

سراسری تجربی ۱۳۹۹

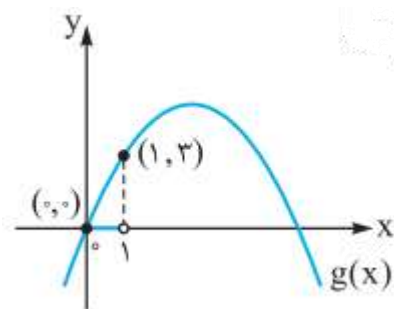
اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشد، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 4)$

$$0 \leq x - [x] < 1 \longrightarrow 0 \leq 2x - [2x] < 1 \longrightarrow 0 \leq f(x) < 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\underset{0}{\leq} f(x) < \underset{1}{\leq}\right) = [0, 3)$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \longrightarrow 0 \leq 2x - 2[x] < 2$$



چون تابع g در بازه $[0, 1)$ اکیدا یکنواست (اکیدا صعودی است) پس برد تابع $g \circ f$ ، بازه $[0, 3)$ می باشد.
نکته: اگر g تابعی یکنوا یا یکنوای اکید باشد، برای یافتن برد تابع $g \circ f$ ، ابتدا برد تابع f را به دست آورده و سپس برد تابع g را با توجه به محدوده تابع f ، حساب می کنیم.

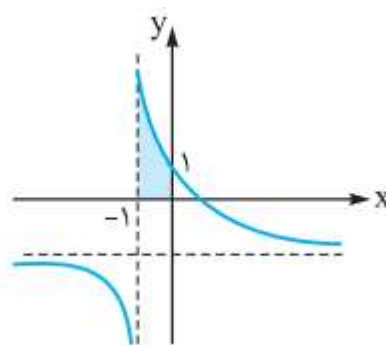
سراسری تجربی ۱۳۹۹ - خارج از کشور

اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[-1, 1)$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

$$0 \leq x - [x] < 1 \longrightarrow -1 < [x] - x \leq 0 \longrightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\underset{-1}{<} f(x) \leq \underset{0}{\leq}\right) = [1, +\infty)$$



چون تابع g در بازه $[-1, 0)$ اکیدا یکنواست (اکیدا نزولی است) پس برد تابع $g \circ f$ ، بازه $[1, +\infty)$ می باشد.

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری ریاضی ۱۳۹۹

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

$$f^{-1}(20) = a \longrightarrow f(a) = 20 \longrightarrow a + \sqrt{a} = 20 \longrightarrow a = 16$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16) = b \longrightarrow g(b) = 16 \longrightarrow \frac{9b+6}{1-b} = 16$$

$$9b+6 = 16-16b \longrightarrow 25b = 10 \longrightarrow b = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

۳

سراسری ریاضی ۱۳۹۹ - خارج از کشور

با فرض $x \geq 2$ ، $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

$$g^{-1}(-9) = a \longrightarrow g(a) = -9 \longrightarrow \frac{3-a}{2} = -9 \longrightarrow 3-a = -18 \longrightarrow a = 21$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(21) = b \longrightarrow f(b) = 21 \longrightarrow b^2 - 4b + 9 = 21$$

$$b^2 - 4b - 12 = 0 \longrightarrow (b-6)(b+2) = 0 \longrightarrow b = 6 \quad \wedge \quad b = -2$$

۴

سراسری تجربی ۹۸ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ ، کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = a \longrightarrow (f \circ g)^{-1}(8) = a \longrightarrow (f \circ g)(a) = 8$$

$$f(g(a)) = 8 \longrightarrow \frac{2}{5}g(a) - 4 = 8 \longrightarrow \frac{2}{5}g(a) = 12 \longrightarrow g(a) = 30$$

$$a^3 + a = 30 \longrightarrow a = 3$$

۵

سراسری ریاضی ۹۸

اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ ،

کدام است؟

(۱) $\{(4,2), (5,2)\}$

(۲) $\{(4,2), (3,5)\}$

(۳) $\{(5,2), (2,4)\}$

(۴) $\{(3,5), (2,4)\}$

$$f^{-1} = \{(2,1), (5,2), (4,3), (6,4)\}$$

$$h = g \circ f^{-1} = \{(5,3), (4,1), (6,2)\}$$

$$D_g \cap D_h = \{5,4\} \quad \frac{g}{h} = \{(5,2), (4,2)\}$$

سراسری ریاضی ۹۸ - خارج از کشور

اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع

$(g^{-1} \circ f) - f$ ، کدام است؟

(۱) $\{-1,4\}$

(۲) $\{2,3\}$

(۳) $\{3,4\}$

(۴) $\{2,-1\}$

$$g^{-1} = \{(3,2), (2,4), (6,5), (1,3)\}$$

$$h = g^{-1} \circ f = \{(1,4), (4,5)\}$$

$$D_h \cap D_f = \{1,4\} \quad h - f = \{(1,2), (4,-1)\} \longrightarrow R = \{2,-1\}$$

سراسری تجربی ۹۷ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ، کدام است؟

(۴) $1,7$

(۳) $-1,7$

(۲) $1,-7$

(۱) $-1,-7$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+4) = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) \longrightarrow \frac{6x+7}{x+2} = \frac{2x+7}{x+6} \longrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۹۶

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ ، کدام است؟

(۱) $x-1$ (۲) $x+1$ (۳) x (۴) $2x$

روش اول:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{6x}{3} = 2x$$

روش دوم:

$$\boxed{0} \xrightarrow{f} \boxed{-1} \xrightarrow{g} \boxed{0} \longrightarrow \text{gof}(0) = 0 \longrightarrow \text{زنده‌های ۲}$$

$$\boxed{-2} \xrightarrow{f} \boxed{5} \xrightarrow{g} \boxed{-4} \longrightarrow \text{gof}(-2) = -4 \longrightarrow \text{زنده ۳}$$

سراسری تجربی ۹۶

دو تابع $f = \{(2,5), (6,3), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد.

a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

روش اول:

$$2a \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f^{-1}} 6 \qquad \text{g}(2a) = 3 \longrightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3 \longrightarrow a = \frac{3}{4}$$

روش دوم:

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \longrightarrow g(2a) = f(6) \xrightarrow{f(6)=3} \frac{2a}{2a-1} = 3 \longrightarrow 2a = 3 \longrightarrow a = \frac{3}{4}$$

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ ، کدام است؟

(۱) x (۲) $-x$ (۳) $-x-1$ (۴) $x+1$

$$\boxed{1} \xrightarrow{f} \boxed{5} \xrightarrow{g} \boxed{-2} \qquad f(1) = 5 \qquad g(5) = -2 \longrightarrow \text{gof}(1) = -2$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض اند.اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

۱۲

۷ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

روش اول:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8 \longrightarrow (f \circ g)^{-1}(a) = 8 \longrightarrow (f \circ g)(8) = a \longrightarrow f(g(8)) = a$$

$$\xrightarrow{g(8)=7} f(7) = a \longrightarrow a = 3$$

روش دوم:

$$a \xrightarrow{f^{-1}} 7 \xrightarrow{g^{-1}} 8$$

$$g(8) = \sqrt{49} = 7 \longrightarrow a = 3$$

$$g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \longrightarrow f^{-1}(a) = g(8) \longrightarrow f^{-1}(a) = 7 \longrightarrow a = f(7) = 3$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، آن گاه تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

۱۳

$$2x^2 - 2x + 3 \quad (۲)$$

$$2x^2 + 3x + 1 \quad (۱)$$

$$2x^2 + x + 3 \quad (۴)$$

$$2x^2 - x + 4 \quad (۳)$$

$$(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5 \longrightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{\substack{2x+1=t \\ x=\frac{t-1}{2}}} \longrightarrow$$

لواشور:

$$f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \longrightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4$$

$$\square \xrightarrow{g} \square \xrightarrow{f} \square$$

$$g(0) = 1$$

$$(f \circ g)(0) = 5 \longrightarrow f(1) = 5$$

مودشور:

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۹۴

اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟

(۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۱۴

$$3 - x \geq 0 \longrightarrow x \leq 3 \longrightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

لواشور:

$$x^2 + 2x > 0 \longrightarrow x(x+2) > 0 \longrightarrow x < -2 \vee x > 0$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \vee x > 0 \mid \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

$$= \{x < -2 \vee x > 0 \mid -4 \leq x \leq 3\} = \{-4 \leq x < -2 \vee 0 < x \leq 3\}$$

$$\log_2(x^2 + 2x) \leq 3 \longrightarrow (x^2 + 2x) \leq 8 \longrightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \longrightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\longrightarrow -4 \leq x \leq 2$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\log_2(x^2 + 2x)) = \sqrt{3 - \log_2(x^2 + 2x)}$$

مودشور:

$$\text{if } x = 0 \longrightarrow fog(0) = \sqrt{3 - \log_2(0)} = \infty \longrightarrow (1), (2) \quad \text{ردگ زی نه های}$$

$$\text{if } x = -1 \longrightarrow fog(-1) = \sqrt{3 - \log_2(-1)} = \infty \longrightarrow (3) \quad \text{ردگ زی نه}$$

اگر $x = -2$ انتخاب کنیم جلوی لگاریتم صفر می شود پس جزء جواب نیست لذا پاسخ گزینه ۴ است.

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟

(۱) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $(-1, \frac{1}{2})$

۱۵

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x\right) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2}}$$

$$\text{if } x = 0 \longrightarrow -\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^0 + 2 = -1 + 1 + 2 = 2 \longrightarrow \quad \text{زی نه های ۲ و ۳}$$

$$\text{if } x = 1 \longrightarrow -\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + 2 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 2 > 0 \longrightarrow \quad \text{دگ زی نه ۴}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۹۲

اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ باشند، نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع اند؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۶

$$\begin{cases} f(x) = (2x - 3)^2 \\ f \circ g(x) = (2x + 1)^2 \end{cases} \longrightarrow (2x - 3)^2 = (2x + 1)^2 \longrightarrow 2x - 3 = \pm(2x + 1) \longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند. ضابطه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$ (۲) $-\frac{1}{2} \sin^2 2x$ (۳) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$ (۴) $\frac{1}{2} \cos^2 2x$

۱۷

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} (f \circ g)(x) & x &\xrightarrow{g} \sin^4 x \xrightarrow{f} x - \sqrt{x} \longrightarrow \sin^4 x - \sin^2 x \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sin^4 x) = \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - \sin^2 x = \sin^2 x (\sin^2 x - 1) \\ &= -\sin^2 x (1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x (\cos^2 x) = -(\sin x \cdot \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

سراسری تجربی ۹۱

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد. عدد a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸

$$\begin{aligned} \boxed{a} &\xrightarrow{f} \square \xrightarrow{g} 5 & g(x) = 5 &\longrightarrow x = 6 &\longrightarrow f(a) = 6 &\longrightarrow a = 4 & \text{لواشور:} \\ g^{-1}[g(f(a))] &= g^{-1}(5) &\longrightarrow f(a) = g^{-1}(5) &\longrightarrow a + \sqrt{a} = 6 &\longrightarrow a = 4 & \text{مودشور:} \end{aligned}$$

سراسری تجربی ۹۱

اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ باشد، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟

۱۹

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(4, -1)$

نکته: منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x قرار دارد یعنی باید $g \circ f$ بزرگتر از صفر باشد.

$$g \circ f > 0 \longrightarrow g(x^2 + 3x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} (x+4)(x-1) < 0 \longrightarrow -4 < x < 1$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ مقدار $f(5)$ ، کدام است ؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۰

$$\boxed{x} \xrightarrow{f} \boxed{\quad} \xrightarrow{g} \boxed{2x}$$

$$\boxed{5} \xrightarrow{f} \boxed{\quad} \xrightarrow{g} \boxed{10}$$

لواشور:

$$g \circ f(5) = 10 \rightarrow g(x) = 10 \rightarrow 3x + 4 = 10 \rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} g(f(x)) = 2x \\ g(f(x)) = 3f(x) + 4 \end{cases} \rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \rightarrow f(x) = \frac{2x - 4}{3} \rightarrow f(5) = 2$$

مودشور:

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ باشند ، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع $f \circ g$ که در

زیر محور X ها قرار گیرند ، برابر کدام بازه است ؟

(۱, ۵) (۴)

(-۲, ۱) (۳)

(-۱, ۵) (۲)

(-۵, ۱) (۱)

۲۱

نکته: برای این که نمودار تابع $f \circ g$ زیر محور X ها باشد ، باید $f \circ g < 0$ باشد .

$$f(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

لواشور:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 2\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 1\right) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)$$

$$(f \circ g)(x) < 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) < 0 \rightarrow (-1, 5)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-3}{2}\right) = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \frac{x-3}{2} - 2 \xrightarrow{f \circ g < 0}$$

مودشور:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{4} + \frac{x-3}{2} - 2 < 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 4x - 5 < 0 \xrightarrow{b=a+c} (-1, 5)$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۹۰

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & , x > 3 \\ 2x+3 & , x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ ، کدام است ؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۲۲

$$f(f(5)) = f(2) = 7 \quad f(f(1)) = f(5) = 2 \longrightarrow f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

سراسری تجربی ۹۰- خارج از کشور

اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ باشد، آن گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می تواند باشد ؟

 $x^2 + 2x$ (۴) $x^2 - 2x$ (۳) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 - 1$ (۱)

۲۳

$$\begin{cases} f(g(x)) = x^2 + x - 2 \\ f(g(x)) = g^2(x) - g(x) - 2 \end{cases} \longrightarrow g^2(x) - g(x) - 2 = x^2 + x - 2$$

$$g^2(x) - g(x) = x^2 + x \longrightarrow g^2(x) - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$(g(x) - \frac{1}{4})^2 = (x + \frac{1}{4})^2 \longrightarrow g(x) - \frac{1}{4} = \pm(x + \frac{1}{4})$$

$$g(x) - \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4} \longrightarrow g(x) = x + 1 \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) - \frac{1}{4} = -x - \frac{1}{4} \longrightarrow g(x) = -x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2x - 2$$

سراسری تجربی ۸۹

اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد. حاصل $(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2})$ ، کدام است ؟

 $4\sqrt{2}$ (۴)

۴ (۳)

 $4(\sqrt{2}-1)$ (۲) $4(1-\sqrt{2})$ (۱)

۲۴

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$f(1-\sqrt{2}) = |1-\sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2}$$

$$(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2}) = f(6 - 4\sqrt{2}) - g(-1 + \sqrt{2}) = |6 - 4\sqrt{2}| - (-1 + \sqrt{2} + 1)^2$$

$$= 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

سراسری تجربی ۸۷

اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و تابع $|x| < \frac{\pi}{2}$ ، $g(x) = \tan x$ باشند . دامنه تابع fog ، کدام است ؟

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (۲)$$

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \quad (۱)$$

$$[-۱, ۰) \cup (۰, ۱] \quad (۴)$$

$$\left[-\frac{\pi}{4}, ۰ \right) \cup \left(۰, \frac{\pi}{4} \right] \quad (۳)$$

$$D_g = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f(g(\tan x)) = \frac{\sqrt{1-\tan^2 x}}{\tan x} \rightarrow \begin{cases} 1-\tan^2 x \geq 0 \rightarrow \tan^2 x \leq 1 \rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \tan x \neq 0 \end{cases}$$

$$D_{fog} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] - \{0\}$$

$$(fog)(x) = f(g(\tan x)) = \frac{\sqrt{1-\tan^2 x}}{\tan x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{if } x = \frac{\pi}{4} \rightarrow f(g(\frac{\pi}{4})) = \frac{\sqrt{1-1}}{1} = 0 \rightarrow \text{رد گزینه ۴}$$

$$\text{if } x = -\frac{\pi}{4} \rightarrow f(g(-\frac{\pi}{4})) = \frac{\sqrt{1-1}}{-1} = 0 \rightarrow \text{رد گزینه ۲}$$

$$\text{if } x = 0 \rightarrow f(g(0)) = \frac{\sqrt{1-0}}{0} = \infty \rightarrow \text{رد گزینه ۱}$$

۲۵

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ باشد ، دامنه تابع gof ، کدام است ؟

$$(0, +\infty) \quad (۴)$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \quad (۳)$$

$$\mathbb{R} - \{0, ۸\} \quad (۲)$$

$$(0, ۸) \cup (۸, +\infty) \quad (۱)$$

۲۶

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0, ۴\}$$

$$\sqrt{x+|x|} \neq 0 \rightarrow x+|x| \neq 0 \rightarrow |x| \neq -x \rightarrow x > 0$$

$$\sqrt{x+|x|} \neq ۴ \rightarrow x+|x| \neq ۱۶ \rightarrow \begin{cases} x > 0 \rightarrow 2x \neq ۱۶ \rightarrow x \neq ۸ \rightarrow (0, +\infty) - \{۸\} \\ x < 0 \rightarrow x-x \neq ۱۶ \rightarrow 0 \neq ۱۶ \end{cases}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۸۶

۲۷

اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ باشد، آنگاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ ، کدام است ؟

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

$$(f \circ g)(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{1/4}{1-1/4}\right] = \left[\frac{1/4}{-3/4}\right] = -4$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right] = \left[-2-\sqrt{2}\right] = -4 \quad \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{1-2} = -2-\sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۸۵

اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ باشد، تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است ؟

(۲) $\{(2, 4), (3, 5)\}$

(۱) $\{(1, 3), (0, 0)\}$

(۴) $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

(۳) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$

نکته: اگر $A(a, b) \in f$ باشد، آن گاه $A'(b, a) \in f^{-1}$ (f معکوس پذیر است)

۲۸



۲ ۱ ۵

۵ ۲ ۳

۳ ۰ ۵

-۱ ۴ ۱

$$\longrightarrow g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\} \longrightarrow g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

$$g(f^{-1}(2)) = g(1) = \text{تعریف نشده} \quad g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \longrightarrow (5, 3)$$

$$g(f^{-1}(3)) = g(0) = \text{تعریف نشده} \quad g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \longrightarrow (-1, 1)$$

سراسری تجربی ۸۴

اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشد، مقدار $g(1)$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

ابتدا ضابطه $f \circ g$ را تشکیل داده و مساوی $f \circ g$ صورت سوال قرار می دهیم.

روش اول:

۲۹

$$\begin{cases} f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} \\ f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases} \longrightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1} \xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2}$$

$$3g(1) - 3 = 2g(1) + 2 \longrightarrow g(1) = 5$$

روش دوم:

$$\boxed{1} \xrightarrow{g} \boxed{} \xrightarrow{f} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(1) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \longrightarrow f(x) = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{2} \longrightarrow x = 5$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ باشد، مقدار $g(-2)$ ، کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۳۰

$$\boxed{-2} \xrightarrow{g} \boxed{} \xrightarrow{f} \boxed{4}$$

$$f(g(-2)) = 16 - 12 = 4 \longrightarrow f(x) = 4 \longrightarrow 2x^2 + 4 = 4 \longrightarrow x = 0$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۸۳

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ باشد، تابع $(f \circ f)(x)$ چند عضو دوتائی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\square \xrightarrow{f} \square \xrightarrow{f} \square$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & \infty \\ 5 & 9 & \infty \end{array} \longrightarrow f \circ f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$

۳۱

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\} \longrightarrow f \circ f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$

$$f(f(1)) = f(1) = 1 \longrightarrow (1, 1)$$

$$f(f(2)) = f(3) = 5 \longrightarrow (2, 5)$$

$$f(f(3)) = f(5) = 9 \longrightarrow (3, 9)$$

$$f(f(4)) = f(7) = \infty$$

$$f(f(5)) = f(9) = \infty$$

سراسری تجربی ۸۳

اگر $f(x) = |x| - x$ باشد، ضابطه تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟

۰ (۴)

 $x + |x|$ (۳) $|x|$ (۲) x (۱)

۳۲

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(|x| - x) = ||x| - x| - (|x| - x) = |x| - x - |x| + x = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases}$$

$$\text{if } x > 0 \longrightarrow f(x) = 0 \longrightarrow f(f(x)) = 0$$

$$\text{if } x < 0 \longrightarrow f(x) = -2x \longrightarrow f(-2x) = 0$$

سراسری تجربی ۸۱

اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مقدار $(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، کدام است؟ $\sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۳۳

$$(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری تجربی ۸۰

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \tan x$ باشد، ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ برابر کدام است؟

-cos x (۴)

-sin x (۳)

cos x (۲)

sin x (۱)

۳۴

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\tan x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\tan x}{\left| \frac{1}{\cos x} \right|} = \frac{\tan x}{-\frac{1}{\cos x}} = -\sin x$$

سراسری تجربی ۷۸

اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، $x \neq 1$ باشد، ضابطه تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟

 $\frac{2x}{x-1}$ (۴) $\frac{x-1}{x+1}$ (۳)

-x (۲)

x (۱)

۳۵

نکته: در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر $a+d=0$ باشد آنگاه $f \circ f^{-1}(x) = x$ (تابع همانی)

$$\boxed{2} \xrightarrow{f} \boxed{3} \xrightarrow{f} \boxed{2} \longrightarrow (f \circ f)(2) = 2$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری ریاضی ۹۶

اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $\{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

نکته: (دامنه تابع مرکب)

دامنه تابع مرکب $g \circ f$ ، مجموعه X هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:
 ۱- x در دامنه f قرار داشته باشد. ۲- $f(x)$ در دامنه g داشته باشد.

۳۶

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \rightarrow 1-x^2 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 1 \rightarrow \boxed{x \neq \pm 1} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \rightarrow \boxed{0 \leq x \leq 1} \rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\right\} = \{x \neq \pm 1 \mid x = 0\} = \{0\}$$

چون $x = \frac{1}{2}$ در نامساوی فوق صدق نمی کند پس فقط گزینه ۲ درست است.

سراسری ریاضی ۹۶ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۳۷

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \rightarrow 1+x^2 \neq 0 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 1 \rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

سراسری ریاضی ۹۵ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

$$(۱) (0, 5] \cup [20, 25) \quad (۲) [-5, 0) \cup (15, 20]$$

$$(۳) [15, 20] \quad (۴) [-5, 0)$$

روش اول: با استفاده از ضابطه:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log(x^2 - 15x)) = \sqrt{2 - \log(x^2 - 15x)}$$

$$(I) 2 - \log(x^2 - 15x) \geq 0 \longrightarrow \log(x^2 - 15x) \leq 2 \longrightarrow (x^2 - 15x) \leq 100$$

$$x^2 - 15x - 100 \leq 0 \longrightarrow (x - 20)(x + 5) \leq 0 \longrightarrow -5 \leq x \leq 20$$

$$(II) (x^2 - 15x) > 0 \longrightarrow x(x - 15) > 0 \longrightarrow x < 0 \vee x > 15$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} -5 \leq x < 0 \vee 15 < x \leq 20 \longrightarrow [-5, 0) \cup (15, 20]$$

روش دوم: با استفاده از تعریف:

$$f(x) = \sqrt{2-x} \longrightarrow 2-x \geq 0 \longrightarrow x \leq 2 \longrightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$g(x) = \log(x^2 - 15x) \longrightarrow x^2 - 15x > 0 \longrightarrow x(x - 15) > 0 \longrightarrow x < 0 \vee x > 15$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < 0 \vee x > 15 \mid \log(x^2 - 15x) \leq 2\}$$

$$= \{x < 0 \vee x > 15 \mid -5 \leq x \leq 20\} = \{-5 \leq x < 0 \vee 15 < x \leq 20\}$$

$$\log(x^2 - 15x) \leq 2 \longrightarrow x^2 - 15x \leq 100 \longrightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$(x - 20)(x + 5) \leq 0 \longrightarrow -5 \leq x \leq 20$$

سراسری ریاضی ۹۴ - خارج از کشور

تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f ، محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند. آن گاه نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

$$(۱) \frac{1}{9}, 4 \quad (۲) \frac{1}{4}, 9 \quad (۳) 4, \frac{1}{4} \quad (۴) 4, 9$$

چون تابع f ، محور x ها را در دو نقطه به طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع می کند پس $f(6) = f(-\frac{1}{4}) = 0$

$$(f \circ g)(x) = 0 \longrightarrow f(g(x)) = f(x - \sqrt{x}) = 0$$

$$f(6) = 0 \longrightarrow x - \sqrt{x} = 6 \longrightarrow x = 9 \quad f(-\frac{1}{4}) = 0 \longrightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \longrightarrow x = \frac{1}{4}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری ریاضی ۹۳

دو تابع با ضابطه های $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض اند.اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ ، a کدام است ؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۰

$$\boxed{a} \xrightarrow{g} \boxed{} \xrightarrow{f^{-1}} \boxed{6}$$

$$f(6) = 12 - 5 = 7 \longrightarrow g(a) = 7 \longrightarrow a = 4$$

$$(f^{-1} \circ g)(a) = 6 \longrightarrow f^{-1}(g(a)) = 6 \longrightarrow g(a) = f(6) \longrightarrow g(a) = 7 \longrightarrow a = 4$$

سراسری ریاضی ۹۳

اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند ، تابع $f(x)$ کدام است ؟

$$x^2 - 4x + 5 \quad (۲)$$

$$x^2 - 4x + 3 \quad (۱)$$

$$x^2 - 2x + 3 \quad (۴)$$

$$x^2 - 2x + 5 \quad (۳)$$

۴۱

$$(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5) \longrightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 16x + 20$$

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 16x + 20 \xrightarrow{2x - 3 = t \longrightarrow x = \frac{t+3}{2}} f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{t+3}{2}\right) + 20$$

$$f(t) = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20 \longrightarrow f(t) = t^2 - 2t + 5$$

سراسری ریاضی ۹۳ - خارج از کشور

دو تابع با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$

مفروض اند . اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ ، a کدام است ؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

۴۲

$$g^{-1}(f(a)) = 3 \longrightarrow f(a) = g(3) = -2 \longrightarrow -\sqrt{-a} = -2 \longrightarrow \sqrt{-a} = 2 \longrightarrow a = -4$$

با توجه به ضابطه های f ، اگر $x > 0 \longrightarrow \sqrt{x} > 0$ و هم چنین اگر $x < 0 \longrightarrow -\sqrt{-x} < 0$ خواهد بود .

$$\boxed{a} \xrightarrow{f} \boxed{} \xrightarrow{g^{-1}} \boxed{3}$$

$$g(3) = -2 \longrightarrow f(a) = -2 \longrightarrow a = -4$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری ریاضی ۹۲

اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، آن گاه ضابطه تابع fog، کدام است؟

$$2x^2 - 3x + 7 \quad (۲)$$

$$2x^2 - 7x + 3 \quad (۱)$$

$$4x^2 - 4x + 11 \quad (۴)$$

$$4x^2 - 2x + 13 \quad (۳)$$

$$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \longrightarrow g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20 \xrightarrow{\substack{2x+3=t \\ x=\frac{t-3}{2}}}$$

$$g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20 \longrightarrow \boxed{g(t) = 2t^2 - t + 5}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 - x + 5) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۴۳

سراسری ریاضی ۹۱

اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(fog)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$-۲ \quad (۲)$$

$$-۴ \quad (۱)$$

روش اول:

$$\begin{cases} (fog)(x) = \frac{x}{x-3} \\ (fog)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) \end{cases} \longrightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{\substack{2x-1=t \\ x=\frac{t+1}{2}}} f(t) = \frac{\frac{t+1}{2}}{\frac{t+1}{2}-3}$$

$$f(t) = \frac{t+1}{t-5} \longrightarrow f(3) = \frac{3+1}{3-5} = -2$$

روش دوم:

$$(fog)(x) = \frac{x}{x-3} \longrightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

۴۴

سراسری ریاضی ۹۱

توابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض اند.اگر $(4,2) \in fog$ و $(4,1) \in gof$ باشند، دو تایی (a,b) کدام است؟

$$(5,4) \quad (۴)$$

$$(4,3) \quad (۳)$$

$$(4,5) \quad (۲)$$

$$(3,4) \quad (۱)$$

$$(4,2) \in fog \longrightarrow f(g(4)) = 2 \xrightarrow{f(3)=2} g(4) = 3 \xrightarrow{g(a)=3} \boxed{a=4}$$

$$(4,1) \in gof \longrightarrow g(f(4)) = 1 \xrightarrow{g(b)=1} f(4) = b \xrightarrow{f(4)=5} \boxed{b=5}$$

۴۵

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

$$(4, 2) \in fog \longrightarrow (fog)(4) = 2$$

$$\boxed{4} \xrightarrow{g} \boxed{} \xrightarrow{f} \boxed{2} \longrightarrow a = 4$$

$$f(3) = 2 \longrightarrow g(4) = 3 \longrightarrow a = 4$$

$$(4, 1) \in gof \longrightarrow (gof)(4) = 1$$

$$\boxed{4} \xrightarrow{f} \boxed{} \xrightarrow{g} \boxed{1} \longrightarrow b = 5$$

$$f(4) = 5 \longrightarrow g(5) = 1 \longrightarrow b = 5$$

سراسری ریاضی ۹۰ - خارج از کشور

دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض اند. تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

$$\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\} \quad (2)$$

$$\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\} \quad (1)$$

$$\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\} \quad (4)$$

$$\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\} \quad (3)$$

۴۶

$$g^{-1} \circ f^{-1} = (fog)^{-1}$$

$$fog = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\} \longrightarrow (fog)^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$

ابتدا تابع fog را تشکیل رداده و سپس آن را معکوس می کنیم.

$$\boxed{} \xrightarrow{f^{-1}} \boxed{} \xrightarrow{g^{-1}} \boxed{}$$

$$2 \qquad 1 \qquad 2$$

$$3 \qquad 2 \qquad 3$$

$$5 \qquad 4 \qquad 5$$

$$\longrightarrow g^{-1} \circ f^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$

سراسری ریاضی ۹۰ - خارج از کشور

اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

$$2 - f(x) \quad (4)$$

$$f(x) \quad (3)$$

$$4 - x \quad (2)$$

$$x \quad (1)$$

۴۷

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری ریاضی ۸۹

دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر x ، کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۲) \mathbb{Z} (۳) \mathbb{R} (۴) \emptyset

$$g(f(x)) = -2 \longrightarrow g([x] + [-x]) = -2 \xrightarrow{[x] + [-x] = t} t^2 + t - 2 = -2 \longrightarrow t^2 + t = 0$$

$$t(t+1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 0 \longrightarrow [x] + [-x] = 0 \longrightarrow x \in \mathbb{Z} \\ t = -1 \longrightarrow [x] + [-x] = -1 \longrightarrow x \notin \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

۴۸

سراسری ریاضی ۸۹

اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، حاصل $g^{-1}(16)$ ، کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

$$g(x) = f(3x - 4) = y \longrightarrow g(x) = y \longrightarrow \boxed{x = g^{-1}(y)} \quad \text{لواشور:}$$

$$f(3x - 4) = y \longrightarrow 3x - 4 = f^{-1}(y) \longrightarrow \boxed{x = \frac{4 + f^{-1}(y)}{3}}$$

$$g^{-1}(y) = \frac{4 + f^{-1}(y)}{3} \longrightarrow g^{-1}(16) = \frac{4 + f^{-1}(16)}{3} = \frac{4 + 16 + 4}{3} = 8$$

$$g^{-1}(16) = a \longrightarrow g(a) = 16 \quad g(a) = f(3a - 4) = 16 \quad \text{(I)} \quad \text{مودشور:}$$

$$f^{-1}(16) = 16 + 4 = 20 \longrightarrow (16, 20) \in f^{-1} \longrightarrow (20, 16) \in f$$

$$f(20) = 16 \xrightarrow{\text{(I)}} 3a - 4 = 20 \longrightarrow a = 8$$

۴۹

سراسری ریاضی ۸۹ - خارج از کشور

اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ ، حاصل $g^{-1}(6)$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$g^{-1}(6) = a \xrightarrow{g} g(a) = 6 \longrightarrow g(a) = f(a) + \sqrt{f(a)} = 6 \longrightarrow f(a) = 4 \xrightarrow{f^{-1}}$$

$$a = f^{-1}(4) = \sqrt[3]{8} = 2 \longrightarrow a = 2 \longrightarrow g^{-1}(6) = 2$$

۵۰

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری ریاضی ۸۸

در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است ؟

-۸، -۲ (۴)

-۲ (۳)

-۵ (۲)

-۸ (۱)

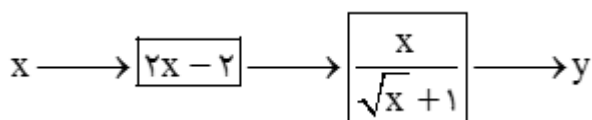
$$f^{-1}(4) = a \longrightarrow f(a) = 4 \longrightarrow -a + \sqrt{-2a} = 4 \longrightarrow \sqrt{-2a} = a + 4 \xrightarrow{\substack{a \leq 0 \\ a > -4}}$$

$$(\sqrt{-2a})^2 = (a + 4)^2 \longrightarrow a^2 + 10a + 16 = 0 \longrightarrow (a + 2)(a + 8) = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -8 \end{cases}$$

$$f^{-1}(4) = -2$$

۵۱

سراسری ریاضی ۸۶

اگر خروجی از ماشین شکل مقابل، $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است ؟ $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{11}{9}$ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

روش اول: به کمک گزینه ها، جواب تست به راحتی به دست می آید.

$$3 \xrightarrow{f} \boxed{4} \xrightarrow{g} \frac{4}{2+1} \longrightarrow \frac{4}{3}$$

۵۲

روش دوم:

$$f(x) = 2x - 2 \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \longrightarrow g(2x - 2) = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2 + 1}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2(x-1)}{\sqrt{2(x-1)+1}} = \frac{4}{3} \longrightarrow \frac{(x-1)}{\sqrt{2(x-1)+1}} = \frac{2}{3} \xrightarrow{x-1=t} \frac{t}{\sqrt{2t+1}} = \frac{2}{3}$$

$$2\sqrt{2t+1} = 3t \longrightarrow 2\sqrt{2t} = 3t - 2 \longrightarrow 9t^2 - 40t + 16 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$x - 1 = 2 \longrightarrow x = 3$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

سراسری ریاضی ۸۶ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$ باشد، ضابطه تابع g برابر کدام است؟

$$\frac{x+1}{x} \quad (۴)$$

$$\frac{x}{x-1} \quad (۳)$$

$$\frac{x-1}{x} \quad (۲)$$

$$\frac{x}{x+1} \quad (۱)$$

روش اول:

$$g(f(x)) = \frac{1}{2}x \longrightarrow g\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{1}{2}x \longrightarrow g(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+t}\right) = \frac{t}{1+t}$$

$$\frac{x}{2-x} = t \longrightarrow x = 2t - xt \longrightarrow x + xt = 2t \longrightarrow x(1+t) = 2t \longrightarrow x = \frac{2t}{1+t}$$

روش دوم: با استفاده از عدد گذاری

$$\text{if } x = 1 \longrightarrow (g \circ f)(1) = g(f(1)) = \frac{1}{2} \xrightarrow{f(1)=1} g(1) = \frac{1}{2} \xrightarrow{(1)} \text{نه!}$$

۵۳

سراسری ریاضی ۸۴ - خارج از کشور

اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$ ، ضابطه تابع g برابر کدام است؟

$$\frac{x-1}{x} \quad (۲)$$

$$\frac{x}{x+1} \quad (۱)$$

$$\frac{x+1}{x} \quad (۴)$$

$$\frac{x}{x-1} \quad (۳)$$

۵۴

$$\boxed{1} \xrightarrow{f} \boxed{1} \xrightarrow{g} \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f(1) = 1$$

$$(g \circ f)(1) = \frac{1}{2}$$

سراسری ریاضی ۸۲

با توجه به ماشین $x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow x$ ، اگر $f(x) = 2x - 1$ ، آن گاه $g(0)$ ، کدام است؟

$$2 \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$0 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۵۵

$$(f \circ g)(x) = x \longrightarrow f(g(x)) = x \longrightarrow g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(0) = f^{-1}(0) = a \xrightarrow[\substack{(a,0) \in f \\ (0,a) \in f^{-1}}]{} f(a) = 0 \longrightarrow 2a - 1 = 0 \longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

سراسری ریاضی ۸۱

اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ باشد، آن گاه ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ ، کدام است؟

$$x + 1 \quad (۲)$$

$$x - 1 \quad (۱)$$

$$x^2 + 1 \quad (۴)$$

$$x^2 - 1 \quad (۳)$$

روش اول:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 + \sqrt{x^2} = 1 + |x| \xrightarrow{x > 0} (f \circ g)(x) = y = 1 + x$$

$$y = x + 1 \longrightarrow y - 1 = x \longrightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = x - 1$$

روش دوم:

$$y = 1 + \sqrt{x} \longrightarrow y - 1 = \sqrt{x} \xrightarrow{\wedge^2} (y - 1)^2 = x \longrightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2$$

$$y = x^2 \longrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| \xrightarrow{x > 0} \sqrt{y} = x \longrightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}((x - 1)^2) = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| = x - 1$$

۵۶

اگر $g(x) = \sqrt{-x^2 - x}$ و $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x}$ باشند، آن گاه دامنه تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $\{-1\}$ (۴) $(-1, 1) - \{0\}$

$$-x^2 - x \geq 0 \longrightarrow x^2 + x \leq 0 \longrightarrow x(x+1) \leq 0 \longrightarrow \boxed{-1 \leq x \leq 0} \longrightarrow D_g = [-1, 0]$$

$$x^2 + 2x \neq 0 \longrightarrow x(x+2) \neq 0 \longrightarrow \boxed{x \neq 0 \wedge x \neq -2} \longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0\} \quad (I)$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \neq 0 \wedge -2 \mid -1 \leq \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \leq 0 \right\} = \{-1\}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \leq 0 \xrightarrow{\Delta < 0} x^2 + 2x < 0 \longrightarrow x(x+2) < 0 \longrightarrow -2 < x < 0 \quad (II)$$

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \geq -1 \longrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + 1 \geq 0 \longrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2 + x^2 + 2x}{x^2 + 2x} \geq 0$$

$$\frac{2(x+1)^2}{x^2 + 2x} \geq 0 \longrightarrow (-\infty, -2) \cup \{-1\} \cup (0, +\infty) \quad (III)$$

$$\frac{(I) \cap (II) \cap (III)}{\longrightarrow} \{-1\}$$

۵۷

اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = x^2$ باشد، آن گاه معادله $g(f(x)) = 5$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) فقط یک ریشه مثبت (۲) فقط یک ریشه منفی

- (۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی (۴) ریشه حقیقی ندارد

$$g(f(x)) = 5 \longrightarrow (f(x))^2 = 5 \longrightarrow f(x) = \pm\sqrt{5} \longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{5} \longrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{5} \longrightarrow x+2 = 5 \longrightarrow x = 3$$

۵۸

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $g(x) = 1 - 2x$ باشد، آن گاه با توجه به ماشین $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow -6x^2 - 2x + 3$ مقدار $f(1)$ ، کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

$$\begin{cases} g(f(x)) = -6x^2 - 2x + 3 \\ g(f(x)) = 1 - 2f(x) \end{cases} \longrightarrow 1 - 2f(x) = -6x^2 - 2x + 3$$

$$-2f(x) = -6x^2 - 2x + 4 \longrightarrow f(x) = 3x^2 + x - 1 \longrightarrow f(1) = 3$$

۵۹

اگر $f(x) = \sqrt{\log(x-1)}$ و $g(x) = \frac{2^x}{2^x - 1}$ باشند، آن گاه دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۰, ۱) (۴)

[۰, ۱) ∪ [۲, ۱۱] (۳)

(۰, ۱] (۲)

(۱, +∞) (۱)

روش اول: با استفاده از تعریف

$$\begin{cases} \log(x-1) \geq 0 \longrightarrow x-1 \geq 1 \longrightarrow x \geq 2 \\ x-1 > 0 \longrightarrow x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \boxed{x \geq 2} \longrightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$2^x - 1 \neq 0 \longrightarrow 2^x \neq 1 = 2^0 \longrightarrow \boxed{x \neq 0} \longrightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 0 \mid \frac{2^x}{2^x - 1} \geq 2 \right\} = \left\{ x \neq 0 \mid 0 < x \leq 1 \right\} = (0, 1]$$

$$\frac{2^x}{2^x - 1} \geq 2 \xrightarrow{2^x = t} \frac{t}{t-1} - 2 \geq 0 \longrightarrow \frac{-t+2}{t-1} \geq 0 \longrightarrow 1 < t \leq 2$$

$$1 < 2^x \leq 2 \longrightarrow 2^0 < 2^x \leq 2^1 \longrightarrow 0 < x \leq 1$$

روش دوم: عدد گذاری

$$x = 1 \longrightarrow g(1) = 2 \longrightarrow f(2) = \sqrt{\log 1} = 0$$

پس جواب $x = 1$ قابل قبول است بنابراین گزینه های ۱ و ۴ رد می شوند

$$x = 2 \longrightarrow g(2) = \frac{4}{3} \longrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\log \frac{4}{3}} = \sqrt{-\log 3}$$

چون زیر رادیکال منفی است پس $x = 2$ قابل قبول نیست پس گزینه ۳ رد می شود.

۶۰

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد طبیعی نمی تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$x-2 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq 2} \longrightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$x-1 \neq 0 \longrightarrow \boxed{x \neq 1} \longrightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} \neq 1\} = \{x \geq 2 \mid x \neq 3\} = [2, +\infty) - \{3\}$$

۶۱

اگر $f(x-1) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x+1$ باشد، $f(0)$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

$$\text{if } x=1 \longrightarrow f(0) + 2f(0) = 2 \longrightarrow 3f(0) = 2 \longrightarrow f(0) = \frac{2}{3}$$

۶۲

اگر $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = 1-x$ باشد، نمودار توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ در چند نقطه متقاطع اند؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-x) = (1-x)^3 + 1 = -(x-1)^3 + 1 = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = 1 - x^3 - 1 = -x^3$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \longrightarrow -x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = -x^3 \longrightarrow 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

چون دلتای معادله به دست آمده منفی است پس معادله ریشه حقیقی ندارد و در نمودار دو تابع متقاطع نمی باشند.

۶۳

اگر تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $f(g(x)) = \frac{1}{x+1}$ ، آن گاه ضابطه تابع $g(x)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{x+3}{2x-1}$ (۲) $\frac{x+3}{2x+1}$ (۳) $\frac{x-3}{2x-1}$ (۴) $\frac{2x+1}{x-1}$

$$f(g(x)) = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{g(x)=t} f(t) = \frac{1}{x+1} \longrightarrow \frac{2t-1}{t+2} = \frac{1}{x+1}$$

$$2tx + 2t - x - 1 = t + 2 \longrightarrow 2tx + t = x + 3 \longrightarrow t(2x+1) = x+3$$

$$t = \frac{x+3}{2x+1} \longrightarrow g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$$

۶۴

اگر $D_f = [a, 3]$ و $D_{2f(x-1)} = [-1, b+3]$ باشد، $a+b$ ، کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

$$a \leq x-1 \leq 3 \longrightarrow a+1 \leq x \leq 4 \xrightarrow{-1 \leq x \leq b+3} a = -2 \quad \wedge \quad b = 1$$

۶۵

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = 3x + 1$ و $(fog)(x) = \frac{7x+2}{x-2}$ باشد، مقدار $g(-1)$ ، کدام است؟

$$-\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{2}{9} \quad (3)$$

$$\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

روش اول:

$$(fog)(x) = \frac{7x+2}{x-2} \rightarrow f(g(x)) = \frac{7x+2}{x-2} \rightarrow 3g(x) + 1 = \frac{7x+2}{x-2}$$

$$3g(x) = \frac{7x+2}{x-2} - 1 \rightarrow g(x) = \frac{7x+2}{3x-6} - \frac{1}{3} \rightarrow g(-1) = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

روش دوم:

$$\boxed{-1} \xrightarrow{g} \boxed{} \xrightarrow{f} \frac{7x+2}{x-2} = \frac{5}{3} \quad 3x+1 = \frac{5}{3} \rightarrow 9x+3 = 5 \rightarrow x = \frac{2}{9}$$

۶۶

اگر $f(x) = \frac{2x-6}{x+2}$ و $g(x) = 2x+1$ ، طول نقطه تلاقی نمودارهای دو تابع fog و g^{-1} ، کدام است؟

$$2, \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$2, \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1, \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$1, \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{2g(x)-6}{g(x)+2} = \frac{2(2x+1)-6}{(2x+1)+2} = \frac{4x-4}{2x+3}$$

$$g(x) = 2x+1 \rightarrow y = 2x+1 \rightarrow 2x = y-1 \rightarrow x = \frac{y-1}{2} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$\frac{4x-4}{2x+3} = \frac{x-1}{2} \rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

۶۷

اگر $f(x) = 4 + \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}$ و $g(x) = 9x^2 + 27 + f^{-1}(x)$ باشد، مقدار $g(1)$ ، کدام است؟

$$26 \quad (4)$$

$$27 \quad (3)$$

$$28 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$

$$f^{-1}(1) = a \rightarrow f(a) = 1 \rightarrow 4 + \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1} = 1 \rightarrow \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1} = -3$$

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = -3 \rightarrow \sqrt[3]{x} - 1 = -3 \rightarrow \sqrt[3]{x} = -2 \rightarrow x = -8$$

$$g(x) = 9x^2 + 27 - 8 \rightarrow g(x) = 9x^2 + 19 \rightarrow g(1) = 28$$

۶۸

اگر $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ و $g(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $[1, 2]$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $\{1\}$ (۴) $(1, +\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow 1-x^2 > 0 \longrightarrow x^2 < 1 \longrightarrow \boxed{-1 < x < 1}$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \longrightarrow x-1 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq 1}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 \mid -1 < \sqrt{x-1} < 1\} = \{x \geq 1 \mid x < 2\} = [1, 2)$$

۶۹

اگر $f = \{(3, -1), (5, 2), (a, -2)\}$ و $g = \{(-1, 2), (6, 2), (-2, 7)\}$ و $\text{gof} = \{(a, a), (b, c)\}$ باشد، مقدار $a+b+c$ ، کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

$$\text{gof} = \{(3, 2), (a, 7)\} \longrightarrow \text{gof} = \{(a, a), (b, c)\} \longrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

۷۰

اگر $f(g(x)) = \frac{5x-1}{13}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ ، مقدار $f(3)$ ، کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۸

$$f(\sqrt[3]{x} + 1) = \frac{5x-1}{13} \longrightarrow f(3) = \frac{40-1}{13} = 3 \quad \sqrt[3]{x} + 1 = 3 \longrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \longrightarrow \boxed{x = 8}$$

۷۱

اگر $g(f(x)) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2}{7-x}$ ، مقدار $f(3)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۱

$$g(x) = \frac{2}{7-x} \longrightarrow g(f(x)) = \frac{2}{7-f(x)} \longrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2}{7-f(x)} \xrightarrow{x=3} \frac{1}{4} = \frac{2}{7-f(3)}$$

$$7-f(3) = 8 \longrightarrow f(3) = -1$$

۷۲

اگر $D_g = [-2, 3]$ و $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، دامنه تابع $y = (\text{gof})(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $[-7, 27]$ (۲) $[-7, 28]$ (۳) $[-27, 8]$ (۴) \mathbb{R}

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [-2, 3] \quad D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \sqrt[3]{x-1} \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 28\} = [-7, 28]$$

۷۳

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ باشد، دامنه تابع $f(2x)$ ، کدام است؟

- (۱) $[-1, 3]$ (۲) $[1, -3]$ (۳) $[-4, 12]$ (۴) $[-2, 6]$

$$-x^2 + 4x + 12 \geq 0 \longrightarrow x^2 - 4x - 12 \leq 0 \longrightarrow (x-6)(x+2) \leq 0 \longrightarrow -2 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq 2x \leq 6 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq 3 \longrightarrow D_{f(2x)} = [-1, 3]$$

۷۴

اگر $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = 7x - 1$ ، جواب معادله $(f \circ g)(x) = 10x + 27$ ، کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -4 (۳) 6 (۴) 4

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x - 1) = 2(7x - 1) + 5 = 14x + 3 \xrightarrow{(f \circ g)(x) = 10x + 27}$$

$$14x + 3 = 10x + 27 \longrightarrow 4x = 24 \longrightarrow \boxed{x = 6}$$

۷۵

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ ، دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) 5 (۲) 4 (۳) 7 (۴) 6

$$f(x) = \sqrt{x-1} \longrightarrow x-1 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq 1} \longrightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{2-x} \longrightarrow 2-x \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \leq 2} \longrightarrow D_g = (-\infty, 2]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = D_{g \circ f} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \leq 2\} = \{x \geq 1 \mid x \leq 5\} = [1, 5]$$

بنابراین دامنه $g \circ f$ شامل ۵ عدد طبیعی است.

۷۶

اگر $f = \{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (0, 7)\}$ و $g = \{(1, 1), (3, 3), (0, 8)\}$ باشد، تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $\{(1, 2), (3, 2)\}$ (۲) $\{(1, 1), (2, 2), (0, 15)\}$

- (۳) $\{(1, 1), (3, 3)\}$ (۴) $\{\}$

۷۷

$$\boxed{1} \xrightarrow{g} \boxed{1} \xrightarrow{f} \boxed{2} \longrightarrow (1, 2)$$

$$\boxed{3} \xrightarrow{g} \boxed{3} \xrightarrow{f} \boxed{2} \longrightarrow (3, 2)$$

$$\boxed{0} \xrightarrow{g} \boxed{8} \xrightarrow{f} \boxed{\infty}$$

$$f \circ g = \{(1, 2), (3, 2)\}$$

اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^2 - x + 3$ باشد، نقطه مشترک دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ ، کدام طول ها است؟

- (۱) $1, 2$ (۲) $1, 3$ (۳) $0, 2$ (۴) $0, 3$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - x + 3) = 2x^2 - 2x + 6 - 1 = 2x^2 - 2x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 - (2x - 1) + 3 = 4x^2 - 6x + 5$$

$$2x^2 - 2x + 5 = 4x^2 - 6x + 5 \longrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \longrightarrow 2x(x - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

۷۸

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (2, 7), (5, 1), (4, 6)\}$ و $g = \{(7, 1), (2, 3), (6, 2), (3, 5)\}$ باشد،
برد تابع $g \circ f$ ، کدام است ؟

- (۱) $\{1, 2, 3\}$ (۲) $\{1, 2, 4\}$ (۳) $\{2, 3, 4\}$ (۴) $\{1, 2, 5\}$

۷۹

$$\boxed{1} \xrightarrow{f} \boxed{2} \xrightarrow{g} \boxed{3} \longrightarrow (1, 3) \quad \boxed{3} \xrightarrow{f} \boxed{4} \xrightarrow{g} \boxed{\infty}$$

$$\boxed{2} \xrightarrow{f} \boxed{7} \xrightarrow{g} \boxed{1} \longrightarrow (2, 1) \quad \boxed{5} \xrightarrow{f} \boxed{1} \xrightarrow{g} \boxed{\infty}$$

$$\boxed{4} \xrightarrow{f} \boxed{6} \xrightarrow{g} \boxed{2} \longrightarrow (4, 2) \quad fog = \{(1, 3), (2, 1), (4, 2)\}$$

اگر $f(x) = 4 - x$ و $g(x) = 2x^2 + 6x$ و نمودار تابع $f \circ g$ روی بازه (a, b) بالای نمودار f قرار داشته باشد
بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است ؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

۸۰

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 + 6x) = 4 - (2x^2 + 6x) = 4 - 2x^2 - 6x$$

$$fog > f \longrightarrow 4 - 2x^2 - 6x > 4 - x \longrightarrow 2x^2 + 5x < 0 \longrightarrow x(2x + 5) < 0$$

$$-\frac{5}{2} < x < 0 \longrightarrow (-\frac{5}{2}, 0) = (a, b) \longrightarrow b - a = \frac{5}{2}$$

اگر $f(x) = x + 3$ و $(fog)^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$ باشند، ضابطه تابع g ، کدام است ؟

- (۱) $x - 3$ (۲) $x + 4$ (۳) $2x - 7$ (۴) $2x + 1$

۸۱

$$(fog)^{-1}(x) = \frac{x+4}{2} \longrightarrow (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{x+4}{2} \longrightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{x+4}{2}$$

$$g^{-1}(x-3) = \frac{x+4}{2} \xrightarrow{x-3=t} \xrightarrow{x=t+3} g^{-1}(t) = \frac{t+3+4}{2} = \frac{t+7}{2}$$

$$y = \frac{x+7}{2} \longrightarrow 2y = x+7 \longrightarrow 2y-7 = x \longrightarrow \boxed{g^{-1}(x) = 2x-7}$$

$$f(x) = x+3 \longrightarrow y = x+3 \longrightarrow x = y-3 \longrightarrow f^{-1}(x) = x-3$$

اگر $f(x) = 2x + \sqrt{-x}$ و $g = \{(-1, 3), (3, 4), (1, 5)\}$ دو تابع با شرط $g(f(a)) = 3$ باشند،
مقدار a ، کدام است ؟

- (۱) -۱ (۲) -۴ (۳) -۹ (۴) ۰

۸۲

$$g(f(a)) = 3 \longrightarrow f(a) = g^{-1}(3) = -1 \longrightarrow 2a + \sqrt{-a} = -1 \longrightarrow a = -1$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

دو تابع $f = \{(1, 2), (3, -1), (4, 0), (0, 5)\}$ و $g = \{(0, 2), (3, 4), (-1, 1)\}$ مفروض اند، تابع $f^{-1}og^{-1}$ کدام است؟

(۱) $\{(0, 3), (2, -1)\}$ (۲) $\{(2, 4), (1, 3)\}$

(۳) $\{(2, 3), (-1, 3)\}$ (۴) $\{(2, 4)\}$

۸۳

$$f^{-1}og^{-1} = (gof)^{-1} \quad gof = \{(3, 1), (4, 2)\} \longrightarrow (gof)^{-1} = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

توابع $f = \{(-2, 3), (2, 5), (-2, a), (0, 2)\}$ و $g(x) = [-\frac{x}{2}] + 4$ را در نظر بگیرید،

مقدار $f^{-1}og(a)$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

(۱) -۲ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۰

$$f = \{(-2, 3), (2, 5), (-2, a), (0, 2)\} \xrightarrow{a=3} f = \{(-2, 3), (2, 5), (0, 2)\}$$

$$(f^{-1}og)(3) = f^{-1}(2) = 0 \quad g(3) = [-\frac{3}{2}] + 4 = -2 + 4 = 2$$

۸۴

با توجه به ماشین $x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow x$ ، اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ باشد، آنگاه $g(x-1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{x+1}{3-x}$ (۲) $\frac{x-1}{2-x}$ (۳) $\frac{2x-1}{x-1}$ (۴) $\frac{x-1}{x}$

$$(gof)(x) = x \longrightarrow g(f(x)) = x \longrightarrow g\left(\frac{x}{x+1}\right) = x \longrightarrow g(t) = \frac{t}{1-t}$$

$$g(x-1) = \frac{x-1}{1-x+1} = \frac{x-1}{2-x}$$

$$\frac{x}{x+1} = t \longrightarrow x = tx + t \longrightarrow x - xt = t \longrightarrow x(1-t) = t \longrightarrow \boxed{x = \frac{t}{1-t}}$$

۸۵

اگر $f(x) = 4x^2 + a$ و $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$ باشند و $x=2$ جواب معادله $(gof)(x) = 0$ باشد،

مقدار a ، کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۱۲ (۴) -۱۰

$$(gof)(x) = 0 \longrightarrow g(f(x)) = 0 \longrightarrow g(4x^2 + a) = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}(4x^2 + a) - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 4x^2 + a - 6 = 0 \xrightarrow{x=2} 16 + a - 6 = 0 \longrightarrow \boxed{a = -10}$$

۸۶

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

<p>اگر $f(x) = x^3 + x$ و $g(x) = x^2 - x$ و $g^{-1}(f(a)) = 2$ باشد، مقدار a، کدام است؟</p> <p>(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲</p> <p>$g^{-1}(f(a)) = 2 \rightarrow f(a) = g(2) \rightarrow f(a) = 2 \rightarrow a^3 + a = 2 \rightarrow \boxed{a = 1}$</p> <p>$a^3 + a = 2 \rightarrow a^3 + a - 2 = 0 \rightarrow (a-1)(a^2 + a + 2) = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a = 1$</p>	۸۷
<p>اگر $f(x) = (3x-1)^2$ و $g(x) = x+1$ باشد، آن گاه نمودارهای دو تابع f و g با کدام طول متقاطع اند؟</p> <p>(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{6}$</p> <p>$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (3x+3-1)^2 = (3x+2)^2$</p> <p>$\xrightarrow{f \circ g = f} (3x+2)^2 = (3x-1)^2 \rightarrow \begin{cases} 3x+2 = 3x-1 \rightarrow 2 = -1 \\ 3x+2 = -3x+1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{6}} \end{cases}$</p>	۸۸
<p>اگر $f(x) = 4x^2 + a$ و $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$ باشند و $x = 2$ جواب معادله $(g \circ f)(x) = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟</p> <p>(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۱۲ (۴) -۱۰</p> <p>$(g \circ f)(x) = 0 \rightarrow g(4x^2 + a) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(4x^2 + a) - 3 = 0 \rightarrow 4x^2 + a - 6 = 0$</p> <p>$\xrightarrow{x=2} 16 + a - 6 = 0 \rightarrow \boxed{a = -10}$</p>	۸۹
<p>اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$ باشد، آن گاه روی کدام بازه زیر، نمودار تابع $f \circ g$ پائین محور x ها قرار می گیرد؟</p> <p>(۱) $(\frac{1}{2}, 8)$ (۲) $(0, 4)$ (۳) $(1, 7)$ (۴) $(-1, 2)$</p> <p>$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 4) = 2(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 4) - 1 = x^2 - 8x + 7$</p> <p>$\xrightarrow{f \circ g < 0} x^2 - 8x + 7 < 0 \xrightarrow{a+b+c=0} 1 < x < 7$</p>	۹۰
<p>دو تابع $f = \{(3, 6), (2, 4), (6, 5), (4, 7)\}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ مفروض اند، اگر $g^{-1}(f(a)) = 4$ باشد، a کدام است؟</p> <p>(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶</p> <p>$g^{-1}(f(a)) = 4 \rightarrow f(a) = g(4) \rightarrow f(a) = 6 \rightarrow a = 3$</p>	۹۱

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + x$ باشند، ریشه های معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ کدام است؟

(۱) $1 \pm \sqrt{2}$ (۲) $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$ (۴) $-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

۹۲

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x) = 2(x^2 + x) + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 6x + 2$$

$$4x^2 + 6x + 2 = 2x^2 + 2x + 1 \longrightarrow 2x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=8} x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(-1) = 3$ و $f(x+1) - f(x) = 2$ ، ضابطه $f(f(x))$ کدام است؟

(۱) $4x + 15$ (۲) $4x + 5$ (۳) $2x + 5$ (۴) $2x + 11$

۹۳

$$f(x) = ax + b \xrightarrow{f(-1)=3} \boxed{-a + b = 3}$$

$$f(x+1) - f(x) = 2 \longrightarrow a(x+1) + b - ax - b = 2 \longrightarrow \cancel{ax} + a + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b} = 2$$

$$\boxed{a=2} \longrightarrow \boxed{b=5} \longrightarrow f(x) = 2x + 5$$

$$f(f(x)) = f(2x + 5) = 2(2x + 5) + 5 = 4x + 15$$

اگر $f = \{(5, 2), (0, 3), (4, 5), (1, 6)\}$ و $g(x) = x - \sqrt{x+2}$ باشند، از رابطه

$$f(g(a)) + g(f(5)) = 5$$

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

$$g(f(5)) = g(2) = 2 - \sqrt{2+2} = 2 - 2 = 0$$

$$f(g(a)) + g(f(5)) = 5 \longrightarrow f(g(a)) = 5 \longrightarrow g(a) = f^{-1}(5) \longrightarrow g(a) = 4$$

$$a - \sqrt{a-2} = 4 \longrightarrow a - 4 = \sqrt{a-2} \longrightarrow a^2 - 8a + 16 - a + 2 = 0 \longrightarrow a^2 - 9a + 18 = 0$$

$$(a-7)(a-2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \boxed{a=7} \\ \boxed{a=2} \end{cases}$$

۹۴

اگر $f(x) = \sqrt{12-x}$ و $g(x) = x^2 - 4x$ باشند، دامنه تابع fog ، کدام است؟

(۱) $[-1, 4]$ (۲) $[-2, 6]$ (۳) $[-1, 6]$ (۴) $[-6, 2]$

$$f(x) = \sqrt{12-x} \longrightarrow 12-x \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \leq 12} \longrightarrow D_f = (-\infty, 12] \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x \leq 12\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 6\} = [-2, 6]$$

$$x^2 - 4x \leq 12 \longrightarrow x^2 - 4x - 12 \leq 0 \longrightarrow (x-6)(x+2) \leq 0 \longrightarrow -2 \leq x \leq 6$$

۹۵

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 16}$ و $g(x) = x^2 + 2x$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

(۱) $(-4, 2)$ (۲) $(-2, 8)$

(۳) $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -2] \cup (8, +\infty)$

۹۶

$$x^2 - 6x - 16 \geq 0 \longrightarrow (x - 8)(x + 2) \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \leq -2 \vee x \geq 8} \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x \leq -2 \vee x^2 + 2x \geq 8\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \vee x \geq 2\} = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$$

$$x^2 + 2x \leq -2 \longrightarrow x^2 + 2x - 2 \leq 0 \xrightarrow{\Delta = -4 < 0} x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x \geq 8 \longrightarrow x^2 + 2x - 8 \geq 0 \longrightarrow (x + 4)(x - 2) \geq 0 \longrightarrow x \leq -4 \vee x \geq 2$$

با فرض $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ و $g(x) = \log_{0.2}(x-3)$ ، دامنه تابع $f \circ g$ بازه (a, b) می باشد،

مقدار $b - a$ ، کدام است؟

(۱) $0/1$ (۲) $0/2$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \longrightarrow x-1 > 0 \longrightarrow \boxed{x > 1} \longrightarrow D_f = (1, +\infty)$$

$$g(x) = \log_{0.2}(x-3) \longrightarrow x-3 > 0 \longrightarrow \boxed{x > 3} \longrightarrow D_g = (3, +\infty)$$

$$\log_{0.2}(x-3) > 1 \longrightarrow x-3 < (0.2)^1 \longrightarrow x < 3/2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 3 \mid \log_{0.2}(x-3) > 1\} = \{x > 3 \mid x < 3/2\}$$

$$D_{f \circ g} = (3, 3/2) = (a, b) \longrightarrow b - a = 3/2 - 3 = 0/2$$

۹۷

هرگاه $f(x) = \sqrt{2-x+x^2}$ باشد، حاصل $f(1-f(-1))$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۰ (۴) تعریف نشده

$$f(x) = \sqrt{2-x+x^2} \longrightarrow f(-1) = \sqrt{2+1+1} = 2$$

$$f(1-f(-1)) = f(1-2) = f(-1) = 2$$

۹۸

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

(۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1]$ (۳) $(-\infty, -1]$ (۴) $[-1, +\infty)$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \longrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \longrightarrow x^2 \geq 4 \longrightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2 \quad \text{لواشور:}$$

$$g(x) = (\frac{1}{2})^x \longrightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (\frac{1}{2})^x \geq 2 \vee (\frac{1}{2})^x \leq -2 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \right\} = (-\infty, -1]$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 4}$$

مودشور:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 4 \geq 0 \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geq 4 \longrightarrow 2^{-2x} \geq 2^2 \longrightarrow -2x \geq 2 \longrightarrow x \leq -1$$

اگر $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $x \geq 2$ و $g(x) = \cos^2 x$ باشند، برد تابع $f^{-1} \circ g$ ، کدام است؟

(۱) $\{2\}$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $[1, 2]$

$$y = x^2 - 4x + 5, \quad x \geq 2 \longrightarrow y = (x-2)^2 + 1, \quad x \geq 2 \longrightarrow y-1 = (x-2)^2$$

$$\sqrt{y-1} = \sqrt{(x-2)^2} \longrightarrow \sqrt{y-1} = |x-2| \xrightarrow{y \geq 1} \sqrt{y-1} = x-2$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(\cos^2 x) = 2 + \sqrt{\cos^2 x - 1}$$

زیر رادیکال همواره غیر مثبت است که فقط مقدار آن می تواند صفر باشد در نتیجه برد $f^{-1} \circ g$ ، مجموعه تک عضوی $\{2\}$ است.

اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$ ، آن گاه دامنه تابع $f(x)$ ، کدام است؟

(۱) $(-\infty, 0)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(-1, 1]$ (۴) $[-1, 1)$

$$\frac{x-1}{x} = t \longrightarrow x-1 = tx \longrightarrow x - tx = 1 \longrightarrow x(1-t) = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{1-t}$$

$$f(t) = \sqrt{2\left(\frac{1}{1-t}\right) - 1} = \sqrt{\frac{2}{1-t} - 1} = \sqrt{\frac{2-1+t}{1-t}} = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \longrightarrow \frac{1+t}{1-t} \geq 0 \longrightarrow D_f = [-1, 1)$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \frac{3x-2}{x+3}$ و $g(x) = x-2$ باشند، آن گاه قدر مطلق تفاضل ریشه های معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ ، کدام است ؟

۲ (۴)

 $4\sqrt{3}$ (۳)

۴ (۲)

 $2\sqrt{3}$ (۱)

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \frac{3x-6-2}{x-2+3} = \frac{3x-8}{x+1}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3x-2}{x+3}\right) = \frac{3x-2}{x+3} - 2 = \frac{3x-2-2x-6}{x+3} = \frac{x-8}{x+3}$$

$$\frac{3x-8}{x+1} = \frac{x-8}{x+3} \longrightarrow 3x^2 + x - 24 = x^2 - 7x - 8 \longrightarrow 2x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$x^2 + 4x - 8 = 0 \longrightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{16 + 32} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

۱۰۲

توابع $f = \{(-2, 3), (2, 5), (-2, a), (0, 2)\}$ و $g(x) = \left[-\frac{x}{2}\right] + 4$ را در نظر بگیرید، مقدار $(f^{-1}og)(a)$ کدام است ؟ ([] نماد جزء صحیح است)

۰ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

-۲ (۱)

$$f = \{(-2, 3), (2, 5), (-2, a), (0, 2)\} \xrightarrow[(-2, a)]{(-2, 3)} a = 3 \longrightarrow f = \{(-2, 3), (2, 5), (0, 2)\}$$

$$g(x) = \left[-\frac{x}{2}\right] + 4 \longrightarrow g(3) = \left[-\frac{3}{2}\right] + 4 = -2 + 4 = 2$$

$$(f^{-1}og)(a) = f^{-1}(g(a)) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(2) = 0$$

۱۰۳

اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (2, 7), (5, 1), (4, 6)\}$ و $g = \{(7, 1), (2, 3), (6, 2), (3, 5)\}$ ، برد تابع gof ، کدام است ؟

 $\{1, 2, 4\}$ (۲) $\{1, 2, 3\}$ (۱) $\{1, 2, 5\}$ (۴) $\{2, 3, 4\}$ (۳)

۱۰۴

$$g(f(1)) = g(2) = 3 \longrightarrow (1, 3)$$

$$g(f(2)) = g(7) = 1 \longrightarrow (2, 1)$$

$$g(f(4)) = g(6) = 2 \longrightarrow (4, 2)$$

$$gof = \{(1, 3), (2, 1), (4, 2)\} \longrightarrow R = \{3, 1, 2\}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^2 - x + 3$ ، نقطه مشترک دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ ، با کدام طول است ؟

(۱) ۱، ۲ (۲) ۱، ۳ (۳) ۰، ۲ (۴) ۱، ۳

۱۰۵

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \longrightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \longrightarrow f(x^2 - x + 3) = g(2x - 1)$$

$$2(x^2 - x + 3) - 1 = (2x - 1)^2 - (2x - 1) + 3 \longrightarrow 2x^2 - 2x + 5 = 4x^2 - 6x + 5$$

$$2x^2 - 4x = 0 \longrightarrow 2x(x - 2) = 0 \longrightarrow x = 0 \wedge x = 2$$

اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ باشد ، دامنه تابع $f(2x)$ ، کدام است ؟

(۱) $[-1, 3]$ (۲) $[-3, 1]$

(۳) $[-4, 12]$ (۴) $[-2, 6]$

۱۰۶

$$-x^2 + 4x + 12 \geq 0 \longrightarrow x^2 - 4x - 12 \leq 0 \longrightarrow \underbrace{(x - 6)}_6 \underbrace{(x + 2)}_{-2} \leq 0 \longrightarrow -2 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq 2x \leq 6 \longrightarrow -1 \leq x \leq 3 \longrightarrow D_{f(2x)} = [-1, 3]$$

اگر $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ ، آن گاه مقدار $(f \circ g^{-1})(1) \times (g \circ f)(5)$ ، کدام است ؟

(۱) $0/11\sqrt{3}$ (۲) $0/6\sqrt{3}$ (۳) $0/6\sqrt{5}$ (۴) $0/6\sqrt{5}$

۱۰۷

$$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(3) = \frac{4}{5}$$

$$g^{-1}(1) = a \longrightarrow g(a) = 1 \longrightarrow \frac{a+1}{2a-1} = 1 \longrightarrow a = 2$$

$$(f \circ g^{-1})(1) = f(g^{-1}(1)) = f(2) = \sqrt{3}$$

$$(g \circ f)(5) \times (f \circ g^{-1})(1) = \frac{4}{5} \times \sqrt{3} = 0/11\sqrt{3}$$

در تابع $f = \{(3, 6), (2, 4), (6, 5), (4, 7)\}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ ، اگر $g^{-1}(f(a)) = 4$ باشد ، مقدار a کدام است ؟

۱۰۸

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

$$g^{-1}(f(a)) = 4 \longrightarrow f(a) = g(4) \longrightarrow f(a) = 6 \longrightarrow a = 3$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

معادله $|x-2| = |a+1| - 2$ دارای جواب حقیقی برای x است، مجموعه مقادیر a ، کدام است؟

$$(1) \quad \mathbb{R} - (-2, 1) \quad (2) \quad \mathbb{R} - [-3, 1] \quad (3) \quad (1, 3) \quad (4) \quad [-1, 3]$$

چون سمت چپ معادله فوق همواره نامنفی است پس بایستی عبارت سمت راست نیز نامنفی باشد تا معادله جواب داشته باشد.

۱۰۹

$$|a+1| - 2 \geq 0 \longrightarrow |a+1| \geq 2 \longrightarrow \begin{cases} a+1 \geq 2 \longrightarrow a \geq 1 \\ a+1 \leq -2 \longrightarrow a \leq -3 \end{cases}$$

اگر $x > 2$ ، $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 3x - 1$ باشد، حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(99)$ ، کدام است؟

$$(1) \quad \frac{11}{3} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad \frac{10}{3}$$

۱۱۰

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(99) = a \longrightarrow (f \circ g)^{-1}(99) = a \longrightarrow (f \circ g)(a) = 99 \longrightarrow f(g(a)) = 99$$

$$f(3a-1) = 99 \longrightarrow (3a-1)^2 - 2(3a-1) = 99 \longrightarrow 9a^2 - 12a - 96 = 0$$

$$3a^2 - 4a - 32 = 0 \longrightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(3)(-32) = 16 + 16(24) = 16(1+24) = 16 \times 25$$

$$x_1 = \frac{4+20}{6} = 4 \quad x_2 = \frac{4-20}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}$$

اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2 + 3}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

$$(1) \quad \left[\frac{3}{2}, 8 \right] \quad (2) \quad \left[\frac{2}{3}, 10 \right]$$

$$(3) \quad \left(-\infty, \frac{3}{2} \right] \cup [8, +\infty) \quad (4) \quad \left(-\infty, \frac{2}{3} \right] \cup [10, +\infty)$$

۱۱۱

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2 + 3} \quad -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \longrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \xrightarrow{b=a+c} -1 \leq x \leq 3$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 3 \mid -1 \leq \frac{2x+1}{x-3} \leq 3 \right\}$$

$$-1 \leq \frac{2x+1}{x-3} \leq 3 \longrightarrow -1-1 \leq \frac{2x+1}{x-3} - 1 \leq 3-1 \longrightarrow -2 \leq \frac{x+4}{x-3} \leq 2 \longrightarrow \left| \frac{x+4}{x-3} \right| \leq 2$$

$$\left(\frac{x+4}{x-3} \right)^2 \leq 4 \longrightarrow \left(\frac{x+4}{x-3} \right)^2 - 4 \leq 0 \longrightarrow \frac{-3x^2 + 32x - 20}{(x-3)^2} \leq 0$$

$$-3x^2 + 32x - 20 \leq 0 \longrightarrow 3x^2 - 32x + 20 \geq 0 \longrightarrow x \leq \frac{3}{2} \quad \vee \quad x \geq 10$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x+1$ باشد، آن گاه دامنه تابع $f^{-1} \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ (۳) $(-1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1]$

۱۱۲

$$x-1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 1 \longrightarrow D_f = R_{f^{-1}} = [1, +\infty), \quad R_f = D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f^{-1} \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_{f^{-1}} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2} \right\} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = 2x - 5$ ، نمودارهای دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ با کدام طول ها متقاطع اند؟

- (۱) $5 \pm \sqrt{2/5}$ (۲) $5 \pm \sqrt{7/5}$ (۳) $3 \pm \sqrt{2/5}$ (۴) $3 \pm \sqrt{7/5}$

۱۱۳

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-5) = (2x-5)^2 - 2x + 5 = 4x^2 - 22x + 30$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = 2(x^2 - x) - 5 = 2x^2 - 2x - 5$$

$$4x^2 - 22x + 30 = 2x^2 - 2x - 5 \longrightarrow 2x^2 - 20x + 35 = 0 \xrightarrow{\Delta' = 30} x = \frac{10 \pm \sqrt{30}}{2}$$

$$x = 5 \pm \frac{\sqrt{30}}{2} = 5 \pm \sqrt{\frac{30}{4}} = 5 \pm \sqrt{7/5}$$

اگر $f = \{(2,5), (3,4), (1,2), (4,1), (5,3)\}$ ، برد تابع $f \circ f^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $\{4,5,6,9\}$ (۲) $\{4,5,7,8\}$

- (۳) $\{3,4,5,9\}$ (۴) $\{4,6,7,9\}$

۱۱۴

$$f = \{(2,5), (3,4), (1,2), (4,1), (5,3)\} \quad f^{-1} = \{(5,2), (4,3), (2,1), (1,4), (3,5)\}$$

$$f \circ f = \{(2,3), (3,1), (1,5), (4,2), (5,4)\}$$

$$f \circ f^{-1} = \{(5,6), (4,5), (2,4), (1,9), (3,6)\} \longrightarrow R = \{6,5,4,9\}$$

اگر $f = \{(-1,3), (0,2), (2,1), (4,0)\}$ و $g = \{(1,-2), (-2,0), (3,-1), (0,1)\}$ باشند و داشته باشیم:

$(g \circ f^{-1})(a) = 1$ ، آن گاه مقدار $(f \circ g)(-a)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۱۱۵

$$(g \circ f^{-1})(a) = 1 \longrightarrow g(f^{-1}(a)) = 1 \longrightarrow f^{-1}(a) = g^{-1}(1) = 0$$

$$f^{-1}(a) = 0 \longrightarrow f(0) = a \longrightarrow a = 2$$

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = x^2 - 6x + 5$ و $g(x) = x^2 + x$ ، مجموع ریشه های معادله $(f \circ g)(x) = 0$ ، کدام است ؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۵ (۴) -۶

$$(f \circ g)(x) = 0 \longrightarrow f(g(x)) = 0 \longrightarrow f(x^2 + x) = 0 \longrightarrow (x^2 + x)^2 - 6(x^2 + x) + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + x = t} t^2 - 6t + 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$$

$$\text{if } t = 1 \longrightarrow x^2 + x = 1 \longrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 5 > 0} S_1 = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1$$

$$\text{if } t = 5 \longrightarrow x^2 + x = 5 \longrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta = 21 > 0} S_2 = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1$$

$$S_1 + S_2 = -1 - 1 = -2$$

۱۱۶

اگر $x \geq 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x + 5$ و $g(x) = 4 \sin^2 x$ باشند ، برد تابع $f^{-1} \circ g$ ، کدام است ؟

(۱) $[1, 2]$ (۲) $\{1\}$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $(0, 1]$

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 \xrightarrow{x \geq 1} y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 4 \longrightarrow y = (x-1)^2 + 4$$

$$x = (y-1)^2 + 4 \longrightarrow x - 4 = (y-1)^2 \longrightarrow \sqrt{x-4} = \sqrt{(y-1)^2}$$

$$\sqrt{x-4} = |y-1| \longrightarrow \sqrt{x-4} = y-1 \longrightarrow y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-4}$$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(4 \sin^2 x) = 1 + \sqrt{4 \sin^2 x - 4} = 1 + \sqrt{4(\sin^2 x - 1)}$$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = 1 + 2\sqrt{-\cos^2 x} \longrightarrow \cos x = 0 \longrightarrow x = 1 \longrightarrow R_{f^{-1} \circ g} = \{1\}$$

۱۱۷

اگر $g(x) = \sqrt{2-x}$ و $f(x) = \sqrt{x+7}$ و دامنه تابع $y = g \circ f(x)$ به صورت $[a, b]$ باشد ، حاصل $b - a$ کدام است ؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$2 - x \geq 0 \longrightarrow x \leq 2 \longrightarrow D_g = (-\infty, 2]$$

$$x + 7 \geq 0 \longrightarrow x \geq -7 \longrightarrow D_f = [-7, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq -7 \mid \sqrt{x+7} \leq 2\} = \{x \geq -7 \mid x \leq -3\} = [-7, -3]$$

$$[-7, -3] = [a, b] \longrightarrow b - a = -3 + 7 = 4$$

۱۱۸

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = |x|$ باشند، حاصل $\text{gof}(\sqrt{2}-2) + \text{fog}(1-\sqrt{2})$ ، کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) $\sqrt{2}$

$$\text{gof}(\sqrt{2}-2) = g(f(\sqrt{2}-2)) = g(-1) = |-1| = 1$$

$$\text{fog}(1-\sqrt{2}) = f(g(1-\sqrt{2})) = f(\sqrt{2}-1) = [\sqrt{2}-1] = 0$$

$$\text{gof}(\sqrt{2}-2) + \text{fog}(1-\sqrt{2}) = 1$$

۱۱۹

اگر $f(x) = 2x-1$ و $g(x) = x^2+x$ ، نمودارهای دو تابع fog و gof با کدام طول متقاطع اند؟

(۱) $1 \pm \sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$ (۳) $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $2 \pm \sqrt{2}$

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(x^2+x) = 2(x^2+x)-1 = 2x^2+2x-1$$

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = (2x-1)^2+2x-1 = 4x^2-4x+1+2x-1 = 4x^2-2x$$

$$4x^2-2x = 2x^2+2x-1 \rightarrow 2x^2-4x+1=0 \xrightarrow{\Delta=8} x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲۰

اگر $f = \{(\Delta, 2), (0, 3), (4, 5), (1, 6)\}$ و $g(x) = x - \sqrt{x+2}$ باشند، از رابطه $f(g(a)) + g(f(\Delta)) = 5$ مقدار a ، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

$$g(f(\Delta)) = g(2) = 2 - \sqrt{2+2} = 2 - 2 = 0 \rightarrow g(f(\Delta)) = 0$$

$$f(g(a)) + \underbrace{g(f(\Delta))}_{=0} = 5 \rightarrow f(g(a)) = 5 \rightarrow g(a) = f^{-1}(5) \rightarrow a - \sqrt{a+2} = 4$$

$$\sqrt{a+2} = a - 4 \rightarrow a = 7$$

۱۲۱

اگر $f(x) = \frac{2x-3}{1-x}$ و $g(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$ باشد، ضابطه $f^{-1} \circ g^{-1}$ ، کدام است؟

(۱) x (۲) $2x$ (۳) $2-x$ (۴) $x-2$

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-3}{1-x}\right) = \frac{2x-3}{1-x} + 1 = 1 + \frac{1}{\frac{2x-3}{1-x} + 2} = 1 + \frac{1}{\frac{2x-3+2-2x}{1-x}}$$

$$= 1 + \frac{1-x}{-1} = 1 - 1 + x = x \xrightarrow{\text{تبادل همسانی}} (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (\text{gof})^{-1}(x) = x$$

۱۲۲

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 16}$ و $g(x) = x^2 + 2x$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

$$-2 < x < 8 \quad (۲)$$

$$-4 < x < 2 \quad (۱)$$

$$x \leq -2 \vee x \geq 8 \quad (۴)$$

$$x \leq -4 \vee x \geq 2 \quad (۳)$$

$$x^2 - 6x - 16 \geq 0 \longrightarrow \underbrace{(x-8)}_{x=8} \underbrace{(x+2)}_{x=-2} \geq 0 \longrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 8 \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x \leq -2 \wedge x^2 + 2x \geq 8 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \vee x \geq 2 \right\} = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$$

$$x^2 + 2x \leq -2 \longrightarrow x^2 + 2x + 2 \leq 0 \xrightarrow[\Delta = -4 < 0]{a > 0} \text{همواره مثبت است}$$

$$x^2 + 2x \geq 8 \longrightarrow x^2 + 2x - 8 \geq 0 \longrightarrow \underbrace{(x+4)}_{x=-4} \underbrace{(x-2)}_{x=2} \geq 0 \longrightarrow x \leq -4 \vee x \geq 2$$

۱۲۳

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $f(g(x)) = \frac{1}{x+1}$ ، آن گاه ضابطه تابع $g(x)$ ، کدام است؟

$$\frac{x+3}{2x+1} \quad (۲)$$

$$\frac{x+3}{2x-1} \quad (۱)$$

$$\frac{2x+1}{x-3} \quad (۴)$$

$$\frac{x-3}{2x+1} \quad (۳)$$

۱۲۴

$$\left. \begin{array}{l} f(g(x)) = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{g(x)=t} f(t) = \frac{1}{x+1} \\ f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \longrightarrow f(t) = \frac{2t-1}{t+2} \end{array} \right\} \longrightarrow \frac{2t-1}{t+2} = \frac{1}{x+1}$$

$$2tx + 2t - x - 1 = t + 2 \longrightarrow 2tx + t = x + 3 \longrightarrow t(2x+1) = x+3 \longrightarrow t = \frac{x+3}{2x+1}$$

$$g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر f تابعی با ضابطه $f(x) = x + 1$ و با دامنه $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد، و $g(x) = f(x) - 2$ ، تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

(۱) تابع ثابت با دامنه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (۲) تابع ثابت با دامنه $\{2, 3, 4, 5\}$

(۳) تابع همانی با دامنه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (۴) تابع همانی با دامنه $\{2, 3, 4, 5\}$

۱۲۵

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$$

$$R_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$g(x) = f(x) - 2 = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$$

$$f \circ g = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \longrightarrow (y = x) \text{ ج همانی}$$

اگر $f = \{(1, 3), (2, 5), (4, 9), (3, 11)\}$ و $g(x) = 2x - 3$ باشد، برد تابع $g^{-1} \circ f$ ، کدام است؟

(۱) $\{3, 4, 6, 7\}$ (۲) $\{2, 3, 5, 7\}$

(۳) $\{3, 6, 7, 9\}$ (۴) $\{1, 4, 5, 6\}$

۱۲۷

$$g^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} \longrightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 3), (2, 4), (4, 6), (3, 7)\} \longrightarrow R = \{3, 4, 6, 7\}$$

اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ ، تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟

(۱) $\{(1, 3), (0, 0)\}$ (۲) $\{(2, 4), (3, 5)\}$

(۳) $\{(5, 3), (-1, 1)\}$ (۴) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$

۱۲۸

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g} \infty$$

$$5 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g} 3 \longrightarrow (5, 3)$$

$$3 \xrightarrow{f^{-1}} 0 \xrightarrow{g} \infty$$

$$-1 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{g} 1 \longrightarrow (-1, 1)$$

$$f \circ g^{-1} = \{(2, 0), (-1, -1), (4, 2), (3, 3)\}$$

بسمه تعالی

تهیه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۱- ترکیب توابع)

سوالات ریاضی (۳)

اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ باشد، چند عدد طبیعی در دامنه تابع $g \circ f$ قرار نمی گیرد؟

(۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) بی شمار

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0, 4\} = (0, +\infty) - \{4\}$$

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} \longrightarrow x+|x| \geq 0 \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \longrightarrow x^2 - 4x \neq 0 \longrightarrow x(x-4) \neq 0 \longrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 4$$

۱۲۹

هرگاه $f(x) = x - 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ و $g(x) = \frac{2x}{x-2}$ باشد، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

(۱) $(-\infty, 2]$ (۲) $(-\infty, 0]$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[2, +\infty)$

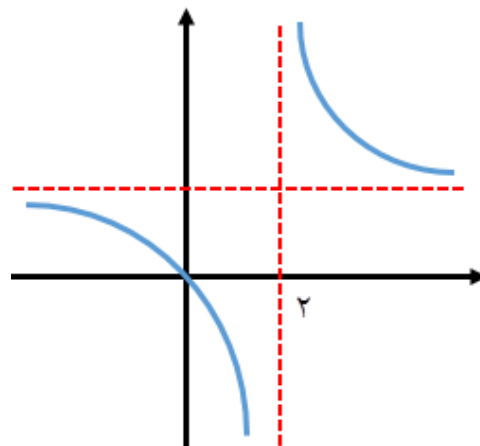
نکته: اگر g تابعی یکنوا یا یکنوای اکید باشد، برای یافتن برد $g \circ f$ ، ابتدا برد تابع f را پیدا می کنیم و سپس برد تابع g را با توجه به محدوده f ، به دست می آوریم.

۱۳۰

$$f(x) = x - 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \longrightarrow f(x) = 2 \left(\frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right) \xrightarrow{0 \leq x - [x] < 1} R_f = [0, 2)$$

$$0 \leq \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor < 1 \longrightarrow 0 \leq 2 \left(\frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right) < 2 \longrightarrow 0 \leq f(x) < 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\underset{0}{\leq} f(x) < \underset{-\infty}{2}\right) = g(x) \leq 0 \longrightarrow R_{g \circ f} = (-\infty, 0]$$



اگر $f(g(x)) = x^2 + 1$ و $f(x) = x^3 + 2$ ، مقدار $g(2)$ ، کدام است ؟

$$\sqrt[3]{4} \quad (۴)$$

$$\sqrt[3]{3} \quad (۳)$$

$$\sqrt[3]{2} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(g(x)) = x^2 + 1 \\ f(g(x)) = g^3(x) + 2 \end{array} \right\} \longrightarrow g^3(x) + 2 = x^2 + 1 \longrightarrow g^3(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \longrightarrow g(2) = \sqrt[3]{3}$$

۱۳۱

اگر $f(x) = \frac{1}{4}x - 8$ و $g(x) = x^3$ باشد ، آن گاه حاصل $(f \circ g)^{-1}(8) - (f^{-1} \circ g^{-1})(8)$ ، کدام است ؟

$$-۳۶ \quad (۴)$$

$$۳۶ \quad (۳)$$

$$-۱۶ \quad (۲)$$

$$۰ \quad (۱)$$

۱۳۲

$$(I) \quad (f \circ g)^{-1}(8) = a \longrightarrow (f \circ g)(a) = 8 \longrightarrow f(g(a)) = 8 \longrightarrow \frac{1}{4}g(a) - 8 = 8$$

$$g(a) = 64 \longrightarrow a^3 = 64 \longrightarrow a = \sqrt[3]{64} \longrightarrow \boxed{a = 4}$$

$$(II) \quad (f^{-1} \circ g^{-1})(8) = b \longrightarrow (g \circ f)^{-1}(8) = b \longrightarrow (g \circ f)(b) = 8 \longrightarrow g(f(b)) = 8$$

$$(f(b))^3 = 8 \longrightarrow f(b) = \sqrt[3]{8} = 2 \longrightarrow \frac{1}{4}b - 8 = 2 \longrightarrow \frac{1}{4}b = 10 \longrightarrow \boxed{b = 40}$$



همکاران و دانش آموزان عزیز ، تست هایی که در اختیار شما قرار گرفته است ، زحمات چندین ساله بنده می باشد ، به همین خاطر قبل از استفاده و مطالعه ، هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است .

با تشکر : سید علی موسوی

سخنی با دانش آموزان عزیز :

سعی کنید در هنگام مطالعه ، ابتدا تمام تمرینات و کار در کلاس ها رو حل کنید و نکات مهم را یادداشت کنید . بهترین جزوه خود کتاب درسی می باشد و سپس به حل تست ها بپردازید و اکثر تست ها از خود کتاب درسی می باشد . شما هرچه بیشتر تلاش و تمرین کنید ، بهتر نتیجه می گیرید . در درس ریاضی ابتدا بایستی مفاهیم رو خوب یاد بگیرید و تست های کنکور مربوط به هر مبحث دقیقاً مشخص است و شما بایستی با تلاش و پشتکار و ممارست ، سرعت عمل تان را زیاد کنید . کسی که طراح تست های کنکور ریاضی هست ، باهوش و ماهر می باشد و اکثر تست های کنکور به صورت ترکیبی است .

موفقیت تصادفی نیست ، لازمه موفقیت ، تلاش ، سخت کوشی ، تمرین ، یاد گیری و مهمتر از همه ، داشتن عشق به کاری است که انجام می دهید .

تمام این تست ها خودم دسته بندی و تایپ کردم و بایستی به صورت رایگان در اختیار دانش آموزان قرار گیرد و برای هر کدام از این مباحث ، ماه ها وقت گذاشتم لذا هزینه آن را پرداخت کنید و همچنین به هم نوعان خود کمک کنید .

متأسفانه برخی از همکاران سوء استفاده کرده و اسم خودشان را روی تست ها قرار می دهند که کار درستی نیست بدون اجازه من این کار رو انجام می دهند که از نظر شرعی درست نیست . دانش آموزان عزیز ، برای دریافت مباحث دیگر ، فقط می توانید با شماره ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴ تماس بگیرید .

به دنبال درخواست های مکرر شما دانش آموزان عزیز ، برای داشتن پاسخ نامه مبحث ترکیب توابع ، تصمیم گرفتم به عنوان عیدی میلاد با سعادت حضرت رسول اکرم (ص) ، پیامبر مهر و رحمت . این مبحث را اختیار شما قرار دهم ، امیدوارم به خوبی استفاده کنید .