

۱۲۶- فرض کنید  $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$  و  $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$  مقدار  $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)$  کدام است؟

(۱)  $4(2+\sqrt{3})$  (۲)  $4(2-\sqrt{3})$  (۳)  $16(2+\sqrt{3})$  (۴)  $16(2-\sqrt{3})$

راه حل:

$$((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 = (a^2 - b^2)^4 = \left( \sqrt{\sqrt{6}-2} - \sqrt{\sqrt{6}+2} \right)^2$$

$$= \left[ \sqrt{6}-2 + \sqrt{6}+2 - 2\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} \right]^2 = \left[ 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \right]^2$$

$$= 4 \left[ 6 + 2 - 2\sqrt{12} \right] = 4 \left[ 8 - 4\sqrt{3} \right] = 16 \left[ 2 - \sqrt{3} \right]$$

گزینه ۴ جواب صحیح است.

۱۲۷- فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  جواب های معادله  $2\sqrt{x} = (\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1)$  باشند. مقدار  $x_1 + x_2$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

$$\left( \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \right) \left( \sqrt[3]{x^2} - 1 \right) = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{\left( \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1 \right) \left( \sqrt[3]{x^2} - 1 \right)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt{x} \Rightarrow \underbrace{\left( \sqrt[3]{x^2} - 1 \right) \left( \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1 \right)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} = 2x$$

$$x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

گزینه ۴ صحیح است.

۱۲۸- فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x = 0$  باشند.  $\frac{1}{(x_1+1)^3}$  و  $\frac{1}{(x_2+1)^3}$  ریشه‌های کدام معادله هستند؟

$$125x^2 = 16x + 1 \quad (2)$$

$$125x^2 + 16x = 1 \quad (1)$$

$$125x^2 + 12x = 1 \quad (4)$$

$$125x^2 = 12x + 1 \quad (3)$$

$$x = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 = S \\ x_1 x_2 = -5 = P \end{cases}$$

در همه گزینه‌ها ضرب ریشه‌های معادله جدید  $-\frac{1}{125}$  می‌باشد بنابراین بدنبال جمع ریشه‌ها می‌رویم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} = \frac{(x_1+1)^3 + (x_2+1)^3}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^3} \\ &= \frac{\left[ (x_1 + x_2 + 2) \left( (x_1+1)^2 - (x_1+1)(x_2+1) + (x_2+1)^2 \right) \right]}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^3} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + 2) (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2 - x_1 x_2 - x_1 - x_2 - 1)}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^3} \\ &= \frac{[(S+2)(S^2 - 2P + 2S + 1 - S - P)]}{S + P + 1} = \frac{[(S+2)(S^2 + S - 3P + 1)]}{S + P + 1} \\ &= \frac{16}{-125} \end{aligned}$$

فقط گزینه ۱ مجموع ریشه‌ها  $-\frac{16}{125}$  می‌باشد.

۱۲۹- اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$  کدام است؟

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{16} \quad (4) \quad \frac{6+\sqrt{3}}{16} \quad (3) \quad \frac{6-\sqrt{3}}{16} \quad (2) \quad \frac{6-3\sqrt{3}}{16} \quad (1)$$

$$f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$$

$$f(x) = 16 \times \frac{(1 + \cos 6x)}{2} \times \frac{(1 + \cos 12x)}{2} \times \frac{(1 + \cos 24x)}{2} \times \frac{(1 + \cos 48x)}{2}$$

$$f(x) = (1 + \cos 6x)(1 + \cos 12x)(1 + \cos 24x)(1 + \cos 48x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

گزینه ۴ صحیح می باشد.

۱۳۰- اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی و  $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$  کدام است؟

$$-\frac{1056}{175} \quad (4) \quad \frac{96}{175} \quad (3) \quad \frac{1056}{175} \quad (2) \quad -\frac{96}{175} \quad (1)$$

$$m = \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} (\sin(2\alpha) - \cos(\alpha))$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} (\sin(2\alpha) - \cos(\alpha)) = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} \left( \frac{24}{25} + \frac{4}{5} \right) = \frac{1056}{175}$$

۱۳۱- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \Rightarrow -\sin^2 x \cos 3x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x \cos 3x = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x \cos 3x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2(x) (1 + \cos 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 + \cos 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

$$1 + \cos(3x) = 0 \Rightarrow \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = (2k - 1)\pi \Rightarrow x = (2k - 1)\frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{3\pi}{3} = \pi$$

$$\Rightarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{3}$$

$$x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \pi, x = \frac{5\pi}{3}, x = 2\pi$$

۱۳۲- دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$   
 (۲)  $(-1, 2)$   
 (۳)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$   
 (۴)  $(-2, 1)$

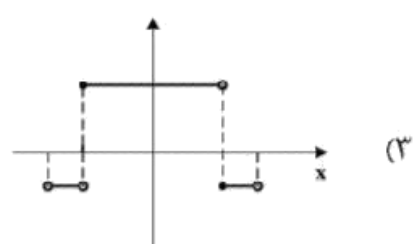
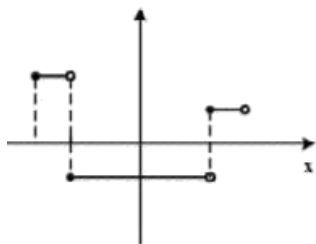
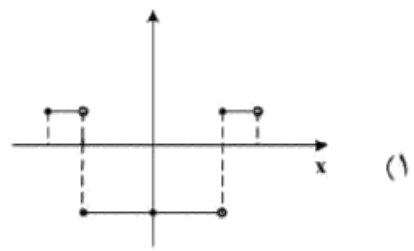
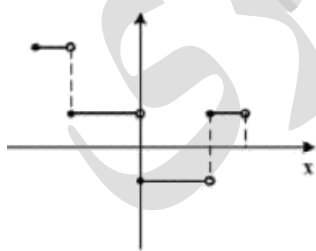
$$f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	$+$	$\circ$	$\circ$	$+$

(۱)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$   
 $\Rightarrow$  (۲)  $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

گزینه یک صحیح می باشد.

۱۳۳- نمودار تابع  $y = 2||3x|| - 1$  به ازای  $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$ ، کدام است؟



۱۳۳- مقادیر همسایگی صفر را بدست می آوریم.

$$f(x) = 2 \left| \left[ 3x \right] \right| - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \left| \left[ 3 \times 0^+ \right] \right| - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \left| \left[ 3 \times 0^- \right] \right| - 1 = 1$$

با توجه به شکل ها گزینه ۲ صحیح می باشد.

۱۳۴- فاصله نقطه تلاقی منحنی های  $2y = x^2$  و  $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$  با مبدأ مختصات، کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt{3}$       (۲)  $\sqrt{6}$       (۳)  $2\sqrt{3}$       (۴)  $\sqrt{15}$

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y+3 - 2\sqrt{y^2-9} + y-3 \Rightarrow x^2 = 2y - 2\sqrt{y^2-9} \end{cases}$$

$$x^2 = 2y - \sqrt{y^2-9} \xrightarrow{x^2=2y} 2y = 2y - \sqrt{y^2-9} \Rightarrow \sqrt{y^2-9} = 0 \Rightarrow y = \pm 3$$

با توجه به دامنه  $y = 3 \leftarrow y$  قابل قبول است.

$$\begin{cases} y = 3 \\ x^2 = 2y \Rightarrow x = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه مورد نظر} = (\sqrt{6}, 3) \Rightarrow \text{فاصله} = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

گزینه ۴ صحیح می باشد.

۱۳۵- اگر  $52 = \frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟  
 (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

$$\frac{3^x + 3^{x+1} + \dots + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + \dots + 2^{x+3}} = 52 \Rightarrow \frac{3^x (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^5)}{2^{x-2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^5)} = \frac{3^x (364)}{2^x \times 2^{-2} (63)} = 52$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \times \frac{4 \times 364}{63} = 52 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 2$$

گزینه ۲ صحیح می باشد.

۱۳۶- نمودار تابع  $y = 2^{|\sin x|}$  را ابتدا به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد محور  $x$  ها در جهت مثبت و سپس  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد محور  $y$  ها در جهت منفی انتقال می دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور  $x$  ها در فاصله  $[0, \pi]$ ، کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

$$y = 2^{|\sin x|} \xrightarrow[\frac{\pi}{2} \text{ به سمت راست}]{\frac{\pi}{2} \text{ به سمت پایین}} y = 2^{\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|} \xrightarrow{\frac{\pi}{2}} y = 2^{\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|} - \frac{3}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \Rightarrow y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} \cdot \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2^{|\cos x|} \leq 2$$

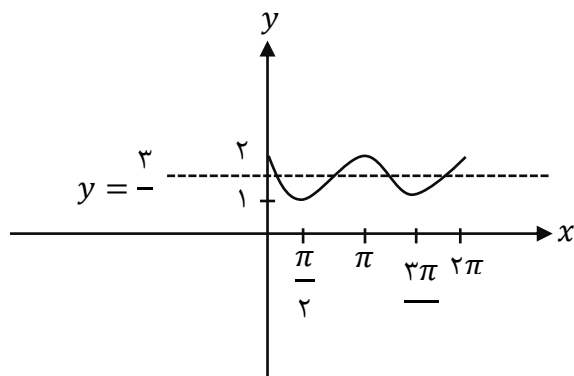
نمودار  $|\cos x|$  و  $2^{|\cos x|}$  از نظر صعودی و نزولی مشابه اند چون با افزایش  $|\cos x|$  مقدار  $2^{|\cos x|}$  افزایش و بالعکس.

$$f(x) = 2^{|\cos x|}$$

$$f(-1) = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f(\pi) = 2$$



$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$f(2\pi) = 2$$

با توجه به شکل در بازه‌ی  $[0, \pi]$  در ۲ نقطه نمودار را قطع می‌کند.

۱۳۷- اگر تساوی  $\log_x y - 2 \log_y x = 1$  به ازای  $x, y > 1$  برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

(۱)  $y = x^2$       (۲)  $y = x^3$       (۳)  $y = \sqrt{x}$       (۴)  $xy = 2$

$$\log_x y - 2 \log_y x = 1 \Rightarrow \log_x y - \frac{2}{\log_x y} = 1$$

$$\log_x y = \alpha \Rightarrow \alpha - \frac{2}{\alpha} = 1 \rightarrow \alpha^2 - 2 = \alpha$$

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \rightarrow (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_x y = -1 \end{cases} \text{ غ ق ق غ}$$

$$\Rightarrow \log_x y = 2 \Rightarrow y = x^2$$

۱۳۸- مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$  ، کدام است؟

(۱) صفر      (۲) ۱      (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۴)  $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\sqrt{\frac{x}{x+1} + 1}}_{\sqrt{2}} - \underbrace{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}}}_{\cdot} \right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۳۹- مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1]$  ، کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

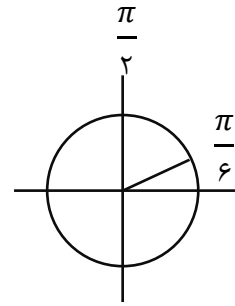
(۱) -۱      (۲) صفر      (۳) ۱      (۴) وجود ندارد.



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1]$$

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \quad \cdot < \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow \cdot < 2 \sin x < 1$$

$$-1 < 2 \sin x - 1 < 0 \Rightarrow [2 \sin x - 1] = -1$$



گزینه ۱ صحیح می باشد.

۱۴۰- قرینه نمودار تابع  $y = 2 + \sqrt{x-1}$  را نسبت به خط  $y = x$  رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور  $x$  ها و ۳ واحد در جهت منفی محور  $y$  ها انتقال می دهیم و آن را  $y = g(x)$  می نامیم. مقدار  $g(4)$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۴

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می کنیم}]{\text{قرینه نسبت به } y=x} x = 2 + \sqrt{y-1} \Rightarrow y = (x-2)^2 + 1$$

$$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{2} y = (x-4)^2 + 1 \xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{3} y = (x-4)^2 - 2$$

$$g(x) = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = -2$$

گزینه ۳ صحیح است.

۱۴۱- فرض کنید  $f(x) = 1 - x^2$  و  $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ . تعداد نقاط ناپوستگی تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$f(x) = 1 - x^2 \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه  $gof$  در ۲ نقطه  $x = 1$  و  $x = -1$  ناپیوسته است. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۴۲- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} |x^2-4|$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

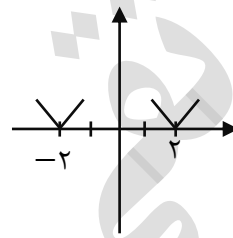
۳ (۲)

۲ (۱)

ریشه‌های داخل قدرمطلق اکسترمم نسبی هستند.  $x = 0$  ریشه زوج تابع است بنابراین اکسترمم است.

بنابراین ۳ اکسترمم داریم. گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$y = \frac{x^2}{x^2-1} |x^2-4|$$



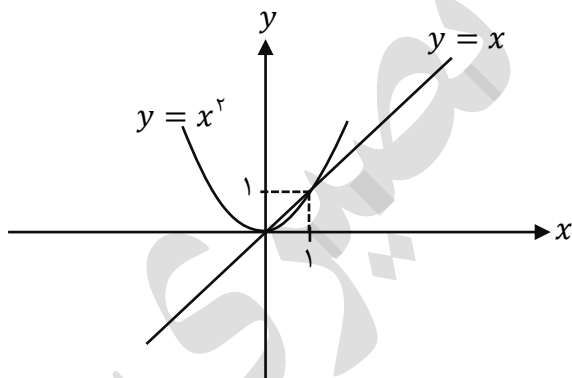
۱۴۳- قرینه نقطه  $A$  واقع بر سهمی  $f(x) = x^2$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را  $A'$  می‌نامیم. اگر طول نقطه  $A$  بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع  $f$  با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط  $AA'$ ، کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$



$$0 < y < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$A(x, x^2) \Rightarrow |AA'| = \sqrt{(x^2 - x)^2 + (x - x^2)^2}$$

$$A'(x^2, x)$$

$$|AA'| = \sqrt{2(x^2 - x)^2} = \sqrt{2} |x^2 - x|$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow h = |AA'| = \sqrt{2}(x - x^2)$$

$$h' = \sqrt{2}(1 - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow |AA'| = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۴۴- فرض کنید  $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ . مقدار مشتق تابع fog در  $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$  چند برابر

است؟  $(-128\sqrt{2})$

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۴ (۱)

$$f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x) \times f'(g(x)) \xrightarrow{x = \frac{3}{\sqrt{8}}} y' = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) \times f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))$$

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = 2 \Rightarrow y' = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) \times f'(2)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x$$

$$= -\frac{2}{3}x(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \times 2^4 = -\frac{2^5 \times \sqrt{2}}{2^2} = -2^3 \sqrt{2}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -8\sqrt{2} \text{ و } f'(2) = ?$$

$$f(x) = 16x^2 + 1 \quad \text{حوالی } 2 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\Rightarrow y' = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \times f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = 4 \times (-128\sqrt{2})$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۱۴۵- فرض کنید  $g(x) = ax^2 + bx + c$  و  $(a \neq 0)$  حداکثر مقدار  $k$  به شرط  $b + c = a$ ، کدام است؟  
 اگر  $f(x)$  یک تابع مشتق پذیر باشد.

$$g(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases} \quad b + c = a$$

$$\text{شرط پیوستگی: } ak^2 + bk + c = 2ak + b \quad (1)$$

$$\text{شرط مشتق پذیری: } 2ak + b = 2a \Rightarrow \boxed{b = 2a(1 - k)} \quad (2)$$

$$\boxed{b + c = a} \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow ak^2 + bk + c = 2ak + b \xrightarrow{\text{از رابطه ۲}} ak^2 + 2a(1 - k) + c$$

$$= 2ak + 2a(1 - k)$$

$$ak^2 + 2ak - 2ak^2 + c = \cancel{2ak} + 2a - \cancel{2ak} \Rightarrow ak^2 - 2ak + 2a = c$$

$$\Rightarrow \alpha(k^2 - 2k + 2) = c$$

$$k^2 - 2k + 2 = \frac{c}{a}$$

$$(2) \text{ و } (3) \quad 2\alpha k + b = 2\alpha \Rightarrow 2\alpha k + \alpha - c = 2\alpha \Rightarrow \alpha(2k - 1) = c$$

$$b = \alpha - c$$

$$\rightarrow \frac{c}{\alpha} = 2k - 1$$

$$\rightarrow k^2 - 2k + 2 = 2k - 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \rightarrow (k - 1)(k - 3) = 0 \Rightarrow k = 1, 3 \Rightarrow k_{\max} = 3$$

گزینه ۳ صحیح می باشد.

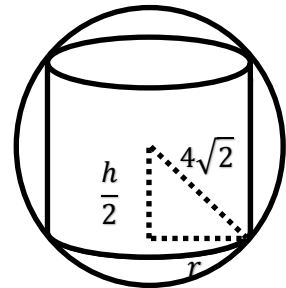
۱۴۶- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع  $4\sqrt{2}$  محاط می شود، کدام است؟

$$\frac{512\pi}{3} \quad (4) \quad \frac{256\pi}{3} \quad (3) \quad 64\pi \quad (2) \quad 32\pi \quad (1)$$

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 32 \rightarrow r^2 = 32 - \frac{h^2}{4} \quad r = \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h = 2\pi h \left(\sqrt{32 - \frac{h^2}{4}}\right) = 2\pi \sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}}$$

$$\left(32h^2 - \frac{h^4}{4}\right)' = 64h - h^3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} h = 8 \\ r = 4 \end{matrix} \Rightarrow S = 2\pi \times 4 \times 8 = 64\pi$$



گزینه ۲ صحیح است.

۱۴۷- احتمال این که یک دانش آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد  $0/9$  و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد  $0/85$  است. اگر دانش آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

$$\frac{45}{47} \quad (4) \quad \frac{17}{18} \quad (3) \quad \frac{85}{94} \quad (2) \quad \frac{8}{9} \quad (1)$$

$$P(A) = 0.9 \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.85}{0.9} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18}$$

$$P(A \cap B) = 0.85$$

۱۴۸- فرض کنید  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . چند معادله درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx - c = 0$  می توان تشکیل داد، به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

$$18 \quad (4) \quad 16 \quad (3) \quad 15 \quad (2) \quad 14 \quad (1)$$

$$ax^2 + bx - c = 0 \quad a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} + 2 \Rightarrow c - b = 2a \rightarrow \boxed{2a + b = c}$$

$$P = -\frac{c}{a}$$

$$2a + b = c \quad 1 \leq c \leq 9$$

$$1 \leq 2a + b \leq 9$$

$$a = 1 \quad \min\{2a + b\} = 3$$

$$b = 1 \quad \max\{2a + b\} = \max\{c\} = 9$$

$$3 \leq 2a + b \leq 9 \rightarrow \boxed{3 \leq c \leq 9}$$

$$\rightarrow 1 \leq b \leq 9 \rightarrow 2 \leq 2a \leq 8 \Rightarrow 1 \leq a \leq 4$$

چون  $2a + b$  بین ۳ تا ۹ است بنابراین اگر  $b$  کمترین مقدار یعنی ۱ باشد آن گاه  $a$  نیز کمترین مقدار یعنی

۱ است و از طرفی بیشترین مقدار  $a$  زمانی که  $b = 1$  است برابر است با  $a = 4 \leftarrow 1 \leq a \leq 4$

$$1 \leq a \leq 4 \rightarrow 2 \leq 2a \leq 8 \rightarrow 1 \leq b \leq 7$$

$$\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = 2 \rightarrow 1 \leq b \leq 7 \rightarrow \text{حالت ۷}$$

$$\alpha = 2 \rightarrow 2\alpha = 4 \rightarrow 1 \leq b \leq 5 \rightarrow \text{حالت ۵}$$

$$\alpha = 3 \rightarrow 2\alpha = 6 \rightarrow 1 \leq b \leq 3 \rightarrow \text{حالت ۳}$$

$$\alpha = 4 \rightarrow 2\alpha = 8 \rightarrow b = 1 \rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ \text{مجموع حالات} = 16$$

گزینه ۳ صحیح می باشد.

۱۴۹- در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

۱۱۵۲ (۴)

۲۷۶ (۳)

۲۸۸ (۲)

۱۴۴ (۱)

به دلیل اینکه صندلی‌ها دور یک میز گرد چیده شده است بنابراین فرقی نمی‌کند نفر اول کجا بنشیند بنابراین نفر اول که نشست نفرات بعدی نسبت به آن جایگاه پیدا می‌کنند.

$$\begin{array}{ccc} \times 1 & \textcircled{1} & \times 4 \\ 1 \textcircled{1} & & \textcircled{3} \quad 3 \\ \times 2 & \textcircled{2} & \times 3 \end{array} \Rightarrow 4! \times 3! = 144$$

۱۵۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \quad \frac{3}{7} \quad (۳) \quad \frac{4}{7} \quad (۲) \quad \frac{13}{21} \quad (۱)$$

تک رقمی	دو رقمی	۳ رقمی	۴ رقمی	۵ رقمی
حالت ۵	حالت ۲۰	$۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$	$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۱۲۰$	$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

$$\text{حالت } ۵ \text{ تا } ۵ \text{ رقمی} = ۵ + ۲۰ + ۶۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ = ۳۲۵$$

برای بخش پذیری بر ۴ یکان باید زوج باشد یعنی ۲ یا ۴ و از طرفی اگر یکان ۲ باشد دهگان باید فرد باشد تا بر ۴ بخش پذیر باشد و اگر یکان ۴ باشد دهگان باید زوج باشد.

$$\frac{۲ \text{ فرد باید باشد}}{\text{یکان دهگان}}$$

$$\frac{۴ \text{ زوج باید باشد}}{\text{یکان دهگان}}$$

$$\text{یک حالت فقط } ۴ = \text{تک رقمی}$$

$$\text{دو رقمی} = \begin{cases} \frac{۲ \text{ حالت } ۳}{\text{حالت } ۳} \rightarrow \text{حالت } ۳ \\ \frac{۲ \text{ حالت } ۱}{\text{حالت } ۱} \rightarrow \text{حالت } ۴ \end{cases}$$

$$= \text{سه رقمی} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\quad\quad\quad} \rightarrow \text{حالت ۹} \\ \begin{array}{ccc} \text{حالت ۳} & \text{حالت ۳} & ۲ \\ \hline & \text{حالت ۱} & \text{حالت ۱} \end{array} \rightarrow \text{حالت ۱۲} \\ \overline{\quad\quad\quad} \rightarrow \text{حالت ۳} \\ \begin{array}{ccc} ۳ & ۲ & ۴ \end{array} \end{array} \right.$$

$$= \text{چهار رقمی} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\quad\quad\quad\quad} \rightarrow \text{حالت ۱۸} \\ \begin{array}{cccc} & & \text{حالت ۱} & \text{حالت ۱} \\ \hline & \text{حالت ۲} & \text{حالت ۳} & \text{حالت ۳} & ۲ \end{array} \rightarrow \text{حالت ۲۴} \\ \overline{\quad\quad\quad\quad} \rightarrow \text{حالت ۶} \\ \begin{array}{cccc} & & \text{حالت ۱} & \text{حالت ۱} \\ \hline ۲ & ۳ & ۲ & ۴ \end{array} \end{array} \right.$$

$$= \text{پنج رقمی} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \rightarrow \text{حالت ۱۸} \\ \begin{array}{ccccc} & & & \text{حالت ۱} & \text{حالت ۱} \\ \hline & \text{حالت ۱} & \text{حالت ۲} & \text{حالت ۳} & \text{حالت ۳} & ۲ \end{array} \rightarrow \text{حالت ۲۴} \\ \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \rightarrow \text{حالت ۶} \\ \begin{array}{ccccc} & & & \text{حالت ۱} & \text{حالت ۱} \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۲ & ۴ \end{array} \end{array} \right.$$

$$\text{حالت ۶۵} = ۲۴ + ۲۴ + ۱۲ + ۴ + ۱ = \text{مجموع حالات}$$

$$P = \frac{۶۵}{۳۶۵} = \frac{۱}{۵} \quad \text{گزینه صحیح در بین گزینه ها موجود نمی باشد.}$$

۱۵۱- شیب نیم خطی با نقطه شروع  $A(۲, ۴)$  برابر ۳ است. مستطیل  $ABCD$  را چنان می سازیم، که نقطه  $B$  روی نیم خط فوق و رأس سوم آن  $C(-۳, -۱)$  باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۳\sqrt{۱۰} & (۴) & ۶\sqrt{۱۰} & (۳) \\ ۱۸ & (۲) & ۲۴ & (۱) \end{array}$$

$$A(۲, ۴)$$

$$B(\alpha, \beta) \quad \text{خط } AB \rightarrow y - ۴ = ۳(x - ۲) \rightarrow \boxed{y = ۳x - ۲}$$

$$C(-۳, -۱)$$

خط  $BC$  عمود بر خط  $AB$  می باشد بنابراین شیب این خط  $-\frac{۱}{۳}$  می باشد.

$$BC \text{ معادله ی خط } y + ۱ = -\frac{۱}{۳}(x + ۳) \rightarrow -۳y - ۳ = x + ۳ \Rightarrow \boxed{۳y + x + ۶ = ۰}$$

از دو معادله ی بالا نقطه تلاقی که همان  $B$  است را بدست می آوریم.



$$\begin{cases} y - 3x + 2 = 0 \\ 3y + x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = -2 \end{matrix} \rightarrow \boxed{B(0, -2)}$$

$$AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{10} \Rightarrow \text{محیط} = 6\sqrt{10}$$

۱۵۲- نقطه  $H(2, 1)$  را روی خط  $3x - y = 5$  در نظر بگیرید. مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  را با ارتفاع  $AH$  می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث  $\sqrt{270}$  واحد باشد. مختصات یک رأس  $A$ ، کدام است؟

(۱)  $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$  (۲)  $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$  (۳)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  (۴)  $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

پای عمود  $H(2, 1)$

$$\text{ضلع متساوی الاضلاع} = \sqrt{30} \Rightarrow \text{محیط مثلث متساوی الاضلاع} = \sqrt{20} = 3\sqrt{30}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$3x - y - 5 = 0 \Rightarrow \frac{|3\alpha - \beta - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{15}{\sqrt{10}} \Rightarrow |3\alpha - \beta - 5| = 15$$

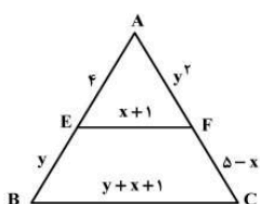
فقط گزینه ۲ در رابطه بالا صدق می‌کند.

۱۵۳- دایره‌های  $x^2 + y^2 + 2x = 3$  و  $x^2 + y^2 + 2y = 3$  متقاطع‌اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

(۱)  $x = y$  (۲)  $x = 1 + y$  (۳)  $x = -y$  (۴)  $x = 1 - y$

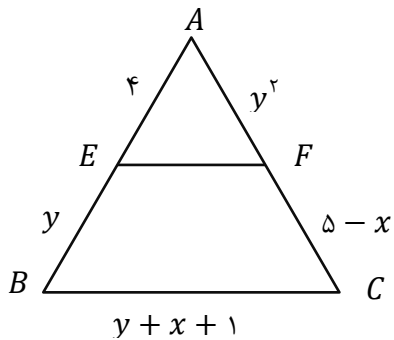
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{aligned} \Rightarrow 3 - 2y = 3 - 2x \rightarrow \boxed{y = x}$$

وتر مشترک



۱۵۴- در شکل زیر  $EF$  موازی  $BC$  است. مقدار  $y - 2x$ ، کدام است؟

(۱) -۴  
(۲) -۲  
(۳) ۲  
(۴) ۴



$$y - 2x = ?$$

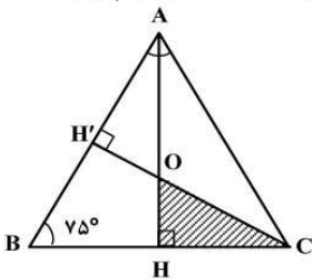
$$\begin{cases} \frac{4}{y} = \frac{y^2}{\delta - x} \\ \frac{4}{y+4} = \frac{y^2}{\delta - x + y^2} = \frac{x+1}{y+x+1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \cancel{4x} + 4y + 4 = xy + \cancel{4x} + y + 4 \rightarrow xy - 3y = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$y - 2x = 2 - 6 = -4$$

گزینه ۱ صحیح می باشد.

۱۵۵- در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC، کدام است؟



$$\begin{matrix} \frac{2}{3} & (1) \\ \frac{4}{3} & (2) \\ \frac{9}{7+4\sqrt{3}} & (4) \\ \frac{18}{7+4\sqrt{3}} & (3) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} AB = 6 \\ \hat{B} = 75^\circ \\ \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = 75^\circ \rightarrow \begin{matrix} \hat{C}_1 = 15^\circ \\ \hat{B}_1 = 15^\circ \end{matrix} \Rightarrow \hat{O} = 150^\circ$$

$$\begin{aligned} OBC \text{ در قضیه کسینوس ها در } \rightarrow b^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 150^\circ = 2a^2 + 2a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= a^2(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\alpha^r = \frac{b^r}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Delta S_{OHC} = \frac{1}{2} \Delta S_{OBC} \quad S_{OBC} = \frac{1}{2} \alpha^r \sin \hat{O} = \frac{1}{2} \alpha^r \sin 150^\circ = \frac{\alpha^r}{4}$$

$$ABC \text{ در قضیه کسینوس ها در } \rightarrow b^r = 6^r + 6^r - 2 \times 6 \times 6 \times \cos 30^\circ = 2 \times 6^r - 6^r \times \sqrt{3} \\ = 36(2 - \sqrt{3})$$

$$\alpha^r = \frac{36(2 - \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \alpha^r = \frac{36}{(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{36}{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$S_{OHC} = \frac{\alpha^r}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\alpha^r}{8} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

گزینه صحیح در گزینه‌ها نیست.