

پاسخنامه تشریحی حسابان و ریاضیات پایه کنکور ۱۴۰۰

سؤال ۱۰۱: اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند،

حاصل عبارت $2P^2 - 3SP + 2S$ کدام است؟

(۱) $59 - 7\sqrt{69}$ (۲) $7 + \sqrt{69}$ (۳) 50 (۴) $59 + 7\sqrt{69}$

پاسخ: گزینه ۲

تابع $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ تابعی زوج است. بنابراین مجموع ریشه های حقیقی صفر خواهد بود. ($S = 0$)

$$2P^2 - 3SP + 2S = 2P^2$$

$$x^4 - 7x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \quad x^2 > 0 \rightarrow x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \Rightarrow 2P^2 = 2 \times \frac{7 + \sqrt{69}}{2} = 7 + \sqrt{69}$$

سؤال ۱۰۲: فرض کنید $\log_{\frac{5}{2}}(3x - 2) = 1$ مقدار x کدام است؟

(۱) 9 (۲) $\frac{17}{3}$ (۳) 4 (۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

(راه اول)

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} \log_{\frac{5}{2}}(3x - 2) = 1 \Rightarrow [(\log 5)^2 - (\log 2)^2] \log_{\frac{5}{2}}(3x - 2) = 1$$

$$\Rightarrow [(\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2)] \log_{\frac{5}{2}}(3x - 2) = 1 \Rightarrow \log \frac{5}{2} \log 10 \log_{\frac{5}{2}}(3x - 2) = 1$$

$$\log_{\frac{5}{2}}(3x - 2) = \log_{\frac{5}{2}} 10 = \log_{\frac{5}{2}} 10 \Rightarrow 3x - 2 = 10 \Rightarrow x = 4$$

(راه دوم)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{array} \right) \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1 \\ & \frac{(\log 5)^2 - (\log 2)^2}{(\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2)} = 1 \\ & \frac{(\log 5)^2 - (\log 2)^2}{\log 10 \cdot \log \frac{5}{2}} = 1 \\ & \log \frac{5}{2} \times \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1 \Rightarrow \log(3x-2) = 1 \Rightarrow 3x-2 = 10 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

سؤال ۱۰۳: حاصل عبارت $(\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147) \log_{21}(1323)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned} & (\log_{21}^3)^2 + \log_{21}^{147} \log_{21}^{1323} = (\log_{21}^3)^2 + \log_{21}^{7 \times 21} \log_{21}^{3 \times 21} \\ & = (\log_{21}^3)^2 + (\log_{21}^7 + \log_{21}^{21})(\log_{21}^3 + \log_{21}^{21}) \\ & = (\log_{21}^3)^2 + (\log_{21}^7 + 1)(1 + \log_{21}^3) = (\log_{21}^3)^2 + \left(\log_{21}^{\frac{31}{21}} + 1 \right) (1 + \log_{21}^{21 \times 3}) \\ & = (\log_{21}^3)^2 + (1 - \log_{21}^{\frac{31}{21}} + 1)(1 + 1 + \log_{21}^3) = (\log_{21}^3)^2 + (2 - \log_{21}^{\frac{31}{21}})(2 + \log_{21}^3) \\ & = (\log_{21}^3)^2 + 4(\log_{21}^3)^2 = 4 \end{aligned}$$

سؤال ۱۰۴: فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0$ به ازای

$x > \frac{3}{2}$ ، بازه $[2, 4]$ باشد. مقدار m کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0$$

$$\text{ریشه} \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{2x-3} > 0$$

$$2x-3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

چون مجموعه جواب $[2, 4]$ است و می دانیم اعدادی که در ابتدا و انتهای بازه مجموعه جواب است ریشه های عبارت است پس

باید $x = 2$ ریشه $(m^2-1)x^2 - 4mx + 4 = 0$ باشد.

$$4(m^2-1) - 8m + 4 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow 4m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$1) m = 0 \rightarrow \frac{(-x^2+4)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{2x-3} > 0$$

-2	1	$\frac{3}{2}$	2	4
-	+	-	+	-

ت.ن

$m = 0$ پس $m > \frac{3}{2} \rightarrow x \in [2, 4]$ است.

$$2) m = 2 \Rightarrow \frac{(3x^2-8x+4)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{2x-3} = \frac{(3x-2)(x-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{2x-3} > 0$$

$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	4
-	+	-	+	-

$x > \frac{3}{2} \rightarrow x > 4$

سؤال ۱۰۵: اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟

$$\frac{91}{105} \quad (4)$$

$$\frac{16}{105} \quad (3)$$

$$-\frac{16}{105} \quad (2)$$

$$-\frac{91}{105} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

(راه حل اول)

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$

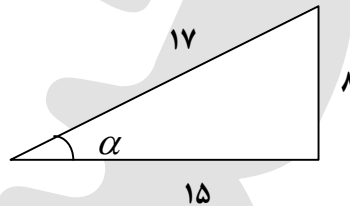
$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{15}{17}$$

$$\frac{\frac{8}{17} - \frac{8}{17}}{\frac{15}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{136 \times 120}{15 \times 17} = \frac{16}{17} = \frac{-16}{105}$$

(راه حل دوم)

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{15}{17}$$



$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

سؤال ۱۰۶: اگر $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{41\pi}{9}\right)$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

 $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

(راه اول)

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha$$

$$f(\alpha) = 2 \sin \alpha (2 \cos 2\alpha + 1)$$

$$\cos \alpha f(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos 2\alpha + 1)$$

$$\cos \alpha f(\alpha) = \sin 2\alpha (2 \cos 2\alpha + 1) \Rightarrow \cos \alpha f(\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha f(\alpha) = \sin 4\alpha + \sin 2\alpha \xrightarrow{\alpha} \cos \alpha f(\alpha) = 2 \sin 3\alpha \cos \alpha$$

$$f(\alpha) = 2 \sin 3\alpha = 2 \sin \frac{41\pi}{3} = 2 \sin \left(\frac{39\pi + 2\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(13\pi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= -2 \sin \frac{2\pi}{3} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

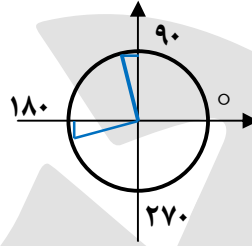


(۵۵ دو)

$$\alpha = \frac{41 \times 180}{9} = 820 \xrightarrow{-720} 100$$

$$f(100) = 4 \sin 100 \cos 200 + 2 \sin 100$$

$$= \frac{2}{1} \sin 100 \left(\frac{2 \cos 200 + 1}{-0/9} \right) \approx -1/6$$



(۵۵ سو)

$$4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$$

$$= 2 \sin 3\alpha = 2 \sin \frac{41\pi}{3}$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

سؤال ۱۰۷: فرض کنید A مجموعه جواب های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$

در بازه $[0, \pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعه A کدام است؟

$$\frac{8}{9}\pi \quad (4)$$

$$\frac{7}{9}\pi \quad (3)$$

$$\frac{6}{7}\pi \quad (2)$$

$$\frac{5}{7}\pi \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$2 \cos^2 \alpha 2 \cos^2 2\alpha 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow (\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 \sin 8\alpha}{8 \sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow \sin^2 8\alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\lambda \alpha = k \pi \pm \alpha \Rightarrow \begin{cases} 7\alpha = k \pi \Rightarrow \alpha = \frac{k \pi}{7} \\ 9\alpha = k \pi \Rightarrow \alpha = \frac{k \pi}{9} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{[0, \pi]} \alpha = \frac{8\pi}{9}$$

سؤال ۱۰۸: تابع چند جمله ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت

تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب -2 و $1 + \frac{1}{x}$ به ترتیب -2 و $1 + \frac{1}{x}$ باشند، کمترین

مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ کدام است؟

$$9 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{1}{2}bx + b - 2$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{1}{2}b\right)x + b - 2$$

$$\Rightarrow b = 2a + \frac{1}{2}b \Rightarrow 2a = \frac{1}{2}b \Rightarrow 4a = b$$

$$c = b - 2$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow \text{Min}(a + b + c) = 7$$

سؤال ۱۰۹: فرض کنید جمله صدم دنباله بازگشتی با شرط $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ با شرط $a_1 = 1$ برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جمله

نود و هشتم دنباله کدام است؟

$$\frac{2m - k}{k - m} \quad (4)$$

$$\frac{k - m}{k - 2m} \quad (3)$$

$$\frac{k - 2m}{k - m} \quad (2)$$

$$\frac{k - m}{2m - k} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$$

$$a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

$$a_{99} = \frac{1}{a_{100} - 1} = \frac{1}{\frac{k}{m} - 1} = \frac{1}{\frac{k - m}{m}} = \frac{m}{k - m}$$

$$a_{98} = \frac{1}{a_{99} - 1} = \frac{1}{\frac{m}{k - m} - 1} = \frac{1}{\frac{m - k + m}{k - m}} = \frac{k - m}{2m - k}$$



سؤال ۱۰: دنباله a_n به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله ۱۹ باشد عبارت $a_۲ + a_۵ + a_۸ + \dots + a_{۲۹}$ کدام است؟

$$a_n = \begin{cases} ۲k & ; n = ۳k \\ -۲k + ۴ & ; n = ۳k + ۱ \\ \left[\frac{n}{k+۲} \right] + a & ; n = ۳k + ۲ \end{cases}$$

- ۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

$$۱, ۴, ۱ + a, ۲, ۲, ۱ + a, ۲^۲, ۰, ۲ + a, ۲^۳$$

$$۱۹ = ۲۵ + ۳a \Rightarrow a = -۲$$

$$a_۲, a_۵, a_۸, \dots, a_{۲۹}$$

$$-۱, -۱, ۰, ۰, ۰, ۰ \xrightarrow{+} -۲$$

سؤال ۱۱: فرض کنید برد تابع $f(x) = \sqrt[۳]{9\cos^2(x)-1} - \sqrt[۳]{1-9\cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد مقدار $b-a$ کدام است؟

$$\frac{۲۱}{۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۹}{۲} \quad (۳)$$

$$\frac{۱۵}{۴} \quad (۲)$$

$$\frac{۹}{۴} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt[۳]{9\cos^2(x)-1} - \sqrt[۳]{1-9\cos^2(x)}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt[۳]{9\cos^2 x - 1} \leq ۲$$

$$\sqrt[۳]{9\cos^2 x - 1} = t \quad -1 \leq t \leq ۲$$

$$f(t) = ۲^t - ۲^{-t} \Rightarrow -1 \leq t \leq ۲$$

تابع ۲^t اکیداً صعودی است.تابع ۲^{-t} اکیداً نزولی است.پس -۲^{-t} اکیداً صعودی است.یعنی $۲^t - ۲^{-t}$ اکیداً صعودی است.

$$-1 \leq t \leq ۲ \Rightarrow f(-1) = ۲^{-1} - ۲^1 = \frac{1}{۲} - ۲ = -\frac{۳}{۲}$$

$$f(۲) = ۲^۲ - ۲^{-۲} = ۴ - \frac{1}{۴} = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \leq f(x) \leq \frac{۱۵}{۴}$$

$$b-a = \frac{۱۵}{۴} - \left(-\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱۵}{۴} + \frac{۶}{۴} = \frac{۲۱}{۴}$$



سؤال ۱۱۲: دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_6 \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$ کدام است؟

- (۱) $(-9, 9)$ (۲) $(-4, 9)$ (۳) $(4, 9)$ (۴) $(-4, 4)$

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} > 0$$

$$-1 \times 1 + \sqrt{|x|} + 6 > 0 \Rightarrow \sqrt{|x|} = t \Rightarrow -t^2 + t + 6 > 0 \Rightarrow x^2 - t - 6 < 0$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t + 2) < 0 \Rightarrow -2 < t < 3$$

$$\underbrace{-2 < \sqrt{|x|} < 3}_{\text{همواره مثبت}} \Rightarrow \sqrt{|x|} < 3 \Rightarrow |x| < 9 \Rightarrow -9 < x < 9$$

همواره مثبت

سؤال ۱۱۳: نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k - 2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال

می دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه ای به عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می دهیم. طول نقطه برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -3 (۳) 1 (۴) 2

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt{4-x} \xrightarrow[\text{راستای واحد}]{k \text{ واحد در}} \sqrt{4-x} + k \xrightarrow[\text{در جهت افقی}]{k-2 \text{ واحد}} \sqrt{4-(x-(k-2))} + k$$

$$\sqrt{-x+k+2+k}$$

وارون نمودار را در نقطه ای به عرض ۱ قطع کند یعنی $(1, 1)$ در تابع صدق می کند:

$$\sqrt{-1+k+2+k} = 1 \Rightarrow \sqrt{k+1} = 1-k$$

$$1-k \geq 0 \Rightarrow k \leq 1$$

$$k+1 = k^2 - 2k + 1 \Rightarrow k^2 - 3k = 0$$

$$k(k, 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow k = 0$$

$$\sqrt{-x+2-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{-x+2} = 1 \Rightarrow -x+2=1 \Rightarrow x=1$$

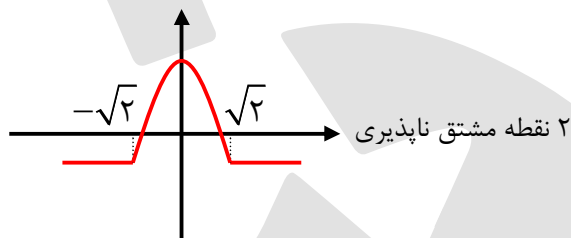
سؤال ۱۱۴: فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$ تعداد عناصر مجموعه نقاطی که

$g \circ f$ یا $f \circ g$ در آنها مشتق پذیر نیست کدام است؟

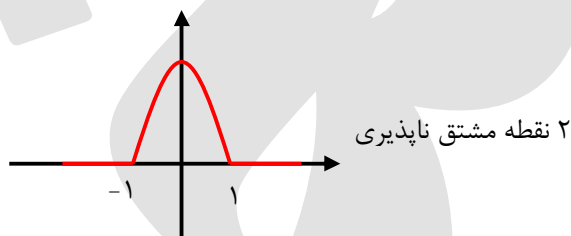
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

$$f \circ g = \begin{cases} -1 & |x| > \sqrt{2} \\ 1-x^2 & |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

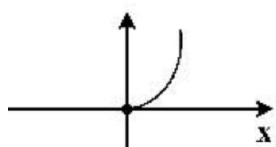


$$g \circ f = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

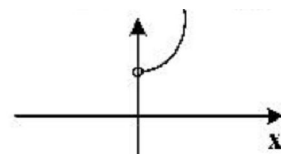


در کل ۴ نقطه مشتق ناپذیری

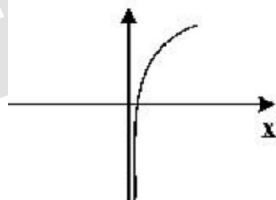
سؤال ۱۱۵: نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ کدام است؟



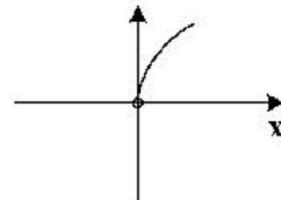
(۱)



(۲)



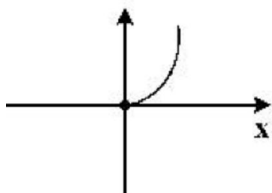
(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$9^{\log_3 x} \xrightarrow{x > 0} x^{\log_3 9} = x^2$$



سؤال ۱۱۶: فرض کنید $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)}{(1 - \cos(\sqrt{2x}))^n}$ مقدار $a + n$ کدام است؟

$\frac{17}{4}$ (۴)

$\frac{15}{4}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$\frac{7}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

کمان تاثرات به سمت صفر میل می کند پس هم ارز با کمان خود است.

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)}{\left(1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2x}}{2}\right)^2\right)^n} = \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{(x)^n} = \frac{\left(\frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{1}\right)^2}{x^n} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^n} = a$$

$$\frac{x^4}{x^n} = a \rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + n = \frac{17}{4}$$

سؤال ۱۱۷: مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $-\infty$ (۲) صفر (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]} = \frac{-5 - 5 + [12^-]}{-8 - [(-8)^+]} = \frac{-10 + 11}{(-8) - (-8)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\left(-\frac{1}{2}^-\right) \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \left(\frac{1}{4}\right)^+ \xrightarrow{\text{معکوس}} 4^-$$

سؤال ۱۱۸: تابع $f(x) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^3 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات

دارد. مقدار a و b کدام اند؟

(۱) $a = 0, b = 2$ (۲) $a = 8, b = 10$ (۳) $a = -2, b = 0$ (۴) $a = -8, b = -6$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$\text{گزینه ۱} \quad \frac{-2x^2 + 2}{2x + 2} \quad \times$$

$$\text{گزینه ۲} \quad \frac{\lambda x^3 - 10x^2 + 2}{\lambda x^3 - 10x + 2} = \frac{\lambda x^3 - 10x^2 + 2}{(x-1)(\lambda x^2 + \lambda x - 2)} \quad \times$$

$$\text{گزینه ۳} \quad \frac{-2x^3 + 2}{-2x^3 + 2} \quad \times$$

$$\text{گزینه ۴} \quad \frac{-\lambda x^3 + 6x^2 + 2}{-\lambda x^3 + 6x^2 + 2} = \frac{4x^3 - 3x^2 - 2}{4x^3 - 3x - 1} = \frac{(x-1)(4x^2 + x + 2)}{(x-1)(4x^2 + 4x + 1)} \quad \checkmark$$

سؤال ۱۱۹: اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2 x^2 - 1)(a^4 x^4 - 1) \dots (a^{100} x^{100} - 1)}}{a^{49} x^k - 1} = -1$ آنگاه مقادیر a و k کدام اند؟

(۱) $k = 51, a = -1$ (۲) $k = 51, a = 1$ (۳) $k = 49, a = -1$ (۴) $k = 49, a = 1$

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{a^{2+4+\dots+100} x^{2+4+\dots+100}}}{a^{49} x^k} = \frac{\sqrt[5]{a^{2550} x^{2550}}}{a^{49} x^k} = \frac{-a^{51} x^{51}}{a^{49} x^k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 51 \\ a = 1 \end{cases}$$

سؤال ۱۲۰: فرض کنید $f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

 $a + b$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) -۸

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^3(2x) + ax^2 + b}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 3 \frac{(2x)^2}{2} + ax^2 + b}{x} = \frac{1 - 6x^2 + ax^2 + b}{x}$$

$$b = -1 \quad b + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(a-6)x^2}{x} = (a-6)x = 0 \quad \checkmark$$

پون در حوالی نقطه $x = 0$ هستیم می توانیم به جای مشتق گرفتن از $f(x)$ از هم ارز آن یعنی $(a-6)x^2 + b + 1$ مشتق بگیریم:

$$\begin{cases} f'(x) = 2(a-6)x \\ f''(x) = 2(a-6) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} \stackrel{HOP}{=} \frac{f''(x)}{1} = \frac{2(a-6)}{1} = 2$$

$$\Rightarrow a-6=1 \Rightarrow a=7$$

$$a+b=7-1=6$$

سؤال ۱۲۱: خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه ای به طول $x = 0$ رسم می کنیم. اگر

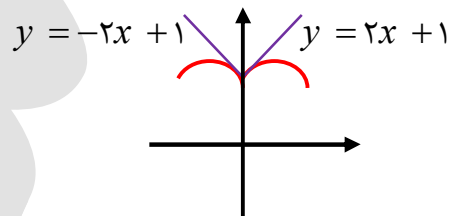
A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} 2x + 1 = -x \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ -2x + 1 = -x \Rightarrow B = (1, 1) \end{cases}$$

$$AB = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$



سؤال ۱۲۲: کدام عبارت برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}}$ درست است؟

- (۱) تابع f در بازه $(0, 1) \cup (1, \infty)$ صعودی است.
 (۲) تابع f در بازه های $(0, 1)$ و $(1, \infty)$ صعودی است.
 (۳) تابع f در بازه $(1, \infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.
 (۴) تابع f در بازه $(1, \infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

پاسخ: گزینه ۲

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \xrightarrow{x > 0} f'(x) > 0$$

همواره صعودی است



سؤال ۱۳۳: بازه هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 8}$ در آنها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه ها کدام است؟

$$2(\sqrt[3]{4} - 1) \quad (4)$$

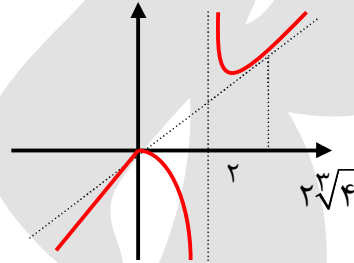
$$2\sqrt[3]{4} \quad (3)$$

$$\sqrt[3]{4} - 1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{x^4}{x^2 - 8}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^2 - 8} \sim x$$

$$\frac{x^4}{x^2 - 8} \stackrel{HOP}{=} \frac{4x^3}{2x} \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 8} = \frac{4}{2x} \Rightarrow 2x^3 = 4x^2 - 32$$

$$\Rightarrow x^3 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3} = 2\sqrt[3]{4}$$

در بازه $(2, 2\sqrt[3]{4})$ نزولی است.

$$2\sqrt[3]{4} - 2 = 2(\sqrt[3]{4} - 1)$$

سؤال ۱۳۴: فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی

منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آنها، موازی پاره خط AB است؟

$$3 \quad (4)$$

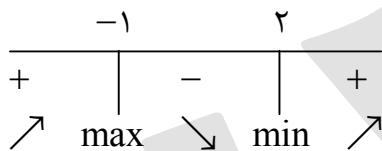
$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

 $x = -1$ مینیمم و $x = 2$ ماکزیمم تابع است.

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ 8 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 2 \\ -19 \end{vmatrix} \quad m_{AB} = \frac{8 + 19}{-1 - 2} = \frac{27}{-3} \Rightarrow m_{AB} = -9$$

$$f'(x) = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0$$

$\Delta > 0 \rightarrow$ دو جواب دارد پس دو نقطه یافت می شود.

