2}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{1}{4}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟

۱۰

(۱) $\frac{11}{20}$ (۲) $\frac{7}{15}$ (۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

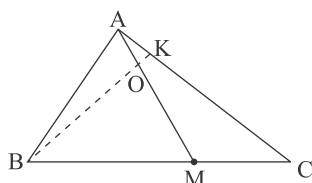
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

روی محیط مربعی به ضلع ۴ واحد، دو نقطه وجود دارد که به فاصله ۵ واحد از یک رأس مربع قرار دارند. فاصله مرکز مربع از یکی از این نقاط کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) $\sqrt{10}$

تالیفی نرگس کارگر

در شکل زیر، نقطه M خط BC را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده و نقطه O خط AM را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده است و K نقطه برخورد امتداد BO با AC است، $\frac{BK}{OK}$ کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۱۲

(۳) ۳

(۴) ۱۰

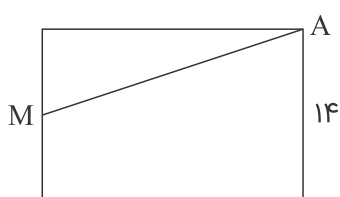
تالیفی محمد علی نیک بخش

نقطه A به فاصله $x^2 - 6x + m$ از خط d قرار دارد. اگر فقط یک نقطه روی خط d وجود داشته باشد که فاصله اش از A برابر با ۳ باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m \leq 10$
(۲) $m = 12$
(۳) $m \leq 12$
(۴) $m \leq 13$

تالیفی نرگس کارگر

در شکل زیر، پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت های $\frac{5}{9}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره خط AM چند واحد است؟



(۱) ۲۱

(۲) ۲۳

(۳) $9\sqrt{7}$

(۴) $10\sqrt{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

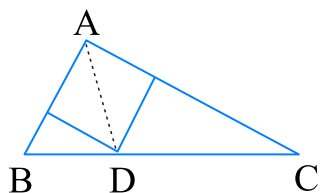
از به هم وصل کردن اوساط چهار ضلعی ABCD یک لوزی ساخته شده است. چهار ضلعی ABCD همواره چگونه است؟

- (۱) متوازی الاضلاع
(۲) لوزی
(۳) دوزنقه
(۴) دارای دو قطر برابر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

۱۶



(۱) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

(۲) $\frac{2}{1}$

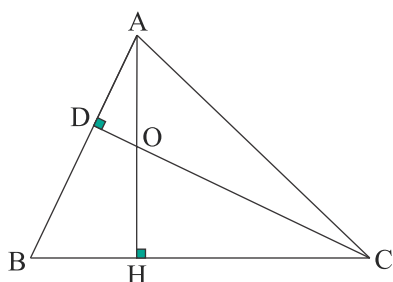
(۳) $\frac{2}{8}$

(۴) $\frac{2}{1}\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در شکل زیر $OA = OH = \sqrt{33}$ و $CD = 14$ است. اندازه ضلع AC کدام است؟

۱۷



(۱) $2\sqrt{55}$

(۲) $2\sqrt{57}$

(۳) $2\sqrt{51}$

(۴) $2\sqrt{53}$

تالیفی ایمان نخستین

در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

۱۸

(۲) بیشتر از ۱

(۱) کمتر از ۱

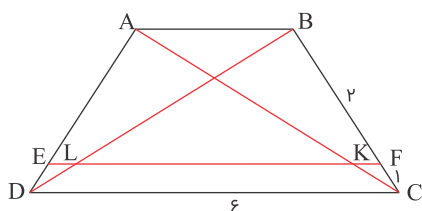
(۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

(۳) مساوی ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

باتوجه به شکل زیر، اگر $AB \parallel EF \parallel DC$ باشد، حاصل $FL + EK$ کدام است؟

۱۹



(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۸

تالیفی محمد علی نیک بخش

قطری از دایره $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$ که موازی خط $y - x = 1$ است از کدام نقطه می‌گذرد؟

۲۰

(۲) $B(1, 6)$

(۱) $A(2, -3)$

(۴) $D(1, -4)$

(۳) $C(2, 1)$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

۲۱ به ازای چند مقدار از m ، معادله $m^2 - 3x^2 - 2my^2 + 4x - 2y - 2m = 0$ معادله یک دایره است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار

تالیفی حسین سعیدی

۲۲ تقاطع خطوط $y_1 = -mx + \frac{1}{m}$ و $y_2 = \frac{x}{m}$ و $x = 0$ تشکیل یک مثلث می‌دهد. از دوران این مثلث حول خط $x = 0$ ، شکلی با کدام حجم حاصل می‌شود؟ ($m > 0$)

- (۱) $\frac{\pi}{3m(m^2 + 1)}$
(۲) $\frac{\pi}{3(m^2 + 1)^2}$
(۳) $\frac{\pi}{3m^2(m^2 + 1)}$
(۴) $\frac{\pi}{3m(m^2 + 1)^2}$

تالیفی محمدجواد محسنی

۲۳ اگر معادله $(a - 1)x^2 + y^2 + (c - 2)xy + dx - 2y + 5 = 0$ دایره باشد، کمترین مقدار طبیعی $a + c + d$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

۲۴ اگر بیشترین و کمترین فاصله نقاط بیضی از دو کانون به ترتیب ۱ و ۷ باشد، نسبت مساحت دایره محاط در بیضی، به مساحت دایره محیط بر آن، چقدر است؟

- (۱) $\frac{7}{16}$
(۲) $\frac{16}{7}$
(۳) $\frac{9}{16}$
(۴) $\frac{16}{9}$

تالیفی مهدی ملارضانی

۲۵ مرکز دایره گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 3)$ و $(-2, 1)$ برابر کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{2})$
(۲) $(\frac{1}{4}, -\frac{9}{2})$
(۳) $(\frac{1}{8}, -\frac{9}{4})$
(۴) $(-\frac{1}{8}, \frac{9}{4})$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

۲۶ در برش یک مکعب با یک صفحه کدام سطح مقطع نمی‌تواند به وجود بیاید؟

- (۱) دوزنقه
(۲) پنج ضلعی
(۳) شش ضلعی
(۴) هشت ضلعی

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

دایره گذرا بر نقطه $(-2, 1)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۲۷

(۲) ۱ و ۵

(۱) ۱ و ۴

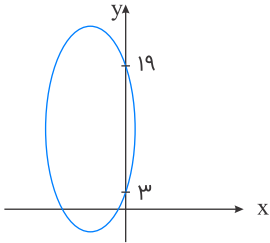
(۴) ۲ و ۵

(۳) ۲ و ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در شکل زیر، اگر یکی از کانون‌ها نقطه $F(-6, 19)$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟

۲۸



(۱) $6 + 2\sqrt{73}$

(۲) $3 + 2\sqrt{73}$

(۳) $6 + 2\sqrt{69}$

(۴) $3 + 2\sqrt{69}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نقطه $M(2\sqrt{5}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = 2x$ و $x = 2y$ مماس است. شعاع دایره کوچکتر کدام است؟

۲۹

(۲) ۱/۵

(۱) ۱

(۴) ۲/۵

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

مرکز دایره‌ای روی خط $2x + y = 1$ قرار دارد و این دایره بر دو خط $y - 2x = 0$ و $x + 2y = 0$ مماس می‌باشد. مساحت دایره برابر کدام است؟

۳۰

(۲) 5π

(۱) $\frac{\pi}{5}$

(۴) $\frac{7}{3}\pi$

(۳) $\frac{3}{7}\pi$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

مکعبی را با یک صفحه به گونه‌ای برش می‌دهیم که صفحه برش، سه ضلع هم‌رأس مکعب را دقیقاً از وسط آن‌ها قطع کند. نسبت مساحت سطح مقطع به مساحت کل مکعب چقدر است؟

۳۱

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{48}$

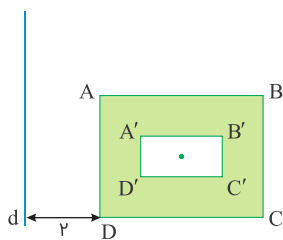
(۱) $\frac{\sqrt{3}}{24}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{24}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{48}$

تالیفی مهدی ملارمضانی

در شکل زیر، $ABCD$ و $A'B'C'D'$ مستطیل‌هایی هم‌مرکز به طول‌های ۴ و ۳ و عرض‌های ۲ و ۱ هستند. حجم حاصل از دوران این شکل حول محور d کدام است؟



(۱) $\frac{9\pi}{4}$

(۲) 60π

(۳) 40π

(۴) 64π

تالیفی عزیزالله علی اصغری

سطح مقطع صفحه‌گذرنده از یک قطر وجه یا از دو قطر موازی در دو وجه موازی مکعب، با مکعب کدام است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع یا دوزنقه متساوی‌الساقین

(۲) مستطیل یا دوزنقه متساوی‌الساقین

(۳) مستطیل یا متوازی‌الاضلاع

(۴) مستطیل یا لوزی

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵

از داخل یک استوانه قائم به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده ۲ واحد، بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌ایم. صفحه‌ای موازی قاعده مخروط را تقریباً در چه فاصله‌ای از آن با استوانه قطع دهیم که مساحت سطح مقطع ایجادشده برابر $\frac{1}{44}\pi$ شود؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{5}{25}$

(۳) ۴

(۴) $\frac{4}{75}$

تالیفی مهدی ملارمضانی

در یک بیضی فاصله کانون F' از نزدیک‌ترین نقطه بیضی برابر ۵ و فاصله کانون F تا دورترین نقطه بیضی برابر ۱۳ است. در این بیضی در کانون F خطی بر قطر بزرگ بیضی عمود می‌کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند. طول پاره‌خط MN کدام است؟

(۱) $\frac{65}{9}$

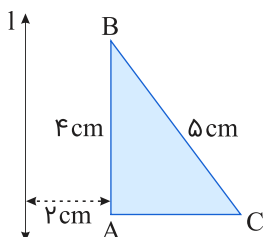
(۲) $\frac{130}{9}$

(۳) $\frac{67}{9}$

(۴) $\frac{134}{9}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

مطابق شکل، مثلث قائم‌الزاویه ABC را حول خط l دوران می‌دهیم. نسبت حجم کل به حجم استوانه محاط درون شکل کدام است؟



(۱) $\frac{9}{4}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{2}{3}$

تالیفی مهدی ملارمضانی

تمام خطوط قائم بر دایره $C(O, R)$ از نقطه‌ای به مختصات $(4, -1)$ می‌گذرد. اگر این دایره روی خط $4x + 3y + 2 = 0$ وترى به طول ۸ جدا کند، مساحت این دایره کدام است؟

- (۱) 9π (۲) 16π
(۳) 25π (۴) 36π

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۶

خط به معادله $y = mx - 1$ بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ مماس است. مجموع مقادیر m چقدر است؟

- (۱) -2 (۲) 2
(۳) 4 (۴) -4

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۱۱

دایره‌ای به مرکز $O(2, -3)$ روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وترى به طول ۶ جدا می‌کند. طول پاره‌خطی که این دایره روی محور x ها جدا می‌کند، کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 8
(۳) 6 (۴) 10

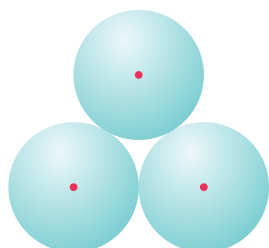
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

بیضی با خروج از مرکز $e = \frac{2}{3}$ و کانون $F(2, 1)$ و رأس کانونی نظیر آن $A(2, 4)$ مفروض است. بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی و دو رأس آن کانون‌های این بیضی باشند، کدام است؟

- (۱) $18\sqrt{5}$ (۲) $19\sqrt{5}$
(۳) $5\sqrt{18}$ (۴) $36\sqrt{5}$

تالیفی سیروس نصیری

سه کره یکسان مطابق شکل مفروض‌اند. با یک صفحه به فاصله ۲ از بالاترین نقاط کره‌ها، آن‌ها را برش داده‌ایم. مراکز سه مقطع حاصل را به هم وصل کرده‌ایم و مثلثی به مساحت $16\sqrt{3}$ حاصل شده است. شعاع هر کره چقدر است؟



- (۱) 3 (۲) 4
(۳) 2 (۴) 5

تالیفی امیر خمسه

خط‌المركزين دو دایره، خط $2x - y = 6$ است. اگر این دو دایره بر محورهای مختصات مماس باشند آنگاه شعاع دایره بزرگ‌تر برابر کدام است؟

۴۲

- (۱) ۲
(۲) ۶
(۳) ۴
(۴) ۸

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

مجموع شعاع‌های دایره‌هایی که از نقطه $A(3, 2)$ می‌گذرند و بر محورها مماس می‌شوند، کدام می‌تواند باشد؟

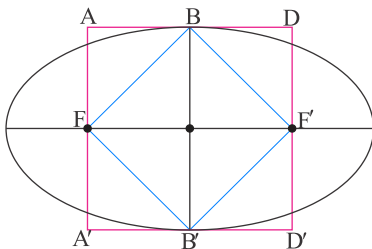
۴۳

- (۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۱۰
(۴) ۸

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵

در بیضی زیر، مساحت مربع $BFB'F'$ چه کسری از مساحت مربع $AA'D'D$ است؟

۴۴

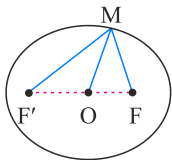


- (۱) ۲
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۱
(۴) ۳

تالیفی مهدی ملارضانی

بیضی زیر به قطرهای ۸ و ۶ را در نظر بگیرید. اگر فاصله نقطه M از مرکز بیضی برابر با $\sqrt{7}$ باشد، حاصل $MF \cdot MF'$ کدام است؟

۴۵



- (۱) ۱۸
(۲) ۳۶
(۳) ۱۶
(۴) ۲۸

تالیفی سولماز احمدی

فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادله $3x + 4y = 15$ ، کدام است؟

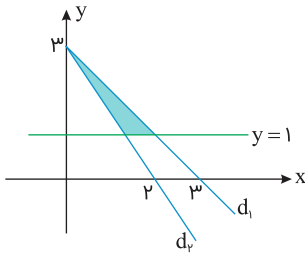
۴۶

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

در شکل زیر، ناحیه هاشورخورده را حول محور عرض‌ها دوران می‌دهیم، حجم حاصل چقدر است؟

۴۷



$$\frac{40\pi}{27} \quad (1)$$

$$\frac{20\pi}{9} \quad (2)$$

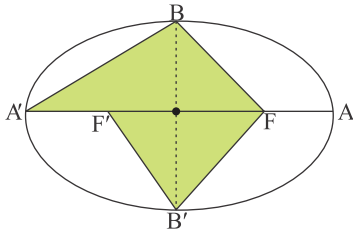
$$\frac{40\pi}{9} \quad (3)$$

$$\frac{20\pi}{27} \quad (4)$$

تالیفی امیر خمسه

در شکل زیر $FF' = 6\sqrt{3}$, $AA' = 12$ است. مساحت قسمت رنگی چقدر است؟

۴۸



$$\frac{9}{2}(1 + \sqrt{27}) \quad (1)$$

$$\frac{9}{2}(1 + \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$\frac{3}{2}(1 + \sqrt{27}) \quad (3)$$

$$\frac{9}{2}(2 + \sqrt{27}) \quad (4)$$

تالیفی سیروس نصیری

بیضی با دو سر قطر بزرگ‌تر با مختصات $(-2, 1)$ و $(6, 1)$ و خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{2}$ بر کدام خط مماس است؟

۴۹

$$x = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$y = 3 \quad (1)$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$y = -\frac{3}{2} \quad (3)$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۴

چند نقطه روی دایره $2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 7$ قرار دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه $(1, 3)$ و $(1, -1)$ برابر ۵ باشد؟

۵۰

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

تالیفی سیروس نصیری

کانون‌های یک بیضی $F(6, -3)$ و $F'(-2, -3)$ هستند و نقطه $N(2, -6)$ بر روی بیضی قرار دارد. اگر به فاصله نقطه N از مرکز بیضی، ۲ واحد اضافه شود.....

(۱) تبدیل به دایره می‌شود.

(۲) خروج از مرکز بیضی بزرگ‌تر خواهد شد.

(۳) شیب خط گذرنده از رأس غیرکانونی و کانون، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ خواهد شد.

(۴) بیضی کشیده‌تر می‌شود.

تالیفی مهدی ملارمضانی

طول وتری که خط $y = ax + 2$ بر روی دایره‌ای به معادله $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ جدا می‌کند برابر با ۲ می‌باشد، مقدار a چقدر است؟

(۱) $2 \pm \sqrt{3}$

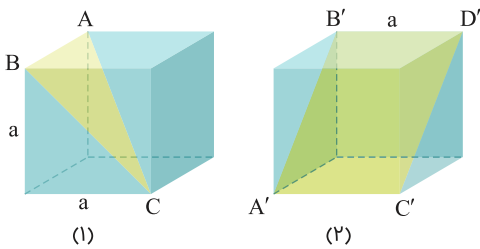
(۲) $1 \pm \sqrt{6}$

(۳) $1 \pm \sqrt{3}$

(۴) $2 \pm \sqrt{6}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

یک مکعب به ضلع ۲ را به دو صورت زیر با دو صفحه مختلف برش می‌زنیم. نسبت مساحت سطح مقطع ایجاد شده با صفحه ۱ به مساحت سطح مقطع ایجاد شده به وسیله صفحه ۲ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

تالیفی مهدی ملارمضانی

معادله دایره‌ای که خطوط $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ و $3x + y = 1$ مماس باشد، کدام است؟

(۲) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$

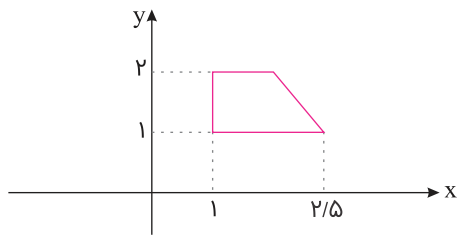
(۱) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{10}$

(۴) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$

(۳) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{10}$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

۵۵ اگر از بین پاره‌خط‌های زیر، یکی از آن‌ها روی خط $y = -2x + 6$ واقع باشد، حجم شکل حاصل از دوران این دوزنقه حول محور y تقریباً چقدر است؟ ($\pi \simeq 3$)



(۱) ۱۲/۵

(۲) ۳۱/۲۵

(۳) ۱۲/۲۵

(۴) ۱۵/۲۵

تالیفی محمدجواد محسنی

۵۶ دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند و فاصله آن‌ها از خط d به ترتیب ۴ و ۸ هستند. امتداد AB با خط d زاویه 45° می‌سازد. AB را حول d دوران داده و شکل حاصل را با صفحه شامل خط d برش می‌دهیم. سطح مقطع حاصل چقدر خواهد بود؟

(۲) ۳۶

(۱) ۲۴

(۴) ۵۲

(۳) ۴۸

تالیفی عزیزالله علی اصغری

۵۷ شعاع بزرگ‌ترین دایره گذرنده از نقطه $A(2, 3)$ و مماس بر خط $3y - 4x = 0$ و محور y ها، کدام است؟

(۲) $\frac{13}{9}$ (۱) $\frac{14}{5}$ (۴) $\frac{11}{5}$ (۳) $\frac{15}{7}$

تالیفی فرزاد زمانی نژاد

۵۸ بیضی شامل کانون‌هایی به نقاط $(1, 1)$ و $(-3, 1)$ و قطر بزرگ $2\sqrt{13}$ از کدام یک از نواحی مختصات می‌گذرد؟

(۲) فقط ناحیه ۳ و ۴

(۱) فقط ناحیه ۱ و ۲

(۴) نواحی ۱، ۲ و ۳

(۳) همه نواحی مختصات

تالیفی مهدی ملارمضانی

۵۹ دایره‌هایی بر محورهای مختصات مماس هستند و مرکز آن‌ها بر خط $y = -2x + 3$ قرار دارد، شعاع کوچک‌ترین دایره چقدر است؟

(۲) ۳

(۱) ۱

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶



گزینه ۲

۱

$$\begin{cases} \frac{EF}{AE} = \frac{DB}{AD} = \frac{AB - AD}{AB} \\ \frac{EF}{AC} = \frac{DB}{AB} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب دو تساوی}} \frac{EF}{AC} = \frac{(AB - AD)AD}{AB^2} = \frac{6}{49} \Rightarrow 6AB^2 = 49AB \cdot AD - 49AD^2$$

$$\xrightarrow{\div AB^2} 49 \left(\frac{AD}{AB} \right)^2 - 49 \left(\frac{AD}{AB} \right) + 6 = 0 \Rightarrow \left(7 \left(\frac{AD}{AB} \right) - 6 \right) \left(7 \left(\frac{AD}{AB} \right) - 1 \right) = 0$$

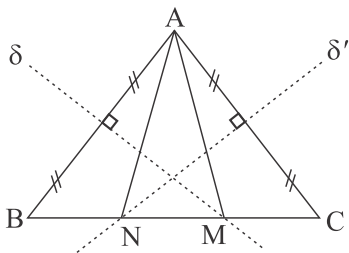
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{7} \text{ یا } \frac{6}{7}$$

تالیفی صبا مهدوی

گزینه ۲

۲

$$\hat{A} = 100^\circ, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 50^\circ$$



هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \hat{BAM} = \hat{B} = 50^\circ \Rightarrow \hat{AMB} = 100^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow \hat{CAN} = \hat{C} = 50^\circ \Rightarrow \hat{ANC} = 100^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{MAN} = 180^\circ - (\hat{AMB} + \hat{ANC}) = 20^\circ$$

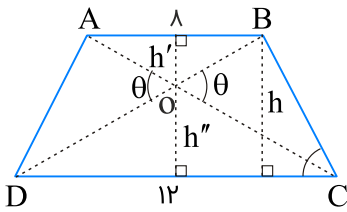
بنابراین، کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN، زاویه $\hat{MAN} = 20^\circ$ است.

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OCD$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{h'}{h''} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow h'' = 3h'$$

$$h' + h'' = 10 \Rightarrow h' + 3h' = 10 \Rightarrow h' = 2.5 \Rightarrow h'' = 7.5$$

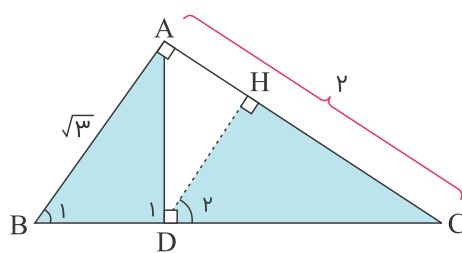
$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OB \times OC = OA \times OD (*)$$

مساحت دو مثلث $\triangle OBC$ و $\triangle OAD$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases} S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin \theta \\ S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} OA \times OD \times \sin \theta \end{cases} \xrightarrow{(*)} S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ODC} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} \\ \Rightarrow \frac{(4 + 12) \times 10}{2} &= \frac{7.5 \times 12}{2} + \frac{2.5 \times 4}{2} + 2S_{\triangle OBC} \\ \Rightarrow 100 &= 45 + 5 + 2S_{\triangle OBC} \Rightarrow S_{\triangle OBC} = \frac{50}{2} = 25 \end{aligned}$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle ABC$ داریم:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 3 + 16 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{19}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DH, \text{ مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{D}_1 = \widehat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle HCD$$

طبق روابط طولی در مثلث $\triangle ABC$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\Rightarrow 16 = \sqrt{19} \times CD \Rightarrow CD = \frac{16}{\sqrt{19}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث HCD و ABD برابر است با:

$$K = \frac{\frac{16}{\sqrt{19}}}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{57}}$$

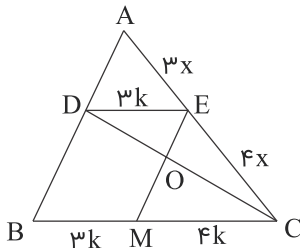
می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = K^2 = \left(\frac{16}{\sqrt{57}} \right)^2 = \frac{16}{3}$$

باتوجه به اینکه $DE \parallel MC$ ، بنابراین دو مثلث ODE و OMC به حالت تساوی دو زاویه باهم متشابه‌اند:

$$\triangle ODE \sim \triangle OMC \Rightarrow \frac{S_{ODE}}{S_{OMC}} = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{DE}{MC}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{DE}{MC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} DE = 3k \\ MC = 4k \end{cases}$$

طبق قضیه تالس داریم:



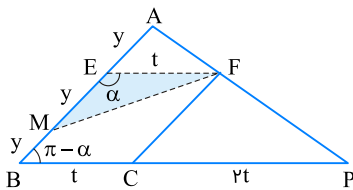
$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3k}{4k}$$

یعنی $AE = 3x$ و $AC = 4x$ ، پس داریم: $EC = 4x$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3x}{4x}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{DECB}} = \frac{9}{16-9}$$

پس مساحت دوازدهم $\frac{40}{9}$ مساحت ADE است.

تالیفی ایمان نخستین



$$PC = \frac{2}{3}PB \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{2}{3} = \frac{2t}{3t} \Rightarrow \begin{cases} PC = 2t \\ BC = t \end{cases}$$

$$EF \parallel BP \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BP} = \frac{t}{3t} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AE = y \\ AB = 3y \end{cases} \Rightarrow EB = 2y \Rightarrow EM = MB = y$$

نسبت مساحت دو مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}} = \frac{\frac{1}{2} \times EF \times EM \times \sin \alpha}{\frac{1}{2} \times AB \times BP \times \sin(\pi - \alpha)} = \frac{EF \times EM}{AB \times BP} = \frac{t \times y}{3t \times 3y} = \frac{1}{9}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN \parallel BP \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$NP \parallel MB \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow \triangle NPC \sim \triangle ABC$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ ، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA + MB} = \frac{1}{\frac{MA + MB}{MA}} = \frac{1}{1 + \frac{MA}{MB}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC}$$

چون $MN \parallel BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle NPC \sim \triangle ABC$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN + NC} = \frac{1}{\frac{AN + NC}{NC}} = \frac{1}{\frac{NC}{AN} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\triangle NPC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle NPC} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را بر حسب مساحت مثلث $\triangle ABC$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle NPC} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC} + \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{12}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{48}{100} S_{\triangle ABC}$$

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است؛ بنابراین $MN \parallel PB$ است. با استفاده از قضیه تالس می توان نوشت:

$$MN \parallel BP \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{7}{10}$$

همچنین $NO \parallel AM$ است پس دو مثلث $\triangle NOC$ و $\triangle AMC$ نیز متشابه می شود. می دانیم نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{49}{100} \Rightarrow S_{\triangle NOC} = \frac{49}{100} S_{\triangle AMC} \quad (I)$$

مساحت دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle AMC$ را می توان چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{10} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{3}{10} S_{\triangle ABC} \quad (II)$$

با استفاده از دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$S_{\triangle NOC} = \frac{49}{100} \times \frac{3}{10} S_{\triangle ABC} = \frac{147}{1000} S_{\triangle ABC} \quad (III)$$

از طرفی چون $MN \parallel BP$ است پس دو مثلث $\triangle AMN$ و $\triangle ABC$ متشابه می شود و نسبت مساحت آن ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{9}{100} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{9}{100} S_{\triangle ABC} \quad (IV)$$

اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{9}{100} - \frac{147}{1000}\right) S_{\triangle ABC}}{\frac{9}{100} S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{63}{1000}}{\frac{9}{100}} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10}$$

پس مساحت مثلث $\triangle OMN$ ، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\triangle AMN$ است.

چون $DE \parallel BC$ است، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{2}{3x+5} \Rightarrow 3x+5 = 2x+10 \Rightarrow x=5$$

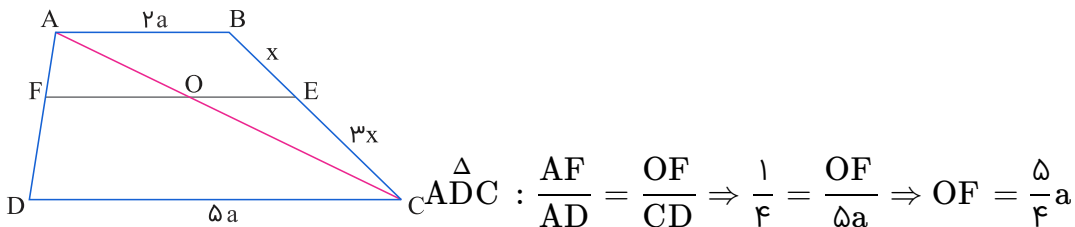
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{11} = \frac{y-1}{y+3} \Rightarrow y+3 = 11y-11$$

$$\Rightarrow 14 = 10y \Rightarrow y = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$2x + 5y = 2 \times 5 + 5 \times \frac{7}{5} = 10 + 7 = 17$$

تالیفی محمد علی نیک بخش

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



$$\triangle ADC : \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{1}{5a} = \frac{OF}{5a} \Rightarrow OF = \frac{5}{4}a$$

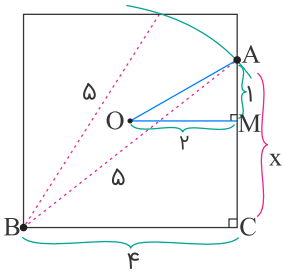
$$\triangle ABC : \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{2a} \Rightarrow \frac{3x}{4x} = \frac{OE}{2a} \Rightarrow OE = \frac{3}{2}a$$

$$EF = OF + OE = \frac{5}{4}a + \frac{3}{2}a = \frac{11}{4}a$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{11}{4}a}{5a} = \frac{11}{20}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

طبق رابطه فیثاغورس در مثلث ABC ، $x = ۳$ خواهد بود.
همچنین طبق رابطه فیثاغورس در مثلث OAM ، $OA = \sqrt{۵}$ خواهد بود.



تالیفی نرگس کارگر

باتوجه به نقطه O و خط AM داریم: $\frac{OA}{OM} = \frac{1}{3}$ و ترکیب نسبت در مخرج، $\frac{OA}{AM} = \frac{1}{4}$ ، از M خطی موازی OK رسم می‌کنیم تا AC را در L قطع کند، طبق تالس در مثلث AML داریم:

$$\frac{OA}{AM} = \frac{OK}{ML} \Rightarrow \frac{OK}{ML} = \frac{1}{4} \quad (I)$$

در مثلث BCK بنا به تالس داریم:

$$\frac{BK}{ML} = \frac{BC}{MC} = ۳ \Rightarrow \frac{BK}{ML} = ۳ \quad (II)$$

همواره از تقسیم (II) به (I) به دست می‌آید:

$$\frac{\frac{BK}{ML}}{\frac{OK}{ML}} = \frac{۳}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{BK}{OK} = ۱۲$$

تالیفی محمد علی نیک بخش

$$x^2 - 6x + m = ۳ \Rightarrow x^2 - 6x + (m - ۳) = ۰$$

کافی است معادله فوق جواب داشته باشد، پس $\Delta \geq ۰$ خواهد بود. در نتیجه:

$$\Delta = ۳۶ - 4m + ۱۲ \geq ۰ \Rightarrow -4m \geq -48 \Rightarrow m \leq ۱۲$$

تالیفی نرگس کارگر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

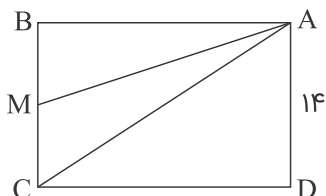
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle AMCD}} = \frac{5}{9} \quad \text{ب)}$$

$$AM = ? \quad \text{ج)}$$

گام دوم



با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \xrightarrow[\text{AD}=14]{\text{AC}=25} 25^2 = 14^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow 625 = 196 + CD^2 \Rightarrow CD^2 = 625 - 196 = 429 \Rightarrow AB^2 = 429$$

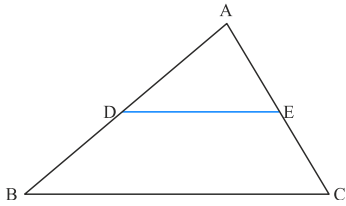
$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMCD}} = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{2AD} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{BM}{28} = \frac{5}{14} \Rightarrow BM = 10$$

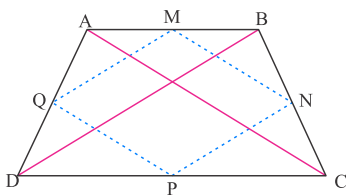
رابطه فیثاغورس را برای مثلث $\triangle ABM$ نوشته و اندازه AM را تعیین می‌کنیم:

$$AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow 429 + 100 = AM^2 \Rightarrow AM^2 = 529 \Rightarrow AM = \sqrt{529} = 23$$

می‌دانیم اگر اوساط اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به هم وصل کنیم پاره‌خط به‌دست‌آمده، موازی ضلع سوم و اندازه آن نصف طول ضلع سوم است؛ یعنی اگر D و E اوساط اضلاع AC و AB باشند، آنگاه $DE = \frac{1}{2}BC$ و $DE \parallel BC$. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که اگر اوساط اضلاع یک چهار ضلعی را متوالیاً به هم وصل کنیم، شکل حاصل همواره متوازی‌الاضلاع خواهد بود.



بنابراین در مثال بالا چهار ضلعی به‌دست‌آمده یک متوازی‌الاضلاع است. حال برای آنکه لوزی شود، لازم است دو ضلع مجاور آن برابر باشند؛ یعنی $MN = NP$ و چون $MN = \frac{1}{2}AC$ و $NP = \frac{1}{2}BD$ ، بنابراین لازم است شرط $AC = BD$ برقرار باشد.

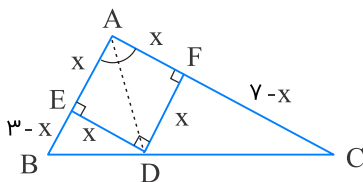


تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

نقطه D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE = DF$
 $\hat{A} = 90^\circ$ و $DE = DF$ ، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE \parallel FD$
 طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y-x}{y} \Rightarrow yx = 21 - 3x \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = 2/1$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2}x = 2/\sqrt{2}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در مثلث BCD طبق تالس داریم:

$$\frac{FL}{DC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{FL}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow FL = 4$$

طبق نکات قضیه تالس در ذوزنقه و شکل سؤال داریم: $EL = KF$ و $FL = EK$ پس:

$$FL = EK = 4$$

$$FL + EK = 4 + 4 = 8$$

تالیفی محمد علی نیک بخش

قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس مختصات یکی از نقاط روی قطر همان مرکز است و می‌دانیم مختصات مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$ برابر است با:

$$O(\alpha = -\frac{4}{2} = -2, \beta = -\frac{-6}{2} = 3) \Rightarrow O = (\alpha = -2, \beta = 3)$$

از طرفی قطر موردنظر موازی خط $y - x = 1$ است پس شیب قطر با شیب این خط برابر است در نتیجه:

$$y - x = 1 \Rightarrow m = 1 \text{ شیب قطر}$$

حال با داشتن شیب و مختصات نقطه، معادله قطر به دست می‌آید:

$$y - 3 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 5 \text{ معادله قطر}$$

حال به سادگی می‌توان فهمید که فقط گزینه ۲ در این خط صدق می‌کند:

$$B(1, 6) \Rightarrow 6 = 1 + 5 \Rightarrow 6 = 6 \quad \checkmark$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

شرط اول برای دایره بودن، برابری ضرایب x^2 و y^2 است.

$$m^2 - 3 = -2m \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

حال در هر دو حالت باید چک شود که عبارت زیر رادیکال در فرمول شعاع دایره مثبت باشد. البته اول باید ضرایب x^2 و y^2 را به یک تبدیل کنیم.

$$1) m = 1 \Rightarrow -2x^2 - 2y^2 + 4x - 2y - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 1 - 4 > 0 \quad \checkmark$$

$$2) m = -3 \Rightarrow 6x^2 + 6y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$$

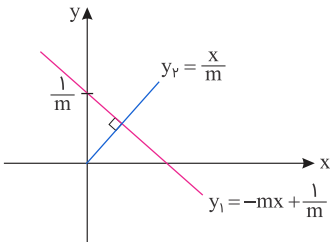
$$\xrightarrow{\div(6)} x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 4 < 0 \quad \text{غ.ق.ق}$$

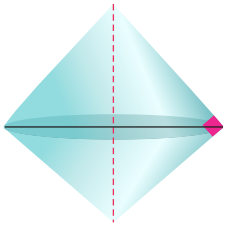
پس m یک مقدار، یعنی $m = 1$ است.

تالیفی حسین سعیدی

شیب خطوط y_1 و y_2 ، $-m$ و $\frac{1}{m}$ است که حاصل ضرب آن‌ها -1 می‌شود. یعنی این دو خط بر هم عمود هستند. با ترسیم یک شکل کلی داریم:



از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر خود، دو مخروط با قاعده‌های مشترک به هم چسبیده، مطابق شکل، به وجود می‌آید:



حجم این شکل در مجموع، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{\pi}{3} \times \text{وتر} \times (\text{ارتفاع وارد بر وتر})^2$$

علت این فرمول این است که ارتفاع وارد بر وتر، بعد از دوران همان شعاع قاعده می‌شود و اگر ارتفاع‌های دو مخروط را با هم جمع کنیم، به همان وتر می‌رسیم. حال باید اندازه‌های لازم را به دست آوریم: طول وتر مثلث از $y = 0$ تا $y = \frac{1}{m}$ است، در نتیجه طول وتر $\frac{1}{m}$ می‌باشد. برای ارتفاع وارد بر وتر باید طول نقطه تقاطع دو خط y_1 و y_2 را بیابیم:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 &\Rightarrow -mx + \frac{1}{m} = \frac{x}{m} \Rightarrow \left(m + \frac{1}{m}\right)x = \frac{1}{m} \\ &\Rightarrow \left(\frac{m^2 + 1}{m}\right)x = \frac{1}{m} \Rightarrow x = \frac{1}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

پس حالا می‌توانیم حجم شکل را محاسبه کنیم:

$$V = \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{m} \times \left(\frac{1}{m^2 + 1}\right)^2 = \frac{\pi}{3m(m^2 + 1)^2}$$

$$a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

ضریب xy نباید در دایره باشد:

$$c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2$$

از آنجا که شعاع دایره بزرگتر از صفر است، پس:

$$d^2 + 4 - 4 \times 5 > 0 \Rightarrow d^2 > 16 \Rightarrow d = 5$$

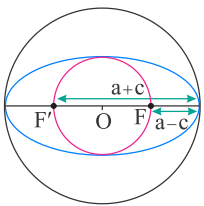
$$\text{مقدار کمترین مقدار: } 2 + 2 + 5 = 9$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶

بیشترین و کمترین فاصله نقاط بیضی از F' و F روی رأس‌های کانونی است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a + c = 7 \\ a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 4, c = 3 \quad (I)$$

می‌بینیم که قطر دایره محاط بر بیضی، همان قطر کوچک بیضی است و قطر دایره محیطی بر آن، همان قطر بزرگ بیضی است. بنابراین نسبت خواسته شده برابر خواهد بود با:



$$\frac{\text{مساحت دایره محاطی}}{\text{مساحت دایره محیطی}} = \frac{\pi b^2}{\pi a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

از طرفی می‌دانیم در یک بیضی $a^2 = b^2 + c^2$ ، بنا بر رابطه (I) داریم:

$$(4)^2 = b^2 + (3)^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 9 \Rightarrow b^2 = 7 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{7}{16}$$

تالیفی مهدی ملارمضانی

معادله گسترده دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

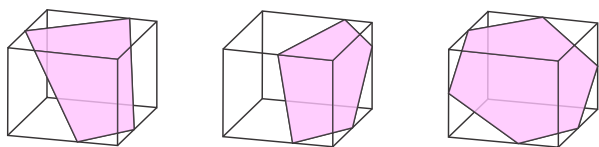
$$\begin{cases} (0, 0) \Rightarrow c = 0 \\ (2, 3) \Rightarrow 4 + 9 + 2a + 3b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = -13 \\ -2a + b = -5 \end{cases} \\ (-2, 1) \Rightarrow 4 + 1 - 2a + b = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4b = -18 \Rightarrow b = -\frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

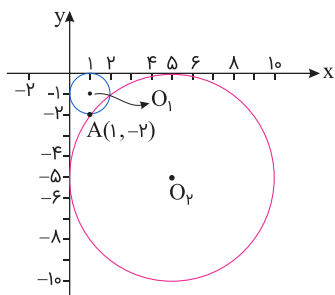
$$\text{مختصات مرکز } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O\left(-\frac{1}{8}, \frac{9}{4}\right)$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

باتوجه به شکل‌های زیر، در برش یک مکعب با یک صفحه دوزنقه، پنج ضلعی و شش ضلعی ایجاد می‌شود:



مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶



شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطه $A(1, -2)$ می‌گذرند. به علاوه مرکز دایره‌ها به صورت $O(r, -r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r, -r)$ و شعاع r هستند. معادله آن‌ها به این صورت است:

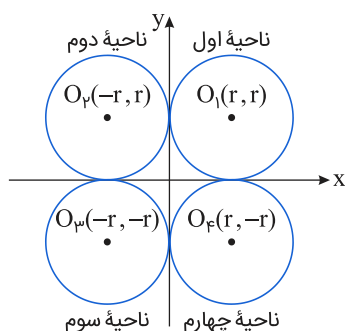
$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2 \xrightarrow{(1, -2)} (1 - r)^2 + (-2 + r)^2 = r^2$$

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)(r - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 5 \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم.

نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به صورت زیر است:

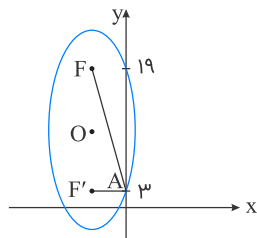


به دلیل اینکه بیضی عمودی است، کانون‌ها و مرکز هم طول هستند.

$$\text{مرکز } O(-c, \frac{19+c}{2}) = (-6, 11) \Rightarrow F'(-6, 3)$$

$$FF' = 2c = 12 \Rightarrow c = 6$$

نقطه $A(0, 3)$ یک نقطه روی بیضی است، پس داریم:



$$AF + AF' = 2a$$

$$AF' = 6$$

$$AF^2 = FF'^2 + AF'^2 \Rightarrow AF = \sqrt{(12)^2 + (6)^2}$$

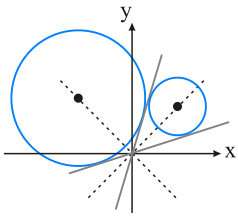
$$\Rightarrow AF = \sqrt{144 + 36} = 2\sqrt{73}$$

$$AF + AF' = 6 + 2\sqrt{73} = 2a$$

طول قطر بزرگ برابر است با:

$$2a = 6 + 2\sqrt{73}$$

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد. باتوجه به شکل، مرکز دایره کوچکتر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگتر روی $y = -x$ قرار دارد.



$$M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$$

شعاع دایره برابر با فاصله مرکز آن از خط $2y - x = 0$ است.

$$R = \frac{|4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

فرض کنیم مرکز دایره نقطه $O(\alpha, 1 - 2\alpha)$ باشد. فاصله O از دو خط $y - 2x = 0$ و $x + 2y = 0$ برابر است.

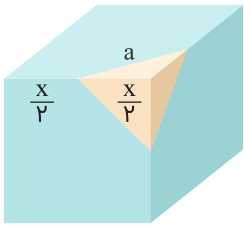
$$\frac{|\alpha + 2 - 4\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{|1 - 2\alpha - 2\alpha|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |2 - 3\alpha| = |1 - 4\alpha|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 3\alpha = 1 - 4\alpha \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow R = \frac{|2 - 3\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow S = 5\pi \\ 2 - 3\alpha = -1 + 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{7} \end{cases}$$

چون 5π در گزینه‌ها وجود دارد، پس لازم نیست این مرحله بررسی شود.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

چون صفحه برش هر سه ضلع را دقیقاً از وسط قطع می‌کند و باتوجه به مکعب بودن شکل، مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع خواهد بود که اندازه اضلاع آن برابر خواهد بود با:



$$a = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

و می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با:

$$a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \xrightarrow{a = \frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} x^2$$

و می‌دانیم مساحت کل مکعب به ضلع x برابر است با: $6x^2$
پس نسبت مساحت قطاع به مساحت کل برابر است با:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{8} x^2}{6x^2} = \frac{\sqrt{3}}{48}$$

تالیفی مهدی ملارضانی

شکل حاصل از دوران مستطیل بزرگ‌تر، استوانه‌ای به شعاع قاعده $6 = 4 + 2$ و ارتفاع ۲ است که استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲ از آن جدا شده است. پس حجم آن برابر است با:

$$2\pi((4+2)^2 - 2^2) = 64\pi$$

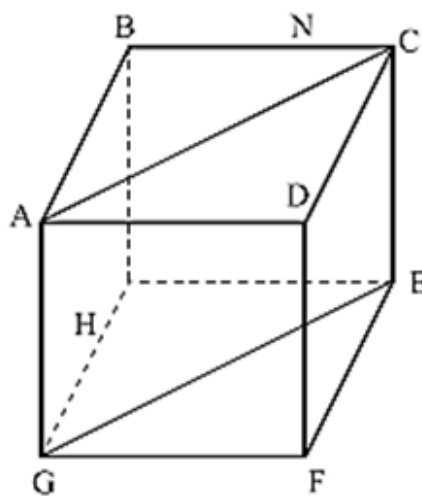
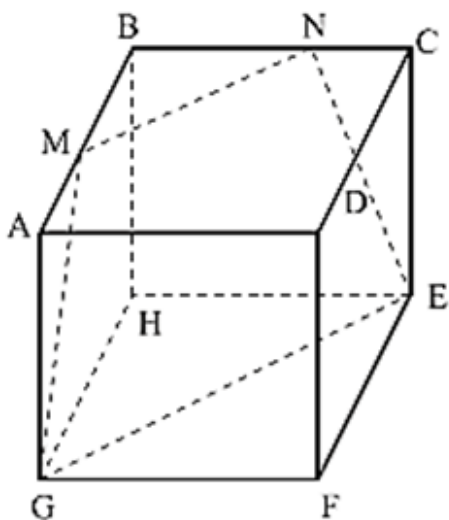
به همین ترتیب حجم شکل حاصل از دوران مستطیل کوچک‌تر برابر است با:

$$1 \times \pi \left(\left(3 + \frac{1}{2} + 2 \right)^2 - \left(2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right) = 24\pi$$

$$\text{حجم مورد نظر} = 64\pi - 24\pi = 40\pi$$

تالیفی عزیزالله علی اصغری

حالت ۱: صفحه گذرنده از یک قطر وجه:
سطح مقطع دوزنقه متساوی الساقین است.

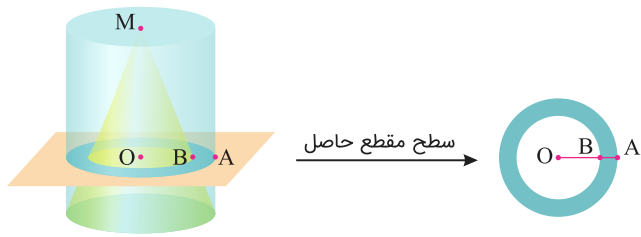


با نوشتن تالس و همنهشتی $\triangle M A G \cong \triangle N C E$ نتیجه می‌گیریم MNEG دوزنقه متساوی الساقین است.
حالت ۲: صفحه گذرنده از دو قطر موازی در دو وجه موازی:

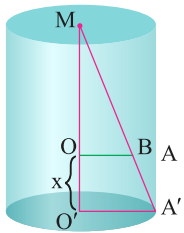
$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel GE \\ CE \perp AC \\ AG \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مستطیل } ACEG$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵

برای اینکه بزرگ‌ترین مخروط ممکن در داخل استوانه قرار گیرد، باید رأس مخروط روی یکی از قاعده‌های استوانه و قاعده مخروط بر قاعده دیگر استوانه منطبق شود.



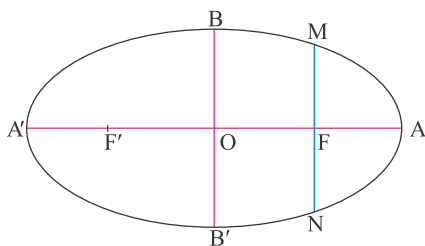
برای به دست آوردن سطح بین دو دایره باید شعاع‌های این دو دایره را حساب کنیم، سپس مساحت دایره بزرگ را منهای مساحت دایره کوچک کنیم. برای این منظور داریم:



$$\pi(R^2 - r^2) = 1/44\pi \Rightarrow 4 - r^2 = 1/44 \Rightarrow r = \sqrt{2/56} = 1/6$$

$$\text{تالس: } \frac{OM}{O'M} = \frac{OB}{O'A'} \Rightarrow \frac{OM}{5} = \frac{1/6}{2} \Rightarrow OM = \frac{5 \times 1/6}{2} = 4 \Rightarrow x = 5 - 4 = 1$$

تالیفی مهدی ملارمضانی



فاصله کانون F از نزدیکترین نقطه بیضی برابر $AF = a - c$ و فاصله کانون F از دورترین نقطه بیضی برابر $AF' = a + c$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} a - c = 5 \\ a + c = 13 \end{cases} \Rightarrow 2a = 18 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow c = 4$$

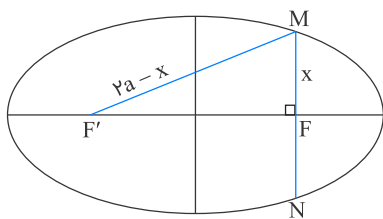
$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 81 - 16 = 65 \Rightarrow b = \sqrt{65}$$

طول پاره خط MN از رابطه $MN = \frac{2b^2}{a}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(65)}{9} = \frac{130}{9}$$

تذکر: اگر در نقطه کانون یک بیضی، خطی بر قطر بزرگ بیضی عمود کنیم تا بیضی را در دو نقطه M و N قطع کند، اندازه پاره خط MN از رابطه $MN = \frac{2b^2}{a}$ به دست می‌آید.

اثبات: فرض می‌کنیم $MF = x$ ، در این صورت چون نقطه M روی بیضی است، پس $MF + MF' = 2a$ و بنابراین $MF' = 2a - x$. حال در مثل قائم‌الزاویه $MF'F'$ طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$MF'^2 = MF^2 + FF'^2$$

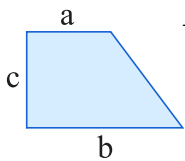
$$\Rightarrow (2a - x)^2 = x^2 + (2c)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 + x^2 - 4ax = x^2 + 4c^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{4a^2 - 4c^2}{4a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow MF = \frac{b^2}{a} \Rightarrow MN = \frac{2b^2}{a}$$

شکل حاصل از دوران، مخروط ناقصی است که یک استوانه از آن کم شده است و می‌دانیم که حجم مخروط ناقص از دوران ذوزنقه قائم، حول ضلع قائمه‌اش به دست می‌آید و برای به دست آوردن حجم آن داریم:



$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{\pi c}{3}(a^2 + b^2 + ab) \quad (1)$$

برای به دست آوردن b ، ابتدا باید اندازه AC را از رابطه فیثاغورس به دست آوریم:

$$b = 2 + AC \quad \frac{AC^2 + AB^2 = BC^2}{AC=3} \rightarrow b = 2 + 3 \Rightarrow b = 5$$

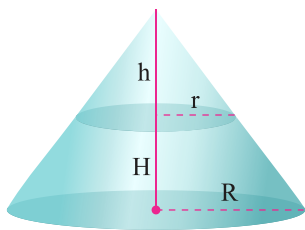
$$\xrightarrow{(1)} V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{\pi \times 4}{3} (4 + 25 + 10) = 52\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h \Rightarrow \pi(2)^2 \times 4 = 16\pi$$

$$\text{حجم کل} = \text{حجم مخروط ناقص} - \text{حجم استوانه} = 52\pi - 16\pi = 36\pi$$

$$\text{نسبت خواسته شده} = \frac{\text{حجم استوانه} - \text{حجم مخروط ناقص}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{36\pi}{16\pi} = \frac{9}{4}$$

اثبات حجم مخروط ناقص: برای پیدا کردن حجم مخروط ناقص باید مولدها را ادامه دهیم تا یک مخروط کامل به دست آید، سپس حجم مخروط کوچک‌تر را از حجم مخروط بزرگ‌تر کم کنیم.



$$\text{تالس} : \frac{h}{H+h} = \frac{r}{R} \Rightarrow r(H+h) = hR \Rightarrow rH + rh - hR = 0 \Rightarrow rH + h(r-R) = 0$$

$$rH = h(R-r) \Rightarrow \frac{r}{R-r} = \frac{h}{H} \quad (*)$$

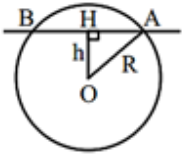
$$\text{حجم مخروط ناقص} = \text{حجم مخروط بزرگ} - \text{حجم مخروط کوچک} = \frac{\pi}{3}R^2(H+h) - \frac{\pi}{3}r^2h$$

$$= \frac{\pi}{3}R^2H + \frac{\pi}{3}R^2h - \frac{\pi}{3}r^2h$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{\pi}{3}R^2H + \frac{\pi}{3}h(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{3}R^2H + \frac{\pi}{3}\left(\frac{rH}{R-r}\right) \times (R-r)(R+r) = \frac{\pi}{3}R^2H + \frac{\pi}{3}rRH + \frac{\pi}{3}r^2H$$

$$\frac{\pi}{3}H(R^2 + r^2 + Rr)$$

خطوط قائم بر دایره همگی در مرکز دایره هم‌مس‌اند، پس مرکز دایره همان نقطه $O(4, -1)$ است. حال با رسم یک شکل فرضی از مسئله (مطابق شکل زیر) می‌توان h (فاصله O تا خط) و R را به دست آورد:



$$h = \text{فاصله } O \text{ تا خط} = \frac{|16 - 3 + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = 3$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{h^2 + HA^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

با پیدا شدن R می‌توان مساحت دایره را به دست آورد:

$$S = \pi R^2 = 25\pi$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

برای آنکه خط بر دایره مماس باشد، باید فاصله آن از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد:

$$x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 3 \Rightarrow O(2, 0), R = \sqrt{3}$$

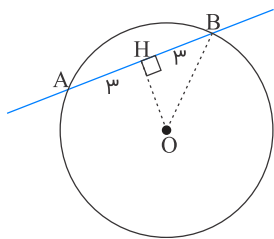
$$y = mx - 1 \Rightarrow y - mx + 1 = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|0 - 2m + 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow |2m - 1| = \sqrt{3} \sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 3 + 3m^2 \Rightarrow m^2 - 4m - 2 = 0$$

$$m \text{ مجموع مقادیر} = -\frac{b}{a} = 4$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴



فاصله مرکز دایره از خط مذکور را می‌یابیم:

$$OH = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

طبق قضیه فیثاغورس، شعاع دایره برابر است با:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow OB = 5$$

پس معادله دایره به شکل زیر است:

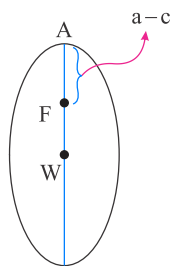
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

حال $y = 0$ قرار می‌دهیم:

$$(x - 2)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x - 2)^2 = 16 \Rightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

پس طول پاره‌خطی از محور xها که دایره جدا می‌کند برابر است با:

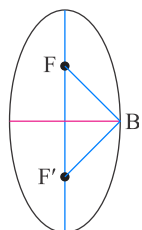
$$6 - (-2) = 8$$



$$e = \frac{r}{r'} = \frac{c}{a} \Rightarrow ra = r'c$$

$$a - c = |FA| = |r - r'| = r$$

$$\begin{cases} ra = r'c \\ a - c = r \end{cases} \xrightarrow{\times r} ra - rc = r \xrightarrow{ra=r'c} r'c - rc = r \Rightarrow c = r$$



$$c = r \Rightarrow ra = r \times r \Rightarrow a = r$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = r^2 - r^2 = 4r \Rightarrow b = \sqrt{4r}$$

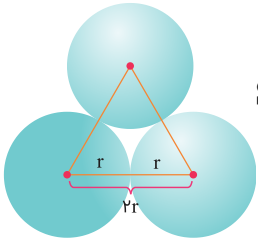
بیشترین مساحت برابر است با:

$$S(\triangle FBF') = \frac{1}{2} \times b \times r = b \times c = \sqrt{4r} \times r = 2r\sqrt{r}$$

تالیفی سیروس نصیری

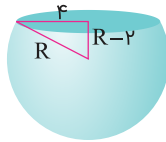
نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

اگر شعاع دایرهٔ مقطع هر کره r باشد، از به هم وصل کردن مرکز سه کره مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $2r$ به دست می‌آید: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به‌وجودآمده برابر $16\sqrt{3}$ است، بنابراین داریم:



$$S_{\text{مثلث متساوی‌الاضلاع}} = 16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 \Rightarrow (2r)^2 = 64 \Rightarrow r = 4$$

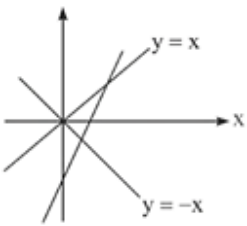
شعاع کره را R در نظر می‌گیریم. سطح مقطع یکی از کره‌ها به شکل زیر است:



$$R^2 = (R-2)^2 + 16 \Rightarrow R^2 = R^2 - 4R + 4 + 16 \Rightarrow R = 5$$

تالیفی امیر خمسه

مرکز دایره‌هایی که بر محورهای مختصات مماس هستند روی خط‌های $y = x$ و $y = -x$ قرار دارند:

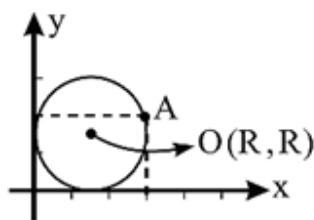


$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow O(6, 6) \Rightarrow R = 6$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow O'(2, -2) \Rightarrow R' = 2$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

دایره‌ای که بر محورهای مختصات مماس باشد و از نقطه $A(3, 2)$ عبور کند در ناحیه اول قرار دارد و مرکز آن $O(R, R)$ است، پس معادله آن به صورت زیر است:



$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$A \in \text{دایره} \Rightarrow (3 - R)^2 + (2 - R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 9 + R^2 - 6R + 4 + R^2 - 4R = R^2 \Rightarrow R^2 - 10R + 13 = 0$$

مجموع شعاع‌های خواسته شده مجموع ریشه‌های معادله فوق است.

$$\text{مجموع شعاع‌ها} = -\frac{b}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵

اندازه اضلاع مربع $BF'B'F'$ برابر است با a ، یعنی نصف طول قطر بزرگ بیضی و اندازه اضلاع مربع $AA'D'D$ برابر است با $2c$ ، یعنی فاصله کانونی در بیضی. حال داریم:

$$\frac{S_{BF'B'F'}}{S_{AA'D'D}} = \frac{a^2}{(2c)^2} = \left(\frac{a}{2c}\right)^2 \quad (\text{I})$$

می‌دانیم که خروج از مرکز بیضی از رابطه $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید و از آنجایی که $BF'B'F'$ مربع است، برای محاسبه خروج از مرکز بیضی، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=c} a = \sqrt{2}c$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{\sqrt{2}c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow \frac{S_{BF'B'F'}}{S_{AA'D'D}} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

تالیفی مهدی ملازمانی

$$AA' = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$BB' = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

از طرفی می‌دانیم: $a^2 = b^2 + c^2$. بنابراین:

$$c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$MF + MF' = 2a = 8$$

در مثلث $MF F'$ ، MO میانه است و چون $MO = OF = c$ ، پس $\hat{M} = 90^\circ$ است؛ بنابراین:

$$MF'^2 + MF^2 = FF'^2$$

$$\Rightarrow MF'^2 + MF^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 28$$

حال داریم:

$$(MF + MF')^2 = MF^2 + MF'^2 + 2MF \cdot MF'$$

$$\Rightarrow 2MF \cdot MF' = (MF + MF')^2 - (MF^2 + MF'^2)$$

$$\Rightarrow 2MF \cdot MF' = 64 - 28 = 36$$

$$\Rightarrow MF \cdot MF' = 18$$

تالیفی سولماز احمدی

در آغاز معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) = 4$$

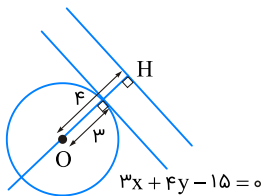
$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{9} = 3, \quad O = (1, -2)$$

فاصله هر نقطه مانند (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ که $a^2 + b^2 \neq 0$ برابر است با $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ پس فاصله مرکز دایره $O = (1, -2)$ تا خط $3x + 4y - 15 = 0$ برابر است با:

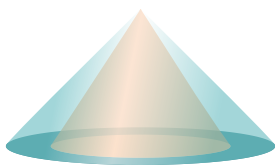
$$d = \frac{|3(1) + 4(-2) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

فاصله یک نقطه تا یک خط برابر با اندازه عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصله مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. از آنجاکه هر قطر دایره، در نقطه تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصله نقاط دایره تا خط موردنظر (شکل زیر) برابر می‌شود با $d_{\min} = 4 - 3 = 1$.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

ناحیه هاشورخورده پس از دوران، تبدیل به فضای بین دو مخروط هم‌رأس می‌گردد که ارتفاع هر دو $h = 2$ است. برای محاسبه شعاع قاعده، باید خط $y = 1$ را با دو خط مورب تلاقی دهیم.



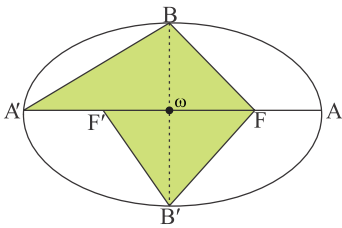
شعاع قاعده مخروط بیرونی $x = 2 \xrightarrow{y=1} y + x = 3$: معادله خط d_1

شعاع قاعده مخروط درونی $x = \frac{4}{3} \xrightarrow{y=1} \frac{y}{3} + \frac{x}{2} = 1$: معادله خط d_2

حجم مخروط درونی - حجم مخروط بیرونی = حجم فضای ایجادشده

$$= \frac{\pi}{3}(2)^2(2) - \frac{\pi}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2(2) = \frac{2\pi}{3}\left(4 - \frac{16}{9}\right) = \frac{2\pi}{3} \times \frac{20}{9} = \frac{40\pi}{27}$$

تالیفی امیر خمسه



در این شکل دو مثلث وجود دارد که یکی مثلث $FF'B'$ که قاعده‌اش $|FF'|$ و ارتفاعش $|\omega B'|$ و دیگری مثلث $A'FB$ که قاعده‌اش $|A'F|$ و ارتفاعش $|\omega B|$ است؛ پس:

$$S_{FF'B'} = \frac{1}{2} |FF'| |B'\omega| = \frac{1}{2} \times 2c \times b = bc$$

$$S_{A'FB} = \frac{1}{2} |FA'| |\omega B| = \frac{1}{2} (a + c) b$$

$$AA' = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$FF' = 2c = 6\sqrt{3} \Rightarrow c = 3\sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 27 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\begin{aligned} S_{FF'B'} + S_{A'FB} &= bc + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc = \frac{3}{2} bc + \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{3}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = \frac{27}{2} \sqrt{3} + \frac{18}{2} = \frac{9}{2} (2 + \sqrt{27}) \end{aligned}$$

تالیفی سیروس نصیری

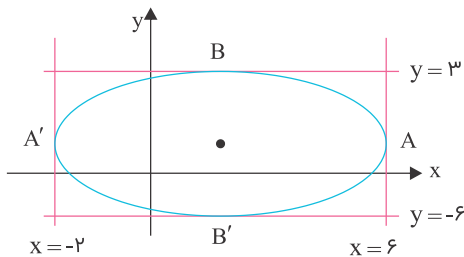
نقاط $A'(-2, 1)$ و $A(6, 1)$ دو رأس کانونی بیضی هستند. عرض‌های این دو رأس مساوی‌اند پس هذلولی افقی است.

$$o = \frac{A + A'}{2} = (2, 1), 2a = AA' = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow b = 2$$

پس شکل این بیضی به صورت زیر است:



و خطوط $x = 6$ و $x = -2$ و $y = 3$ و $y = -1$ بر این بیضی مماس‌اند.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۴

$$2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 7 \xrightarrow{\div 2} (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{7}{2}$$

$$O(1,1), R = \sqrt{\frac{7}{2}} \simeq 1/9$$

دو نقطه $F(1, 3)$ و $F'(1, -1)$ را کانون‌های بیضی در نظر می‌گیریم. در نتیجه بیضی به صورت قائم است.

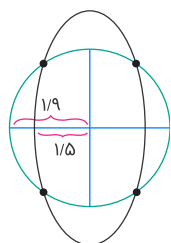
$$FF' = 3 - (-1) = 2c \Rightarrow 4 = 2c \Rightarrow c = 2$$

فرض کنیم نقطه M بر روی دایره قرار دارد. پس:

$$|MF| + |MF'| = 5 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2} = 2/5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2} = 1/5$$

حال شکل را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، دایره و بیضی ۴ نقطه تقاطع دارند.

تالیفی سیروس نصیری

برای به دست آوردن مختصات مرکز بیضی داریم:

$$\begin{cases} F = (6, -3) \\ F' = (-2, -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_O = \frac{6 + (-2)}{2} = 2 \\ y_O = \frac{-3 + (-3)}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow O = (2, -3)$$

از مقایسه مختصات نقاط N و O درمی‌یابیم که N رأس غیرکانونی بیضی است و مقدار b برابر خواهد بود با:

$$\begin{matrix} O = (2, -3) \\ N = (2, -6) \end{matrix} \Rightarrow b = \sqrt{(2-2)^2 + (-3+6)^2} = 3 \Rightarrow b = 3$$

از طرفی می‌دانیم مجموع فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر است با $2a$ ، پس داریم:

$$\begin{matrix} N(2, -6) \\ F'(-2, -3) \\ F(6, -3) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} N(2, -6) \\ F'(-2, -3) \\ F(6, -3) \end{matrix}} \right\} \Rightarrow 2a = \sqrt{(2+2)^2 + (-6+3)^2} + \sqrt{(6-2)^2 + (-3+6)^2}$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

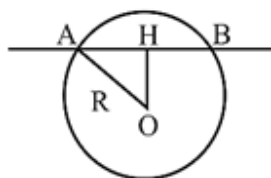
حال اگر ۲ واحد به فاصله مرکز از نقطه N (b) اضافه شود، b برابر با a خواهد شد و گزینه ۱ صحیح است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) هرچه $e \rightarrow 0$ میل کند، بیضی به دایره نزدیک‌تر است. (گویی a ثابت است و $c \rightarrow 0$ میل می‌کند)

(۳) اندازه کسینوس زاویه (حاده) بین خط گذرنده از رأس غیرکانونی و کانونی، همان خروج از مرکز بیضی است. ($\theta < 90$)

(۴) هر چقدر $a \rightarrow e$ میل کند، بیضی کشیده‌تر می‌شود.



$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O(-2, 1)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 - 4} = 2 \Rightarrow R = 2$$

$$OH = \frac{|1 + 2a - 2|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{|2a - 1|}{\sqrt{1 + a^2}} \quad y - ax - 2 = 0$$

$$AB = 2 \Rightarrow AH = 1$$

$$\Rightarrow (AH)^2 + (OH)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - (AH)^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{|2a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{3} \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 3a^2 + 3$$

$$a^2 - 4a - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 + 8 = 24$$

$$a = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{6}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

در شکل (۱)، BC قطر وجه و AB ضلع عمود بر آن است. پس $AB \perp BC$ و این هم یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه است و داریم:

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2} \xrightarrow{a=2} BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{AB=2} S_{\text{قائم‌الزاویه}} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

و در شکل (۲) سطح مقطع، مستطیلی است که یک ضلعش قطر وجه مکعب است و دیگری ضلع مکعب.

$$\text{قطر وجه مکعب} = a\sqrt{2} \Rightarrow S = a\sqrt{2} \times a = a^2\sqrt{2} \xrightarrow{a=2} 4\sqrt{2}$$

$$\text{نسبت خواسته شده: } \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

تالیفی مهدی ملازمانی

ابتدا به m دو مقدار دلخواه می‌دهیم تا معادله دو قطر پیدا شود و از محل تلاقی آن‌ها مختصات مرکز به دست آید:

$$(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} m = 0 \Rightarrow 2y + x + 1 = 0 \\ m = -1 \Rightarrow y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -1, x = 1 \Rightarrow O(1, -1)$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر آن برابر با شعاع دایره است:

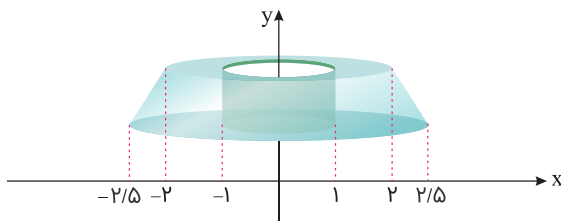
$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ O(1, -1) \end{cases} \Rightarrow R = OH = \frac{|3 - 1 - 1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} R = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ O(1, -1) \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{10} \quad \text{معادله دایره}$$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۵

از بین پاره‌خط‌های تشکیل‌دهنده دوزنقه، فقط یک خط مایل وجود دارد که همان ساق غیرقائم است و باتوجه به اینکه این پاره‌خط روی خط $y = -2x + 6$ قرار دارد، می‌توانیم طول رأس مجهول دوزنقه را که عرضی برابر ۲ دارد بیابیم:

$$y = -2x + 6 \xrightarrow{y=2} 2 = -2x + 6 \Rightarrow x = 2$$



باتوجه به نمودار کشیده‌شده، شکل حاصل از دوران دوزنقه، یک مخروط ناقص است که یک استوانه از داخل آن برداشته شده است. ابتدا حجم مخروط ناقص را محاسبه می‌کنیم.

حجم این مخروط درواقع حجم مخروط کاملی است که مخروط بالایی از آن حذف شده است. ارتفاع مخروط کامل از $y = 1$ تا محل برخورد خط $y = -2x + 6$ با محور y ها است که عرض از مبدأ این خط یعنی ۶ است؛ پس ارتفاع مخروط کامل $5 = 6 - 1$ است و شعاع قاعده آن هم برابر $r = 2/5$ است.

$$V_{\text{مخروط کامل}} = \frac{1}{3}\pi(2/5)^2(5) = \frac{31/25\pi}{3} \simeq 31/25$$

در مخروط حذف‌شده شعاع قاعده $r = 2$ و ارتفاع برابر $4 = 6 - 2$ است، پس داریم:

$$V_{\text{مخروط محذوف}} = \frac{1}{3}\pi(2)^2(4) = \frac{16\pi}{3} \simeq 16$$

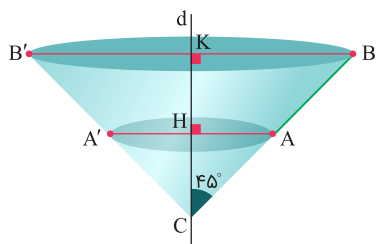
$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط کامل}} - V_{\text{مخروط محذوف}} \simeq 31/25 - 16 = 15/25$$

حال حجم استوانه برداشته‌شده را برای کم کردن از حجم کل محاسبه می‌کنیم؛ باتوجه به شکل شعاع قاعده این استوانه $r = 1$ و ارتفاع آن هم $h = 1$ است:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi(1)^2(1) = \pi \simeq 3$$

$$\text{حجم شکل} \simeq 15/25 - 3 = 12/25$$

باتوجه به شکل، سطح مقطع حاصل برابر با مساحت ذوزنقه $ABB'A'$ است و داریم:



$$AA' = 4 \times 2 = 8, \quad BB' = 8 \times 2 = 16$$

$$\begin{cases} \triangle ACH : \tan 45^\circ = \frac{AH}{CH} \Rightarrow 1 = \frac{4}{CH} \Rightarrow CH = 4 \\ \triangle BCK : \tan 45^\circ = \frac{BK}{CK} \Rightarrow 1 = \frac{8}{CK} \Rightarrow CK = 8 \end{cases}$$

پس ارتفاع ذوزنقه $HK = CK - CH = 4$ است و مساحت برابر است با:

$$\frac{1}{2}(AA' + BB') \times HK = \frac{1}{2} \times (8 + 16) \times 4 = 48$$

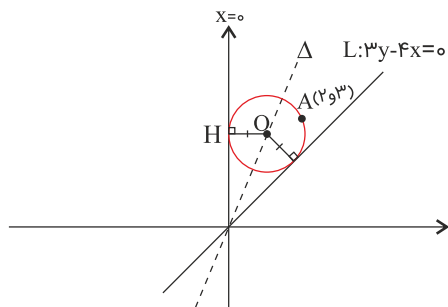
تالیفی عزیزالله علی اصغری

نکته: چون دایره بر دو خط متقاطع $L: -4x + 3y = 0$ و $L': x = 0$ مماس است، مرکز آن روی نیمساز زاویه بین آن‌ها قرار دارد.

پس ابتدا معادله نیمساز را می‌یابیم:

$$\frac{|-4x + 3y|}{\sqrt{16 + 9}} = |x| \Rightarrow |-4x + 3y| = 5|x| \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

حال باتوجه به مختصات نقطه A ، مرکز دایره باید روی خط $\Delta: -3x + y = 0$ قرار داشته باشد، پس $O(\alpha, 3\alpha)$ ، از طرف دیگر، چون دایره بر محور y مماس است، $R = \alpha$ و داریم:



$$\text{دایره: } (x - \alpha)^2 + (y - 3\alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\xrightarrow{(2, 3) \in \text{دایره}} (2 - \alpha)^2 + (3 - 3\alpha)^2 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 - 22\alpha + 13 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ یا } \alpha = \frac{13}{9} \Rightarrow R = 1 \text{ یا } R = \frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره بزرگتر} = \frac{13}{9}$$

باتوجه به مختصات کانون، ابتدا مختصات مرکز آن را به دست می‌آوریم:

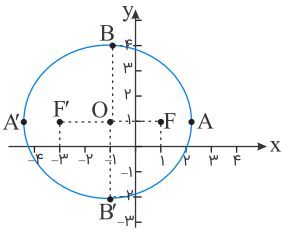
$$\left. \begin{array}{l} F = (1, 1) \\ F' = (-3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow O = (-1, 1), \quad 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{قطر بزرگ} = 2\sqrt{13} \Rightarrow a = \sqrt{13}$$

در بیضی داریم:

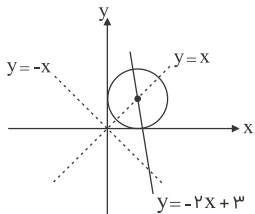
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13 = b^2 + 4 \Rightarrow b = 3$$

حال شکل تقریبی از بیضی رسم می‌کنیم، در نتیجه گزینه ۳ درست است.



تالیفی مهدی ملارمضانی

شکل تقریبی رسم می‌کنیم:



وقتی دایره‌ای بر محورهای مختصات مماس است، مرکز دایره یا بر $y = x$ یا بر $y = -x$ قرار دارد.

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = -2x + 3 \Rightarrow x = y = 1, \quad R = 1$$

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -x = -2x + 3 \Rightarrow x = 3, \quad y = -3, \quad R = 3$$

کوچک‌ترین شعاع $R = 1$ است.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۶

۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰

۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰

۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰

۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰

۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰

۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹