بنام خدا / پاسخ تشریحی ریاضی رشته تجربی - کنکور ۱۴۰۰

سید محمد نورالدینی
~~۰۹۱۷۳۹۶۷۴۳۲~~
نورالدینی

-(۱۲۶)

$$\left((a^2+b^2)^2-(2ab)^2\right)^2=\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{6}+2+\sqrt{6}-2-2\sqrt{6-4}\right)^2=\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)^2$$

$$=4\left(8-4\sqrt{3}\right)=16\left(2-\sqrt{3}\right)$$

-(۱۲۷)

$$\xrightarrow{\times\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}\quad \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x^2}-2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)=0 \rightarrow \begin{cases} x=\pm1 \ \times\ (\text{صدق نمی‌کند}) \\ \text{یا} \\ x-\frac{1}{x}-2=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2-2x-1=0 \xrightarrow{\Delta>0} S=-\frac{b}{a}=2$$

روش دوم: $\sqrt[3]{x}=t \Leftarrow \dots$

-(۱۲۸)

$$x^2+x-5=0 \rightarrow x_1+x_2=-1 \rightarrow \begin{cases} -x_1=x_2+1 \\ -x_2=x_1+1 \end{cases}$$

$$S'=\frac{1}{(-x_1)^3}+\frac{1}{(-x_2)^3}=-\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3}=-\frac{(-1)^3-3(-1)(-5)}{(-5)^3}=\frac{-16}{125}$$

$$P'=\frac{1}{(x_1x_2)^3}=\frac{-1}{125} \Rightarrow x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$$

$$\rightarrow 125x^2+16x=1$$

۱۲۹

$$f(x) = 4\,\frac{\sin^2(6x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)}{\sin^2(3x)}$$

صورت و مخرج ضربدر $\sin^2(3x)$

$$= \dots = \frac{1}{16}\,\frac{\sin^2(48x)}{\sin^2(3x)} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{1}{16}\,\frac{\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

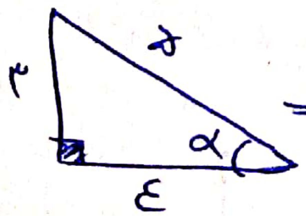
$$= \frac{1}{16}\,\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \frac{1}{16} \times \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{16(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3(2+\sqrt{3})}{16} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۱۳۰

$$= \frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{\cot(2\alpha)} = (2\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha)\tan 2\alpha$$

$$= \cos\alpha(2\sin\alpha - 1)\cdot\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = 2(2\sin\alpha - 1)\,\frac{\sin\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$



$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{-3}{5} \to 2\left(-\frac{6}{5} - 1\right) \times \frac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{9}{16}}$$

$$= \frac{\frac{66}{25}}{\frac{7}{16}} = \frac{1056}{175}$$

سید حمید نورالدینی
۰۹۱۷۲۹۶۷۴۳۲

— ۱۳۱

$1-\sin^2 x-\sin^2 x\cos(3x)=1$

$\rightarrow \sin^2 x(1+\cos 3x)=0 \rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \rightarrow x=0,\pi,2\pi \\ \text{یا} \\ \cos 3x=-1 \rightarrow 3x=(2k+1)\pi \end{cases}$

$\rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$ ۵ جواب

---

۱۳۲ ۱ =

* $x^2-x-2>0 \rightarrow (x-2)(x+1)>0 \rightarrow \boxed{x>2 \text{ یا } x<-1}$

* $x^2-1\geq 0 \rightarrow \boxed{x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1}$ $\xrightarrow{\cap} (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

عددگذاری: $x=0$: صدق نمی‌کند ← رد ۲،۴ $x=1.5$ صدق نمی‌کند ← رد ۳

— ۱۳۳

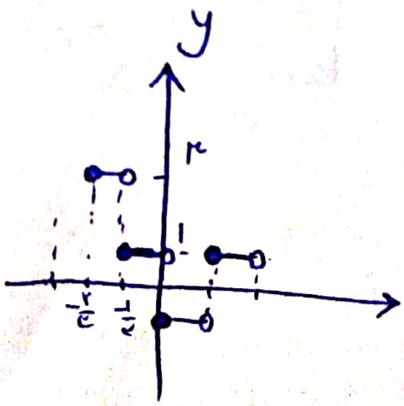
$-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2} \rightarrow -1.5\leq 3x<1.5 \rightarrow [3x]=-2 \text{ or } -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1$

$[3x]=-2 \rightarrow y=2(2)-1=3,\ -\frac{2}{3}\leq x<\frac{-1}{3}$

$[3x]=-1 \rightarrow y=2(1)-1=1,\ -\frac{1}{3}\leq x<0$

$[3x]=0 \rightarrow y=-1,\ 0\leq x<\frac{1}{3}$

$[3x]=1 \rightarrow y=2(1)-1=1,\ \frac{1}{3}\leq x<\frac{2}{3}$



۱۳۴ -

$$x^2 = y+3+y-3-2\sqrt{y^2-9} \Rightarrow 2y = 2y-2\sqrt{y^2-9}$$

$$\to y=\pm 3 \xrightarrow{y>0} \begin{cases} x=\sqrt{2y}=\sqrt{6} \\ y=3 \end{cases} \to \text{فاصله از مبدا} = \sqrt{6+9} = 15$$

---

۱۳۵ -

$$\frac{3^x(1+3+\dots+3^5)}{2^{x-2}(1+2+\dots+2^5)} = 52 \Rightarrow \frac{3^x \times \frac{3^6-1}{3-1}}{2^{x-2}\times\frac{2^6-1}{2-1}} = 52$$

$$\to \left(\frac{3}{2}\right)^x \times \frac{\frac{4}{2}\times(3^3-1)(3^3+1)}{(2^3-1)(2^3+1)} = 52 \to \left(\frac{3}{2}\right)^x \times \frac{26\times 28}{7\times 9} = 52$$

$$\to \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{26\times 28}{7\times 9\times 52} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \to \boxed{x=2}$$

---

۱۳۶ -

$$y = 2^{|\sin(x-\frac{\pi}{4})|} - \frac{3}{2} = 0 \to 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \quad \log_2$$

$$|\cos x| = \log_2^{\frac{3}{2}} = \underbrace{\log_2^3 - 1}_{\text{عددی بین صفر و یک}} = k \to \begin{cases} \cos x = k \\ \cos x = -k \end{cases}$$

$\theta = x$

$x = \pi - \theta$

۲ جواب

---

۱۳۷ -

$$\log_x^y - \frac{2}{\log_y^x} = 1 \to (\log_x^y)^2 - \log_x^y - 2 = 0$$

$$\to (\log_x^y - 2)(\log_x^y + 1) = 0 \to \begin{cases} \log_x^y = -1 \to y = \frac{1}{x} & \times \\ \log_x^y = 2 \to y = x^2 & \checkmark \end{cases}$$

۱۳۸ –

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2+1}}\right)$$

$$= (\sqrt{2}-0) = \sqrt{2}$$

---

۱۳۹ –

$$x<\frac{\pi}{6} \to \sin x<\frac{1}{2} \to 2\sin x<1 \to 2\sin x-1<0^-$$

$$\to [0^-] = -1$$

۱۴۰

$$y=2+\sqrt{x-1}\ ,\ x\geq 1 \to (y-2)^2 = x-1$$

$$\to x = 1+(y-2)^2 \to f^{-1}(x) = 1+(x-2)^2$$

$$\xrightarrow[\text{۳ واحد پایین}]{\text{۲ واحد به راست}} g(x) = 1+(x-4)^2-3 = (x-4)^2-2$$

$$\to g(4) = -2$$

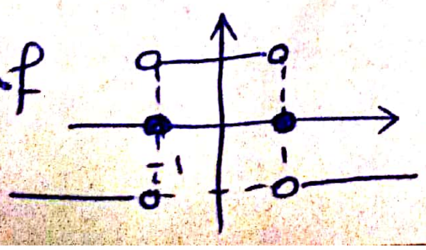
---

۱۴۱ –

$$gof = g(f(x)) = g(\underbrace{1-x^2}_{\text{تعیین علامت}})$$

$$gof = \begin{cases} +1 & 1-x^2>0 \\ 0 & 1-x^2=0 \\ -1 & 1-x^2<0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 0 & x=1,-1 \\ -1 & x>1 \text{ یا } x<-1 \end{cases}$$

gof



→ در ۲ نقطه ناپیوسته است
$(x=1, x=-1)$

۱۴۲ –

$$\left(\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}\right)' = \left(\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}\right)' = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$\rightarrow x\underbrace{(x^4-2x^2+4)}_{\text{فاقد ریشه}} = 0 \rightarrow x=0$$

از طرفی $x=\pm 2$ ریشه‌ی ساده درون قدر مطلق ← ۳ نقطه اکسترمم
(f' در اطراف آن‌ها نیز تغییر علامت می‌دهد)

---

۱۴۳ –

$A(x,x^2)$

$A'(x^2,x)$

$$\rightarrow AA' = \sqrt{(x^2-x)^2+(x-x^2)^2} = |x^2-x|\sqrt{2} \xrightarrow{0<x<1}$$

$$d=(x-x^2)\sqrt{2} \rightarrow d'=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$d_{max} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

---

۱۴۴ –

$$\left(f\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)\right)' = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \cdot f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)$$

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow g'(x) = -\frac{2x}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{32}{\sqrt{8}} = \frac{-16}{\sqrt{2}}$$

$$* \; g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=2 \xrightarrow{\text{در اطراف } x=2} f(x)=(4x)^2+1 \rightarrow f'(x)=32x$$

$$\rightarrow f'(2)=64$$

$$\rightarrow \text{جواب} = -\frac{16}{\sqrt{2}} \times 64 = -8\times 64\sqrt{2} = 4(-128\sqrt{2})$$

۱۴۸

$$g(k)=g'(k)=g''(k) \Rightarrow ak^2+bk+c=2ak+b=2a$$

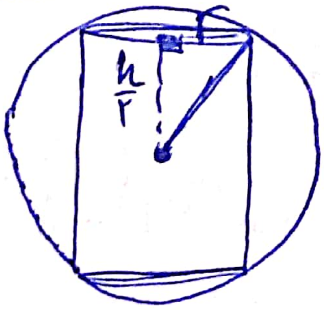
$$\rightarrow \boxed{b=2a-2ak}\ ,\ b+c=a \rightarrow c=a-(2a-2ak)$$
$$=2ak-a$$

$$\Rightarrow ak^2+bk+c=2a \rightarrow ak^2+(2a-2ak)k+2ak-a=2a$$

$$\rightarrow ak^2-4ak+3a=0 \xrightarrow[(\div a)]{a\neq 0} k^2-4k+3=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=3 \rightarrow max \end{cases}$$

۱۴۹



$$r^2+\frac{h^2}{4}=(4\sqrt{2})^2 \Rightarrow r^2=32-\frac{h^2}{4}$$

$$S=2\pi rh=2\pi h\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}$$

$$S'(h)=0 \rightarrow h=8 \rightarrow r=4$$

$$S_{max}=2\pi\times 4\times 8=64\pi$$

روش دوم: بدون مشتق گیری:

$$4r^2+h^2=4\times 32$$

اگر S_{max} شود آنگاه S^2 نیز max ←

$$S^2=4r^2\times\pi^2\times h^2$$

جمع h^2 و $4r^2$ مقداری ثابت است ←

$$4r^2=h^2=2\times 32$$

$$\rightarrow S_{max}=2\times 32\times\pi=64\pi$$

سید محسن سید نورالدینی

۱۴۷ –

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.85}{0.9}=\frac{17}{18}$$

---

۱۴۸ –

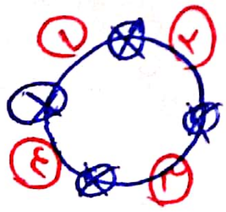
$* \ ax^2+bx-c=0 \xrightarrow{ac<0} \Delta>0$ (همواره ۲ ریشه دارد)

$$-\frac{b}{a}=\frac{-c}{a}+2 \rightarrow c=b+2a \ , \ \underset{\in N}{1\le a,b,c\le 9}$$

$(a,b,c) \rightarrow$ $(1,1,3),(1,2,4),(1,3,5),(1,4,6)$
$(1,5,7),(1,6,8),(1,7,9)$
$(2,1,5),(2,2,6),(2,3,7),(2,4,8)$
$(2,5,9),\ (3,1,7),(3,2,8),(3,3,9)$
$(4,1,9)$

---

۱۴۹ – ابتدا یکی از پسرها به $6=(4-1)!$ طریق می‌نشیند



چهار نفر دیگر به $4!$ در مکان‌های ① تا ④ قرار می‌گیرند.

$6\times 4!$

---

۱۵۰ – باید ۲ رقم سمت راست بر ۴ بخش‌پذیر شود:

۱) یک رقمی: فقط عدد ۴ ← یک حالت

۲) ۲ رقمی ← $12, 24, 32, 52$ ← ۴ حالت

۳) ۳ رقمی ← $\underline{3}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{\text{۴ حالت}}$ ← $3\times 4=12$

۴) ۴ رقمی ← $3\times 2\times 4=24$

۵) ۵ رقمی ← $3\times 2\times 1\times 4=24$

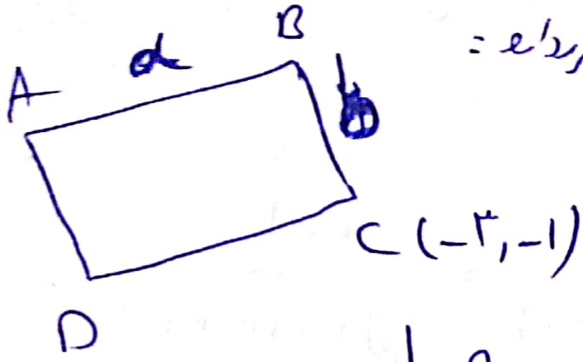
$n(S)=5+25+(5\times 4\times 3)+(5\times 4\times 3\times 2)+(5\times 4\times 3\times 2\times 1)=325$

$$P=\frac{65}{325}=\frac{1}{5}$$

151 -

$$y-4=3(x-2) \rightarrow y=3x-2$$

با توجه به اینکه B روی این خط قرار دارد:



$$AB \text{ فاصله از خط}: \; b=\frac{|-9+1-2|}{\sqrt{9+1}}=\sqrt{10}$$

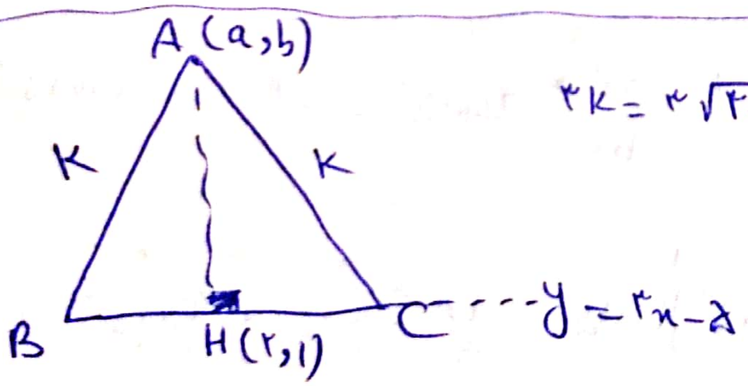
$$BC \text{ معادله ضلع}: \; y-(-1)=-\frac{1}{3}(x+3)$$

$$\rightarrow x+3y+6=0 \rightarrow a=\frac{|2+12+6|}{\sqrt{9+1}}=2\sqrt{10}$$

$$\text{محیط}=2(a+b)=2(3\sqrt{10})=6\sqrt{10}$$

---

152 -



$$3K=3\sqrt{30} \rightarrow K=\sqrt{30}$$

$$* \; AH=\frac{\sqrt{3}}{2}K=\frac{\sqrt{90}}{2} \Rightarrow \boxed{(a-2)^2+(b-1)^2=\frac{90}{4}} \; ①$$

$$② \; m_{AH}=-\frac{1}{3} \rightarrow \frac{b-1}{a-2}=-\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{a=5-3b} \; ②$$

$$\xrightarrow{①,②} 10(b-1)^2=\frac{90}{4} \rightarrow (b-1)^2=\frac{9}{4} \rightarrow b-1=\pm\frac{3}{2}$$

$$b=\frac{5}{2}$$

$$b=-\frac{1}{2} \rightarrow a=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2} \rightarrow A\left(\frac{13}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

۱۵۳ -

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ x^2+y^2+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2x-2y=0 \to \boxed{x=y}$$

---

۱۵۴ -

$$* \quad \frac{4}{y+4} = \frac{x+1}{y+x+1} \to \frac{4}{y+4-4} = \frac{x+1}{y+x+1-(x+1)}$$

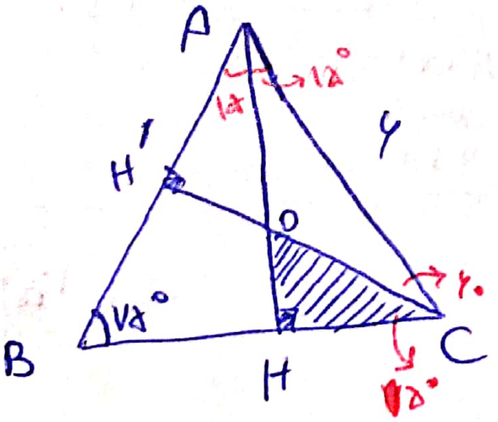
$$\to \frac{4}{y} = \frac{x+1}{y} \to x+1=4 \to x=3$$

$$\xrightarrow{\text{جواب}} = 2-6=-4$$

$$* \quad \frac{4}{y} = \frac{y^2}{\cancel{5-3}} \Rightarrow y^3=2^3 \to y=2$$

---

۱۵۵ -



$$* \quad \sin 15^\circ = \frac{HC}{4} \Rightarrow HC = 4\sin 15^\circ$$

$$* \quad \frac{OH}{HC} = \tan 15^\circ \Rightarrow OH = HC \cdot \tan 15^\circ$$

$$\to S_{OHC} = \frac{1}{2} \times (4\sin 15^\circ)^2 \tan 15^\circ = 18 \sin^2 15^\circ \times \tan 15^\circ$$

$$* \quad \sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})}$$

$$* \quad \tan 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\to S_{OHC} = 18 \times \frac{1}{4(2+\sqrt{3})^2} = \frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

دشترنه‌ها معجونی