

۱۲۶- فرض کنید $a = \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$ مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ کدام است؟

۹ (۱) ۱۶ (۲) ۲۵ (۳) ۴۹ (۴)

گزینه ۲

$$a = \sqrt{p - \sqrt{pq}} \quad (a^p + \frac{1}{a^p})^p = (p - \sqrt{pq} + p + \sqrt{pq})^p = 16$$

۱۲۷- مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آنگاه حاصل ضرب پول‌های باقیمانده آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم، کدام است؟

۹ (۱) ۱۵ (۲) ۸۵ (۳) ۹۱ (۴)

گزینه ۳

اکرم علی

$$\hat{x} + \hat{y} = 100 \quad (x - 10)(y + 10) = 475 \rightarrow y^p - 80y - 475 = 0$$

گزینه ۲ که آسانتر است را چک می کنیم صدق نمی کند.

۱۲۸- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x = x^2 - 4x - 4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^3 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_2}$ است؟

$$4x^2 + 51x = 221 \quad (2)$$

$$4x^2 = 51x + 221 \quad (1)$$

$$4x^2 + 51x = 197 \quad (4)$$

$$4x^2 = 51x + 197 \quad (3)$$

گزینه ۱

$$S = x_1 + x_2 = 1 \quad P = x_1 x_2 = -4$$

$$S_{\text{جدید}} = S^3 - 3PS + \frac{S}{P} = \frac{51}{4}$$

$$P_{\text{جدید}} = P^3 + S^2 - 2P + \frac{1}{P} = \frac{-221}{4}$$

$$x^p - S_{\text{جدید}} x + P_{\text{جدید}} = 0 \quad x^p - \frac{51}{4} x - \frac{221}{4} = 0$$

۱۳۹- اگر $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{16}\right)$ کدام است؟

$$\frac{6 - \sqrt{27}}{32} \quad (4) \quad \frac{6 - \sqrt{27}}{16} \quad (3) \quad \frac{6 + \sqrt{27}}{16} \quad (2) \quad \frac{6 + \sqrt{27}}{32} \quad (1)$$

گزینه ۱

$$f(x) = \frac{32(\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x)^2}{\sin^2 x} = \frac{32 \left(\frac{1}{32} \sin 16x\right)^2}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{32} \frac{32}{\sin^2 \frac{\pi}{16}} = \frac{1}{32} \frac{32}{\frac{1 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{4 + \sqrt{3}}{32}$$

۱۳۰- فرض کنید زاویه α در ناحیه چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ باشد. حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$ کدام است؟

$$-\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (4) \quad \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3} \quad (3) \quad \frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3} \quad (2) \quad \frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (1)$$

گزینه ۳

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\left|\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{\left|\frac{9}{4} - 1\right|} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$

۱۳۱- تعداد جوابهای معادله مثلثاتی $\Delta \sin^2(x) + 2 \cos(2x) = -2$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

$$7 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

گزینه ۲

$$\Delta \sin^2 x = -2(1 + \cos 2x)$$

$$\Delta \sin^2 x = -2 \cos^2 \frac{2x}{2} \rightarrow x = -\pi, \pi$$

۱۳۳- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_4(|x^2 - 2| - x)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$
 (۲) $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 (۳) $[-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 (۴) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

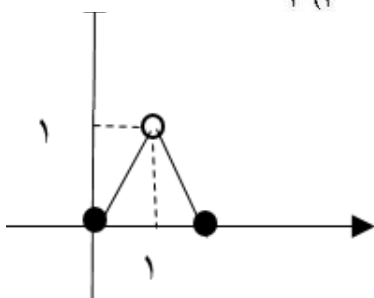
گزینه ۴

گزینه های ۲ و ۳ غلط $\rightarrow f(2) = \log_4 0$ بد $x = 2$

گزینه ۱ غلط $\rightarrow f(0) = \log_4 2$ قوی $x = 0$

۱۳۳- تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$ را که دوره تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه محصور به منحنی f و محور x ها در بازه $[-0.75, 3.25]$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۳.۵ (۴) ۴



گزینه ۱

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} (1)(1)$$

۱۳۴- فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{2}$

گزینه ۲

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \rightarrow x = 1 \text{ پشم} \rightarrow M \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \text{ فاصله} = \sqrt{2}$$

۱۳۵- از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر تویی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه ۰.۸ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۵۷ (۳) ۶۰ (۴) ۶۶

گزینه ۱

$$6 + \underbrace{0.8(12) + (0.8)^2(12) + \dots}_{5100} = 6 + \frac{(0.8)12}{1-0.8} = 54$$

مجموع تمام جملات یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدر نسبت $1 < q < -1$ برابر است با $\frac{a}{1-q}$

۱۳۶- تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

گزینه ۱

$$y = 2^{x+|x+3|} - 2 = 0 \rightarrow x + 3 + |x + 3| = 1 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

۱۳۷- اگر در معادله $2 \log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2$ ، مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۹

گزینه ۳

$$\log_3 a + \log_a 3 = 2 \rightarrow a = 3$$

۱۳۸- مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$ ، کدام است؟

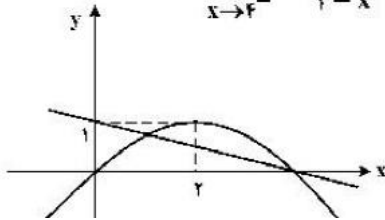
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

گزینه ۴

$$x^p = t \rightarrow x = -\sqrt{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^p + t + 1} + \sqrt{t + 1} - t}{-\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|t - \frac{1}{p}| + \sqrt{t + 1} - t}{-\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{-\sqrt{t}} = -1$$

۱۳۹- نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$ ، کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۳

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x \quad \text{و} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f'(4) + g'(4)}{-1} = \frac{5}{4}$$

۱۴۰- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۸ (۴) ۱۲

گزینه : ۱۲-۱

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(q)} = -12$$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = p \rightarrow x = q, \quad f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x}-1)^2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

۱۴۱- فرض کنید $f(x) = x(1-x^2)$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(f \circ g) \circ g$ ، کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه ۱

$$x > 0 \rightarrow \begin{matrix} g \\ \rightarrow 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f \\ \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$x = 0 \rightarrow \begin{matrix} g \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \quad fog = 0$$

$$x < 0 \rightarrow \begin{matrix} g \\ \rightarrow -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f \\ \rightarrow 0 \end{matrix}$$

۱۴۲- مینیمم مطلق تابع $f(x) = x|3-x^2|$ در بازه $[-1/5, \sqrt{3}]$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{9}{4}$ (۲) -2 (۳) $-\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{9}{8}$

گزینه ۲

$$f'(x) = 1(3-x^2) + (-2x)(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8} \\ x = -1 \rightarrow f(-1) = -2 \text{ مینیمم مطلق} \\ x = 1 \rightarrow f(1) = 2 \\ x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

۱۴۳- قرینه نقطه A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه $[0, 1]$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم صفحه مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره خط AA' ، کدام است؟

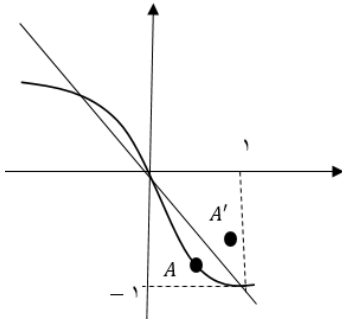
$\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{4}{3\sqrt{6}}$ (۲)

$\frac{2}{3\sqrt{6}}$ (۱)

گزینه ۲



$$\frac{-1}{\sqrt[3]{x^3}} = -1 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$A \begin{vmatrix} 1/\sqrt[3]{3} \\ -1/\sqrt[3]{3} \end{vmatrix} \quad A' = \begin{vmatrix} 1/\sqrt[3]{3} \\ 1/\sqrt[3]{3} \end{vmatrix} \quad AA' = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

۱۴۴- فرض کنید $f(x) = (x[x])^2$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق چپ تابع $f \circ g$ در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

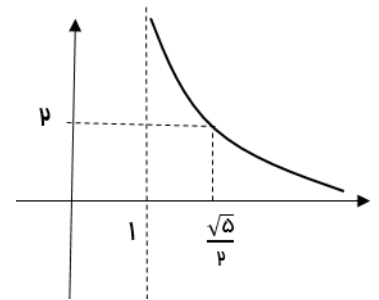
۱ (۱)

گزینه ۴

$$g' \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) f' \left(g \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) = -48\sqrt{5} (48 \times 2)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} (2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow g' \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{5}}{2} (8) = -48\sqrt{5}$$

$$f' \left(g \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) = f'_+(2) = 48(2^2)$$



۱۴۵- فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$. اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

$\frac{15}{2}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{2}$ (۲)

$-\frac{15}{2}$ (۱)

گزینه ۱

پیوستگی: $4a + 10 + b = 4a + 5 \rightarrow b = -5$

مشتق پذیر: $4a + 5 = 2a \rightarrow a = \frac{5}{2}$

۱۴۶- کوتاهترین فاصله سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه $M(3, 0)$ ، کدام است؟

۳ (۴)

 $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

گزینه ۳

$$A \mid \frac{x}{\sqrt{x}} \quad AM = \sqrt{(x-3)^2 + 4x}$$

$$\text{مشق: } 2(x-3) + 4 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow AM = 2\sqrt{2}$$

۱۴۷- احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دوره بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد.)

 $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{10}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{20}{27}$ (۱)

گزینه ۴

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7}$$

۱۴۸- فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان نوشت که فاصله حاصل ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۲۸ (۲)

۲۴ (۱)

گزینه ۳

$$C - b = 2a : \text{حالت ۱۶} \quad b - c = 2a : \text{حالت ۱۷}$$

$$C = 9 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \\ b = 5 \\ b = 7 \end{cases} \quad C = 8 \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$C = 7 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \\ b = 5 \end{cases} \quad C = 6 \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \end{cases} \quad C = 5 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad C = 4 \begin{cases} b = 2 \end{cases} \quad C = 3 \begin{cases} b = 1 \end{cases}$$

۱۴۹- به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۱۴۴ (۳) ۲۱۶ (۴) ۴۳۲

گزینه ۲

$$\mathfrak{w}! \mathfrak{v}! \mathfrak{w}! (\mathfrak{w} - 1)!$$

۱۵۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{۶۶}{۲۰۵}$ (۲) $\frac{۶۷}{۲۰۵}$ (۳) $\frac{۱۶۸}{۳۲۵}$ (۴) $\frac{۱۷۷}{۳۲۵}$

گزینه ۴

$$\frac{1 + 8 + 6 + 6 + 6 + 6 + 4! + 5!}{325} = \frac{177}{325}$$

۱۵۱- سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ ۱- را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره خط AB باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

گزینه ۴

$$-x^p + px + 1 = x - 1 \rightarrow x = p, x = -1$$

$$A \begin{vmatrix} p \\ 1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -1 \\ -p \end{vmatrix} \quad M \begin{vmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \\ \frac{1}{p} \end{vmatrix} \quad \text{فاصله} \begin{vmatrix} 1 \\ p \end{vmatrix} \text{ (رأس سهمی)} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{p^2}{16}} = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + 1}$$

۱۵۲- نقاط B، C و $M(3, 2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازه میانه AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعده مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A، کدام است؟

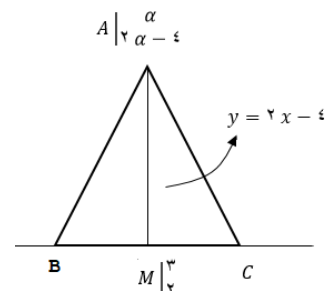
- (۱) ۵ (۲) -۲ (۳) -۵ (۴) -۸

گزینه ۲

$$\frac{|\alpha + p(p\alpha - 4) - 7|}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$$

$$5\alpha - 15 = 25 \rightarrow \alpha = 8$$

$$5\alpha - 15 = -25 \rightarrow \alpha = -2$$

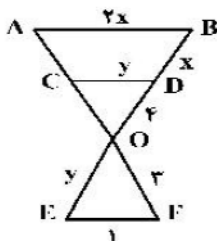


۱۵۳- دایره $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله دایره‌ای که با دایره قبلی مماس داخل بوده و از نقطه $(0, -3)$ گذشته و شعاع آن با قطر دایره اصلی برابر باشد. کدام است؟

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4y + 3 &= 0 \quad (2) & x^2 + y^2 - 4x &= 3 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + 4y + 3 &= 0 \quad (4) & x^2 + y^2 - 2x - 2y &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

گزینه؟؟؟

آن گزینه ای درست است که اگر به جای x و y آن $(3, -)$ بگذاریم در آن صدق کند که این نقطه فقط در گزینه ۴ صدق می کند. ولی شعاع دایره گزینه چهار برابر ۱ است.



۱۵۴- در شکل زیر AB ، CD و EF موازی‌اند. طول پاره خط AC ، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
- (۲) $\frac{4}{3}$
- (۳) $\frac{2}{3}$

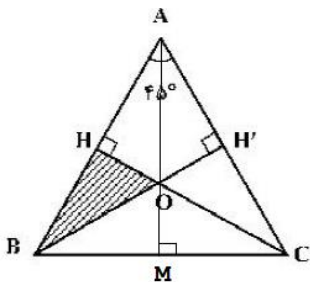
گزینه ۳

$$\frac{4}{y} = \frac{y}{1} \rightarrow y = 2$$

$$\frac{y}{x+4} = \frac{1}{2x} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{AC} = \frac{12}{4} \rightarrow AC = 2$$

۱۵۵- در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB ، کدام است؟



$$\frac{16}{3+2\sqrt{2}} \quad (4) \quad \frac{12}{3+2\sqrt{2}} \quad (3) \quad \frac{8}{2+\sqrt{3}} \quad (2) \quad \frac{6}{2+\sqrt{3}} \quad (1)$$

گزینه ۴

$$BM = 8 \sin 22.5 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$BO \times \sin 47.5 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$BO = 8 \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad OH = 8 \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 16 \frac{2}{4+4\sqrt{2}} = \frac{16}{2+2\sqrt{2}}$$