

سؤال ۱۰۱: تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x واحد از یک کالای مصرفی به صورت $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x$ و تابع هزینه آن به صورت $C(x) = 4x + b$ است. اگر فاصله دو نقطه سر به سر تابع سود این شرکت، ۱۲ واحد باشد، مقدار کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

$$R(x) = C(x) \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 8x = 4x + b \Rightarrow x^2 - 16x + 4b = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 16 \Rightarrow x_1 = 14, x_2 = 2 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 14 \times 2 = 4b \Rightarrow b = 7 \\ x_1 - x_2 = 12 \end{cases}$$

سؤال ۱۰۲: اگر عبارتهای گویا تعریف شده باشند، مجموع جوابهای معادله $\frac{4x^2 - (2-x)^2}{x+2} - \frac{7}{x} = 2$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴)

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - (2-x)^2}{x+2} - \frac{7}{x} = 2 &\Rightarrow \frac{4x^2 - (x^2 - 4x + 4)}{x+2} - \frac{7}{x} = 2 \Rightarrow \frac{3x^2 + 4x - 4}{x+2} - \frac{7}{x} = 2 \\ \Rightarrow \frac{(x+2)(3x-2)}{x+2} - \frac{7}{x} = 2 &\Rightarrow 3 - 2 - \frac{7}{x} = 2 \Rightarrow \times (x): 3x^2 - 4x - 7 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

سؤال ۱۰۳: تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x + 4$ را در دامنه $\{-99, -98, \dots, 0, 1, 2, \dots, 99, 100\}$ در نظر بگیرید، مقدار متوسط عضوهای برد تابع f ، کدام است؟

- ۳/۵ (۱) ۳/۷۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۲۵ (۴)

$$\sum y = -\frac{1}{4}(-99 - 98 - \dots + 0 + 1 + \dots + 98 + 99 + 100) + 4 + 4 + \dots + 4 =$$

با توجه به اینکه هر عدد با قرینش موجود است، لذا فقط صفر و ۱۰۰ باقی میمانند. از طرفی به تعداد ۲۰۰ تا عدد ۴ داریم که باهم جمع شده اند (به تعداد اعضای دامنه):

$$\sum y = -\frac{1}{4}(0 + 100) + \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{200 \text{ مرتبه}} = -50 + 200(4) = 750 \Rightarrow \text{مقدار متوسط بُرد} = \frac{750}{200} = 3/75$$

۲۰۰ مرتبه

سؤال ۱۰۴: ضابطه تابع $y = [-2x + |x|] + x$ در دامنه $-\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{3}$ ، کدام است؟

$$2x + \frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$x - 2 \quad (۳)$$

$$x + 1 \quad (۲)$$

$$-2x \quad (۱)$$

روش اول: در بازه داده شده، درون قدرمطلق منفی است. لذا: $|x| = -x$

$$y = [-2x + |x|] + x = [-2x - x] + x \Rightarrow y = [-3x] + x$$

از طرفی چون $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$ ، بنابراین:

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \Rightarrow \times (-3) \Rightarrow 1 < -3x < 2 \Rightarrow [-3x] = 1 \Rightarrow y = [-3x] + x = x + 1$$

روش دوم: از بازه داده شده عددی انتخاب می‌کنیم: مثلاً: $x = -\frac{1}{3}$. حال مقدار تابع y را به ازای این x محاسبه می‌کنیم:

$$y = \left[-2\left(-\frac{1}{3}\right) + \left|-\frac{1}{3}\right|\right] - \frac{1}{3} = \left[1 + \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

تنها گزینه‌ای که اگر بجای x مقدار $\frac{1}{3}$ قرار بدهیم، حاصلش نیز $\frac{1}{3}$ می‌شود. گزینه ۲ است.

سؤال ۱۰۵: معادله $x^2 - x = \frac{ax^3 + 2x}{x+1}$ ، دارای سه ریشه حقیقی متمایز است. کدام نامساوی زیر همواره برقرار است؟

$$a < 1 \quad (۴)$$

$$a \leq 1 \quad (۳)$$

$$a \geq -2 \quad (۲)$$

$$a < -2 \quad (۱)$$

$$\frac{ax^3 + 2x}{x+1} = x^2 - x = x(x-1) \Rightarrow \text{طرفین وسطین} : x(ax^2 + 2) = x(x-1)(x+1) \Rightarrow x((a-1)x^2 + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ (a-1)x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{a-1} \quad (*) \end{cases}$$

واضح است که $x = 0$ یک ریشه معادله است. از طرفی چون معادله داده شده دارای ۳ ریشه است، لذا می‌بایست معادله (*) دارای ۲ ریشه باشد همچنین هیچ کدام برابر ۱- نباشند (چون $x = -1$ ریشه مخرب است). یعنی:

$$\begin{cases} x^2 = -\frac{3}{a-1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{a-1} < 0 \Rightarrow a-1 < 0 \Rightarrow a < 1 \\ \frac{3}{a-1} \neq -1 \Rightarrow a-1 \neq -3 \Rightarrow a \neq -2 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها کامل‌ترین پاسخ، گزینه ۱ است.

$$\frac{x^3 + 2x}{x+1} = x^2 - x \Rightarrow \text{طرفین وسطین} : x^3 + 2x = x^3 - x \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

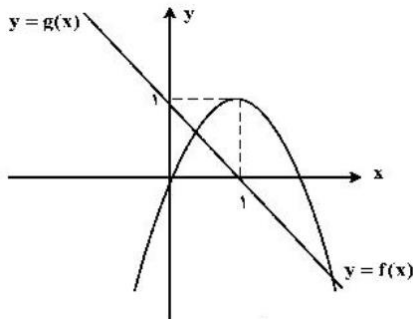
روشن تستی: اگر $a = 1$ باشد، داریم: $x = 0$ ، داریم: $x^3 + 2x = x^3 - x \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$

یعنی معادله یک ریشه خواهد داشت که مطلوب ما نیست. بنابراین گزینه‌هایی که شامل $a = 1$ می‌باشند، رد می‌شوند: رد ۲ و ۳

از طرفی اگر $a = -2$ آنگاه یکی از ریشه‌های معادله $x = -1$ خواهد بود که بازم مطلوب ما نیست. رد ۴

سؤال ۱۰۶: نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع

جواب‌های معادله $f(x) = g^2(x)$ ، کدام است؟



- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

ابتدا ضابطه هر یک از توابع داده شده را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = -x + 1$$

$$f(x) = a(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = g^2(x) \Rightarrow -x^2 + 2x = (-x+1)^2 \Rightarrow -x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

سؤال ۱۰۷: فرض کنید تابع f به صورت $f = \{(a, a^2); a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a+b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ توصیف شده باشد، تعداد

عناصر f ، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

$$(a, a^2) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

$$(a, a+b) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

اجتماع این دو مجموعه ۹ عضو خواهد داشت.

سؤال ۱۰۸: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a\left(\frac{1}{2}\right)^x + b$ ، محور x ها را با طول ۱- و محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار تابع f در $x = 1$ ،

کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

نقاط به مختصات $(-1, 0)$ و $(0, 2)$ در ضابطه تابع صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} (-1, 0) \Rightarrow 0 = a\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + b \Rightarrow 0 = a\left(\frac{2}{1}\right) + b \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a(*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0, 2) \Rightarrow 2 = a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b \Rightarrow a + b = 2(**) \Rightarrow (*), (**): \Rightarrow a - 2a = 2 \Rightarrow a = -2, b = -2a = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 \Rightarrow f(1) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

سؤال ۱۰۹: مقدار عبارت $\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \times \frac{1}{3^{\frac{1}{8}}} \times \frac{1}{3^{\frac{1}{16}}} \times \dots \times \frac{1}{3^{\frac{1}{256}}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{127}{3^{256}}$ (۲) $\frac{127}{3^{512}}$ (۳) $\frac{63}{3^{256}}$ (۴) $\frac{255}{3^{512}}$

$$\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \times \frac{1}{3^{\frac{1}{8}}} \times \frac{1}{3^{\frac{1}{16}}} \times \dots \times \frac{1}{3^{\frac{1}{256}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}}} = A$$

از طرفی مجموع $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$ ، مجموع n جمله متوالی یک دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{4}$ و $r = \frac{1}{2}$ است:

$$S_n = \frac{a_1 - r a_n}{1 - r} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{256} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 256} = \frac{255}{512} \Rightarrow A = \frac{127}{256}$$

سؤال ۱۱۰: اگر $x, y, z, 4x$ ، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار $|x| + |y| + |z|$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

می توان نسبت مشترک را مثبت در نظر گرفت: $r^2 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{4x}{x} = 4 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow r = 2$

$$x = ry, z = rx \Rightarrow z = 2x, y = \frac{x}{2}$$

متغیر y واسطه هندسی x و $\frac{x}{2}$ است: $y^2 = x \left(x - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow \frac{y^2}{x} = x - \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 4x^2 - 2x \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 3x(x - \frac{2}{3}) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 1, z = 4 \Rightarrow |x| + |y| + |z| = \frac{2}{3} + 1 + 4 = 5\frac{2}{3} \end{cases}$$

سؤال ۱۱۱: مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی -26 و نسبت مشترک جمله پانزدهم به جمله ششم دنباله ۶ است. جمله یازدهم دنباله، کدام است؟

(۱) $-13/6$ (۲) $-14/8$ (۳) $-15/6$ (۴) $-16/8$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2a_1 + 9d) = -26 \Rightarrow 10a_1 + 45d = -26 \\ \frac{a_1 + 14d}{a_1 + 5d} = 6 \Rightarrow 6a_1 + 30d = a_1 + 14d \Rightarrow 5a_1 + 16d = 0 \Rightarrow \times (-2) \Rightarrow -10a_1 - 32d = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله - دو مجهول، داریم:

$$d = -2, a_1 = \frac{22}{5} = 4.4 \Rightarrow a_{19} = a_1 + 18d = 4.4 - 20 = -15.6$$

سؤال ۱۱۲: جمله چهاردهم دنباله بازگشتی $1 + \frac{1}{a_n} = a_{n+1}$ با فرض $a_{16} = \frac{1597}{987}$ کدام است؟

(۱) $\frac{233}{377}$ (۲) $\frac{377}{610}$ (۳) $\frac{377}{233}$ (۴) $\frac{610}{377}$

$$\begin{cases} n = 15: a_{16} = \frac{1}{a_{15}} + 1 \Rightarrow \frac{1597}{987} = \frac{1}{a_{15}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{15}} = \frac{1597}{987} - 1 = \frac{610}{987} \Rightarrow a_{15} = \frac{987}{610} \\ n = 14: a_{15} = \frac{1}{a_{14}} + 1 \Rightarrow \frac{987}{610} = \frac{1}{a_{14}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{14}} = \frac{987}{610} - 1 = \frac{377}{610} \Rightarrow a_{14} = \frac{610}{377} \end{cases}$$

سؤال ۱۱۳: جدول ارزشی کدام یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزشی گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$ یکسان نیست؟

(۱) $p \Rightarrow (q \vee r)$ (۲) $(p \wedge q) \vee r$ (۳) $\sim p \vee q \vee r$ (۴) $(p \Rightarrow q) \vee r$

اگر $p \equiv F$ و $q \equiv T$ آنگاه ارزش گزاره داده شده درست است. فقط گزینه ۲ چنین نیست. $(p \wedge q) \vee r \equiv F \vee r \equiv r$. یعنی ارزش آن به r وابسته است.

سؤال ۱۱۴: اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشند، آنگاه کدام گزاره زیر همواره درست است؟

(۱) $p \vee q \Rightarrow q$ (۲) $q \vee p \Rightarrow p$ (۳) $p \wedge \sim q$ (۴) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$

با تشکیل جدول ارزش‌ها دو حالت برای گزاره‌های p و q وجود دارد:

(۱) هر دو درست: در این حالت گزینه ۳ دارای ارزش نادرست است (رد ۳)

(۲) q درست و p نادرست: در این حالت گزینه‌های ۲ و ۳ دارای ارزش نادرست‌اند (رد ۲ و ۳)

سؤال ۱۱۵: اگر متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ برابر $A \cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟ (S مجموعه مرجع است.)

(۱) $A \subseteq B$ (۲) $A \subseteq B'$ (۳) $A \cup B = S$ (۴) $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$

متمم مجموعه دلخواه A برابر است با: $S - A = A'$

اکنون متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ برابر است با: $S - ((A - B) \cup (B - A)) = S - ((A \cup B) - (A \cap B)) = A \cap B \Rightarrow S = A \cup B$

طبق فرض سؤال: $S - ((A \cup B) - (A \cap B)) = A \cap B \Rightarrow S = A \cup B$

روش دوم: از روی نمودار ون

سؤال ۱۱۶: یک کتابخانه شامل ۵ کتاب ریاضی، ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب داستان است. ۴ کتاب به دلخواه انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این چهار کتاب، حداقل در دو موضوع مختلف هستند؟

$$\frac{19}{21} \quad (1) \quad \frac{13}{14} \quad (2) \quad \frac{20}{21} \quad (3) \quad \frac{41}{42} \quad (4)$$

از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم: $P(\text{حداقل در دو موضوع مختلف}) = 1 - P(\text{هم موضوع}) = 1 - \binom{5}{1} \binom{10}{4} = 1 - \frac{5}{210} = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$

سؤال ۱۱۷: برای اندازه‌گیری داده‌هایی که قابل مرتب‌کردن بوده و اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معنا است، از کدام مقیاس اندازه‌گیری استفاده می‌شود؟

$$(1) \text{ اسمی} \quad (2) \text{ نسبتی} \quad (3) \text{ ترتیبی} \quad (4) \text{ فاصله‌ای}$$

سؤال ۱۱۸: میانگین و واریانس داده‌های یک جامعه به ترتیب ۱۵۲ و ۳۶ است. تقریباً ۹۶ درصد داده‌ها در کدام فاصله قرار می‌گیرند؟

$$(1) (116, 188) \quad (2) (134, 170) \quad (3) (146, 158) \quad (4) (140, 164)$$

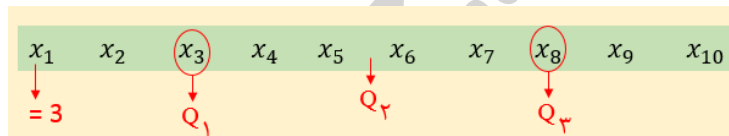
می‌دانیم ۹۶ درصد داده‌ها در فاصله ۲ انحراف معیار از میانگین قرار دارند. بنابراین بازه مورد نظر به صورت $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ است. یعنی:

$$(152 - 6, 152 + 6) = (146, 158)$$

سؤال ۱۱۹: دامنه میان چارکی نمودار جعبه‌ای شامل ۱۰ داده، ۲۵ و اختلاف چارک اول با سبیل‌ها ۳۸ و ۲۶ است. اگر کوچک‌ترین عضو داده‌ها ۳ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای چارک سوم، کدام است؟

$$(1) 120 \quad (2) 100 \quad (3) 64 \quad (4) 36$$

باتوجه به اطلاعات مسأله، نمودار زیر را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} Q_1 - 3 = 26 \Rightarrow Q_1 = 29 \\ \text{یا} \\ Q_1 - 3 = 38 \Rightarrow Q_1 = 41 \end{cases} \Rightarrow Q_3 - Q_1 = 25 \Rightarrow \begin{cases} Q_3 - 29 = 25 \Rightarrow Q_3 = 54 \\ \text{یا} \\ Q_3 - 41 = 25 \Rightarrow Q_3 = 66 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع} = 54 + 66 = 120$$

سؤال ۱۲۰: تعداد کالای فروخته شده توسط یک فروشگاه در هفته‌های اول تا هفتم به صورت جدول زیر است:

هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد کالاهای فروخته شده	۸	x	۵	y	۱۵	۱۰	۱۲

پیش‌بینی‌ها نشان می‌دهد که تعداد کالایی که در هفته نهم به فروش می‌رسد ۸ کالا است. مقدار $x + y$ ، کدام است؟

- ۷۶ (۴) ۵۰ (۳) ۳۶ (۲) ۲۶ (۱)

$$\text{تخمین: } (9, 8), (7, 12) \Rightarrow m = \frac{12-8}{7-9} = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow \text{معادله خط: } y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = -2(x - 9) \\ \Rightarrow y = -2x + 26$$

$$\text{میانگین کالاهای فروخته شده} = \frac{8+x+5+y+15+10+12}{7} = \frac{x+y+50}{7} \quad \text{میانگین هفته‌ها} = \frac{1+7}{2} = 4 \Rightarrow \text{میانگین: } \left(4, \frac{x+y+50}{7}\right)$$

نقطه میانگین در معادله خط بالا صدق می‌کند:

$$y = -2x + 26 \Rightarrow \text{صدق} \left(4, \frac{x+y+50}{7}\right) \Rightarrow \frac{x+y+50}{7} = -2(4) + 26 \Rightarrow \frac{x+y+50}{7} = 18 \Rightarrow x+y+50 = 7 \times 18 \\ \Rightarrow x+y = 126 - 50 = 76$$