

۱۰۱- اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2 - 2SP + 2S$ ، کدام است؟

(۱) $59 - 7\sqrt{69}$ (۲) $7 + \sqrt{69}$ (۳) ۵۰ (۴) $59 + 7\sqrt{69}$

گزینه ۴

$$x^p = t: t^p - 7t - 5 = 0$$

$$t = \frac{7 + \sqrt{49}}{p} \rightarrow x^p = \frac{7 + \sqrt{49}}{p} \rightarrow S = 0$$

$$P = -\left(\frac{7 + \sqrt{49}}{p}\right) \rightarrow pP^p = 59 + 7\sqrt{49}$$

۱۰۲- فرض کنید $\log_5(3x - 2) = 1$ مقدار x، کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $\frac{17}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{7}{3}$

گزینه ۳

$$(\log 5 - \log 2) \log_{5/2}(\mu x - 2) = 1$$

$$\log_{5/2} \log_{5/2}(\mu x - 2) = 1$$

$$\log(\mu x - 2) = 1 \rightarrow \mu x - 2 = 10 \rightarrow x = 14$$

۱۰۳- حاصل عبارت $(\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147) \log_{21}(1323)$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۴

$$(\log_{p_1}(\mu))^p + \log_{p_1}(\mu \times \nu^p) \log_{p_1}(\mu \times \nu^p \times 9) =$$

$$(\log_{p_1} \mu)^p + (\log_{p_1} \mu + p \log_{p_1} \nu)(\mu \log_{p_1} \mu + p \log_{p_1} \nu)$$

$$14 (\log_{p_1} \mu + \log_{p_1} \nu)^p = 14$$

۱۰۴- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x-3} > 0$ به ازای $x > \frac{3}{2}$ بازه باشد. مقدار m کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

گزینه ۲

در بازه $[2,4]$ منفی باید در بازه $[2,4]$ منفی باشد

$$\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x-3} > 0$$

همواره +
برای $x > \frac{3}{2}$

در بازه $[2,4]$ همواره منفی: $-x^2 + 4$ اگر $m=0$

۱۰۵- اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{91}{105}$ (۲) $-\frac{16}{105}$ (۳) $\frac{16}{105}$ (۴) $\frac{91}{105}$

گزینه ۲

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{-16}{105}$$

$$\sin \alpha = \frac{p \tan \frac{\alpha}{p}}{1 + \tan^p \frac{\alpha}{p}} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^p \frac{\alpha}{p}}{1 + \tan^p \frac{\alpha}{p}} = \frac{15}{17}$$

$$\tan \alpha = \frac{p \tan \frac{\alpha}{p}}{1 - \tan^p \frac{\alpha}{p}} = \frac{8}{15}$$

۱۰۶- اگر $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{41\pi}{9}\right)$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) -۱

گزینه ۱

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha = -4 \sin^3 \alpha + 6 \sin \alpha = 2 \sin 3\alpha$$

$$= 2 \sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(14\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

۱۰۷- فرض کنید A مجموعه جوابهای معادله مثلثاتی $(1 + \cos(\gamma\alpha))(1 + \cos(\beta\alpha))(1 + \cos(\lambda\alpha)) = \frac{1}{\lambda}$ در بازه $[0, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعه A ، کدام است؟

(۱) $\frac{5}{7}\pi$ (۲) $\frac{6}{7}\pi$ (۳) $\frac{7}{9}\pi$ (۴) $\frac{8}{9}\pi$

گزینه ۴

$$\nu \cos^{\nu} \alpha \times \nu \cos^{\nu} \beta \alpha \times \nu \cos^{\nu} \lambda \alpha = \frac{1}{\lambda}$$

$$\cos \alpha \cos \beta \alpha \cos \lambda \alpha = \pm \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\frac{1}{\lambda} \sin \lambda \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{1}{\lambda}$$

$$\sin \lambda \alpha = \sin \alpha \begin{cases} \alpha = \frac{\nu k \pi}{\nu} & \max: \frac{\nu \pi}{\nu} \\ \alpha = \frac{\nu k \pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu} & \max: \frac{\nu \pi}{\nu} \end{cases}, \quad \sin \lambda \alpha = \sin(-\alpha) \begin{cases} \alpha = \frac{\nu k \pi}{\nu} & \max: \frac{\lambda \pi}{\nu} \\ \alpha = \frac{\nu k \pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu} & \max: \frac{\delta \pi}{\nu} \end{cases}$$

$$\max A = \frac{\lambda \pi}{\nu}$$

۱۰۸- تابع چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$

بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب -2 و $\frac{1}{\nu}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

$$ax^{\nu} + bx + c = (\nu ax + b) \left(\frac{1}{\nu}x + 1 \right) - \nu$$

گزینه ۳

$$= ax^{\nu} + \left(\frac{b}{\nu} + \nu a \right) x + b - \nu$$

$$\boxed{c = b - \nu} \rightarrow c = \lambda a - \nu \quad \boxed{\nu a + \frac{b}{\nu} = b} \rightarrow b = \lambda a$$

$$P(x) = ax^{\nu} + \lambda a x + \lambda a - \nu$$

$$\text{مجموع ضرایب } a + \lambda a + \lambda a - b = 9a - \nu = 7$$

$a \in \mathbb{N}, a = 1$

۱۰۹- فرض کنید جمله صدم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ با شرط $a_1 = 1$ ، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جمله نود و هشتم دنباله، کدام است؟

(۱) $\frac{k-m}{\nu m - k}$ (۲) $\frac{k-\nu m}{k-m}$ (۳) $\frac{k-m}{k-\nu m}$ (۴) $\frac{\nu m - k}{k-m}$

$$\frac{1}{a_{99}} + 1 = \frac{k}{m} \rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

گزینه ۱

$$\frac{1}{a_{98}} + 1 = \frac{m}{k-m} \rightarrow a_{98} = \frac{k-m}{\nu m - k}$$

۱۱۰- دنباله a_n به ازای اعداد حسابی n ، مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جمله اول این

$$a_n = \begin{cases} 2^k & ; n = 2k \\ -2k + 4 & ; n = 2k + 1 \\ \left\lfloor \frac{n}{k+2} \right\rfloor + a & ; n = 2k + 2 \end{cases}$$

دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{19}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

گزینه ۱

$$\begin{array}{cccc} k = 0 & k = 1 & k = 2 & k = 3 \\ a_0 = 1 & a_2 = 2 & a_4 = 4 & a_6 = 8 \\ a_1 = 4 & a_3 = 2 & a_5 = 0 & a_7 = 2 \\ a_8 = \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor + a & a_{10} = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + a & a_{12} = \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + a & a_{14} = \left\lfloor \frac{14}{5} \right\rfloor + a \end{array}$$

جمله ۱۰ مجموع $= ۱۹ \rightarrow a = -۲$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{14} + a_{15}$$

$$-1 - 1 + 0 + 0 + \dots + \left(\left\lfloor \frac{14}{2} \right\rfloor - 2 \right) + \left(\left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor - 2 \right) = -2$$

۱۱۱- فرض کنید برد تابع $f(x) = 2\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1} - 2\sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{21}{4}$

گزینه ۴

اگر $\cos x = 1 \rightarrow f(x) = 2^3 - 2^{-3} = 8 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

اگر $\cos x = 0 \rightarrow f(x) = 2^{-1} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

بر $R = \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right] \rightarrow b - a = \frac{15}{8} + \frac{3}{2} = \frac{21}{8}$

۱۱۲- دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_4 \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$ کدام است؟

(۱) $(-9, 9)$ (۲) $(-4, 9)$ (۳) $(4, 9)$ (۴) $(-4, 4)$

گزینه ۱

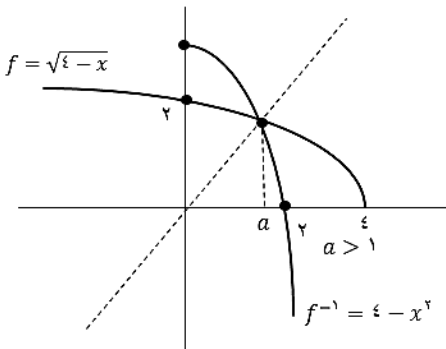
عدد مثبت

$$\text{فوب } x = -8 \rightarrow \log_4 \frac{1}{4 + \sqrt{8} - 8}$$

۱۱۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-۲$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها، کدام است؟

- (۱) ۴- (۲) ۳- (۳) ۱ (۴) ۲

گزینه ۳



$x =$ تابع جدید \rightarrow عرض نقطه برخورد تابع جدید با وارونش

قطعه نباید تابع بالا برود $\sqrt{4-(x+k-۲)} - k = x$

$x = 1 : \sqrt{4-k-k} - k = 1 \rightarrow k = 1$

تابع جدید $\sqrt{4-x} - 1$

$\sqrt{4-x} - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ یک واحد به پایین

۱۱۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه تقاطعی که $g \circ f$ یا $f \circ g$ در آن‌ها مشتق پذیر نیست، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

گزینه ۳

$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ $g(x) = 1 - x^2$

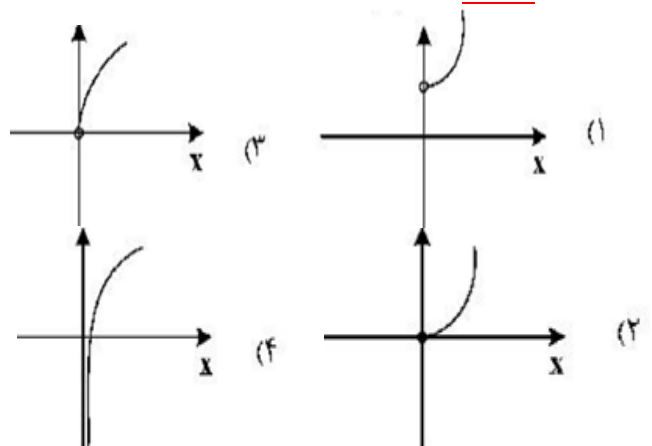
$g \circ f = \begin{cases} \bullet & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \bullet & x > 1 \end{cases}$ $g \circ f$ در ۱ و -۱ مشتق ناپذیر

$f \circ g = \begin{cases} -1 & x > \sqrt{p} \text{ یا } x < -\sqrt{p} \\ 1 - x^2 & -\sqrt{p} \leq x \leq \sqrt{p} \end{cases}$ $f \circ g$ در \sqrt{p} و $-\sqrt{p}$ مشتق ناپذیر

۱۱۵- نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ ، کدام است؟

گزینه ۲

$f(x) = 9^{\log_3 x} = 3^{2 \log_3 x} = x^2$



۱۱۶ فرض کنید $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)}{(1 - \cos(\sqrt{2x}))^n}$ مقدار $a + n$ کدام است؟

$$\frac{17}{4} \quad (4)$$

$$\frac{15}{4} \quad (3)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{7}{4} \quad (1)$$

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^p} - 1)^p}{(1-x^p)x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{p}(-x^p)\right)^p}{x^n} = \frac{1}{4} \quad , \quad n = 4 \rightarrow n + a = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

۱۱۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$+\infty \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$-\infty \quad (1)$$

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}^-} \frac{10x + 4}{16x + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۱۱۸ تابع $f(x) = \frac{ax^2 - bx^2 + 2}{ax^2 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b کدامند؟

$$a = 8, b = 10 \quad (2)$$

$$a = -8, b = -6 \quad (4)$$

$$a = 0, b = 2 \quad (1)$$

$$a = -2, b = 0 \quad (3)$$

گزینه ۴

مخرج کسر باید ۲ ریشه داشته باشد و یکی از ریشه های مخرج ریشه صورت هم باشد. گزینه های ۱ و ۳ غلط اند

مخرج باید یک ریشه عادی و یک ریشه مضاعف داشته باشد.

گزینه ۲ را چک می کنیم: $f(x) = \frac{8x^3 - 10x^2 + 2}{8x^3 - 10x + 2}$ پس غلط است.

۱۱۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2 x^2 - 1)(a^4 x^4 - 1) \dots (a^{100} x^{100} - 1)}}{a^{49} x^k - 1} = -1$ ، آنگاه مقادیر a و k کدام اند؟

(۱) $k=51, a=-1$
 (۲) $k=51, a=1$
 (۳) $k=49, a=-1$
 (۴) $k=49, a=1$

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2 x^2)(a^4 x^4) \dots (a^{100} x^{100})}}{a^{49} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{2+4+\dots+100}} \sqrt[5]{x^{2+4+\dots+100}}}{a^{49} x^k}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{(a^{51})} \sqrt[5]{(x^{51})}}{a^{49} x^k} = \frac{|a^{51}| |x^{51}|}{a^{49} x^k} = \frac{-|a^{51}| x^{51}}{a^{49} x^{51}} = -1$$

$k = 51, a = 1$

۱۲۰- فرض کنید $f(x) = \cos^2(\pi x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ ، مقدار $a+b$ ، کدام است؟

(۱) ۸
 (۲) ۶
 (۳) ۴
 (۴) -۸

گزینه ۲

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-4x^2+ax^2+b}{x} = 0$ باید : $b = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12x + 2ax}{x} = -12 + 2a = 2 \rightarrow a = 7$

۱۲۱- خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(\pi x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x=0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره‌خط AB ، کدام است؟

(۱) صفر
 (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
 (۴) $2\sqrt{2}$

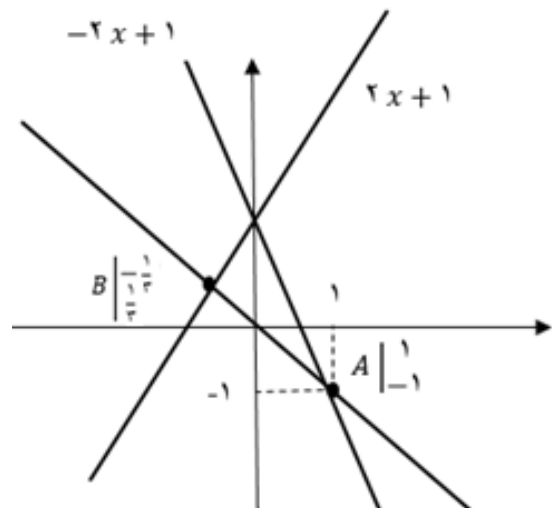
گزینه ۳

$f(x) = |\pi x| + 1$

$m_1 = f'_+(\cdot) = \pi$

$m_2 = f'_-(\cdot) = -\pi$

$AB = \sqrt{\frac{14}{9} + \frac{14}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$



۱۲۲- کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}}$ درست است؟

- (۱) تابع f در بازه $(0, 1) \cup (1, \infty)$ صعودی است.
 (۲) تابع f در بازه های $(0, 1)$ و $(1, \infty)$ صعودی است.
 (۳) تابع f در بازه $(1, \infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.
 (۴) تابع f در بازه $(1, \infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

گزینه ۲

$$f'(x) = \frac{p}{p\sqrt{x}} - \frac{p}{p} \left(\frac{-1}{p}\right) (px)(x^p - 1)^{-\frac{p}{p}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{(x^p - 1)^p}}$$

اگر در مسیر دامنه مجانب قائم باشد، تابع در آن فاصله غیریکنوا است. پس گزینه ۱ غلط است.

۱۲۳- بازه هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 8}$ در آن ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه ها، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{4} - 1$ (۳) $2\sqrt{4}$ (۴) $2(\sqrt{4} - 1)$

گزینه ۴

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 8) - 2x^4}{(x^2 - 8)^2}$$

$$\text{طول min} = 2\sqrt{4} - 2 = 2(\sqrt{4} - 1)$$

x	۰	۲	$2\sqrt{4}$
f'	+	-	-
f			+

۱۲۴- فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن ها، موازی پاره خط AB است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه ۳

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$x = -1, x = 2$$

