

۱۰۱- اگر به ازای اعداد مثبت و مخالف یک a , b و c تساوی $\log_a c + \log_b c = 1$ برقرار باشد، آنگاه $\log_c a \cdot \log_c b$ کدام است؟

- (۱) $\log_c(ab)$ (۲) $2 \log_c(ab)$ (۳) $\log_c(a+b)$ (۴) $2 \log_c(a+b)$

گزینه ۱

$$\frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 1 \rightarrow \frac{\log_c ab}{\log_c a \log_c b} = 1 \rightarrow \log_c ab = \log_c a \log_c b$$

۱۰۲- مجموع جواب‌های معادله $\log_p(4^x + 15) = x + 3$ ، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۵ (۳) $\log_p 15$ (۴) $\log_p 15$

گزینه ۳

$$4^x + 15 = p^{x+3} \rightarrow p^x = A \rightarrow A^p - pA + 15 = 0$$

$$A = p \rightarrow p^x = p \rightarrow x = \log_p p$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = \log_p 15$$

$$A = 5 \rightarrow p^x = 5 \rightarrow x = \log_p 5$$

۱۰۳- تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x + \sqrt{-x^2 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$ ، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

گزینه ۳

$$-x^3 + 4x^2 + 25x - 100 = -(x^3 - 25)(x - 4) = 0 \rightarrow x = \pm 5, 4$$

x	-5	4	5
+	-	+	-

دامنه جواب = {۴}

$$-x^2 + 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2, 4$$

$x = 4$ در معادله صدق میکند.

x	2	4
-	+	-

۱۰۴- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(2x - 3)}{x - 2\sqrt{x} + 2} \geq 0$ فقط یک بازه باشد. مقدار m ، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{7}{3}$

$$m = 1 \rightarrow \frac{(-4x + 4)(2x - 3)}{x - 2\sqrt{x} + 2} > 0$$

۰	۱	$\frac{3}{2}$	۴
	-	-	+
	-	-	-

گزینه ۳

۱۰۵- ساده شده عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} + \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ کدام است؟

- (۱) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (۲) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (۳) $2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (۴) $2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

گزینه ۳

$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = 2\cot\frac{\theta}{2}$$

۱۰۶- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $2\sin(x)\cos(2x) + \sin(x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) 3π (۴) $\frac{7\pi}{2}$

گزینه ۲

$$2\sin x (1 - 2\sin^2 x) + \sin x = 1 \rightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 1 = 0 \rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \quad \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{جمع جوابها: } \frac{15\pi}{6}$$

۱۰۷- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha)) = \frac{1}{8}$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

گزینه ۲؟؟؟ جواب $x = 0, 2\pi$ غ ق ریشه مفرج هستند.

$$8\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^22\alpha = \frac{1}{8} \rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^22\alpha = \pm\frac{1}{8} \rightarrow$$

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^22\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \pm\frac{1}{8} \rightarrow \frac{\sin^24\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \pm 1$$

$$\sin 4\alpha = \sin\frac{\alpha}{2} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{4k\pi}{9} \\ \alpha = \frac{4k\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳
α	۰	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{12\pi}{9}$

k	۰	۱	۲	۳	۴
α	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$	$\frac{15\pi}{9}$	$\frac{19\pi}{9}$	2π

k	۰	۱	۲	۳	۴
α	۰	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{12\pi}{9}$	$\frac{16\pi}{9}$

$$\sin 4\alpha = \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{4k\pi}{9} \\ \alpha = \frac{4k\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳
α	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{9\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$	2π

۱۰۸- باقیمانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 + 2x + 1$ به ترتیب $3x + 1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2) = 3$.
 آنگاه مقدار باقیمانده تقسیم $P'(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) -۳

گزینه ۴

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1 \rightarrow P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

$$P'(-2) = -2(3) + 3 = -3$$

۱۰۹- دنباله بازگشتی $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1 = -1$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب صد جمله اول دنباله، کدام است؟

(۱) -۲۰۱ (۲) -۱۹۹ (۳) -۱۹۷ (۴) ۱۹۷

گزینه ۲

$$a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, a_4 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}, a_5 = 2 - \frac{5}{7} = \frac{9}{7} \dots a_{100} = \frac{2(100) - 1}{197} = \frac{199}{197}$$

حاصلضرب ۱۰۰ جمله اول: -۱۹۹

۱۱۰- دنباله $a_n = \begin{cases} 2^k & ; n = 2k \\ -2k + 4 & ; n = 2k + 1 \\ \left[\frac{n}{k+2} \right] + a & ; n = 2k + 2 \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جمله اول این

دنباله ۱۹ باشد، میانگین جملات بیست و نهم و سی‌ام دنباله، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $\frac{-43}{6}$ (۲) -۷ (۳) ۵۰۵ (۴) ۱۰۲۴

گزینه ۲

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$a_0 = 1$	$a_2 = 2$	$a_4 = 4$	$a_6 = 8$
$a_1 = 4$	$a_3 = 2$	$a_5 = 0$	$a_7 = -2$
$a_8 = \left[\frac{8}{2} \right] + a$	$a_{10} = \left[\frac{10}{3} \right] + a$	$a_{12} = \left[\frac{12}{4} \right] + a$	$a_{14} = \left[\frac{14}{5} \right] + a$

$$\text{مجموع ۱۰ جمله} = 19 \rightarrow a = -2$$

$$\text{میانگین: } \frac{a_{12} + a_{14}}{2} = \frac{\left[\frac{12}{4} \right] - 2 - 14}{2} = -7$$

۱۱۱- فرض کنید $[a, b]$ برد تابع $f(x) = 2^{-\sqrt{5 \sin^2(x) - 1}}$ باشد. مقدار $a + b$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

گزینه ۴

$$\sin x = 1 \rightarrow f(x) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow f(x) = 2^0 = 1$$

$$\text{برد: } \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \rightarrow a + b = \frac{5}{4}$$

۱۱۲- برد تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{12 + \sqrt{|x|} - |x|} \right) - 1$ برابر $(\log_p 3, \log_p 5)$ باشد. دامنه تابع f ، کدام است؟
([] نماد جزء صحیح است.)

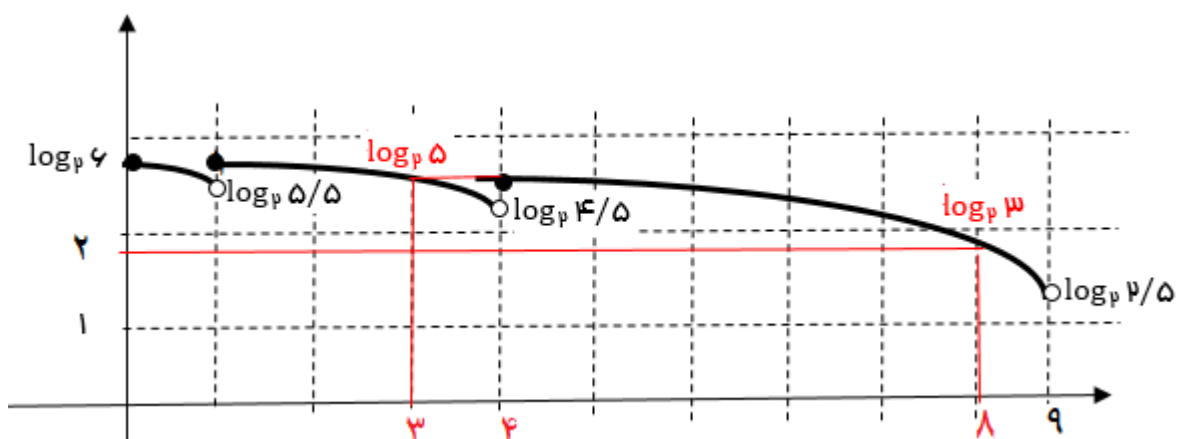
(۱) $[3, 9]$ (۲) $[3, 8]$ (۳) $[2, 9)$ (۴) $[2, 8]$

با توجه به تغییرات گزینه ۲

$$f(x) = \log_{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{12 + \sqrt{|x|} - |x|} \right) - 1 = \log_p(12 + \sqrt{|x|} - |x|) - \log_p p = \log_p \left(4 + \frac{\sqrt{|x|} - |x|}{p} \right)$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow f(x) = \log_p \left(4 - \frac{x}{p} \right) \quad 1 \leq x < 4 \rightarrow f(x) = \log_p \left(4 + \frac{1-x}{p} \right)$$

$$4 \leq x < 9 \rightarrow f(x) = \log_p \left(4 + \frac{p-x}{p} \right)$$



با فرض اینکه برد داده شده را بازه بسته $[\log_p 3, \log_p 5]$ در نظر بگیریم دامنه تابع به ازای این برد بازه $[3, 8]$ می باشد.

۱۱۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟

(۱) $(1 - \sqrt{5}, 0)$ (۲) $(-\sqrt{5}, 0)$ (۳) $(0, 1 - \sqrt{5})$ (۴) $(0, -\sqrt{5})$

گزینه ۳

$$\text{تابع جدید } y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k = x$$

$$x = 1 \rightarrow 1 + k = 1 \rightarrow k = -1$$

$$y = -(\sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1)$$

با توجه به گزینه ها گزینه ۳ فقط در تابع صدق می کند.

۱۱۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. ماکزیمم مقدار تابع $g \circ f - f \circ g$ ، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

گزینه ۴

$$f \circ g = \begin{cases} -1 & x > \sqrt{p} \text{ یا } x < -\sqrt{p} \\ 1 - x^p & -\sqrt{p} \leq x \leq \sqrt{p} \end{cases} \quad g \circ f = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - x^p & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$g \circ f - f \circ g = \begin{cases} 1 & x < -\sqrt{p} \\ x^p - 1 & -\sqrt{p} \leq x < -1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^p - 1 & 1 < x \leq \sqrt{p} \\ 1 & x > \sqrt{p} \end{cases}$$

۱۱۵- فرض کنید تابع f به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x = 1$ و $x = 3$ متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟
 (۱) f تابعی فرد است.
 (۲) f تابعی زوج است.
 (۳) f تابعی متناوب با دوره تناوب ۲ است.
 (۴) f تابعی متناوب با دوره تناوب ۴ است.

گزینه ۳

$$\text{مقارن نسبت به } x = 1 \quad f(x) = f(1 - x)$$

$$\text{مقارن نسبت به } x = 3 \quad f(x) = f(3 - x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-x} f(1 - x) = f(3 - (1 - x)) \rightarrow f(1 - x) = f(2 + x)$$

پس $f(x) = f(x + 2)$ در نتیجه f متناوب با دوره تناوب ۲

۱۱۶- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^2}) - 2 \tan[x]}{x^n(1-\cos(\sqrt{3x}))} = a$ باشد. مقدار a^n ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

گزینه ۱ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{x^n(\frac{3x}{2})} = -\frac{1}{3}$ باید $n = 2$ و $a = -\frac{1}{3}$

۱۱۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{16x - \left[-\frac{2}{x^2} \right]}{24x + \left[\frac{3}{x^2} \right]}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) $\frac{2}{3}$

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۱۱۸- اگر تابع $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-a)(4x^2 - 4x + 1)}$ فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

گزینه ۱

بی توجه به مقادیر a : $y = \frac{1}{4}$ و $x = \frac{1}{2}$ مجانب های تابع هستند.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-a)(4x^2-4x+1)}$$

$$a = 1 \quad \text{یا} \quad a = -1 \quad \text{یا} \quad a = \frac{1}{2}$$

۱۱۹- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^{2n}(x)$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \leq x \leq 2\pi - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \\ 1 & x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ناپیوسته است.

۱۲۰- فرض کنید $f(x) = \sin^n(x^2)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1 - \cos(x))^m} = 22\sqrt{2}$ مقدار $2m + n$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n} \cdot 2n x^{2n-1}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2n x^{4n-1}}{x^{2m}} = \frac{11}{2}$$

$$\text{باید } 4n - 1 = 2m$$

$$n \cdot 2^{m+1} = \frac{11}{2}$$

$$n = 2, m = \frac{7}{2}$$

۱۲۱- از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویه حاده بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{15}$ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{225}{289}$ (۴) $\frac{240}{289}$

گزینه ۴

$$f'(4) = \frac{1}{4} \quad (f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(4)} = 4$$

$$\tan \alpha = \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 1} = \frac{15}{8} \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{240}{289}$$

۱۲۲- مجموعه مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = \sqrt[3]{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

(۱) $[-1, \infty)$ (۲) $(-\infty, \infty)$
 (۳) $[-1, 0) \cup (0, \infty)$ (۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$

گزینه ۱

$$x > 0 : f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \text{ همواره مثبت}$$

$$x < 0 : f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

x	-1	0
f'	$-$	$+$

$x = 0$ عطف قائم صعودی است.

۱۲۳- تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$; $x \in (-2, 2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

گزینه ۳

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 2x + 6}{(x^2 - 2)^2}$$

$$4x^3 - 2x + 6 = 0 \rightarrow 2x(x^2 - 1 + 3) = 0 \rightarrow x = 0, x^2 = 1, x^2 = 3$$

x	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{1}$	-1	0	1	$\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$	2
f'		-	+	+	-	+	-	-	+

۱۲۴- فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ باشند. زاویه بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

۶۰ (۴)

۴۵ (۳)

۳۰ (۲)

صفر (۱)

گزینه ۱

با توجه به اینکه تابع f تابعی زوج و نمودار آن نسبت به محور y متقارن است پس خط گذرا از نقاط مینیمم نسبی با خط گذرا از دو نقطه عطف تابع با هم موازی می‌باشند.

