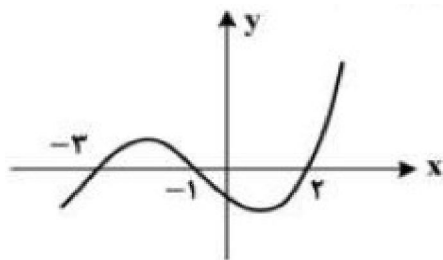


۷۴- اگر  $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$  آنگاه  $f(2)$  کدام است؟  
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۵- اگر  $f$  تابع همانی،  $g$  تابع ثابت،  $h = f - g$  و نمودار  $h$  نمودار تابع  $y = |x + 5|$  را در  $x = 1$  قطع کند،  $h(-1)$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- در تابع خطی  $f(x) = mx + h$ ، اگر  $f(2 - x) + 2f(x - 1) = 2x$  باشد، مقدار  $m + h$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه  $f(x)$  است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای  $\sqrt{(x+1)f(x)}$  کدام است؟



(۱)  $[-3, 2]$  (۲)  $[-1, +\infty)$  (۳)  $(-\infty, -1]$  (۴)  $R - (-3, 2)$

۷۸- کدام دسته از توابع زیر با هم برابرند؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$g(x) = \cos x, f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad (1)$$

$$g(x) = 0, f(x) = \left[ \frac{x^2 + 2}{-x^2 + 3} \right] \quad (2)$$

$$g(x) = 1, f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Cotg} x \quad (3)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}, f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-3} \quad (4)$$

۷۹- در کدام گزینه، زوج تابع داده شده با هم مساوی هستند؟

$$g(x) = 2 \operatorname{Log}(x), f(x) = \operatorname{Log}(x^2) \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{|x|}{x}, f(x) = 1 \quad (2)$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x-1}, f(x) = 1 \quad (3)$$

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)}, f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x} \quad (4)$$

۸۰- برد تابع  $f(x) = \frac{4-x^2}{1+4x}$  کدام است؟

$$(-\frac{1}{4}, 2] \quad (4)$$

$$(-\frac{1}{4}, 4] \quad (3)$$

$$[-\frac{1}{4}, 4] \quad (2)$$

$$(\frac{1}{4}, 2] \quad (1)$$

۸۱- برد تابع  $y = \sqrt{5-x^2+4x}$  کدام است؟

$$[1, 5] \quad (4)$$

$$[1, 4] \quad (3)$$

$$[0, 3] \quad (2)$$

$$[-1, 5] \quad (1)$$

۸۲- نمودار تابع  $y = x^2 - x - 3$  را ۲ واحد به طرف X های منفی سپس ۹ واحد به طرف Y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور X ها است؟

- (۱)  $(-5, 2)$  (۲)  $(-5, 3)$  (۳)  $(-2, 3)$  (۴)  $(-2, 5)$

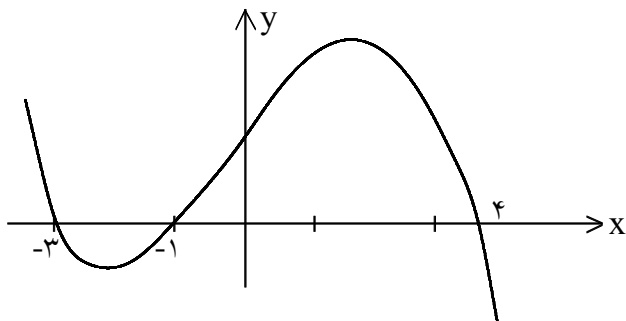
۸۳- نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف X های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف Y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

- (۱)  $(3, 4)$  (۲)  $(2, 5)$  (۳)  $(3, 5)$  (۴)  $(2, 6)$

۸۴- شکل روبه رو، نمودار تابع  $y = f(x-2)$  است. دامنه ی تابع با ضابطه ی  $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

(۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$  (۲)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$  (۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$



۸۵- نمودار تابع با ضابطه ی  $y = x^2 - 3x - 10$  را حداقل چند واحد به طرف X های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور X ها غیر منفی باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۶- به ترتیب با کدام انتقال‌ها نمودار  $y = x^2 + 6x - 1$  به روی نمودار  $y = x^2 - 4x + 3$  منطبق می‌شود؟

- (۱) ۲ واحد به راست و ۹ واحد به بالا  
 (۲) ۵ واحد به راست و ۹ واحد به بالا  
 (۳) ۵ واحد به راست و ۴ واحد به بالا  
 (۴) ۲ واحد به راست و ۴ واحد به بالا

۸۷- نمودار تابع  $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$  را، ۴ واحد به طرف  $x$  های منفی و یک واحد به طرف  $y$  های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

(۱)  $-3/5$  (۲)  $-3$  (۳)  $-2/5$  (۴)  $-2$

۸۸- قرینه‌ی نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

(۱)  $x = 1$  (۲)  $x = 1/5$  (۳)  $x = 2$  (۴)  $x = 2/5$

۸۹- ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^2$  را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

(۱)  $0, 2$  (۲)  $1, 1$  (۳)  $2, 1$  (۴)  $1, 2$



۹۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 - 2x$  ;  $(x > 1)$  مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور  $x$  ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور  $y$  ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

$$2\sqrt{5} \quad (3)$$

$$5\sqrt{2} \quad (3)$$

$$6\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4\sqrt{5} \quad (1)$$

۹۱- نمودار کدام یک از توابع زیر فقط از ناحیه چهارم نمی‌گذرد؟

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (2)$$

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \quad (4)$$

$$y = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 1 \quad (3)$$

۹۲- حدود  $k$  باشد تا تابع  $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + k$  از ناحیه‌ی دوم عبور نکند؟

$$k \leq 10 \quad (4)$$

$$k \leq 8 \quad (3)$$

$$k \geq 8 \quad (2)$$

$$k \geq -8 \quad (1)$$

۹۳- اگر نمودار تابع  $f$  را داشته باشیم و  $g(x) = 3f(2x - 1) + 4$  را رسم کنیم، متناظر نقطه  $(1, -4) \in f$  چه نقطه‌ای از نمودار  $g(x)$  می‌باشد؟

$$(1, -4) \quad (4)$$

$$\left(1, \frac{8}{3}\right) \quad (3)$$

$$\left(1, -\frac{8}{3}\right) \quad (2)$$

$$(1, -8) \quad (1)$$

۹۴- طول تمام نقاط تابع  $f(x) = |x|$  را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. تابع حاصل را چند واحد در راستای محور  $y$  ها به سمت پایین انتقال دهیم تا مساحت سطح محصور بین نمودار و محور طول‌ها در پایین آن ۷۲ واحد مربع شود؟

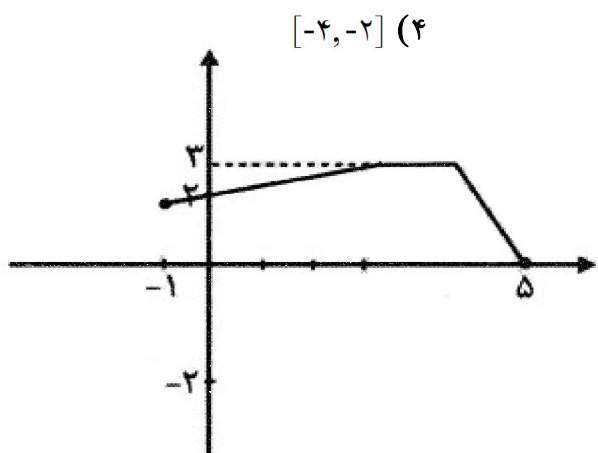
$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۹۵- اگر نمودار تابع  $f(x)$  به شکل زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع  $1 + f(-3x - 4) - 2f(x)$  کدام است؟



(۴)  $[-4, -2]$

(۳)  $\{-3\}$

(۲)  $[-5, -4]$

(۱)  $[-2, -1]$

۹۶- اگر  $x^2 + x < 0$  باشد، حاصل  $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$  کدام است؟

(۴) ۱

(۳) صفر

(۲) -۱

(۱) -۲

۹۷- اگر  $(1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6 = 198$  باشد، جزء صحیح عدد  $(1 + \sqrt{2})^6$  کدام است؟

(۴) ۱۹۸

(۳) ۱۹۷

(۲) ۱۹۶

(۱) ۱۹۵

۹۸- اگر  $[x - 2] = 1$  باشد، نمودارهای دو تابع  $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$  و  $g(x) = 2x^2 + x - 17$  در چند نقطه مشترک هستند؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

(۳) ۳

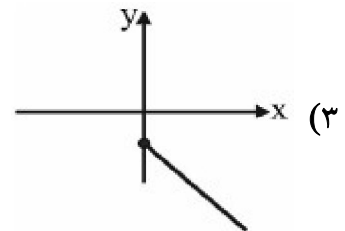
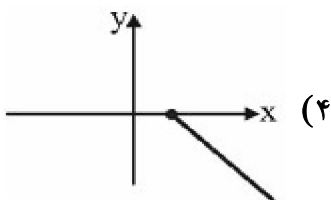
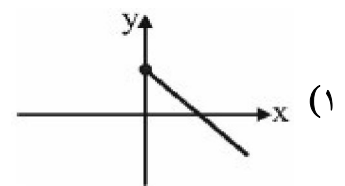
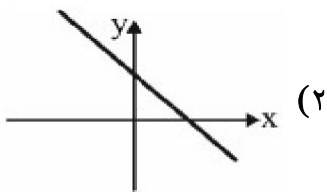
۹۹- برد تابع  $f(x) = 2x - 2[x] + 1$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 2]$  (۲)  $[1, 3]$  (۳)  $[0, 2)$  (۴)  $[0, 3]$

۱۰۰- برای هر عدد طبیعی  $n > 2$  حاصل  $\left[ \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[ \sqrt{n^2 - 2n} \right]$  کدام است؟ (ابعاد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۱- اگر  $f(x) = \sqrt{x} + 2$  و  $g(x) = 2 - \sqrt{x}$  باشند، نمودار تابع  $y = f(x) \times g(x)$  کدام است؟



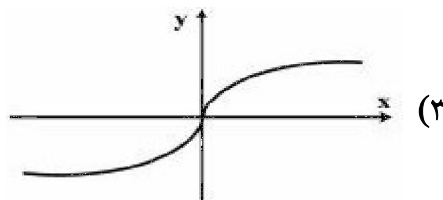
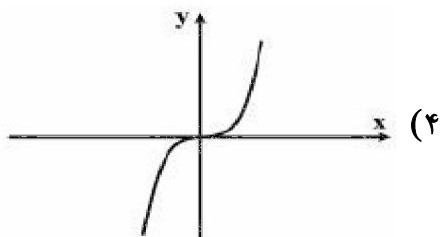
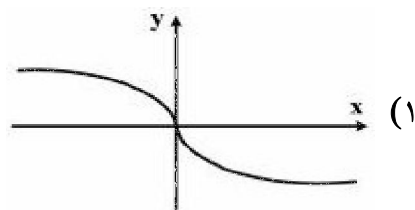
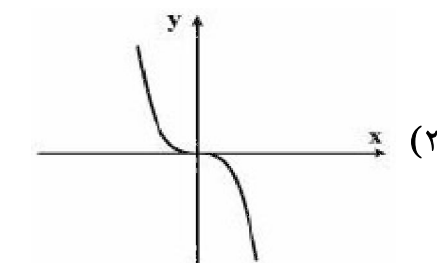
۱۰۲- اگر  $f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$  و  $g = \{(0, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  باشد، تابع  $\frac{f}{g} + \frac{g}{f}$  کدام است؟

- (۱)  $\left\{ \left(1, \frac{5}{2}\right), (2, 2) \right\}$
- (۲)  $\{(0, 0), (2, 2)\}$
- (۳)  $\left\{ \left(1, \frac{5}{2}\right), (2, 1), (1, 2) \right\}$
- (۴)  $\left\{ (0, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 2) \right\}$

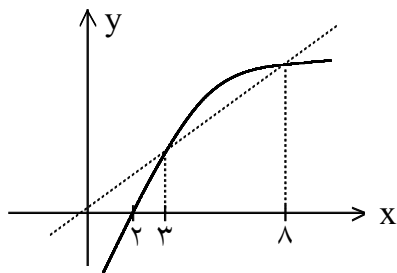
۱۰۳- اگر رابطه‌ی  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟

- (۱)  $(-1, 1)$
- (۲)  $(-1, 3)$
- (۳)  $(2, 1)$
- (۴)  $(2, 3)$

۱۰۴- اگر  $f(x) = x|x|$  باشد، نمودار تابع  $y = f^{-1}(x)$  کدام است؟



۱۰۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = f(x)$  و نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$  کدام است؟



(۴)  $[3, 8]$

(۳)  $[2, 8]$

(۲)  $[2, 3]$

(۱)  $(0, 2]$

۱۰۶- فرض کنید  $g(x)$  وارون تابع  $f(x) = x + 2\sqrt{x}$  باشد. حاصل  $g(3) + g(15)$  کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۱۰

(۲) ۱۱

(۱) ۱۲

۱۰۷- اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{9x + 6}{1 - x}$  باشند، مقدار  $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$  کدام است؟

(۴)  $\frac{3}{4}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{3}{5}$

(۱)  $\frac{2}{5}$

۱۰۸- دو تابع  $f = \{(5, 2), (7, 3), (4, 1), (3, 6), (9, 1)\}$  و  $g(x) = \sqrt{5x + 9}$  مفروض‌اند.

اگر  $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$  باشد،  $a$  کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۳

(۱) ۲

۱۰۹- با فرض  $x \geq 2$ ;  $f(x) = x^2 - 4x + 9$  و  $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل  $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

(۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

۱۱۰- تابع  $y = f(x)$  یک تابع خطی و دامنه‌ی تابع  $y = \sqrt{f^{-1}(2x) - x^2}$  بازه‌ی  $[-1, 3]$  است. طول نقطه‌ی تلاقی تابع  $y = f(x)$  با نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم کدام است؟

(۱) ۰/۵      (۲) ۱      (۳) ۱/۵      (۴) ۲

۱۱۱- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$  را در نظر بگیرید.  $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

(۱)  $\text{Log}_2(-1 + \sqrt{5})$       (۲)  $\text{Log}_2(1 + \sqrt{5})$

(۳)  $\text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$       (۴)  $\text{Log}_2(3 + \sqrt{5})$

۱۱۲- فرض کنید در دامنه‌ی  $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$  مفروض باشد.  $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

(۱)  $\text{Log}_2(2 - \sqrt{3})$       (۲)  $\text{Log}_2(\sqrt{3} - 1)$       (۳)  $\text{Log}_2(1 + \sqrt{3})$       (۴)  $\text{Log}_2(2 + \sqrt{3})$

۱۱۳- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  در دامنه‌ی  $D_f = (-\infty, 0)$  را در نظر بگیرید. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز ناحیه‌ی چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

۱۱۴- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x - \frac{1}{2x}$  بر دامنه‌ی  $(0, +\infty)$  مفروض است. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز ناحیه‌ی دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{3}{4}$  (۳) -۱ (۴)  $-\frac{1}{2}$

۱۱۵- اگر دو خط به معادلات  $ax + by = 8$  و  $2x - 3y = b$ ، نسبت به نیمساز ربع اول، متقارن باشند.  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $\pm 3$  (۲)  $\pm 2$  (۳)  $2, -3$  (۴)  $-2, 3$

۱۱۶- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه‌ی  $R - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $-1, -4$  (۲)  $-1, 4$  (۳)  $1, -4$  (۴)  $1, 4$

۱۱۷- اگر  $x \geq 1$ ،  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  باشد، نمودارهای دو تابع  $f^{-1}$  و  $g(x) = \frac{x-9}{2}$  با کدام طول، متقاطع

هستند؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۱۱۸- ضابطه‌ی وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

- (۱)  $-x^2$  (۲)  $x^2$  (۳)  $x|x|$  (۴)  $-x|x|$

۱۱۹- ضابطه‌ی معکوس تابع  $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $y = x \sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R}$  (۲)  $y = x \sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$   
 (۳)  $y = x |x| ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$  (۴)  $y = x |x| ; x \in \mathbb{R}$

۱۲۰- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x - |4 - 2x|$  در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی  $f^{-1}(x)$  در آن بازه کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$  (۲)  $\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$  (۳)  $\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$  (۴)  $\frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$

۱۲۱- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$  در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

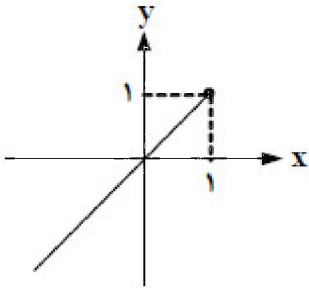
- (۱)  $-x + 7 ; x > 8$  (۲)  $\frac{1}{3}x + 2 ; x > 3$   
 (۳)  $x + 7 ; x > -4$  (۴)  $\frac{1}{2}x - 1 ; -4 < x < 8$



۱۲۲- اگر  $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$  باشد، دامنه  $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$  کدام است؟  
 (۱)  $[3, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 2]$  (۳)  $(-\infty, 3]$  (۴)  $\mathbb{R}$

۱۲۳- اگر نمودار تابع  $(f^{-1} \circ f)(x)$  به صورت زیر باشد، آنگاه ضابطه‌ی  $f(x)$  کدام مورد می‌تواند باشد؟

(۱)  $x+1$  (۲)  $\sqrt{x-1}$  (۳)  $1-\sqrt{1-x}$  (۴)  $1-\sqrt{x-1}$



۱۲۴- با توجه به ماشین  $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$  اگر  $f(x) = 2x - 1$  آنگاه  $g(0)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۲

۱۲۵- اگر  $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$  و  $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $g(f(x))$  کدام است؟

(۱)  $x$  (۲)  $-x$  (۳)  $-x-1$  (۴)  $x+1$

۱۲۶- تابع  $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$  و  $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$  مفروض‌اند، اگر  $(4, 1) \in \text{gof}$  باشد،  $(4, 2) \in \text{fog}$  باشند، دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟

- (۱)  $(3, 4)$       (۲)  $(4, 3)$       (۳)  $(4, 5)$       (۴)  $(5, 4)$

۱۲۷- دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + x - 2$  مفروض‌اند. اگر  $g(f(x)) = -2$  باشد، مجموعه مقادیر  $x$  کدام است؟

- (۱)  $R - Z$       (۲)  $Z$       (۳)  $R$       (۴)  $\phi$

۱۲۸- تابع با ضابطه‌ی  $g(x) = x - \sqrt{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به

طول‌های ۶ و  $-\frac{1}{4}$  قطع کند، آنگاه نمودار تابع  $\text{fog}$ ، محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  و ۴      (۲)  $\frac{1}{4}$  و ۹      (۳)  $\frac{1}{4}$  و ۴      (۴) ۹ و ۴

۱۲۹- اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$  و  $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  باشند. دامنه‌ی تابع  $\text{fog}$ ، کدام است؟

- (۱)  $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$       (۲)  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$       (۳)  $(-2, 0)$       (۴)  $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

۱۳۰- اگر  $f(x) = \sqrt{2-x}$  و  $g(x) = \text{Log}(x^2 - 15x)$  باشند، دامنه‌ی تابع  $f \circ g$ ، کدام است؟

(۱)  $(0, 5] \cup [20, 25)$  (۲)  $(-5, 0) \cup (15, 20]$

(۳)  $(15, 20]$  (۴)  $[-5, 0)$

۱۳۱- اگر  $f(x) = 2x - [2x]$  و  $g(x) = -x^2 + 4x$  باشند، برد تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

(۱)  $[0, 2)$  (۲)  $[0, 3)$  (۳)  $[0, 4)$  (۴)  $[1, 4)$

۱۳۲- اگر  $g(x) = 2x + 1$  و  $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$  باشند، تابع  $f(x)$  برابر کدام است؟

(۱)  $2x^2 + 3x + 1$  (۲)  $2x^2 - 2x + 3$  (۳)  $2x^2 - x + 4$  (۴)  $2x^2 + x + 3$

۱۳۳- فرض کنیم  $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$  و  $g(x) = x - \frac{1}{x}$  باشند، در این صورت  $f(x)$  کدام است؟

(۱)  $x^2 - 4$  (۲)  $x^2 - 2$  (۳)  $x^2$  (۴)  $x^2 + 2$

۱۳۴- اگر  $f(x) = 2x^2 + 4$  و  $f(g(x)) = 2x^2 + 6x$ ، مقدار  $g(-2)$ ، کدام است؟

(۱)  $0$  (۲)  $1$  (۳)  $-1$  (۴)  $2$

۱۳۵- اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  و  $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$  ، مقدار  $g(1)$  کدام است؟

(۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

۱۳۶- تابع با ضابطه  $f(x) = |x+2| + |x-1|$  ، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

(۱)  $(-\infty, -2)$       (۲)  $(-\infty, 1)$       (۳)  $(-2, 1)$       (۴)  $(1, +\infty)$

۱۳۷- تابع با ضابطه  $f(x) = |x+1| - |x-2|$  ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۱)  $(-\infty, 2)$       (۲)  $(-1, +\infty)$       (۳)  $(-1, 2)$       (۴)  $(2, +\infty)$

۱۳۸- اگر نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  اکیداً یکنوا باشد،  $a$  چند مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند؟

(۱) ۰      (۲) بی‌شمار      (۳) ۱      (۴) ۳

۱۳۹- تابع  $f(x) = x^3$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و آن را  $g(x)$  می‌نامیم. اگر دامنه تابع  $y = \sqrt{g(3x-2) - g(x^2)}$  به صورت  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

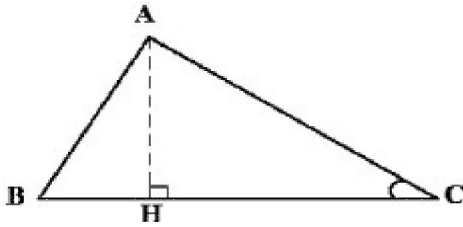
(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۱۴۰- اگر  $f(x)$  تابع صعودی گذرا بر مبدأ مختصات باشد آنگاه دامنه تابع  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟

- (۱) برد  $f$                       (۲)  $\mathbb{R}$                       (۳) دامنه  $f$                       (۴)  $\mathbb{R}^+$

مثلثات

۱۸۲- در شکل زیر،  $\text{Cotg} C = \frac{\sqrt{5}}{2}$  و  $AC = 96$ . اندازه‌ی ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟



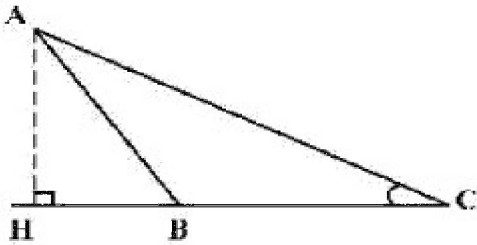
۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۶ (۲)

۴۸ (۱)

۱۸۳- در شکل زیر، فرض کنید  $\text{Sin} C = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ . اندازه‌ی ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟



۳/۷۵ (۴)

۳/۶ (۳)

۳/۵ (۲)

۳/۲۵ (۱)

۱۸۴- اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و  $8\sqrt{3}$  واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

۴۸ (۱)

۱۸۵- در مثلث ABC،  $\hat{A} = 75^\circ$ ،  $\hat{B} = 60^\circ$  و  $AB = \sqrt{3}$  می‌باشد، فاصله C تا پای عمود بر BC کدام است؟

(۱)  $1/5$  (۲) ۲ (۳)  $1/5\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{2}$

۱۸۶- اگر  $0 < (\sqrt{-2\cos\alpha - 1}) \cdot (2\sin\alpha \cdot \cos\alpha) < 0$  باشد، آنگاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۸۷- خطی گذرا بر نقطه  $(\sqrt{3}, 1)$  با خط  $y = \sqrt{3}x$  زاویه  $30^\circ$  می‌سازد، عرض از مبدأ آن با علامت منفی کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۱۸۸- اگر  $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$  باشد، حاصل  $(2\sin^2(\frac{\pi}{4}) - \sin^2 x) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$  کدام است؟

(۱)  $\sin x$  (۲)  $\cos x$  (۳)  $-\sin x$  (۴)  $-\cos x$

۱۸۹- اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \left( \frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$  کدام است؟

(۱)  $-\cos^2 x$  (۲)  $-\cos x$  (۳)  $\cos^2 x$  (۴)  $\cos x$

۱۹۰- اگر  $\sin x + \operatorname{tg} x > 0$  و  $\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x < 0$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است؟  
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۹۱- حاصل  $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$  کدام است؟

(۱)  $\sin^2 \theta$  (۲)  $\cos^2 \theta$  (۳)  $\tan^2 \theta$  (۴)  $\cot^2 \theta$

۱۹۲- اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه اول دایره مثلثاتی باشد، عبارت  $\sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

برابر کدام است؟  
 (۱)  $-\operatorname{tg} \alpha$  (۲)  $-\operatorname{Cotg} \alpha$  (۳)  $\operatorname{tg} \alpha$  (۴)  $\operatorname{Cotg} \alpha$

۱۹۳- اگر  $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{4}$ ، حاصل  $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۹۴- حاصل عبارت  $\operatorname{tg}(285)\operatorname{tg}(-165) - \sin(1095)\cos(255)$  کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

(۱)  $\sin^2(15)$  (۲)  $\cos^2(15)$  (۳)  $-\sin^2(15)$  (۴)  $-\cos^2(15)$



۱۹۵- حاصل عبارت  $\text{tg}(30^\circ)\text{Cos}(210^\circ) + \text{tg}(480^\circ)\text{Sin}(840^\circ)$  کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲) صفر      (۳) ۱      (۴) ۲

۱۹۶- حاصل عبارت  $\frac{\text{Sin } 250^\circ + \text{Sin } 70^\circ}{\text{Cos } 560^\circ - \text{Cos } 110^\circ}$  ، با فرض  $\tan 20^\circ = 0.4$  ، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$       (۲)  $\frac{3}{4}$       (۳)  $\frac{7}{3}$       (۴)  $\frac{5}{8}$

۱۹۷- حاصل عبارت  $\text{Sin}\left(\frac{17\pi}{3}\right)\text{Cos}\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right)\text{Sin}\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$       (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۹۸- دو قرقره که به وسیله یک تسمه به هم وصل هستند، به گونه‌ای ساخته شده‌اند که شعاع قرقره کوچک‌تر  $\frac{6}{5}$  باشد و هرگاه قرقره کوچک‌تر  $\frac{7}{8}$  دور می‌چرخد قرقره بزرگ‌تر  $\frac{1}{16}$  دور بچرخد، شعاع قرقره بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۹۱      (۲) ۹۲      (۳) ۹۳      (۴) ۹۴

۱۹۹- در چرخ و فلکی به شعاع ۳ که فاصله مرکز آن تا سطح زمین ۴ می باشد، اگر شخصی از پایین ترین نقطه سوار شده و به اندازه  $\frac{14\pi}{3}$  چرخیده باشد، فاصله او از سطح زمین کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{5}$       (۲)  $\frac{5}{5}$       (۳)  $4 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$       (۴)  $4 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

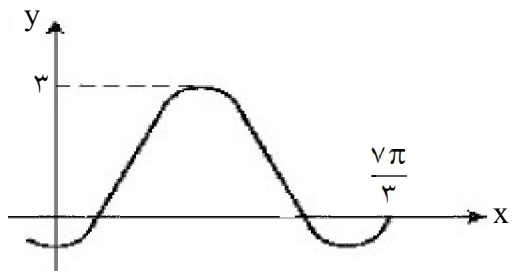
۲۰۰- مخروطی با شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ واحد بر روی صفحه‌ای گسترده شده است. زاویه قطاع حاصل چند درجه است؟

- (۱) ۷۲      (۲) ۱۰۸      (۳) ۱۱۴      (۴) ۲۱۶

۲۰۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  است. مقدار b، کدام

است؟

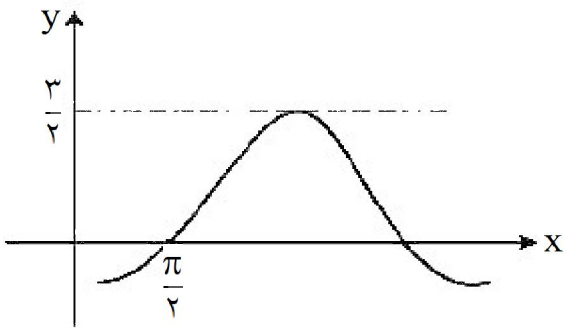
- (۱) ۲      (۲) ۱      (۳) -۱      (۴) -۲



۲۰۲- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی

$$y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

است. مقدار  $a$ ، کدام است؟



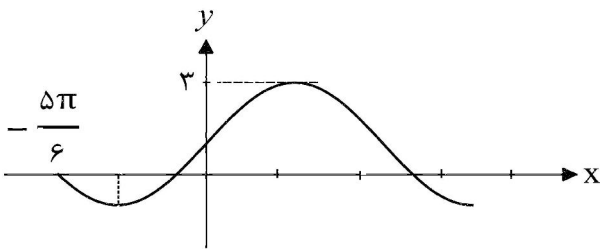
۱ (۴)

 $\frac{1}{2}$  (۳) $-\frac{1}{2}$  (۲)

-۱ (۱)

۲۰۳- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

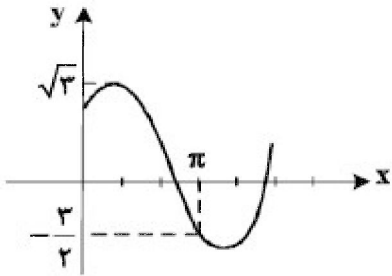
است. مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

 $1 + \sqrt{3}$  (۴) $\frac{2}{5}$  (۳)

۲ (۲)

 $\frac{1}{5}$  (۱)

۲۰۴- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  است. کدام است  $b$ ؟



(۴) ۲

(۳)  $\sqrt{3}$

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۰۵- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$  است.

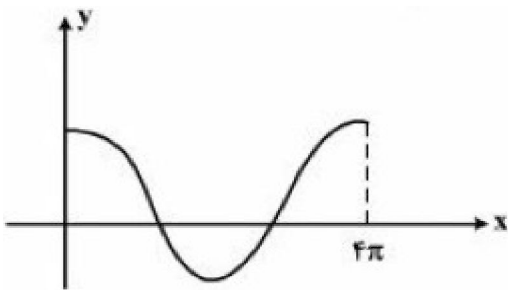
مقدار تابع در نقطه‌ی  $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲)  $\frac{1}{2}$

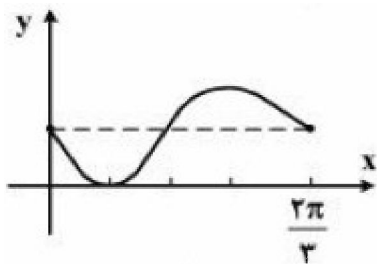
(۱)  $-\frac{1}{2}$



۲۰۶- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin mx$  است. مقدار تابع

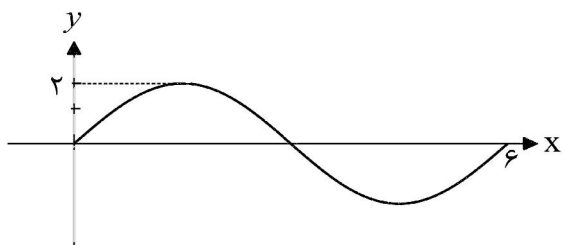
در نقطه‌ی  $x = \frac{7\pi}{6}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۲



۲۰۷- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a + b$  کدام است؟

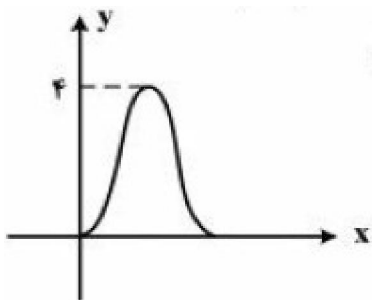
- (۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{7}{3}$  (۴)  $\frac{8}{3}$



۲۰۸- شکل زیر نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  در بازه  $(0, 4)$  است.

**b** کدام است؟

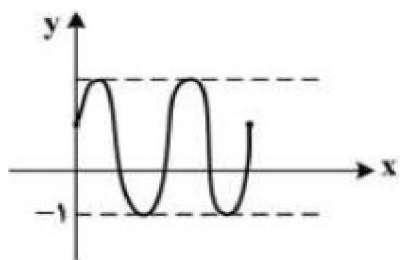
- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳) ۱      (۴) ۲



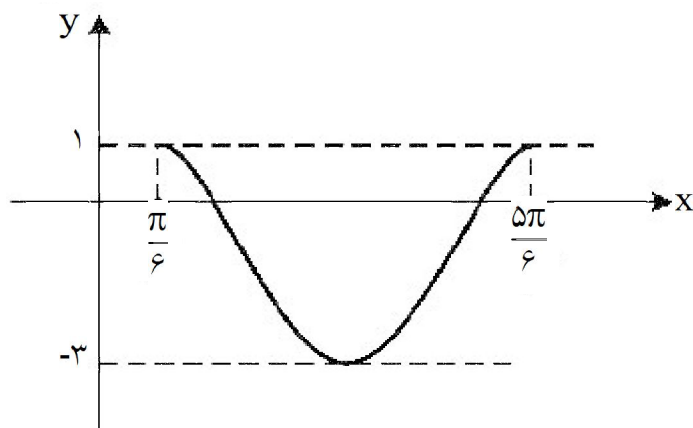
۲۰۹- شکل زیر نمودار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$  در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.

**a + b** کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶



۲۱۰- شکل زیر، نمودار تابع  $y = a\sin(bx) + c$  در یک بازه تناوب است. مقادیر  $b$  و  $c$  کدام اند؟



$b = \frac{3}{2}, c = -1$  (۴)

$b = \frac{3}{2}, c = -2$  (۳)

$b = 3, c = -2$  (۲)

$b = 3, c = -1$  (۱)

۲۱۱- شکل زیر، نمودار تابع  $y = a\sin(bx) + c$  را در یک بازه تناوب، نشان می دهد.

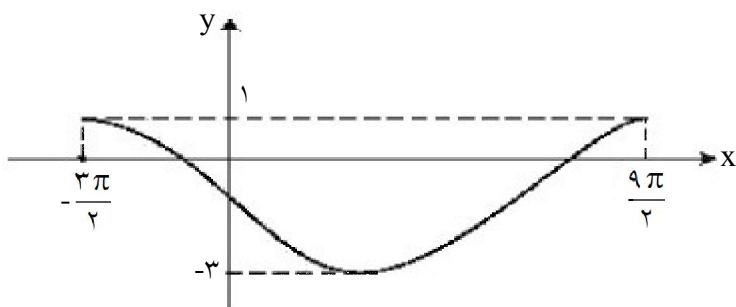
نسبت  $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

-۶ (۴)

-۴ (۳)

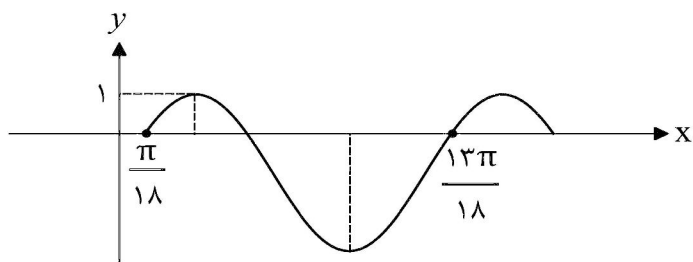
-۳ (۲)

-۲ (۱)



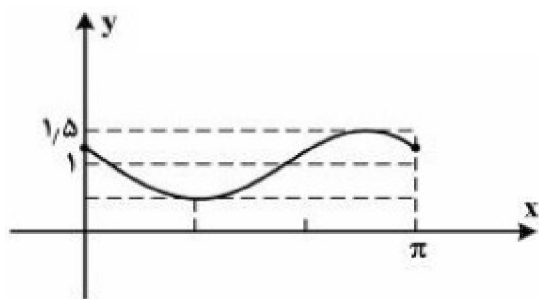
۲۱۲- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۱      (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۲



۲۱۳- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۱      (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۲

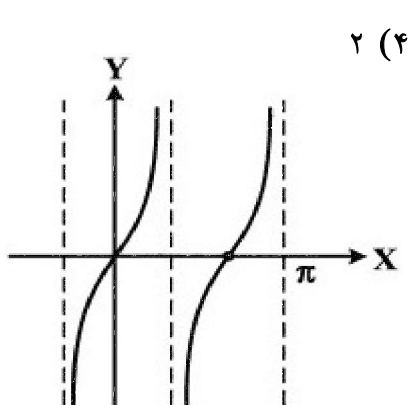


۲۱۴- نمودار تابع  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ ، روی بازه  $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$  در چند نقطه محور  $x$ ها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵



۲۱۵- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \tan bx$  است.  $b$  کدام است؟



۲ (۴)

 $\frac{2}{3}$  (۳) $\frac{3}{2}$  (۲) $\frac{1}{2}$  (۱)

۲۱۶- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع  $y = \text{tg}(ax)$  در آن اکیداً نزولی است برابر ۴ می‌باشد. مقدار  $f\left(\frac{16}{3}\right)$

کدام است؟

 $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴) $-\sqrt{3}$  (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۲)

۱ (۱)

۲۱۷- اگر  $f(x) = \sin x$ ،  $g(x) = \tan x$  و  $x \in (\pi, 2\pi) - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$  باشد، کدام درست است؟

(۲) همواره  $g(x) < f(x)$

(۱) همواره  $g(x) > f(x)$

(۴) ابتدا  $g(x) > f(x)$  و سپس  $g(x) < f(x)$

(۳) ابتدا  $g(x) < f(x)$  و سپس  $g(x) > f(x)$

۲۱۸- اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$  کدام است؟

 $\frac{3}{4}$  (۴) $\frac{3}{8}$  (۳) $-\frac{3}{8}$  (۲) $-\frac{3}{4}$  (۱)

۲۱۹- کمترین مقدار عبارت  $2 + \sin x \cos x$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴)  $\frac{3}{2}$

۲۲۰- اگر  $\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x = 4$  ، مقدار  $\sin 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۲۱- اگر  $f(x) = x - \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sin^4 x$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$  (۲)  $-\frac{1}{2} \sin^2 2x$  (۳)  $\frac{1}{4} \cos^2 2x$  (۴)  $\frac{1}{2} \cos^2 2x$

۲۲۲- خلاصه شده عبارت  $\operatorname{tg} 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\sin 20^\circ$  (۲)  $\sin 40^\circ$  (۳)  $\cos 20^\circ$  (۴)  $\cos 40^\circ$

۲۲۳- عبارت  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \times \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  (۲)  $\operatorname{tg} \alpha$  (۳)  $\operatorname{Cotg} \alpha$  (۴)  $\operatorname{Cotg} \frac{\alpha}{2}$

-۲۲۴ حاصل  $\cos 105^\circ \cos 165^\circ$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} (4) \quad \frac{1}{4} (3) \quad -\frac{1}{4} (2) \quad -\frac{1}{2} (1)$$

-۲۲۵ حاصل  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12}$  کدام است؟

$$-\frac{1}{3} (4) \quad -\frac{1}{4} (3) \quad \frac{1}{4} (2) \quad \frac{1}{2} (1)$$

-۲۲۶ حاصل عبارت  $\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$  کدام است؟

$$1 (4) \quad \sin 20^\circ (3) \quad \cos 20^\circ (2) \quad -1 (1)$$

-۲۲۷ ساده شده عبارت  $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  کدام است؟

$$1 - \sin 2\alpha (4) \quad 1 + \sin 2\alpha (3) \quad \cos 2\alpha (2) \quad \cos \alpha - \sin \alpha (1)$$

-۲۲۸ ساده شده ی کسر  $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$  کدام است؟

$$16 \sin^{-4} 2\theta (4) \quad 16 \cos^{-4} 2\theta (3) \quad 8 \sin^{-2} 2\theta (2) \quad 8 \cos^{-2} 2\theta (1)$$

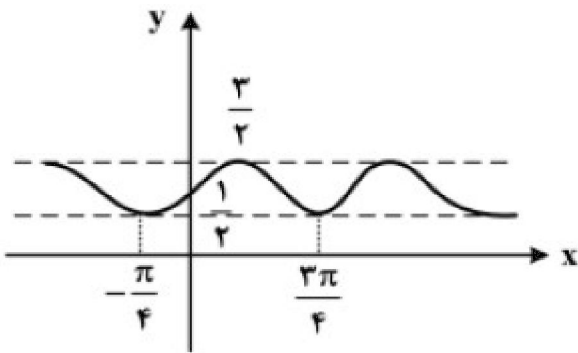
۲۲۹- حاصل عبارت  $\frac{2(1 + \sin x)}{1 + \cos x}$  کدام است؟

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 \quad (۲) \quad \left(1 + \operatorname{Cotg} \frac{x}{2}\right)^2 \quad (۱)$$

$$\left(1 - \operatorname{Cotg} \frac{x}{2}\right)^2 \quad (۴) \quad \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 \quad (۳)$$

۲۳۰- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟

$$۳ \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳) \quad \frac{۳}{۲} \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$



۲۳۱- اگر  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$  باشد،  $\tan 2\alpha$  چه قدر است؟

$$۲/۵ \quad (۴) \quad ۲/۴ \quad (۳) \quad ۱/۸ \quad (۲) \quad ۱/۵ \quad (۱)$$

۲۳۲- اگر  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = ۱$  باشد، مقدار  $\tan 2x$ ، کدام است؟

$$\frac{۳}{۲} \quad (۴) \quad \frac{۴}{۳} \quad (۳) \quad \frac{۳}{۴} \quad (۲) \quad -\frac{۳}{۲} \quad (۱)$$

۲۳۳- هرگاه در مثلث  $ABC$ ،  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{Cotg} \frac{A}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳۴- اگر  $5(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10}$  باشد مقدار  $\operatorname{tg} x$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۳

۲۳۵- اگر  $\frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8}$  باشد، حاصل  $\sin 4\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۲۳۶- اگر  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$  باشد، مقدار  $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2}\right)$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۳

۲۳۷- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin 2x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ ، در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{14\pi}{3}$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $\frac{9\pi}{2}$  (۴)  $5\pi$

۲۳۸- تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$ ، در بازه‌ی  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۲۳۹- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ ، در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$ ، کدام

است؟

۳π (۴)

۲π (۳)

 $\frac{7\pi}{2}$  (۲) $\frac{5\pi}{2}$  (۱)

۲۴۰- معادله‌ی  $\cos^3 x + 3 \cos x = 4$ ، چند جواب در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  دارد؟

۲ (۴)

۴ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

۲۴۱- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ ، در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

۵π (۴)

۴π (۳)

۳π (۲)

 $\frac{5\pi}{2}$  (۱)

۲۴۲- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ، کدام است؟

 $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۴) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$  (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۱)

۲۴۳- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sqrt{2} \tan x \cos^2 x = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۴۴- معادله‌ی  $\tan x + \cot x = \sqrt{3}$  چند ریشه در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۴۵- تعداد جوابهای معادله  $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3}$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۴۶- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin^3 x + \sin x}{\sin x} = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۴۷- جواب کلی معادله  $1 + \cos 2x = 2\cos^2 2x + \sin 2x$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $k\pi$  (۳)  $(2k+1)\pi$  (۴)  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$

۲۴۸- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

۲۴۹- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$4\pi \quad (۴) \quad \frac{7\pi}{2} \quad (۳) \quad 3\pi \quad (۲) \quad \frac{5\pi}{2} \quad (۱)$$

۲۵۰- انتهای کمان  $x$  از معادله  $\cos 2x \sin x = \cos 2x$  بر روی دایره مثلثاتی رأسهای کدام چند ضلعی است؟

- (۱) شش ضلعی غیر منتظم  
(۲) پنج ضلعی منتظم  
(۳) شش ضلعی منتظم  
(۴) پنج ضلعی غیر منتظم

۲۵۱- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 3x + \sin x = 0$ ، کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad k\pi \quad (۲) \quad k\frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

۲۵۲- جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ، با شرط  $x \neq k\pi$ ، که در آن  $k$  یک

عدد صحیح است، کدام است؟

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۴) \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad \frac{2k\pi}{3} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$



۲۵۳- جواب کلی معادله ی مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۵۴- جواب های کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است. مجموعه

مقادیر  $i$  کدام است؟

(۱)  $\{7, 9\}$  (۲)  $\{1, 3, 5\}$  (۳)  $\{1, 4, 7\}$  (۴)  $\{1, 5, 9\}$

۲۵۵- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$  به کدام صورت است؟

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۲۵۶- مجموع تمام جواب های معادله مثلثاتی  $\sin^4 x = \cos^4 x$ ، در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{7\pi}{4}$  (۲)  $\frac{9\pi}{4}$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

۲۵۷- جواب های معادله  $2\cos x(\sin x + \cos x) = 1$  به کدام صورت است؟

(۱)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۲۵۸- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ ، در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  برابر

کدام است؟

$\frac{7\pi}{4}$  (۴)

$\frac{3\pi}{2}$  (۳)

$\frac{5\pi}{4}$  (۲)

$\frac{3\pi}{4}$  (۱)

۲۵۹- نمودار تابع  $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ ، روی بازه  $[-1, 1]$  در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

۷۴- با قرار دادن  $x = 2$  و  $x = -2$  در معادله داده شده، داریم:

$$\begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ f(-2) - 2f(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ -2f(-2) + 2f(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow 5f(2) = -5 \Rightarrow f(2) = -1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۷۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر  $g(x) = b$  ثابت باشد، داریم:

$$h(1) = |1 + 5| = 6 = f(1) - g(1) = 1 - b \Rightarrow b = -5$$

$$h(-1) = f(-1) - g(-1) = -1 - (-5) = 4$$

۷۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) + 2f(0) = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow f(0) + 2f(1) = 4$$

$$\begin{cases} f(1) + 2f(0) = 2 \\ -2 \{ f(0) + 2f(1) = 4 \} \Rightarrow -2f(1) = -6 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow f(0) = 0 \end{cases}$$

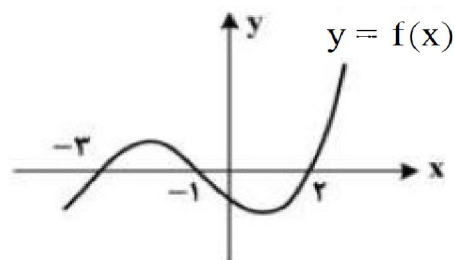
نقاط  $(0,0)$  و  $(1,2)$  روی خط  $y = mx + h$  قرار دارند.

خط از مبدأ مختصات می‌گذرد، در نتیجه  $h = 0$

$$2 = m(1) \Rightarrow m = 2$$

$$m + h = 2 + 0 = 2$$

۷۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{(x+1) \cdot f(x)}_{g(x)}} \text{ دامنه تابع } = ?$$

x	-3	-1	2
x+1	-	-	+
f(x)	-	+	-
g(x)	+	-	+

$$g(x) \geq 0 \\ (-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [2, +\infty)$$

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} = \frac{x^3 + 3 - 1}{x^2 + 3} = 1 - \frac{1}{x^2 + 3}$$

۷۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$0 < \frac{1}{x^2 + 3} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{x^2 + 3} < 1 \Rightarrow \left[ \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} \right] = 0$$

$$f(x) = 0, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0, \quad D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۷۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تساوی دو تابع  $f$  و  $g$  فقط در گزینه‌ی ۴ درست است، زیرا:

$$f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x}$$

$x \geq 0$  اشتراک  $x \leq 1 \Rightarrow D_f = [0, 1] = D_g$

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow \text{بردها هم یکسان است چون ضریب رادیکال‌ها است.}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱:  $D_g = (0, +\infty) \neq D_f = \mathbb{R} - \{0\}$  هر چند:  $R_f = R_g = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

گزینه ۲:  $D_g = \mathbb{R} - \{0\} \neq D_f = \mathbb{R}$  ضمناً:  $R_f = \{1\} \neq R_g = \{-1, 1\}$

گزینه ۳:  $D_g = \mathbb{R} - \{1\} \neq D_f = \mathbb{R}$ ;  $R_f = R_g = \{1\}$

۸۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{4-x^2}{1+4x^2} \Rightarrow x^2(4y+1) = 4-y \Rightarrow x^2 = \frac{4-y}{1+4y} \Rightarrow -\frac{1}{4} < y \leq 4$$

دامنه تابع  $[-\frac{1}{4}, 4]$  است.

۸۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \sqrt{5 - (x^2 - 4x)} \Rightarrow y = \sqrt{9 - (x-2)^2}$$

پیدا است که  $0 \leq y \leq \sqrt{9}$  در نتیجه  $y \in [0, 3]$

۸۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{تابع جدید: } y = ((x+2)^2 - (x+2) - 3) - 9 = x^2 + 3x - 10 < 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

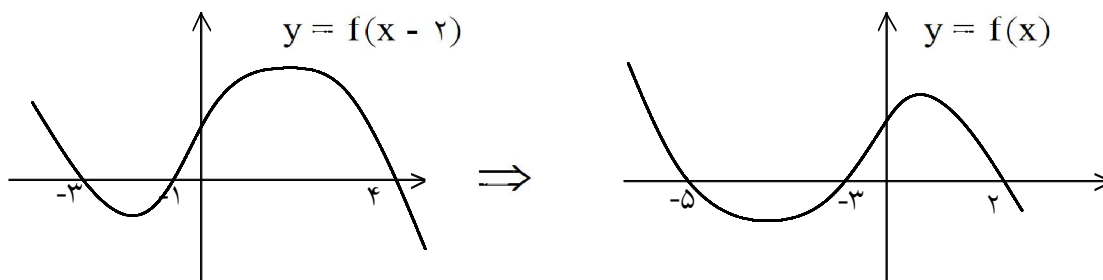
۸۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{تابع جدید: } y = (-(x-3)^2 + 2(x-3) + 5) - 2 \Rightarrow y = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow -x^2 + 7x - 12 > 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

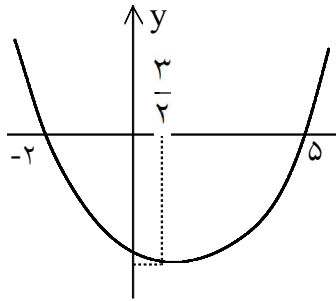
$x = 3, x = 4$

۸۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که نمودار  $y = f(x-2)$  داریم برای رسم  $y = f(x)$  باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم.



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \xrightarrow{\text{هم علامت باشند و } f(x) \text{ و } x \text{ باید}} \begin{cases} x \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \\ x \leq 0 \text{ و } f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [-5, -3] \cup [0, 2]$$



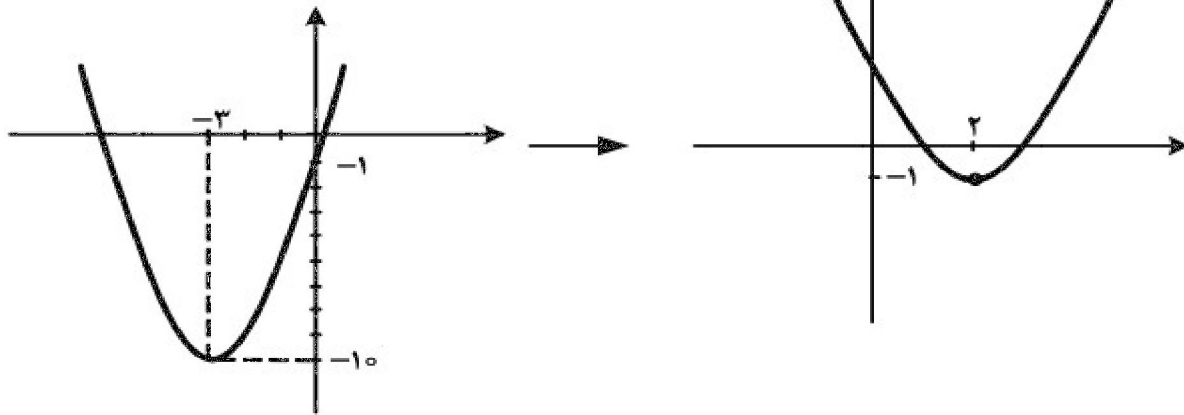
۸۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $y = x^2 - 3x - 10$  یک سهمی قائم است که محور Xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

با توجه  $y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -2$  به آن که سهمی محور Xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کرده است. اگر سهمی را ۲ واحد به طرف Xهای مثبت انتقال دهیم، سهمی از مبدأ خواهد گذشت و دیگر طول تلاقی‌اش با محور Xها منفی نیست. به نمودار روبه‌رو دقت کنید.

۸۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حالت مربع کامل دو تابع به همراه نمودارشان به شکل زیر است:

$$y = x^2 + 6x - 1 = (x + 3)^2 - 10$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

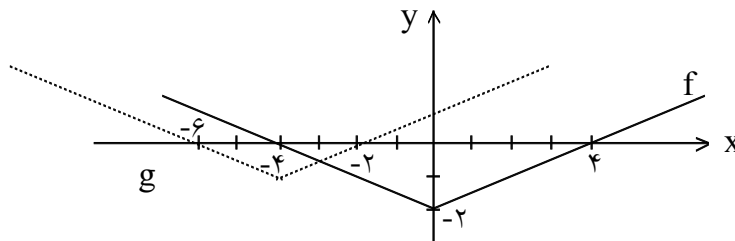


کافی است نمودار  $y = x^2 + 6x - 1$ ، ۵ واحد به راست و ۹ واحد به بالا منتقل شود.

۸۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{2}|x| - 2$$

x	-4	0	4
y	0	-2	0

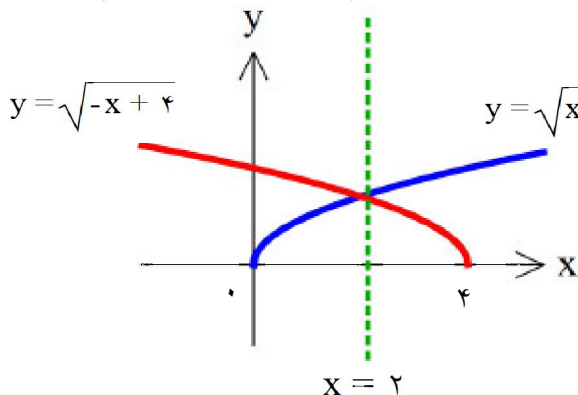


$$g(x) = \left(\frac{1}{2}|x + 4| - 2\right) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}|x + 4| - 1$$

x	-6	-4	-2
y	0	-1	0

$$\text{نقطه‌ی برخورد: } \frac{1}{2}(x + 4) - 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x + 4 - 2 = -x - 4 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$

۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باید به جای  $x$ ،  $x - 4$  قرار دهیم (۴ واحد به طرف راست) و سپس حاصل را قرینه کنیم (قرینه نسبت به محور  $y$  ها). دو نمودار  $y = \sqrt{x}$  و  $y = \sqrt{-(x - 4)}$  را رسم می‌کنیم.



۸۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با کمک ترسیم قرینه نسبت به مبدأ مختصات و انتقال روی محور عرض‌ها داریم:

$$y = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -(-x - 1)^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} y = -(-x - 1)^2 + 4$$

$$-(-x - 1)^2 + 4 = (x - 1)^2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm 1$$

۹۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه محور } x \text{ ها}} f(x) = -x^2 + 2x \xrightarrow{+16 \text{ محور } y \text{ ها}}$$

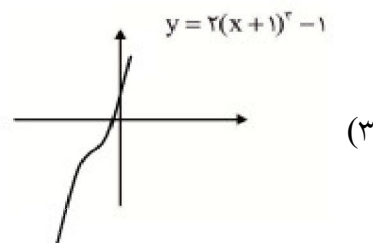
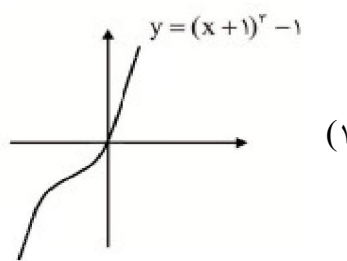
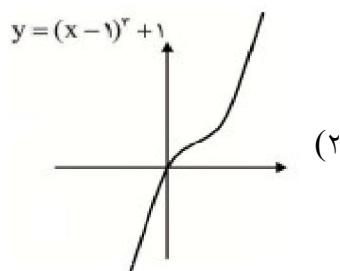
$$f(x) = -x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ق ق} \\ x = 4 \text{ ق ق } (x > 1) \end{cases} \Rightarrow A \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \end{vmatrix}$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۹۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

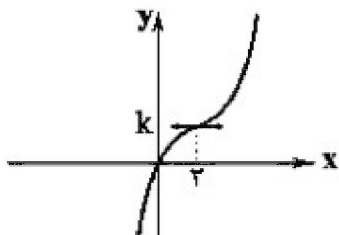
ابتدا عبارت‌ها را به صورت مکعب کامل در می‌آوریم فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.



گزینه ۴ نزولی بوده و نمی‌تواند جواب باشد.

۹۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع مورد نظر به صورت  $y = (x - 2)^3$  است که از انتقال تابع  $f(x) = x^3$  به دست آمده است و مراحل تشکیل تابع به صورت مقابل است:



ابتدا  $x^3$  را دو واحد به سمت راست و سپس  $k$  واحد به صورت عرضی منتقل کرده‌ایم. حداکثر مقداری که می‌توان تابع را به بالا منتقل کرد تا از ناحیه‌ی دوم عبور نکند، به صورت مقابل است:

پس باید  $f(0) \leq 0$  باشد

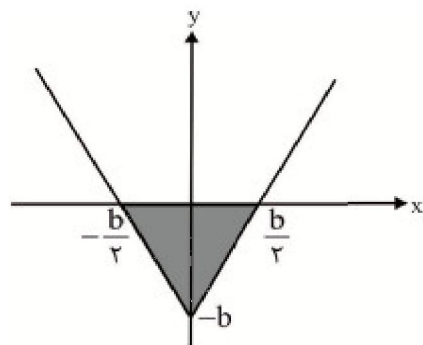
$$f(0) = k - 8 \leq 0 \Rightarrow k \leq 8$$

۹۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

متناظر نقطه  $A(x, y) \in f$  نقطه  $A'(\frac{x_0 + 1}{2}, 3y_0 + 4)$  است، پس:

$$A'(1, -8)$$

۹۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع حاصل  $y = |2x| - b$  است. پس:



$$\Rightarrow 72 = \frac{1}{2} \times b \times b \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$$

۹۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دامنه و برد تابع  $f(x)$  به ترتیب  $[-1, 5]$  و  $[2, 3]$  می‌باشد، پس دامنه و برد تابع  $g(x) = -2f(-3x - 4) + 1$  برابر است با:

$$D_g = \left[ \frac{5+4}{-3}, \frac{-1+4}{-3} \right] = [-3, -1]$$

$$\Rightarrow D_f \cap D_g = \{-3\}$$

$$R_g = [-2(3) + 1, (-2)(2) + 1] = [-5, -3]$$

۹۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر  $x^2 + x < 0$  باشد، نتیجه می‌گیریم که  $-1 < x < 0$  است. حال برای تعیین حاصل

$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$  کافی است حدود عبارتهای داخل براکت‌ها را مشخص کنیم. داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x < 0 \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ -1 < x < 0 \xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌رسانیم}} 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \end{array} \right. \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = (-1) + 0 + (-1) + 0 = -2$$

۹۷- یادآوری: تعریف جزء صحیح  $n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  می‌دانیم قدرمطلق  $1 - \sqrt{2}$  کوچکتر از یک است پس داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq (1 - \sqrt{2})^6 < 1 \\ (1 - \sqrt{2})^6 + (1 + \sqrt{2})^6 = 198 \end{cases} \Rightarrow 197 < (1 + \sqrt{2})^6 < 198 \Rightarrow [(1 + \sqrt{2})^6] = 197$$

گزینه ۳ صحیح است.

۹۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = (x - 3) + (x - 4) = 2x - 7$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{5}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در فاصله  $(3, 4)$  نمی‌باشند.

۹۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow$$

$$0 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 1 \leq 2x - 2[x] + 1 < 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 3$$

و برد تابع فاصله نیم‌باز  $[1, 3)$  است.

۱۰۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{n^2 - 2n} = \sqrt{(n-1)^2 - 1} \Rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

$$\sqrt{4n^2 - 3n + 1} = \sqrt{(2n-1)^2 + n} \Rightarrow 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = (2n-1) - 2(n-2) = 3$$

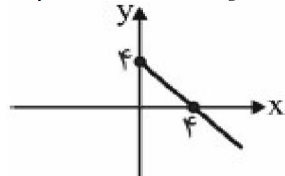
راه حل دوم: چون این رابطه برای همه اعداد طبیعی  $n \geq 3$  برقرار است پس:

$$n=3 \Rightarrow \text{عبارت} = [\sqrt{36-9+1}] - 2[\sqrt{3}] = 3$$

۱۰۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = f(x) \times g(x) = (2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x}) = 4 - x$$

$$D_f : x \geq 0, D_g : x \geq 0 \xrightarrow{\text{اشتراک دامنه ها}} D_{f \times g} : x \geq 0$$



بنابراین خط  $y = 4 - x$  فقط برای  $x \geq 0$  باید رسم شود:

۱۰۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{2}{1}\right), \left(2, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{4}{3}\right) \right\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

$$\frac{f}{g} + \frac{g}{f} = \left\{ \left(1, 2 + \frac{1}{2}\right), \left(2, 1 + \frac{1}{2}\right) \right\} = \left\{ \left(1, \frac{5}{2}\right), \left(2, 2\right) \right\}$$



۱۰۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

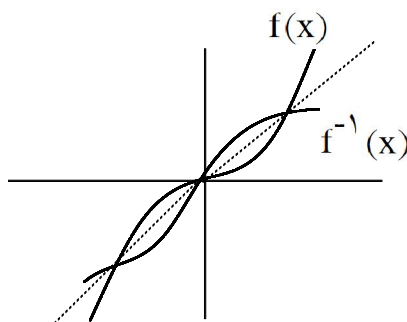
الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

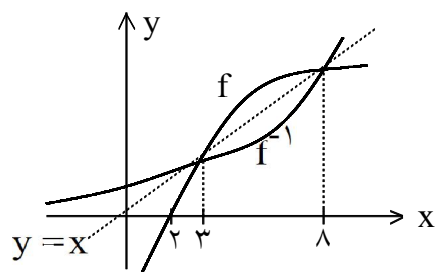
ب) شرط یک‌به‌یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند. اما از میان دو مقدار به دست آمده برای  $a$ ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف و ب کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط  $a = 2$  قابل قبول می‌باشد. زیرا اگر  $a = -1$  باشد، دو زوج مرتب  $(-1, 4)$  و  $(-1, 5)$  در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه  $(a, b) = (2, 3)$  می‌باشد.

۱۰۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



۱۰۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} x - f^{-1}(x) &\geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x) \\ &\xrightarrow{\text{f اکیدا صعودی}} f(x) \geq f(f^{-1}(x)) \\ &\Rightarrow f(x) \geq x \Rightarrow x \in [3, 8] \end{aligned}$$

$$x + 2\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 2\sqrt{x} = 15 \Rightarrow x = 9$$

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

$$f^{-1}(20) = ?$$

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$(x - 25)(x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 & \text{ق ق} \\ x = 25 & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$g^{-1}(16) = ?$$

$$\frac{9x + 6}{1 - x} = 16 \Rightarrow 16 - 16x = 9x + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

۱۰۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۰۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} = \{(2, 5), (3, 7), (1, 4), (6, 3), (1, 9)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 7$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{5}$$

$$\begin{array}{c} f^{-1} \\ \xrightarrow{\quad} \\ 3 \end{array} \xrightarrow{\quad} 7 \xrightarrow{\quad} 8 \Rightarrow f(g(8)) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{array}{c} f \\ \xleftarrow{\quad} \\ 3 \end{array} \xleftarrow{\quad} 7 \xleftarrow{\quad} 8$$

۱۰۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ترکیب توابع و مفهوم وارون یک تابع داریم:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$$

$$g^{-1}(-9) = b \Rightarrow g(b) = -9 \Rightarrow \frac{3-b}{2} = -9 \Rightarrow b = 21$$

$$f^{-1}(21) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 21 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 9 = 21 \xrightarrow{x \geq 2} \alpha = 6$$

۱۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع  $f^{-1}(2x) - x^2$  یک سهمی است. پس  $\{3, -1\}$  صفرهای آن هستند:

$$\begin{cases} f^{-1}(-2) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 1 \Rightarrow f(1) = -2 \\ f^{-1}(6) - 9 = 0 \Rightarrow f^{-1}(6) = 9 \Rightarrow f(9) = 6 \end{cases}$$

حال تابع  $y = f(x)$  را به دست می‌آوریم و تلاقی آن را با  $y = -x$  پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 9a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1, b = -3$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x - 3 = -x \Rightarrow x = 1/5$$

۱۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \xrightarrow{2^x = A} \frac{A - \frac{1}{A}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{A^2 - 1}{A} = 4$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$A = 2 + \sqrt{5} \text{ ق ق } \Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \text{ غ ق ق}$$

۱۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2 \Rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{3}) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{t = 2^x} \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{3}) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} < 0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۱۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نیمساز ناحیه چهارم  $y = -x$  است.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$-x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

دامنه  $x < 0$  است پس  $x = -1$  قابل قبول است.

$$(-1, 1) \in f \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$$

پس طول تقاطع  $x = 1$  است.

۱۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول: نیمساز ناحیه دوم  $y = -x$  است بنابراین نقطه موردنظر در تابع وارون برابر است با: (چون در ربع دوم است باید  $a$  منفی باشد)

$$(a, -a) \in f^{-1} \Rightarrow (-a, a) \in f \Rightarrow f(-a) = a$$

$$\Rightarrow -a + \frac{1}{2a} = a \Rightarrow \frac{1}{2a} = 2a \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} & \text{ق ق غ} \\ a = -\frac{1}{2} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

$x = -2$ بد	}	$f^{-1}(x) = -x$	$f(x) = x - \frac{1}{2x}$	روش دوم:
		$f^{-1}(-1) = 1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1$	
$x = -\frac{1}{2}$	}	$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ خوب	

۱۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن قرینه‌ی هر نقطه یا منحنی نسبت به نیمساز ربع اول، کافی است

$$ax + by = 8 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } y=x} bx + ay = 8$$

جای  $x$  و  $y$  را باهم عوض کنیم.

این خط باید بر خط  $2x - 3y = b$  منطبق باشد، پس:

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{-3} = \frac{8}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

۱۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x + 4 \Rightarrow xy - x = 2y + 4 \Rightarrow x(y-1) = 2y+4$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{2x+4}{x-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}, \quad x \neq 1$$

برای یافتن محل برخورد دو نمودار باید برابر یکدیگر قرار دهیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 4x - 8 = x^2 + 3x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

این دو تابع در دو نقطه متقاطع هستند.

۱۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است عرض محل برخورد  $f$  با وارون  $g^{-1}$  را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} g(x) = \frac{x-9}{2} = y \Rightarrow x-9 = 2y \Rightarrow x = 2y+9 \Rightarrow g^{-1}(x) = 2x+9 \\ f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad x \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 2x+9 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{قق ق} \Rightarrow y = 2(6) + 9 = 21 \\ x = -2 & \text{قق غ} \end{cases}$$

۱۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان } 2} y^2 = x \Rightarrow y = x^2$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{-x} > 0 \Rightarrow -\sqrt{-x} < 0 \Rightarrow y_2 < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان } 2} y^2 = -x \Rightarrow y = -x^2$$

$$\Rightarrow y = x|x|$$

$$y_1 \cup y_2 = \mathbb{R} \xrightarrow[\text{تابع معکوس است}]{\text{برد تابع دامنه ی}} D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad (\text{البته در این سؤال بررسی دامنه لزومی نداشت})$$

۱۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$R_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان } 2} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2, \quad y < 0 \\ y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان } 2} y^2 = x \Rightarrow x = y^2, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = x|x|$$

$$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} 2x + 4 - 2x & x > 2 \\ 2x - 4 + 2x & x \leq 2 \end{cases} \quad \text{۱۲۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x - 4 & x \leq 2 \end{cases}$$

به ازای  $x \leq 2$  تابع یک به یک و وارون پذیر است.

$$x \leq 2 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

$$y = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad (x \leq 4)$$

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 1| = \begin{cases} (2x - 6) - (x + 1) & x \geq 3 \\ -2x + 6 - (x + 1) & -1 \leq x < 3 \\ -2x + 6 - (-x - 1) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 7 & x \geq 3 \\ -3x + 5 & -1 \leq x < 3 \\ -x + 7 & x < -1 \end{cases}$$

۱۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه‌ی  $y = x - 7$  برای  $x \geq 3$  صعودی است.

$$x \geq 3 \xrightarrow{-7} x - 7 \geq -4 \Rightarrow y \geq -4$$

$$y = x - 7 \Rightarrow y + 7 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 7$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین  $y \geq -4$  برای تابع معکوس محدوده‌ی دامنه می‌شود.

۱۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
چون  $2 \leq 2 - \sqrt{x - 3} \leq 2$  پس  $R_f = (-\infty, 2]$  است و داریم:

$$D_g = D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 2]$$

۱۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار و طبق تعریف وارون:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

بنابراین ضابطه‌های  $f(x) = x + 1$  با دامنه  $R$  و  $f(x) = \sqrt{x} - 1$  با دامنه‌ی  $[0, +\infty)$  و نیز  $1 - \sqrt{x - 1}$

با دامنه‌ی  $(1, +\infty)$  حذف می‌شوند. فقط  $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$  با دامنه  $(-\infty, 1]$  می‌تواند جواب سؤال باشد.

۱۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{2}$$

با توجه به ماشین داده شده  $g(x)$  همان  $f^{-1}(x)$  است لذا:

۱۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = -x - 1 \quad \text{or} \quad 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -2$$

۱۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را تشکیل می‌دهیم:

$$f \circ g = \{(1, 1), (3, 7), (a, 2), (b, 7)\} \quad (4, 2) \in f \circ g \Rightarrow a = 4$$

$$g(f(4)) = 1 \Rightarrow g(5) = 1 \Rightarrow b = 5$$

با توجه به این که  $(4, 1)$  در  $g \circ f$  است پس:

۱۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & x \in Z \\ g(-1) & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 & x \in Z \\ -2 & x \notin Z \end{cases} = -2$$

پس  $g(f(x))$  همواره برابر  $-2$  است.

۱۲۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = x - \sqrt{x}, \quad f(6) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g(x) = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

بنابراین ریشه‌ها ۹ و  $\frac{1}{4}$  می‌باشند.

۱۲۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$-x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	-	-	+	-
$-x^2 + x + 2 > 0$			ج	

$$D_f = (-1, 2)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{مثبت است } \left(\frac{1}{4}\right)^x} \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{-2x} < 2^1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$D_g: x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x > 15 \text{ یا } x < 0$$

$$D_f: 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid \text{Log}(x^2 - 15x) \leq 2\}$$

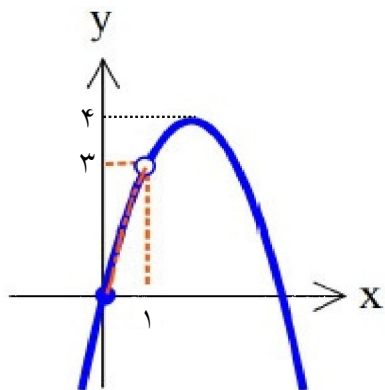
$$\Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 20 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{f \circ g} = [-5, 0) \cup (15, 20]$$

۱۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۱۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



باید صدق کند  $R_{f(x)} = D_{g(x)}$

$$R_{f(x)} = 0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

g در این بازه صعودی است

۱۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 = 2(2x + 1)^2 - (2x + 1) + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

۱۳۳- با توجه به ضابطه داده شده :

$$f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \\ g(x) = x - \frac{1}{x} \end{array} \right\}$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم  $f(x) = 2x^2 + 4$  و  $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$  است. برای تعیین مقدار  $g(-2)$  ، ابتدا خودمان با داشتن ضابطه  $f$  ضابطه  $f(g(x))$  را ساخته و برابر  $4x^2 + 6x$  قرار می‌دهیم و آن‌گاه با جایگذاری  $x = -2$  ، مقدار  $g(-2)$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 2g^2(x) + 4 \\ f(g(x)) = 4x^2 + 6x \end{cases} \Rightarrow 2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \Rightarrow g^2(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\xrightarrow{x=-2} g^2(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

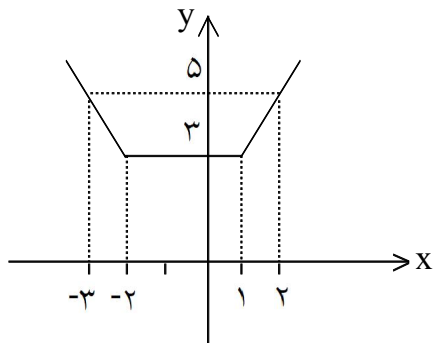
۱۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = \frac{g(x) + 1}{g(x) - 1} = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{g(1) + 1}{g(1) - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1) + 2 = 3g(1) - 3 \Rightarrow g(1) = 5$$

۱۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را به کمک نقطه یابی رسم می کنیم.

$$y = |x + 2| + |x - 1|$$



نقاط شکست

x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5

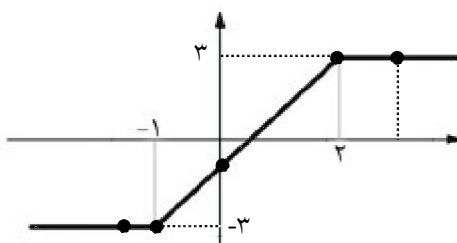
پس تابع در فاصله ی  $(-2, -\infty)$  اکیداً نزولی است.

۱۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک نقطه یابی نمودار  $f$  را رسم می کنیم.

$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|$$

نقاط شکست

x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3

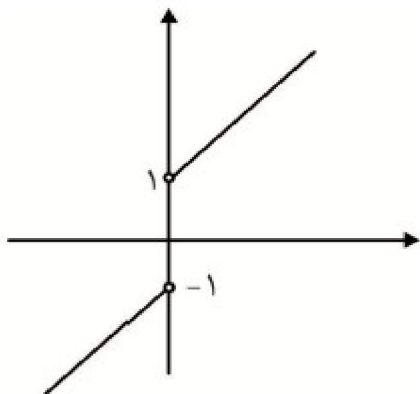


پس  $f$  در بازه ی  $(-1, 2)$  اکیداً صعودی است.

۱۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع با ضابطه 
$$\begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ a & x = 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$
 و نمودار آن به شکل مقابل

است، پس  $a$  تنها می تواند ۳ مقدار صحیح ۱ و -۱ و ۰ را اختیار کند.



۱۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تابع  $g(x) = -x^3$  تابعی اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$g(3x - 2) - g(x^2) \geq 0 \Rightarrow g(x^2) \leq g(3x - 2) \Rightarrow x^2 \geq 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow [a, b] = [1, 2] \Rightarrow b - a = 2 - 1 = 1$$

۱۴۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$

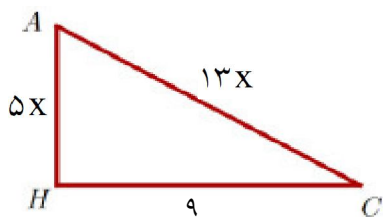
پس علامت  $xf(x)$  همواره نامنفی است و دامنه آن برابر دامنه  $f$  است.



۱۸۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا مقدار  $AC = ۳$ ،  $\cotg C = \frac{\sqrt{5}}{۲} \Rightarrow \operatorname{tg} C = \frac{۲}{\sqrt{5}}$  را در نظر می‌گیریم:

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \times \sin C \Rightarrow AH = ۹۶ \times \frac{۲}{۳} = ۶۴$$

۱۸۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون مقدار  $\sin$  را داریم می‌توان به این صورت در نظر گرفت:  
با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورت داریم:



$$(13x)^2 = (5x)^2 + 81 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{144} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$AH = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$

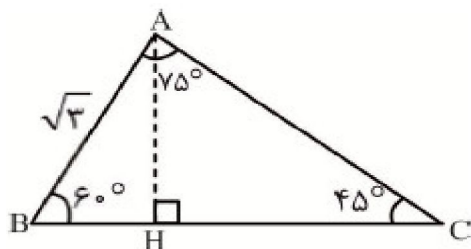
۱۸۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$4 \times 18 = 72$$

۱۸۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$AH = \sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{3}{2}, \hat{C} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

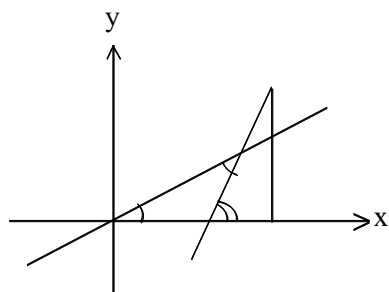
$$\Rightarrow CH = AH = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۸۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{-2\cos\alpha - 1} > 0 \Rightarrow \sin\alpha \cos\alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0 \\ \sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0 \end{cases}$$

$$-2\cos\alpha - 1 > 0 \Rightarrow -2\cos\alpha > 1 \Rightarrow \cos\alpha < -\frac{1}{2}$$

در نتیجه  $\cos\alpha < 0$ ، بنابراین  $\sin\alpha > 0$  یعنی انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه دوم قرار دارد.



۱۸۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شیب خط  $y = \sqrt{3}x$  برابر با  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است، پس این خط با محور  $x$  زاویه  $30^\circ$  می‌سازد با توجه به شکل زاویه خط مطلوب با محور  $x$  ها  $60^\circ$  درجه است.

$$A(\sqrt{3}, 1), m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

معادله خط  $y - 1 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$  یا  $y = \sqrt{3}x - ۲$  پس عرض از مبدأ آن

۲- است.

۱۸۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \left( \operatorname{Sin}^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{Sin}^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}} (1 - \operatorname{Sin}^2 x) = \frac{1}{|\operatorname{Cos} x|} \operatorname{Cos}^2 x$$

$$= |\operatorname{Cos} x| \xrightarrow{\pi < x < \frac{3\pi}{2}} -\operatorname{Cos} x$$

۱۸۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \left( \frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Sin} x \right) = \frac{\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}}} \left( \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Sin} x} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} \times |\operatorname{Cos} x| \left( \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sin} x} \right) = -\operatorname{Cos}^2 x$$

۱۹۰- با ساده‌سازی رابطه دوم خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \operatorname{Sin} x \operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x} < 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Cos} x} = \operatorname{Cos} x < 0$$

بنابراین کمان  $x$  در ربع دوم و سوم است. با ساده‌سازی رابطه اول :

$$\operatorname{Sin} x + \operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{Cos} x) > 0$$

می‌دانیم همواره  $1 + \operatorname{Cos} x \geq 0$  پس  $\operatorname{tg} x > 0$  یعنی انتهای کمان در ربع اول یا سوم قرار دارد. با توجه به نتایج بدست آمده، ربع سوم در هر دو نتیجه مشترک می‌باشد. پس انتهای کمان  $x$  در ربع سوم بوده و گزینه ۳ صحیح است.

$$191- \text{گزینه } 4 \text{ پاسخ صحیح است. می‌دانیم } \cot^4 \theta = \frac{\operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Sin}^4 \theta} - \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \theta} - \frac{\operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 \theta - \operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta - \operatorname{Cos}^4 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta (1 - \operatorname{Cos}^2 \theta)}{\operatorname{Sin}^4 \theta}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta \operatorname{Sin}^2 \theta}{\operatorname{Sin}^4 \theta} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \theta}{\operatorname{Sin}^2 \theta} = \cot^2 \theta$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{1 + \operatorname{Cos} \alpha}} = \sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \alpha)}{(1 + \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \alpha)}}$$

۱۹۲

$$= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)^2}{1 - \operatorname{Cos}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)^2}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} = \operatorname{Cotg} \alpha$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۹۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{4}$$

۱۹۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(285) &= \operatorname{tg}(270 + 15) = -\operatorname{Cotg} 15 \\ \operatorname{tg}(-165) &= -\operatorname{tg}(180 - 15) = \operatorname{tg} 15 \\ \operatorname{Sin}(1095) &= \operatorname{Sin}(6\pi + 15) = \operatorname{Sin} 15 \\ \operatorname{Cos}(255) &= \operatorname{Cos}(270 - 15) = -\operatorname{Sin} 15 \\ \operatorname{tan}(285)\operatorname{tan}(-165) - \operatorname{Sin}(1095)\operatorname{Cos}(255) &= \underbrace{-\cot 15 \times \tan 15 - \operatorname{Sin} 15(-\operatorname{Sin} 15)}_1 \end{aligned}$$

$$= -1 + \operatorname{Sin}^2 15 = -(1 - \operatorname{Sin}^2 15) = -\operatorname{Cos}^2 15$$

۱۹۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} 300 = -\operatorname{tg} 60 = -\sqrt{3}, \operatorname{tg} 480 = -\operatorname{tg} 60 = -\sqrt{3}$$

$$\underbrace{2\pi - \frac{\pi}{3}} \quad \underbrace{3\pi - \frac{\pi}{3}}$$

$$\operatorname{Cos} 210 = -\operatorname{Cos} 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{Sin} 840 = \operatorname{Sin} 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underbrace{2\pi + \frac{\pi}{6}} \quad \underbrace{5\pi - \frac{\pi}{3}}$$

$$\left(-\sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

۱۹۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\operatorname{Sin} 250^\circ + \operatorname{Sin} 700^\circ}{\operatorname{Cos} 560^\circ - \operatorname{Cos} 110^\circ} = \frac{\operatorname{Sin}(270 - 20^\circ) + \operatorname{Sin}(2 \times 360 - 20^\circ)}{\operatorname{Cos}(3 \times 180 + 20^\circ) - \operatorname{Cos}(90 + 20^\circ)} = \frac{-\operatorname{Cos} 20^\circ - \operatorname{Sin} 20^\circ}{-\operatorname{Cos} 20^\circ + \operatorname{Sin} 20^\circ}$$

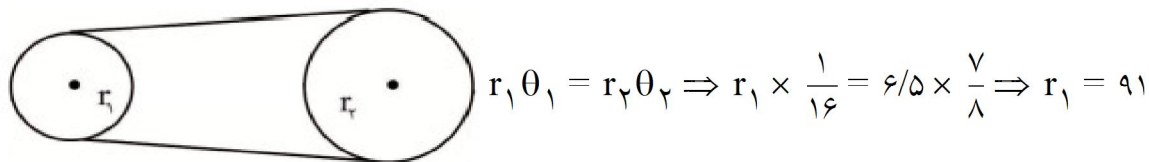
$$\xrightarrow[\operatorname{Cos} 20^\circ \text{ تقسیم می کنیم}]{\text{صورت و مخرج را بر}} \frac{-\operatorname{Cos} 20^\circ - \operatorname{Sin} 20^\circ}{-\operatorname{Cos} 20^\circ + \operatorname{Sin} 20^\circ} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{7}{3}$$

۱۹۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} &\operatorname{Sin}\left(\frac{17\pi}{3}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right)\operatorname{Sin}\left(\frac{-11\pi}{6}\right) \\ &= \operatorname{Sin}\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{Cos}\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{Sin}\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(-\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}\right)\left(-\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)\left(\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۱۹۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون طول کمان طی شده هر دو دایره برابر است، پس داریم:

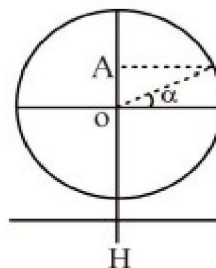


۱۹۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{OA}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = 1/5$$

$$\Rightarrow AH = 4 + 1/5 = 5/5$$



۲۰۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1 = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad \text{طول یال مخروط:}$$

با توجه به طول قوس:

$$5\alpha = 6\pi \Rightarrow \alpha = \frac{6 \times 180^\circ}{5} = 216^\circ$$

۲۰۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow y = a + b \cos(x)$$

با توجه به نمودار تابع که عرض از مبدأ آن می نیمم است بنابراین باید ضریب کسینوس منفی باشد ( $b < 0$ ) در نتیجه به ازای  $x = \pi$  باید نمودار ماکزیمم شود یعنی نقطه ماکزیمم با عرض ۳ دارای طول  $\pi$  است و تابع از نقاط  $A(\pi, 3)$  و

$B\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$  می گذرد.

$$A(\pi, 3) \Rightarrow a + b \cos(\pi) = 3 \Rightarrow a - b = 3$$

$$B\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$$

بنابراین  $a = 1$ ,  $b = -2$  می باشد.

۲۰۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$b < 0 \Rightarrow \text{Max} = a + |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow a - b = \frac{3}{2}$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow a + b\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} a - b = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۲۰۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow y = a + b \sin x$$

چون به ازای  $x > 0$ ، شروع صعودی است پس  $b > 0$ 

$$y_{\max} = a + b = 3$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow a + 2a = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 + 2 \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

۲۰۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شروع صعودی به ازای  $x > 0$  پس  $b > 0$  بنابراین برای آنکه تابع ماکزیممشود باید  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  باشد، در نتیجه  $x = \frac{\pi}{6}$  است یعنی تابع از نقطه  $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$  می‌گذرد.

$$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right) \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - b$$

$$f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

۲۰۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{ق ق } m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\cos(-\theta) = \cos \theta} |m| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow T = 4\pi \text{ تناوب تابع}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \xrightarrow{x = \frac{16\pi}{3}} f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۲۰۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{2\pi}{3} \text{، از روی ضابطه } T = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

چون با توجه به نمودار تابع باید ابتدا Min داشته باشد، بنابراین:  $m = 3$ 

$$\Rightarrow y = 1 - \sin(3x) \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{6}} y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin 3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$



۲۰۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار رسم شده متوجه می‌شویم دوره‌ی تناوب تابع ۶ می‌باشد و می‌دانیم

دوره‌ی تناوب تابع  $y = a \sin bx$  از رابطه‌ی  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  به دست می‌آید. پس داریم:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|\pi} = 6 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

از طرفی در تابع  $y = a \sin bx$  ما کزیمم تابع برابر  $|a|$  است. چون در حاصل ما کزیمم برابر ۲ است. پس:  
 $|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$  در انتها دقت شود با توجه به آن که تابع بلافاصله بعد از  $x = 0$  افزایش می‌یابد. باید علامت  $a$  و  $b$  یکسان باشند. یعنی برای  $a$  و  $b$  دو حالت ایجاد می‌شود.

$$a = 2, b = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 2 \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow a + b = \frac{7}{3}$$

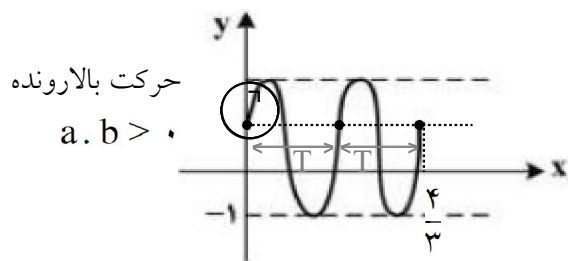
$$a = -2, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -2 \sin \left( \frac{-\pi x}{3} \right) = 2 \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow a + b = -\frac{7}{3}$$

۲۰۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع از مبدأ می‌گذرد بنابراین مختصات مبدأ  $O(0, 0)$  را درون تابع قرار می‌دهیم تا یک رابطه بر حسب  $a$  و  $b$  به دست آید.

$$(0, 0) \in f \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$y = a - a \cos \left( \frac{\pi}{2} x \right) = a \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} x \right) \right) \Rightarrow \max = 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -2$$

۲۰۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} 2T &= \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \\ T &= \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |b| = 3$$

$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases} \quad \text{هر دو جواب قابل قبول است.}$$

۲۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow \text{گزینه ۳ و ۴ غلط}$$

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \max : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \quad \text{گزینه ۲ غلط}$$

۲۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left( -\frac{3\pi}{2} \right) = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$\min = -3 \Rightarrow -|a| + c = -3 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

$$\max = 1 \Rightarrow |a| + c = 1$$

چون نمودار تابع سینوس با ضریب منفی است. (نمودار رو به پایین است). بنابراین  $a = -2$  و  $b = \frac{1}{3}$  می‌باشد.

$$b = \frac{1}{3}, a = -2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

البته می‌توان  $a = 2$ ,  $b = -\frac{1}{3}$  در نظر گرفت که جواب نهایی باز هم -۶ می‌شود.

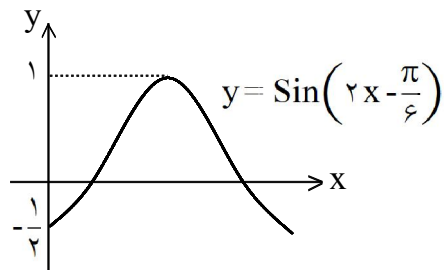
۲۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = a + 2 \sin(bx)$$

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = 3$$

با توجه به ضریب ۲، Sin باید بین ۲ و -۲ باشد و چون نمودار دارای ماکزیمم یک است بنابراین نمودار یک واحد پایین آمده است در نتیجه  $a = -1$  است.

$$a + b = -1 + 3 = 2$$



$$T = \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2 \quad \text{گزینه ۳ پاسخ صحیح است.}$$

با توجه به نمودار بالا باید  $a$  منفی باشد، بنابراین با توجه به

$$1 - a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \text{ماکزیمم (۱/۵) داریم:}$$

$$a + b = \frac{3}{2} \quad \text{در نتیجه:}$$

۲۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = (4k + 1) \frac{\pi}{8}$$

$$-\pi \leq (4k + 1) \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -8 \leq 4k + 1 \leq 12 \Rightarrow -2/25 \leq k \leq 2/75 \Rightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

۲۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع در بازه دو برابر دوره تناوب آن رسم شد است اگر دوره تناوب  $T$  فرض شود

$$\text{داریم } T = \frac{\pi}{b} \text{ و } T + T = \pi \text{ پس } T = \frac{\pi}{3} \text{ در نتیجه } \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \frac{\pi}{b} = \frac{3\pi}{2}$$

۲۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دوره تناوب تابع برابر ۴ و مقدار  $a$  منفی است، پس:

$$\frac{\pi}{|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = -\frac{\pi}{4}$$

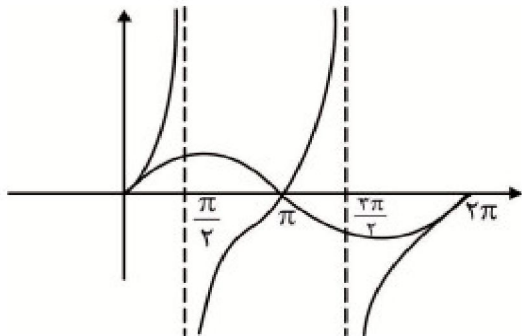
بنابراین  $f\left(\frac{16}{3}\right)$  برابر است با:

$$f\left(\frac{16}{3}\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}\right) = -\text{tg}\frac{4\pi}{3} = -\text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

۲۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل، ابتدا در بازه  $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ،  $g(x) > f(x)$  و

سپس در بازه  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ،  $g(x) < f(x)$  است.



۲۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

۲۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$A = 2 + \sin x \cos x \longrightarrow A = 2 + \frac{1}{2} \sin 2x$$

حال با در نظر گرفتن محدوده‌ی تغییرات  $\sin 2x$  به سادگی می‌توانیم به حدود  $A$  برسیم:

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{+2} \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{5}{2} \longrightarrow \frac{3}{2} \leq A \leq \frac{5}{2}$$

$$\longrightarrow \text{Min}(A) = \frac{3}{2}$$

$$\text{tg } x + \text{Cotg } x = 4 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \quad -220$$

$$\frac{2}{2 \sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 4 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{fog}(x) = f(g(x)) = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x \quad -221 \text{ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.}$$

$$= \sin^2 x (\sin x - 1) = -\sin^2 x \cos x = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$\text{tg } 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} (2 \cos^2 20^\circ) = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ \quad -222$$

بنابراین گزینه ۲، پاسخ صحیح است.

۲۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \times \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{(1 + (2\cos^2 \alpha - 1))(1 + \cos \alpha)} = \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \text{tg} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

۲۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos 165^\circ \times \cos 105^\circ = + \cos 15^\circ \cos 75^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



۲۲۵- عبارت داده شده را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم:

$$\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۲۶- راه حل اول:

$$\cos \alpha \cdot \cos (\epsilon_0 - \alpha) \cos (\epsilon_0 + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

می‌دانیم:

$$a = 20^\circ \Rightarrow \epsilon_0 - a = 40^\circ, \epsilon_0 + a = 80^\circ$$

با قرار دادن  $\alpha = 20^\circ$ :

$$8 \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ = 8 \times \frac{1}{4} \times \cos 60^\circ = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{\sin 20^\circ (8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ)}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{4(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری: الف)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

ب)  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

۲۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= 2 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right] \times \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right] \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha \end{aligned}$$

۲۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{فرمول: } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت مورد نظر} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta (\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta))} = \frac{1}{\sin^4 \theta \cdot \cos^4 \theta} \\ &= \frac{16}{\sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta \end{aligned}$$

$$1 + \sin x = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \quad -229$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{2(1 + \sin x)}{1 + \cos x} = \frac{2 \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \left( \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)^2 = \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)^2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = 1 + a \left( \frac{1}{2} \sin(2bx) \right) \Rightarrow y = 1 + \frac{a}{2} \sin(2bx) \Rightarrow 1 + \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{a \cdot b > 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

تذکر: توجه داشته باشید تابع سینوس برای  $x > 0$  صعودی شروع می‌شود پس  $a$  و  $b$  هم‌علامتند که حالت  $a = -1$  و  $b = -1$  یعنی  $a + b = -2$  در گزینه‌ها نیست.

۲۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول: با توجه به رابطه‌ی  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$  داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{36}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

روش دوم: با توجه به رابطه‌ی  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$  داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \frac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{5}{12} \xrightarrow{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta} \cot 2\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{1}{\cot 2\alpha} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

۲۳۲- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) - \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x}{2}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos x}{\frac{1}{2} \sin x} = 1 \Rightarrow -\cot x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{Cotg} \frac{A}{2} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = 4$$

۲۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\Delta(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10} \Rightarrow (\Delta(\sin x + \cos x))^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{5}$$

Sin 2x را بر حسب tg x می نویسیم :

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x - 1 \cdot \operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 3, \frac{1}{3}$$

پس گزینه ۴ که یکی از جوابها را بیان می کند، صحیح است.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4}$$

-۲۳۵

$$\Rightarrow \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.

۲۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = 4$$

$$\Rightarrow 3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -3 \\ \text{یا} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

با توجه به جواب‌های به دست آمده، گزینه ۱ پاسخ صحیح می‌باشد.

۲۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

در این جا نیازی برای به دست آوردن جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصله‌ی داده شده، مشخص کنیم.

$$2 \sin(3x) \cos(3x) = 1$$

۲۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin(6x) = 1 \Rightarrow \sin(6x) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 6} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 6} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{36} \end{cases} \end{array} \right.$$

این معادله در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  دارای ۴ جواب است.

۲۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x) \Rightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (1 - \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ غ ق ق} \\ \text{یا} \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع} = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

۲۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos^3 x + 3 \cos x = 4 \xrightarrow{\cos x = t} t^3 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-1)(t^2 + t + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t-1=0 \Rightarrow t = \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow \{ \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots \} \\ t^2 + t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 16 = -15 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ی حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

همان طور که مشاهده می کنیم، معادله ی فوق در بازه ی  $[0, 2\pi]$ ، تنها دو ریشه به مقادیر  $x=0$ ،  $x=2\pi$  دارد.

۲۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2(2 \sin x \cos x) = 1$$

$$\Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x_2 = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
$x_1$	×	$\pi - \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$
$x_2$	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi + \frac{5\pi}{12}$	×

$$\text{مجموع} = \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \pi + \frac{5\pi}{12} = 4\pi + \pi = 5\pi$$

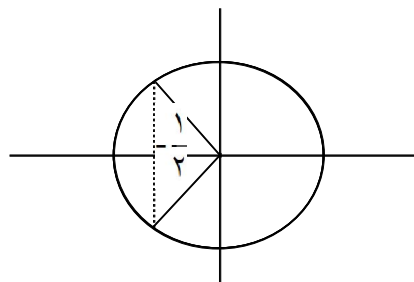
۲۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \quad \cos x = \frac{3 \pm 5}{4} = 2, \left(-\frac{1}{2}\right)$$

ق ق  
غ ق ق



$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

۲۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۲۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم  $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$  بنابراین داریم:

$$\tan x + \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{\sqrt{3}} \notin [-1, 1]$$

چون مقدار به دست آمده برای  $\sin 2x$  در بازه  $[-1, 1]$  قرار نمی‌گیرد، پس معادله‌ی داده شده جواب ندارد.

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x > 0 \Rightarrow \tan x + \cot x \geq 2 \\ \tan x < 0 \Rightarrow \tan x + \cot x \leq -2 \end{cases} \quad \text{روش دوم:}$$

(توجه کنید که به ازای  $\tan x = 0$  عبارت  $\tan x + \cot x$  تعریف نشده است زیرا  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$  تعریف نشدهمی‌باشد) بنابراین مقادیر  $\tan x + \cot x$  هرگز نمی‌تواند در بازه  $(-2, 2)$  باشد.



$$\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\frac{1}{2} \sin 2x}$$

-۲۴۵

$$= \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cotg 2x \Rightarrow -2 \cotg 2x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cotg 2x = -\sqrt{3} = \cotg \left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \\ k=2 \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} \\ k=3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{17\pi}{12} \\ k=4 \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12} \end{array} \right.$$

به ازای  $k = 1, 2, 3, 4$  پاسخهای بدست آمده برای  $x$  در محدوده  $[0, 2\pi]$  قرار می‌گیرند. بنابراین معادله فوق ۴ جواب دارد و گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin 3x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \\ \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k'\pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

-۲۴۷ طرف چپ را بر حسب نصف قوس می‌نویسیم داریم :

$$2 \cos^2 2x = 2 \cos^2 2x + \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

در نتیجه گزینه ۱ صحیح است.

-۲۴۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{4} &\Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2\left(\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}\sin^2 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \text{یا} \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
$x_1$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	×
$x_2$	×	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$2\pi - \frac{\pi}{4}$

جواب‌های بین  $[0, 2\pi]$ 

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi$$

۲۵۰- معادله داده شده را حل می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \cos 2x \sin x = \cos 2x &\Rightarrow \cos 2x \sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \\ \cos 2x (\sin x - 1) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

پس در فاصله  $[0, 2\pi]$  ریشه‌ها عبارتند از:  $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$  و رئوس یک پنج‌ضلعی غیرمنتظم را تشکیل

می‌دهند. پس گزینه ۴ صحیح است.

$$\sin(3x) + \sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(3x) = \sin(-x)$$

-۲۵۱

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

دسته اول جواب‌ها که ضریب‌های صحیح  $\frac{\pi}{2}$  است، دسته دوم را که ضریب‌های فرد  $\frac{\pi}{4}$  است را می‌پوشاند. پس $x = \frac{k\pi}{2}$  است. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.



۲۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow (1) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

$$(1) \cup (2) = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

۲۵۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x)$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \checkmark \\ \text{یا} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{چون}$$

۲۵۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(2k\pi + \frac{i\pi}{3}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{i\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos\frac{i\pi}{3} = \sin\frac{i\pi}{6}$$

با بررسی کردن اعداد  $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$  مشخص می‌شود که  $\{1, 5, 9\}$  جواب است.

۲۵۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\left( \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

۲۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow \sin^4 x = \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x}$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin^2 x \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x (2 \sin^2 x + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{3 \cdot \pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

۲۵۷- عبارت مورد سوال را ساده می کنیم:  $2 \cos x (\sin x + \cos x) = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos 2x + 1 = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

۲۵۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{جمع}} \pi - \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

۲۵۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi x = (2k+1)\pi \Rightarrow 3\pi x = \frac{\pi}{4} - 2k\pi - \pi \Rightarrow 3\pi x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k}{3} - \frac{1}{4}$$

k	-1	0	1
x	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

راه دوم: دوره‌ی تناوب اصلی این تابع  $T = \frac{2\pi}{|-3\pi|} = \frac{2}{3}$  طول بازه  $2 - (-1) = 3$  است پس تعداد ماکزیممها در این بازه

برابر  $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$  است.