(محمود جعفری) ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

۱۰۱- (۴)

$x^4 - 7x^2 - 5 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 7t - 5 = 0 \rightarrow$

$t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \xrightarrow{x^2 = t \geq 0} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{7+\sqrt{69}} \rightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -\frac{1}{2}(7+\sqrt{69}) \end{cases} \rightarrow$

$2P^2 - 3SP + 2S = \frac{1}{2}(49 + 69 + 14\sqrt{69}) = \boxed{59 + 7\sqrt{69}}$

۱۰۲- (۳)

$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} \cdot \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1 \rightarrow$

$\left[(\log 5)^2 - (\log 2)^2\right] \cdot \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1 \rightarrow$

$(\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) \cdot \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1 \rightarrow$

$\log\frac{5}{2} \cdot \log 10 \cdot \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1 \rightarrow \log\frac{5}{2} \cdot \frac{\log(3x-2)}{\log\frac{5}{2}} = 1 \rightarrow$

$\log(3x-2) = 1 \rightarrow 3x - 2 = 10 \rightarrow \boxed{x = 4}$

۱۰۳- (۴)

$(\log_{21} 3)^2 + (\log_{21} \overbrace{147}^{21\times 7}) \cdot (\log_{21} \overbrace{1323}^{3\times(21)^2}) =$

$(\log_{21} 3)^2 + (1 + \log_{21} \overset{\frac{21}{3}}{7}) \cdot (2 + \log_{21} 3) =$

$(\log_{21} 3)^2 + (2 - \log_{21} 3) \cdot (2 + \log_{21} 3) = (\log_{21} 3)^2 + 4 - (\log_{21} 3)^2 = \boxed{4}$

۱۰۴- (۲)

$\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4) \cdot (x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0 \quad ; x > \frac{3}{2} \rightarrow$

$\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4) \cdot \overset{+}{(\sqrt{x} - 1)}(\sqrt{x} - 2)}{\underset{+}{(2x - 3)}} > 0 \quad ; x > \frac{3}{2} \rightarrow$

$A = ((m^2-1)x^2 - 4mx + 4) \cdot (\sqrt{x} - 2) > 0 \quad ; x > \frac{3}{2}$

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

ادامه سوال ۱۰۴ :

طبق فرض مجموعه جواب $= [2, 4] \to$ ریشه است : $x = 2 \to 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \to$

$4m^2 - 8m = 0 \to m = 0, 2$

if: $m = 2 \to A = (3x^2 - 8x + 4)(\sqrt{x} - 2) = (3x-2)(x-2)(\sqrt{x}-2) \; ; \; x > \frac{3}{2}$

x	$\frac{3}{2}$		2		4		$+\infty$
A		$+$	0	$-$	0	$+$	

غیر قابل قبول است.

if: $m = 0 \to A = (-x^2 + 4)(\sqrt{x} - 2) = (2 - x)(2 + x)(\sqrt{x} - 2) \geq 0 \; ; \; x > \frac{3}{2}$

x	$\frac{3}{2}$		2		4		$+\infty$
A		$-$	0	$+$	0	$-$	

قابل قبول است پس $m = 0$ می‌باشد.

---

۱۰۵ - ②

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \to \begin{cases} tg\alpha = \dfrac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2(\frac{1}{4})}{1 - \frac{1}{16}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \boxed{\dfrac{8}{15}} \\ \sin\alpha = \dfrac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2(\frac{1}{4})}{1 + \frac{1}{16}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{17}{16}} = \boxed{\dfrac{8}{17}} \\ \cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \dfrac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}} = \boxed{\dfrac{15}{17}} \end{cases}$$

$$\to \frac{tg\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{8\left(\frac{2}{15 \times 17}\right)}{\frac{-7}{17}} = \boxed{\frac{-16}{105}}$$

---

۱۰۶ - ①

$f(\alpha) = 4\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2\sin\alpha \to f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = ?$

$2\sin a \cdot \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ داریم :

$\to f(\alpha) = 2\left(\sin 3\alpha + \sin(-\alpha)\right) + 2\sin\alpha = 2\sin 3\alpha \to f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2\sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) =$

$2\sin\left(14\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{-\sqrt{3}}$

۱۰۷ - ۴

$$(1+\cos 2\alpha)\cdot(1+\cos 4\alpha)\cdot(1+\cos 8\alpha)=\frac{1}{8}\rightarrow$$

$$(2\cos^2\alpha)\cdot(2\cos^2 2\alpha)\cdot(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}\rightarrow$$

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=\pm\frac{1}{8}\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } \sin\alpha}$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\cdot\cos 2\alpha}_{\frac{1}{4}\sin 4\alpha}\cdot\cos 4\alpha}_{\frac{1}{8}\sin 8\alpha}=\pm\frac{1}{8}\sin\alpha\rightarrow\frac{1}{8}\sin 8\alpha=\pm\frac{1}{8}\sin\alpha\rightarrow$$

$$\sin 8\alpha=\pm\sin\alpha\rightarrow\begin{cases}8\alpha=k\pi+\alpha\rightarrow\alpha=\frac{k\pi}{7}\\ 8\alpha=k\pi-\alpha\rightarrow\alpha=\frac{k\pi}{9}\end{cases}\xrightarrow{\alpha\in[0,\pi]}$$

$$\begin{cases}\alpha=0,\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\dots,\frac{6\pi}{7}\\ \alpha=0,\frac{\pi}{9},\frac{2\pi}{9},\dots,\frac{8\pi}{9}\end{cases}\rightarrow\max\alpha=\frac{8\pi}{9}$$

---

۱۰۸ - ۳

$$\begin{array}{l|l}p(x) & p'(x)\\ \hline & \frac{1}{2}x+1\\ -2 & \end{array}\Rightarrow p(x)=ax^2+bx+c\rightarrow p'(x)=2ax+b\rightarrow$$

$$ax^2+bx+c\equiv\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2ax+b)-2\rightarrow$$

$$ax^2+bx+c\equiv ax^2+\left(2a+\frac{b}{2}\right)x+(b-2)\rightarrow$$

$$\begin{cases}a=a\ \checkmark\\ b=2a+\frac{b}{2}\rightarrow b=4a\\ c=b-2\rightarrow c=4a-2\end{cases}\rightarrow a+b+c=a+4a+4a-2=9a-2\geq 9(1)-2=7$$

$$a\in\mathbb{N}\rightarrow a\geq 1$$

$$\rightarrow\min(a+b+c)=7$$

---

۱۰۹ - ۱

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}\ ;\ a_1=1\ ,\ a_{100}=\frac{k}{m}\rightarrow a_{98}=?$$

$$a_{100}=\frac{k}{m}\rightarrow 1+\frac{1}{a_{99}}=\frac{k}{m}\rightarrow\frac{1}{a_{99}}=\frac{k}{m}-1=\frac{k-m}{m}\rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}\rightarrow$$

$$1+\frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}\rightarrow\frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}-1=\frac{2m-k}{k-m}\rightarrow a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

۱۱۰- ①

$$a_n = \begin{cases} 2^k & ; n = 3k \\ -2k+4 & ; n = 3k+1 \\ a + \left[\dfrac{n}{k+2}\right] & ; n = 3k+2 \end{cases} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 1 + 4 + (1+a) + 2 + 2 + (1+a) + 4 + 0 + (2+a) + 8$$

$$\xrightarrow[a_0 + a_1 + \dots + a_9 = 19]{\text{طبق فرض:}} 25 + 3a = 19 \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\rightarrow a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29} = (a+1) + (a+1) + (a+2) + (a+2) + \dots + (a+2) \overset{a=-2}{=\!=}$$

$$-1 - 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = \boxed{-2}$$

۱۱۱- ④

$$f(x) = 2^{\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1}} - 2^{\sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x}}$$

$$t = \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \xrightarrow[-1 \le 9\cos^2 x - 1 \le 8]{0 \le \cos^2 x \le 1 \rightarrow} -1 \le t \le 2$$

$$f(t) = 2^t - 2^{-t} = 2^t - \frac{1}{2^t} \xrightarrow[-1 \le t \le 2]{f(t)\ \text{اکیداً صعودی است و}}$$

اکیداً صعودی.

اکیداً نزولی

اکیداً صعودی.

$$\begin{cases} t = -1 \rightarrow y = 2^{-1} - 2 = -\frac{3}{2} = a \\ t = 2 \rightarrow y = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = b \end{cases} \rightarrow \boxed{b - a = \frac{21}{4}}$$

۱۱۲- ①

$$f(x) = \log_6 \left(\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} \right) \rightarrow 6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0 \xrightarrow{\sqrt{|x|} = t}$$

$$6 + t - t^2 > 0 \rightarrow t^2 - t - 6 < 0 \rightarrow -2 < t < 3 \rightarrow -2 < \sqrt{|x|} < 3 \rightarrow$$

$$4 < |x| < 9 \rightarrow \boxed{-9 < x < 9}$$

۰۹۱۱-۱۵۱۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

۳ - ۱۱۳

$f(x)=\sqrt{4-x}\xrightarrow{k+f(x-(k+2))} g(x)=k+\sqrt{4-x+k-2}=k+\sqrt{2+k-x}$

$\xrightarrow{(1,1)\in g} k+\sqrt{2+k-1}=1 \to \sqrt{k+1}=1-k \to k+1=k^2+1-2k \to$

$k^2-3k=0 \to \begin{cases} k=0 & \checkmark \\ k=3 & \times \end{cases}$ در معادله صدق نمی‌کند

$\to g(x)=\sqrt{2-x} \to$

$h(x)=-1+\sqrt{2-x} \xrightarrow{y=0} -1+\sqrt{2-x}=0 \to \sqrt{2-x}=1 \to 2-x=1 \to \boxed{x=1}$

---

۳ - ۱۱۴

$f(x)=\begin{cases} -1 & ; x<-1 \\ x & ; -1\le x\le 1 \\ 1 & ; x>1 \end{cases}$, $g(x)=1-x^2 \to$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} -1 & ; 1-x^2<-1 \to x^2>2 \to |x|>\sqrt{2} \\ 1-x^2 & ; -1\le 1-x^2\le 1 \to 0\le x^2\le 2 \to |x|\le\sqrt{2} \end{cases}$

$\to (f\circ g)'(x)=\begin{cases} 0 & ; |x|>\sqrt{2} \\ -2x & ; |x|<\sqrt{2} \end{cases} \to$ $f\circ g$ برای $x=\pm\sqrt{2}$ مشتق‌ناپذیر است.

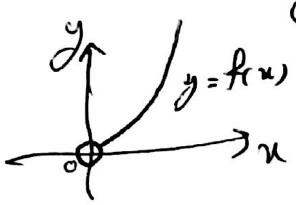
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} 0 & ; |x|>1 \\ 1-x^2 & ; |x|\le 1 \end{cases}$

$\to (g\circ f)'(x)=\begin{cases} 0 & ; |x|>1 \\ -2x & ; |x|<1 \end{cases} \to$ $g\circ f$ برای $x=\pm 1$ مشتق‌ناپذیر است.

۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

۱۱۵- ②

$$f(x)=9^{\log_3^x}=x^{\log_3^9}=x^2 \quad ; \quad x>0$$



۱۱۶- ④

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{tg^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{\left(1-\cos\sqrt{2x}\right)^n}=a \xrightarrow{\text{به کمک هم‌ارزی داریم:}}$$

$$\boxed{a=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2}{\left(1-\left(1-\frac{2x}{2}\right)\right)^n}\simeq\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}-1\right)^2}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{4x^n}} \rightarrow$$

$$\boxed{n=4 \quad , \quad a=\frac{1}{4}}$$

۱۱۷- ①

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{10x-5+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{14x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{10x-5+11}{14x+8}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{-5-5+11}{8(2x+1)}=\frac{1}{0^-}=\boxed{-\infty}$$

$$x<-\frac{1}{2}\rightarrow x^2>\frac{1}{4}\rightarrow\frac{1}{x^2}<4\rightarrow\begin{cases}\frac{3}{x^2}<12\\ -\frac{2}{x^2}>-8\end{cases}$$

۱۱۸- ④

$$f(x)=\frac{ax^3-bx^2+2}{ax^3-bx+2}$$

$$\text{if}: a=0 , b=2\rightarrow f(x)=\frac{-2x^2+2}{-2x+2}$$ ✗ تنها در $x=1$ ناپیوسته است

$$\text{if}: a=8 , b=10\rightarrow f(x)=\frac{8x^3-10x^2+2}{8x^3-10x+2}\ \underline{\underline{\text{تجزیه و ساده کردن}}}\ \frac{8x^2-2x-2}{8x^2+8x-2}$$ ✗ مخرج ۲ ریشه دارد لذا تابع در ۲ نقطه ناپیوسته است.

$$\text{if}: a=-2 , b=0\rightarrow f(x)=\frac{-2x^3+2}{-2x^3+2}=1$$ ✗ تابع ثابت با نقطه توخالی $x=1$.

$$\text{if}: a=-8 , b=-6\rightarrow f(x)=\frac{-8x^3+6x^2+2}{-8x^3+6x+2}\ \underline{\underline{\text{تجزیه و ساده کردن}}}\ \frac{-8x^2-2x-2}{-8x^2-8x-2}$$ ✓ مخرج ریشه مضاعف دارد.

۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

۱۱۹- (۲)

$$\boxed{-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[50]{(a^2x^2-1)(a^4x^4-1)\cdots(a^{100}x^{100}-1)}}{a^{49}x^k-1} \simeq$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a^{\frac{2+4+6+\cdots+100}{50}}\cdot x^{\frac{2+4+6+\cdots+100}{50}}}{a^{49}x^k} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|a|^{51}\cdot|x|^{51}}{a^{49}\cdot x^k} \overset{a>0}{=\!=}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{-a^2\cdot x^{51}}{x^k}} \rightarrow \boxed{k=51} \text{ و } \boxed{a=1}$$

در حالت $a<0$ خواهیم داشت: $a^2=-1$ که غیرقابل قبول است.

۱۲۰- (۲)

$$\begin{cases} f(x) = \cos^3 2x + ax^2 + b \\ 0 = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(0)=0 \rightarrow \boxed{b=-1} \\ \boxed{2} = \lim_{x\to0^+} \frac{f'(x)}{x} = f''_+(0) \rightarrow \left(-6\cos^2 2x\cdot\sin 2x + 2ax\right)'_{x=0} = \\ 0 - 12\cos^3 2x + 2a \Big|_{x=0} = \boxed{-12+2a} \rightarrow 2a = 14 \rightarrow \boxed{a=7} \end{cases}$$

۱۲۱- (۳)

پیوسته

$$f(x) = 1+|\sin 2x| = \begin{cases} 1+\sin 2x & ; \text{ در حوالی } x>0 \\ 1-\sin 2x & ; \text{ در حوالی } x<0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2\cos 2x & ; x>0 \\ -2\sin 2x & ; x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = 2 \\ f'_-(0) = -2 \end{cases} \xrightarrow{f(0)=1 \rightarrow M\left|{}^{0}_{1}\right.}$$

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = -2x+1 \end{cases} \xrightarrow{y=-x} \begin{cases} 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3} \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A\left|{}^{-\frac{1}{3}}_{\frac{1}{3}}\right. \\ B\left|{}^{1}_{-1}\right. \end{cases} \rightarrow AB = \sqrt{2\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

Generated by CamScanner

0911-158-3041 محمود جعفری

۱۲۲- (۲)

$$f(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}} \to f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}>0$$

$x>0$

تابع مماس قائم $x=1$ دارد.

۱۲۳- (۴)

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8} \to f'(x)=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

x	$-\infty$		0		2		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

تابع در $x=2$ مماس قائم دارد.

کوتاهترین بازه عبارت است از:

$$\sqrt[3]{32}-2=2(\sqrt[3]{4}-1)$$

۱۲۴- (۳)

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1 \to$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=0 \to x=-1,2 \to$$

$$A\begin{vmatrix}-1\\8\end{vmatrix},\ B\begin{vmatrix}2\\-19\end{vmatrix} \to \boxed{m_{AB}=-9}$$

$$\therefore\ 6x^2-6x-12=-9 \to 6x^2-6x-3=0 \to 2x^2-2x-1=0 \to \Delta>0$$