۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

۴ - ۱۲۶

$$\begin{cases} a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2} \\ b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2} \end{cases} \rightarrow (a^2+b^2-2ab)^2 \cdot (a^2+b^2+2ab)^2 =$$

$$(a-b)^4(a+b)^4 = (a^2-b^2)^4 = (a^4+b^4-2a^2b^2)^2 =$$

$$(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-2\sqrt{6-4})^2 = (2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2 =$$

$$4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 4(8-2\sqrt{12}) = 16(2-\sqrt{3})$$

۴ - ۱۲۷

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{t=\sqrt[3]{x}}$$

$$\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right)(t^2-1)=2t \xrightarrow{\cdot t^2} (t^4+1+t^2)(t^2-1)=2t^3 \rightarrow$$

$$t^6-1=2t^3 \rightarrow t^6-2t^3-1=0 \xrightarrow{t^3=x} x^2-2x-1=0 \rightarrow S=x_1+x_2=2$$

۱ - ۱۲۸

$$x=5-x^2 \rightarrow x^2+x-5=0 \rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-1 \rightarrow \alpha+1=-\beta \\ P=\alpha\beta=-5 \rightarrow \frac{-1}{\beta}=\frac{\alpha}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow S'=\frac{1}{(\alpha+1)^3}+\frac{1}{(\beta+1)^3}=\frac{\alpha^3}{125}+\frac{\beta^3}{125}=\frac{S^3-3PS}{125}=\frac{-1-3(-1)(-5)}{125}=\frac{-16}{125}$$

$$P'=\frac{1}{(\alpha+1)^3}\cdot\frac{1}{(\beta+1)^3}=\frac{\alpha^3}{125}\cdot\frac{\beta^3}{125}=\frac{P^3}{5^6}=\frac{-5^3}{5^6}=-\frac{1}{125}$$

$$\therefore x^2-S'x+P'=0 \rightarrow x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0 \rightarrow 125x^2+16x=1$$

۴ - ۱۲۹

$$f(x)=16\cos^2 3x\cdot\cos^2 6x\cdot\cos^2 12x\cdot\cos^2 24x \xrightarrow[\cdot\sin^2 3x]{\cdot\sin^2 3x} \frac{16}{\sin^2 3x}\cdot\frac{1}{4\times 64}\sin^2 48x=$$

$$\frac{16}{\sin^2 3x}\cdot \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin^2 3x\cdot\cos^2 3x}_{\frac{1}{4}\sin^2 6x}\cdot\cos^2 6x}_{\frac{1}{16}\sin^2 12x}\cdot\cos^2 12x}_{\frac{1}{64}\sin^2 24x}\cdot\cos^2 24x}_{\frac{1}{4\times 64}\sin^2 48x}$$

$$\frac{\sin^2 48x}{16\sin^2 3x} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{\sin^2\frac{48\pi}{36}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{16\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3}{16}(2+\sqrt{3})$$

۳ - ۱۳۰

$$tg\,\alpha=\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} tg\,2\alpha=\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7} \checkmark \\ \sin 2\alpha=\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{9}{16}}=\frac{24}{25} \\ 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ربع سوم } \alpha} \cos\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases} \longrightarrow$$

۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

ادامه سوال ۱۳۰:

$$\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\operatorname{ctg} 2\alpha}=$$

$$\operatorname{tg}2\alpha\cdot(\sin 2\alpha-\cos\alpha)=\frac{24}{7}\left(\frac{24}{25}+\frac{4}{5}\right)=\boxed{\frac{1056}{175}}$$

۱۳۱ - ③

$x\in[0,2\pi]$

$$\cos^2 x-\sin^2 x\cdot\cos 3x=1\rightarrow \cancel{1}-\sin^2 x-\sin^2 x\cdot\cos 3x=\cancel{1}$$

$$\rightarrow -\sin^2 x(1+\cos 3x)=0\rightarrow\begin{cases}\sin x=0\rightarrow x=k\pi\\ \cos 3x=-1\rightarrow x=\left(\frac{2k+1}{3}\right)\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0,\pi,2\pi\\ x=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\end{cases}\rightarrow \text{تعداد}=5$$

۱۳۲ - ①

$$y=\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}\rightarrow\begin{cases}x^2-x-2>0\rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2\\ \text{و}\quad x^2-1\geq 0\rightarrow |x|\geq 1\end{cases}\rightarrow \text{∩}$$

$$\boxed{x<-1 \text{ یا } x>2}$$

۱۳۳ - ②

$$y=2|[3x]|-1 \quad ; -\tfrac{1}{2}\leq x\leq\tfrac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\leq 3x\leq\frac{3}{2}\rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}\leq 3x<-1\rightarrow[3x]=-2 & ; -\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{3}\\ -1\leq 3x<0\rightarrow[3x]=-1 & ; -\frac{1}{3}\leq x<0\\ 0\leq 3x<1\rightarrow[3x]=0 & ; 0\leq x<\frac{1}{3}\\ 1\leq 3x<\frac{3}{2}\rightarrow[3x]=1 & ; \frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}3 & ; -\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{3}\\ 1 & ; -\frac{1}{3}\leq x<0\\ -1 & ; 0\leq x<\frac{1}{3}\\ 1 & ; \frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

۱۳۴ - ④

$$\begin{cases}2y=x^2\rightarrow y\geq 0\\ x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}\end{cases}\rightarrow 2y=y+3+y-3-2\sqrt{y^2-9}\rightarrow$$

$$y=\pm 3\xrightarrow{y\geq 0}\boxed{y=3}\rightarrow\boxed{x=\sqrt{6}-0=\sqrt{6}}\rightarrow$$

$$A\begin{vmatrix}\sqrt{6}\\3\end{vmatrix}\rightarrow OA=\sqrt{6+9}=\sqrt{15}$$

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

۱۲۵ - (۴)

$$\frac{3^x+3^{x+1}+\cdots+3^{x+5}}{2^{x-2}+2^{x-1}+\cdots+2^{x+3}}=52 \to \frac{3^x(1+3+3^2+\cdots+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+\cdots+2^5)}=52 \to$$

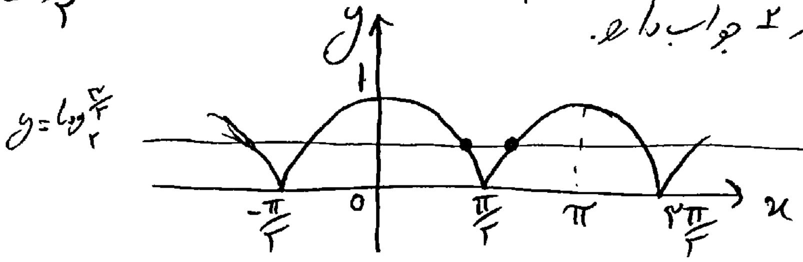
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x\frac{(3^6-1)/2}{(2^6-1)/1}=\frac{52}{4} \to \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{52\times 63\times 2}{4\times 728}=\frac{9}{4} \to \boxed{x=2}$$

۱۲۶ - (۳)

$$y=2^{|\sin x|} \Longrightarrow y=2^{|\sin(x-\frac{\pi}{2})|}-\frac{3}{2}=2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{y=0} 2^{|\cos x|}=\frac{3}{2} \xrightarrow{\log(\cdot)} |\cos x|=\log_2^{\frac{3}{2}}\simeq 0/5 \to$$

با توجه به نمودار ۲ جواب دارد.



۱۲۷ - (۱)

$$\log_x^y-2\log_y^x=1 \;;\; x,y>1 \xrightarrow{t=\log_x^y}$$

$$t-\frac{2}{t}=1 \xrightarrow{\cdot t} t^2-t-2=0 \to t=-1,2 \to \begin{cases}\log_x^y=-1\to y=\frac{1}{x} \quad \times \\ \log_x^y=2\to \boxed{y=x^2} \quad \checkmark\end{cases}$$

زیرا $x,y>1$

۱۲۸ - (۴)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x}{x^4+x^2}}=\sqrt{2}-0=\boxed{\sqrt{2}}$$

۱۲۹ - (۱)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=[0^-]=\boxed{-1}$$

$$x<\frac{\pi}{6}\xrightarrow[\text{تابع } y=\sin x \text{ صعودی است}]{\text{در حوالی } \frac{\pi}{6}}\sin x<\frac{1}{2}\to 2\sin x-1<0$$

۱۳۰ - (۳)

$$y=2+\sqrt{x-1}\to x=2+\sqrt{y-1}\to x-2=2+\sqrt{y-1}\to$$

$$x-2=2+\sqrt{y+2}\to x-2=2+\sqrt{g(x)+2}\xrightarrow{x=4}2=2+\sqrt{g(4)+2}\to \boxed{g(4)=-2}$$

۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

۱۴۱ – ③

$$f(x)=1-x^2,\quad g(x)=\begin{cases}1 & ;\ x>0\\ 0 & ;\ x=0\\ -1 & ;\ x<0\end{cases} \rightarrow$$

$$(gof)(x)=g(1-x^2)=\begin{cases}1 & ;\ 1-x^2>0 \rightarrow |x|<1\\ 0 & ;\ x=\pm 1\\ -1 & ;\ 1-x^2<0 \rightarrow |x|>1\end{cases} \rightarrow$$

نقاط ناپیوستگی: $x=\pm 1$

---

۱۴۲ – ②

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}\,|x^2-4|$$

نقاط اکسترمم عبارتست از ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق و مشتق برابر صفر به‌جز ریشه‌ها

$$\left[\frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4)\right]'=0 \rightarrow \left(x^2-\frac{3x^2}{x^2-1}\right)'=0 \rightarrow 2x+\frac{6x}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow$$

$$x=0 \rightarrow \boxed{x=0,\ \pm 2}$$: نقاط اکسترمم

---

۱۴۳ – ③

$$f(x)=x^2 \rightarrow A\,|\,\begin{smallmatrix}x\\x^2\end{smallmatrix} \rightarrow A'\,|\,\begin{smallmatrix}x^2\\x\end{smallmatrix} \rightarrow$$

$$AA'=\sqrt{(x^2-x)^2+(x^2-x)^2}=|x^2-x|\cdot\sqrt{2} \rightarrow y=|x^2-x|\cdot\sqrt{2}\ ;\ 0<x<1$$

$$x^2=x \rightarrow x=0,1 \rightarrow 0<x<1$$

$$\rightarrow y=(x-x^2)\sqrt{2} \rightarrow y'=(1-2x)\sqrt{2}=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{AA'=\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

---

۱۴۴ – ④

$$\begin{cases}f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1\\ g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\end{cases} \rightarrow (fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\cdot f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)=$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\cdot f'(2)=\frac{-16}{\sqrt{2}}(64)=\boxed{4(-128\sqrt{2})}$$

$$\begin{cases}g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=2\\ g'(x)=-\frac{1}{3}(2x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{-2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}(16)=\boxed{\frac{-16}{\sqrt{2}}}\end{cases}$$

$f(x)=16x^2+1$ ؛ در حوالی $x=2$ $\rightarrow f'(x)=32x \rightarrow \boxed{f'(2)=64}$

۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

۳ - ۱۴۵

$$\begin{cases} g(x)=ax^2+bx+c \ ; \ a\neq 0 \ , \ a=b+c \\ f(x)=\begin{cases} g(x) & ; x\ge k \\ g'(x) & ; x<k\end{cases} = \begin{cases} ax^2+bx+c & ; x\ge k\\ 2ax+b & ; x<k\end{cases} \to \end{cases}$$

پیوستگی در $x=k$: $\boxed{ak^2+bk+c=2ak+b}$

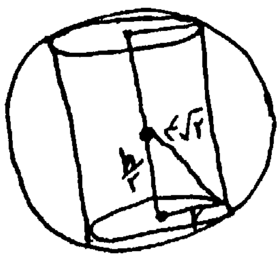
$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & ; x>k \\ 2a & ; x<k\end{cases} \to$ مشتق‌پذیری در $x=k$: $\boxed{2ak+b=2a}$ $\to$

$$\therefore\begin{cases} ak^2+bk+c=2a \\ 2a=2ak+b \to b=2a-2ak \to c=a-b=2ak-a \end{cases}$$

$ak^2+(2a-2ak)k+2ak-a=2a \to ak^2-4ak+3a=0 \xrightarrow{a\neq 0}$

$k^2-4k+3=0 \to \boxed{k=1,3}$

۲ - ۱۴۶



$$\begin{cases} S=2\pi rh \\ r^2+\frac{h^2}{4}=32 \to r^2=\frac{h^2}{4}=16 \end{cases}$$

$\max S=2\pi(2)(16)=\boxed{64\pi}$

۳ - ۱۴۷

$$\begin{cases} A= \text{پیشامد آنکه در امتحان اول موفق شود.} \\ B= \text{پیشامد آنکه در امتحان دوم موفق شود.} \end{cases} \to \begin{cases} P(B)=0/9 \\ P(A\cap B)=0/85 \end{cases}$$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/85}{0/9}=\boxed{\frac{17}{18}}$

۳ - ۱۴۸

$ax^2+bx-c=0 \to$ مختلف العلامه $a, c \to \Delta>0$

$$\begin{cases} ax^2+bx-c=0 \\ S=2+P \to -\frac{b}{a}=2-\frac{c}{a} \to \boxed{c=b+2a} \end{cases} ; \quad a,b,c=1,2,3,\dots,9 \to$$

$(a,b,c)=\{(1,1,3),(1,2,4),(1,3,5),(1,4,6),(1,5,7),(1,6,8),(1,7,9),(2,1,5),(2,2,6),(2,3,7),(2,4,8),(2,5,9),(3,1,7),(3,2,8),(3,3,9),(4,1,9)\}$

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۲۰۴۱

۱۴۹- (۱)

$3!\cdot 4! = 144$

۱۵۰- ؟

یک رقمی : ۴ → تعداد = ۱

دو رقمی: ۱۲، ۲۴، ۳۲، ۵۲ → تعداد = ۴

سه رقمی: $\underset{3}{\_}\ \underbrace{\_\ \_}_{\text{۴ عدد بالایی}} \Rightarrow 3\times 4 = 12$

چهار رقمی: $\underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underbrace{\_\ \_}_{\text{۴ عدد}} \Rightarrow 6\times 4 = 24$

پنج رقمی: $\underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}\ \underbrace{\_\ \_}_{\text{۴ عدد}} \Rightarrow 6\times 4 = 24$

$\rightarrow P(A) = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$

دقت شود که :

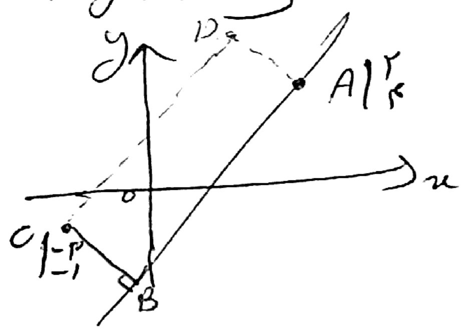
$n(S) =$ تعداد یک رقمی + تعداد دو رقمی + ... + تعداد پنج رقمی =

$5 + 5\times 4 + 5\times 4\times 3 + 5\times 4\times 3\times 2 + 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 325$

۱۵۱- (۳)

$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right. \\ m=3 \end{cases} \rightarrow y-4 = 3(x-2) \rightarrow y = 3x-2 \rightarrow m_{CD} = -\frac{1}{3} \rightarrow$

$CB:\ y+1 = -\frac{1}{3}(x+3) \rightarrow x+3y+6=0$



$\begin{cases} CB = \frac{|-9+1-2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \\ AB = \frac{|2+12+6|}{\sqrt{10}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \end{cases}$

$\rightarrow P_{ABCD} = 2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$

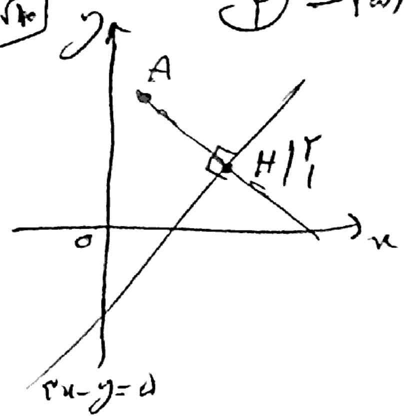
۱۵۲- (۲)

$H\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ ، $3x-y=5$ ، $3a = \sqrt{270} \rightarrow a = \sqrt{30} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}\sqrt{10}$

بررسی گزینه ها :

1) $A\left|\begin{matrix}\frac{4}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right. \rightarrow AH = \frac{|\frac{12}{2} - \frac{1}{2} - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ✗

2) $A\left|\begin{matrix}\frac{13}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right. \rightarrow AH = \frac{|\frac{39}{2} + \frac{1}{2} - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$ ✓



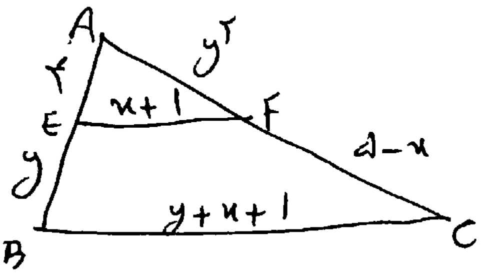
محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

① - ۱۵۳

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=3 \\ -(x^2+y^2+2x=3) \end{cases}$$

$$2y-2x=0 \to \boxed{y=x}$$ معادله وتر مشترک :

① - ۱۵۴

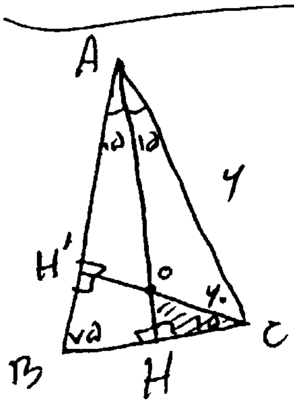


$$\frac{4}{4+y}=\frac{y^2}{y^2-x+5}=\frac{x+1}{y+x+1}\to$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{4+y}=\dfrac{x+1}{x+1+y} \to \dfrac{4}{y}=\dfrac{x+1}{y} \to \boxed{x=3} \\ \dfrac{4}{4+y}=\dfrac{y^2}{y^2-x+5} \to \dfrac{4}{y}=\dfrac{y^2}{5-x} \xrightarrow{x=3} \end{cases}$$

$$y^3=8 \to \boxed{y=2} \to \boxed{y-2x=-4}$$

؟ - ۱۵۵



$$\overset{\triangle}{AHC}: CH=AC\cdot\sin 15=6\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)}$$

$$\overset{\triangle}{OHC}: \cos 15=\frac{CH}{OC}\to OC=\frac{CH}{\cos 15}=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}$$

$$\to S_{\overset{\triangle}{OHC}}=\frac{1}{2}OC\cdot CH\cdot\sin 15=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}\cdot\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)\cdot\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\right)=$$

$$\frac{9}{8}\,\frac{(\sqrt6-\sqrt2)^3}{\sqrt6+\sqrt2}=\frac{9}{32}(\sqrt6-\sqrt2)^4=\frac{9}{32}(8-2\sqrt{12})^2=$$

$$\frac{9}{2}(7-4\sqrt3)=\boxed{\frac{9}{2(7+4\sqrt3)}}$$