$A' = U - A \qquad \varnothing' = \qquad U' = \qquad A \cup A' = \qquad A \cap A' =$

$(A')' = A \qquad A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

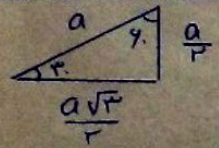
$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B' \qquad A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

مثال: $n(U) = 100 \quad n(A) = 60 \quad n(B) = 40 \quad n(A \cap B) = 20$

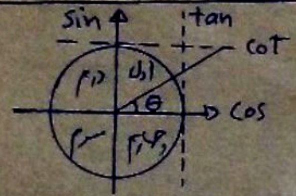
مطلوب است: $n(A \cup B) \quad n(A \cap B') \quad n(A' \cap B) \quad n(A' \cap B')$

$t_n = t_1 + (n-1)d \qquad t_n = t_1 r^{n-1}$

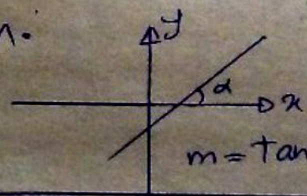


$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$

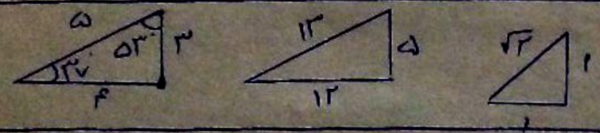


$\pi \equiv 180$



$y = mx + b$

$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



$\sqrt{2} = 1{,}4 \qquad \sqrt{3} = 1{,}7 \qquad \sqrt{5} = 2{,}2$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

راس سهمی $= \frac{-b}{2a}$

مثال: در صورتی که $y=ax^2+bx+c$ همواره مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟

---

* در صورتی که دو طرف نامعادله را در یک عدد منفی ضرب کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شود.

$(a>0)$

$$|x|\leq a \rightarrow -a\leq x\leq a$$

$$|x|\geq a \rightarrow x\geq a \text{ یا } x\leq -a$$

---

* در سوالاتی که با قدر مطلق یا جزء صحیح ترکیب شده‌اند، به جای جزء صحیح مقدار و به جای قدر مطلق علامت آن را قرار می‌دهیم.

رسم نمودار $y=f(x)+k$ $\quad y=f(x+k)$ $\quad y=af(x)$ $\quad y=f(ax)$

$y=|f(x)|$ $\quad y=f(|x|)$

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز، که در آن ترتیب قرار گرفتن مهم باشد:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

---

* تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با مجموع تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی، یک عضوی، ....، n عضوی و رابطه‌ی کلی

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underline{P(A\cap B)}$$

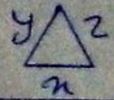
در صورتی که ناسازگار باشند صفر است.

$$P(A')=1-P(A)$$

انواع متغیرها:

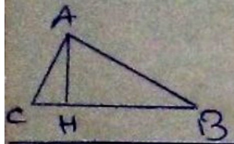
- (قابل اندازه‌گیری) کمی
  - پیوسته
  - گسسته
- (غیرقابل اندازه‌گیری) کیفی
  - دارای ترتیب طبیعی → ترتیبی
  - بدون ترتیب → اسمی

مثال: مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی را بیابید، مجموع زوایای خارجی، نامساوی مثلث



$$|y-z|<x<y+z$$

* عکس قضیه تالس



$$AB^2 = BH \times BC \ , \ AC^2 = CH \times CB$$

$$AH^2 = HB \times HC \ , \ AH \times CB = AC \times AB$$

نسبت محیط‌ها $= K$ ، نسبت مساحت‌ها $= k^2$

تعداد قطرهای یک n ضلعی $= \binom{n}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$

* در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است.

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دارای زاویه حاده ۱۵° است، با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.

مثال: ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را بطور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید. (مستطیل یا لوزی)

* در مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند

مثال: اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطه M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲، ۴ و ۶ باشند. اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید

نقاط شبکه‌ای، مساحت

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

b: تعداد نقاط مرزی
i: تعداد نقاط درونی

* هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات تمام راس‌های آن اعداد صحیح باشند

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$a+a+d+\cdots+a+(n-1)d=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$

$a+aq+\cdots+aq^{n-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}$

$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad x_1 \times x_2=\frac{c}{a}$

مثال نشان دهید:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$|x|=a \quad (a>0) \Rightarrow x=a$ یا $x=-a \qquad \sqrt{x^2}=|x|$

$|x|=|a| \Rightarrow x=a$ یا $x=-a$

$-|a|\leqslant a\leqslant |a| \Rightarrow -|a|-|b|\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$

$|a+b|\leqslant |a|+|b|$

طول پاره خط AB (فاصله بین دو نقطه) $=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$m\times m'=-1$

$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

فاصله نقطه (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$

$\frac{A+B}{2}=$ * مختصات نقطه وسط یک پاره خط *

فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$: $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

دو تابع f و g را برابر می نامیم هرگاه
① دامنه f و دامنه g یکسان باشد
② به ازای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم $f(x)=g(x)$

$y=[x-3]=[x]-3$

نمودار شکل تابع را نسبت به $y=x$ قرینه می کنیم.

$(a,b)\in f \Longleftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

جای دامنه و برد عوض می شود

برای پیدا کردن ضابطه، جای x و y را عوض می کنیم.

یک به یک بودن، شرط وارون پذیری تابع است
برای یک به یک بودن ← خط موازی محور x ها

$f \overset{\pm}{\underset{\div}{\times}} g \qquad f o g \qquad f o f^{-1} \qquad f^{-1} o f$

$y = a^x \ (a>0, a\neq 1) \Leftrightarrow$ معکوس تابع $\ a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a^x$

$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b \ , \ \log_a^{b^n} = n \log_a^b$

$\log_c^{a/b} = \log_c^a - \log_c^b$

α برحسب رادیان $= \dfrac{\text{طول کمان}}{\text{شعاع}}$

نسبت های مثلثاتی زوایای متمم: از sin یا tan به cos یا cot تبدیل می شود و برعکس و برای پیدا کردن علامت آن از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم

نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل: تابع را تغییر نمی دهیم و فقط برای پیدا کردن علامت از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad = 1 - 2\sin^2\alpha$

حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

* صفر حدی، صفر مطلق * نکته در رابطه با جزء صحیح و قدر مطلق

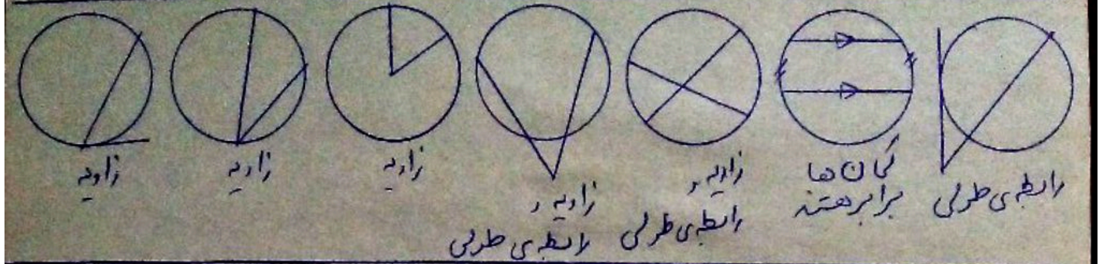
در صورتی که مبهم $\frac{0}{0}$ داشتیم: * هوپیتال * مزدوج * هم ارزی در صفر * تغییر متغیر

* در صورتی که زیر رادیکال و یا در مخرج عبارت صورت و یا مخرج حد، صفر ظاهر شود، نمی توان از هوپیتال استفاده کرد.

---

* f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد , $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

پیوستگی $\quad y = x - [x] \qquad y = [x] + [-x]$



حالت‌های دو دایره نسبت بهم $R+R'$ و $|R-R'|$

مماس خارج $d=R+R'$

مماس داخل $d=|R-R'|$

بدست آوردن مماس مشترک خارجی $TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$

بدست آوردن مماس مشترک داخلی $TT'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$

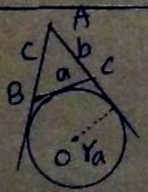
محاطی: درون محیطی: بیرون

چندضلعی محاطی: عمود منصف‌ها همرس هستند

چندضلعی محیطی: نیمسازها همرس هستند

$$\text{مساحت چندضلعی محیطی} = \text{شعاع دایره محاطی} \times \frac{\text{محیط چندضلعی محیطی}}{2}$$

* مرکز دایره محیطی مثلث = محل برخورد عمود منصف‌ها
* مرکز دایره محاطی مثلث = محل برخورد نیمسازها

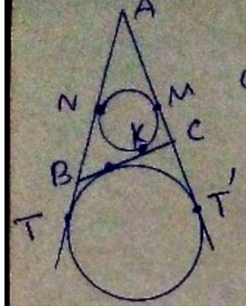


$r_a = \dfrac{S}{P-a}$

$P =$ نصف محیط مثلث

* یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه‌ی متقابل آن مکمل باشند.
* یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

مثال: ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.



مثال: اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M ، N ، K باشند و T ، T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$$AM = AN = p - a \qquad BN = BK = p - b$$

$$CM = CK = p - c \ , \ AT = AT' = p$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

---

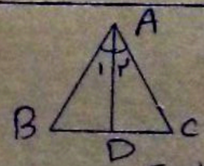
* برای پیدا کردن مرکز دوران، محل برخورد عمود منصف های AA' و BB' را بدست می آوریم

* در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M با نسبت k و نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است.

$$OM' = |k| OM$$

قضیه سینوس ها $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \underbrace{2R}$ R: شعاع دایره محیطی

در مثلث قائم الزاویه اندازه وتر است



قضیه کسینوس ها $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

AD نیمساز است.

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC \ , \ \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\text{مثلث متساوی الاضلاع}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad S = \frac{1}{2} bc \times \sin A$$

$a^2 > b^2 + c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A} > 90$

$a^2 < b^2 + c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A} < 90$

$a^2 = b^2 + c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A} = 90$

در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند.

در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند.

$\sim(\sim p) \equiv p$

$p \vee q$ ترکیب فصلی (اجتماع) یا

$p \wedge q$ ترکیب عطفی (اشتراک) و

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

قوانین دمورگان

گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های «p شرط کافی برای q است»، و «q شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم.

* هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.
در این حالت می‌گوییم: ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

* ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز منطقی‌اند.

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

گزاره‌های نظیر $(p \Rightarrow p)$ یا $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌های همیشه درست، و
گزاره‌های نظیر $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (p \Leftrightarrow q)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

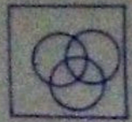
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$\forall$: به ازای هر، به ازای جمیع مقادیر

$\exists$: وجود دارد، به ازای بعضی مقادیر

$\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

$\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$



$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad (A\cup B)'=A'\cap B'$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \qquad (A\cap B)'=A'\cup B'$$

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\ ,\ y\in B\}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \qquad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

احتمال A به شرط B دادن B

قانون احتمال کل:

مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد چقدر است؟

* قانون بیز

فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A:

$$P(B|A)=\frac{P(B)\,P(A|B)}{P(A)}=\frac{P(B)\,P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}$$

مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

پیشامدهای مستقل

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد، احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

با تقسیم فراوانی هر داده، به تعداد کل داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده بدست می‌آید.

میانگین وزن دار (موزون) $= \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$

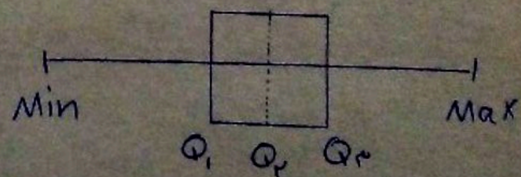
* عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده اند، میانه داده‌ها می‌گوییم و آن را با Q_2 نشان می‌دهیم. میانه نیمه اول داده‌های مرتب شده را چارک اول می‌گوییم و آن را با Q_1 نشان می‌دهیم. همچنین میانه نیمه دوم (آخر) داده‌های مرتب شده را چارک سوم گوییم و آن را با Q_3 نشان می‌دهیم.

مد یا نما داده‌ها: داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، مد یا نما داده‌ها نام دارد. اگر در داده‌هایی، همه داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، آن گاه این داده‌ها مد ندارند. اگر در داده‌هایی، دو داده بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن گاه این داده‌ها دو مد دارند.

انحراف معیار داده‌ها $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}}$

واریانس داده‌ها $= \sigma^2$

ضریب تغییرات داده‌ها $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$



نمودار جعبه‌ای

انحراف معیار میانگین $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی، با اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

که μ میانگین جامعه، σ انحراف معیار جامعه است.

* انتقال های عمودی و افقی * انبساط و انقباض عمودی و افقی *

* تابع درجه سوم، توابع یکنوا، بخش پذیری و تقسیم

$y = -f(x)$

$y = f(-x)$

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

* که در آن $r(x)=0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است

* باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $f(\frac{-b}{a})$ است.

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

اگر n فرد باشد:

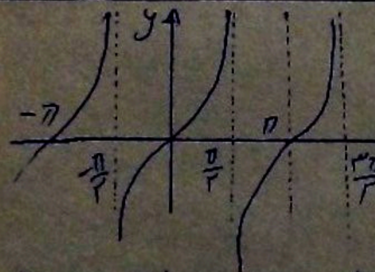
$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

اگر n زوج باشد،

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

$f(x \pm T) = f(x)$ کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می نامیم

$\tan(x+\pi) = \tan x$



$y = \tan x$

$\sin x = \sin\alpha$

$x = 2k\pi + \alpha \,,\, x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$

$\cos x = \cos\alpha$

$x = 2k\pi \pm \alpha$

$\tan x = \tan\alpha$

$x = k\pi + \alpha$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$0^+ = 0/01 \qquad 0^- = -0/01 \qquad 1^+ = 1/01 \qquad 1^- = 0/99$

مثال:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

* مجانب قائم * مجانب افقی * مجانب مایل

درصورتی که $0<x<1$ ⇐ کوچکترین توان، درصورتی که $1<x$ ⇐ بزرگترین توان تعیین کننده است

$\frac{f(x)}{x}=a$ $\quad f(x)-ax=b \quad y=ax+b$ مجانب مایل

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شرایط مشتق‌پذیری: پیوسته باشد، مشتق چپ و راست برابر باشد، مماس قائم نباشد

$(c)'=$ $\quad (x^n)'=$ $\quad (\sqrt{x})'=$ $\quad (\sqrt[3]{x})'=$

$(f\times g)'=$ $\quad (f/g)'=$ $\quad (\sin)'=$ $\quad (\cos)'=$

$(\tan)'=$ $\quad (\cot)'=$ $\quad (f\circ g)'=$

* تعیین علامت تابع مشتق و به دست آوردن اکسترمم های نسبی و مطلق
* نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد
* تشخیص صعودی و یا نزولی بودن تابع * جهت تقعر یک تابع و نقطه عطف آن
جایی که مشتق دوم تغییر علامت دهد و مشتق اول موجود باشد
* رسم نمودار توابع * تابع هموگرافیک $\left(y=\frac{ax+b}{cx+d}\right)$

ماتریس قطری: ماتریس است مربعی که تمام درایه های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

* اگر ماتریس قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می نامیم
* ماتریس صفر * جمع ماتریس ها * ضرب یک عدد در ماتریس * قرینه یک ماتریس $(-A)$
* ضرب ماتریس در ماتریس (سطر در ستون ضرب می شود)

$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ و $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

مثال: اگر A ماتریس 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریس هم مرتبه A در این صورت:

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I \qquad (A^{-1})^{-1}=A$

* اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در این صورت:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix} \qquad \underbrace{|A|=ad-bc\neq0}_{\text{شرط وارون پذیری}}$$

* حل دستگاه معادلات (دو معادله دو مجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

$$\begin{cases}ax+by=c_1\\cx+dy=c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

* حالت های مختلف دو خط نسبت به هم
* در صورتی که دترمینال ماتریس ضرایب غیر صفر باشد دو خط متقاطع هستند و در حالتی که دترمینال صفر باشد دو خط یا موازی هستند و یا منطبق
* محاسبه دترمینال 3×3 $\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$: یک سطر و یا یک ستون را انتخاب می کنیم یکی در میان $+$ و $-$ می گذاریم

مثال: ماتریس های $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. ماتریس $A\times B$ را به دست آورید و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

مثال: ماتریس 3×3 چون A بنویسید طوری که $|A|=-6$، سپس ماتریس A^2 را محاسبه و $|A^2|$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

مثال: دترمینال هر ماتریس قطری برابر است با ......

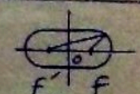
* در صورتی که یک سطر یا یک ستون مضربی از یک سطر و یا یک ستون دیگر باشد، حاصل دترمینال صفر است.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

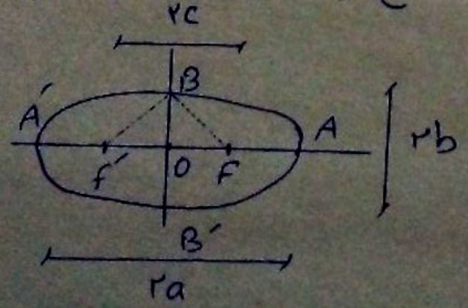
* در صورتی که یک سطر یا یک ستون ماتریس را در عددی ضرب کنیم، حاصل دترمینال در همان عدد ضرب خواهد شد.

* در صورتی که ماتریس $n\times n$ را در عددی مانند k ضرب کنیم، حاصل دترمینال در k^n ضرب خواهد شد.

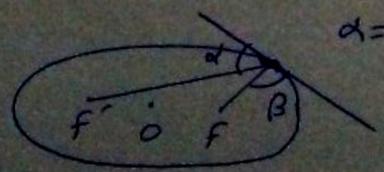
$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$: دایره



* بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو کانون (F', F) یک مقدار ثابت باشد.



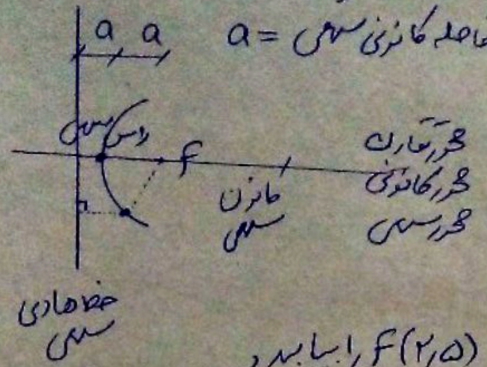
$0 \le c < a \Rightarrow \underset{\text{دایره}}{0} \le \frac{c}{a} < \underset{\text{پاره خط}}{1}$



$\alpha=\beta$

* اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.



$a =$ فاصله کانونی سهمی

* معادله: $(y-k)^2=4a(x-h)$:
راس آن به مختصات (h,k)
کانون آن $F(a+h,k)$
خط هادی آن موازی محور yها به معادله $x=-a+h$ ، محور آن خط $y=k$ ، دهانه آن رو به راست است.

مثال: معادله سهمی به راس $A(2,1)$ و کانون $F(2,5)$ را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

* یکی از ویژگی های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد شد و برعکس.

فاصله بین دو نقطه در فضا $= \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

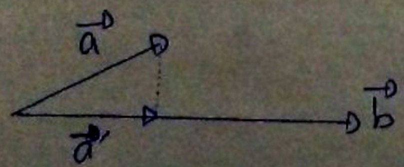
$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

ضرب داخلی دو بردار $=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\times\cos\theta$

در صورتی که دو بردار بر هم عمود باشند، صفر است.

* تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$:



$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^2}\times\vec{b}$

(a_1,a_2,a_3)

(b_1,b_2,b_3) $\longrightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$

ضرب خارجی

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta \longrightarrow$ مساحت متوازی الاضلاع

جهت بردار $a\times b$: انگشتان را در جهت a قرار داده به سمت b خم می‌کنیم، جهت شست جهت بردار را نشان می‌دهد.

$a\times b$ هم بر a و هم بر b عمود است.

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

* دو بردار موازی باشند ← ضرب خارجی $=\vec{0}$

$$\text{حجم متوازی السطوح}=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

* در صورتی که بردارهای a ، b، c در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی السطوح برابر صفر است.

$a|b \Leftrightarrow b=aq$

$a|b \Leftrightarrow ka|kb$

$a|b \rightarrow a|mb \quad \begin{cases} a|b \rightarrow a|b^2 \\ a|b \rightarrow a|b^n \end{cases}$

$a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$ $\quad$ $a|b \wedge a|c \rightarrow a|b \pm c$

$a|b\,,\,(b\neq 0) \rightarrow |a| \leqslant |b|$ $\quad$ $a|b \rightarrow a^n | b^n$

$a|b\,,\,c|d \rightarrow ac|bd$ $\quad$ $a|b\,,\,a|c \rightarrow a|mb \pm nc$

$(a,b)=d$ ب م م $d|a\,,\,d|b$

$(a,b)=1$ دو عدد نسبت به هم اول هستند

$[a,b]=c$ ک م م $a|c\,,\,b|c$

$a|b \rightarrow (a,b)=|a|$ $\quad$ $a|b \rightarrow [a,b]=|b|$

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم $\quad 0 \leqslant r < b \quad a=bq+r$ قضیه تقسیم

مثال: نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ نوشته می‌شود.

$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a-b$ $\quad$ a هم نهشت با b است با پیمانه m $(m \in \mathbb{N})$

$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$ $\quad$ $a \overset{m}{\equiv} b\,,\, b \overset{m}{\equiv} c \rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$ $\quad$ $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

عکس این ویژگی لزوماً درست نیست

$a \overset{m}{\equiv} b\,,\, c \overset{m}{\equiv} d \rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$

اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی r باشد در این صورت: $a \overset{m}{\equiv} r$

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c,m)=d \rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

* اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

* اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$, $(c,m)=1$ در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال: باقی مانده تقسیم عدد $A=۱۳۵۸۱۱۲$ را بر عدد ۹ بیابید.

* باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ * باقی مانده تقسیم بر ۳ * باقی مانده تقسیم بر ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰

معادله هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$

* شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a,b)|c$

* تبدیل معادله سیاله به هم نهشتی

مثال: با تبدیل معادله سیاله $۴x+۵y=۹$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

تعداد راس های یک گراف را مرتبه آن گراف و تعداد یال های یک گراف را اندازه آن گراف می گوییم. (مرتبه p و اندازه q)

* درجه راس v در گراف G برابر است با تعداد یال هایی از گراف G که به راس v متصل اند. ($d(v)$) اگر درجه یک راس فرد باشد آن را راس فرد و اگر زوج باشد آن را راس زوج می نامیم.

* گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی (برابر عدد k) باشند، گراف k - منتظم می‌نامیم.
* به راسی که درجه آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، راس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم.
* گرافی را که تمام رئوس آن راس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می‌نامیم.
* بین دو راس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد، همچنین یک یال ممکن است یک راس را به خود آن راس وصل نماید که در این صورت به این یال طوقه گفته می‌شود. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را گراف ساده می‌گوییم.
* دو راس را همسایه یا مجاور گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند
* مجموعه همسایه‌های یک راس: مجموعه راس‌هایی که به راس مذکور متصل اند. همسایگی باز (شامل خود نقطه نیست) همسایگی بسته (شامل خود نقطه است)
* دو یال را مجاور گوییم هرگاه راسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند
* بزرگترین درجه گراف $\Delta(G)$ کوچکترین درجه گراف $\delta(G)$
* زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G، مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد.
* مکمل یک گراف (G^c یا $\bar{G}$): گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو راس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو راس در G یالی وجود نداشته باشد.

گراف کامل: گراف n راسی، $n-1$ منتظم

مسیر: طول یک مسیر برابر است با تعداد یال های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر)

* گرافی را که تنها از یک مسیر n راسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می دهیم.

دور: در آن هر راس با راس بعدی مجاور است و در نهایت به نقطه اول می رسیم

* گرافی را که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می دهیم

* گراف G را همبند می نامیم هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می نامیم.

* تعداد راس های فرد هر گراف، عددی زوج است. $\longleftarrow$ $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$

---

* زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه گر می نامیم هرگاه هر راسی از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد

* در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه ای را عدد احاطه گری گراف G می نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم

* گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه گر مینیمم از گراف G، یک γ - مجموعه می گوییم

* یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر مینیمال می نامیم.

$\lceil 3 \rceil = 3 \qquad \lceil 3/5 \rceil = 4 \qquad \lceil x \rceil = \{$

* اگر G یک گراف n راسی با ماکزیمم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه گر در آن باشد، آنگاه $|D| \geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعه احاطه‌گر است همواره داریم $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$

* یک جدول مربعی از اعداد $1, 2, \ldots, n^2$ به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد $1, 2, \ldots, n$ پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم.

* فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A، B «متعامدند» هرگاه هیچ یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکراری نشده باشند.

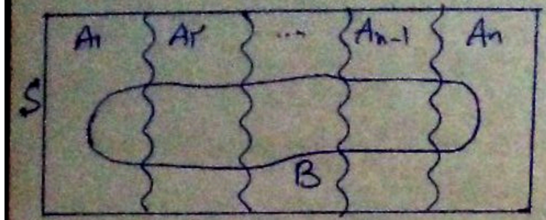
مثال: نشان دهید اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت برروی اعضای یکی از آنها به دست می‌آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A، B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_2 نیز متعامدند.

مثال: چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \leq n \leq 2250$، وجود دارند که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵، ۶ بخش‌پذیر نباشند؟

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

* اصل لانه کبوتری

قانون احتمال کل



اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)$$

مثال: اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد، خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشند، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

مثال: ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

* کمیت نرده‌ای   * کمیت برداری

شدت روشنایی (کندلا) cd ، جریان الکتریکی A ، مقدار ماده mol ، زمان s ، جرم kg ، طول m : کمیت‌های اصلی

SI : m/s ، m/s^2 ، N (نیرو) ، Pa (پاسکال) فشار ، J (ژول) انرژی ، kg

---

تبدیل یکاها $1m^3 = 1000\,lit$

p (پیکو) $= 10^{-12}$ T (ترا) $= 10^{12}$

n (نانو) $= 10^{-9}$ G (گیگا) $= 10^{9}$

μ (میکرو) $= 10^{-6}$ M (مگا) $= 10^{6}$ c (سانتی) $= 10^{-2}$

m (میلی) $= 10^{-3}$ k (کیلو) $= 10^{3}$ d (دسی) $= 10^{-1}$

---

* دقت ابزارهای اندازه‌گیری مدرج، برابر کمینه درجه‌بندی آن ابزار است.

چگالی $\rho = \frac{m}{V}$ $1000\,kg/m^3 = 1\,g/cm^3$ ، $1\text{Å} = 10^{-10}m$ (1 آنگستروم)

---

* فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع یکسان است.

$P(Pa) = \frac{F(N)}{A(m^2)}$ $P_2 = P_1 + \rho gh$

* فشار مطلق

* فشار پیمانه‌ای

$1\,bar = 10^5\,Pa$ فشار هوا در سطح دریای آزاد $= 760\,mmHg$

---

* نیروی شناوری   * شاره در حرکت و اصل برنولی (سرعت ↑ ← فشار ↓)

$$\text{آهنگ شارش حجمی شاره} = \frac{\text{حجم شاره}}{\text{زمان}} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{AL}{\Delta t} = A \times v$$

معادله پیوستگی $\Rightarrow A_1v_1 = A_2v_2 = Q$

$K = \frac{1}{2}mv^2$ $W = F.d$ (ضرب داخلی) $= |F||d|\cos\theta$

* قضیه کار و انرژی جنبشی   * انرژی پتانسیل گرانشی $U = mgh$

* در پرتاب یک جسم به سمت بالا و یا پایین در صورتی که اتلاف انرژی نداشته باشیم:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 \pm 2gh}$$

$-$: به سمت بالا $+$: به سمت پایین

* پایستگی انرژی مکانیکی

$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$ (توان متوسط) $= \frac{F \times d}{\Delta t} = F \times V$

بازده $= \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}}$

$T = \theta + 273$ $(\Delta T = \Delta\theta)$

$\Delta L = \alpha L_1 \Delta\theta$, $L_2 = L_1 + \Delta L$

$\Delta A = 2\alpha A_1 \Delta\theta$, $A_2 = A_1 + \Delta A$ (2α: ضریب انبساط سطحی)

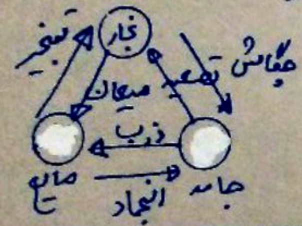
$\Delta V = \underbrace{3\alpha}_{\text{یا } \beta} V_1 \Delta\theta$, $V_2 = V_1 + \Delta V$ (ضریب انبساط حجمی)

مثال: رابطه چگالی با تغییر دما را بدست آورید. * آب در $4^\circ C$ بیشترین چگالی و کمترین حجم را دارد.

$1\ cal = 4{,}1860\ J$

$Q = \underbrace{C}_{\text{ظرفیت گرمایی}} \Delta T = m \underbrace{c}_{\text{ظرفیت گرمایی ویژه}} \Delta T$

* گرمای ویژه مولی



$Q = mL_f$ گرمای نهان ذوب

$Q = mL_v$ گرمای نهان تبخیر

$PV = nRT$ (نمودارهای فشار ثابت، دما ثابت و...)

n (تعداد مول) $= \frac{m \text{ (جرم)}}{M \text{ (جرم مولی)}}$

n ثابت $\Rightarrow \frac{PV}{T} = \frac{PV}{T}$

---

* در مورد گاز آرمانی می‌توان نشان داد که انرژی درونی فقط تابع دمای گاز است.

* اگر دستگاه در فرآیندی ایستاوار، گرمای Q را بگیرد و کار W بر روی آن انجام شود، این بستگی با رابطه زیر نشان داده می‌شود.

$\Delta U = Q + W$ (قانون پایستگی انرژی)

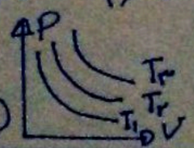
* همواره قدر مطلق کار انجام شده برابر با مساحت سطح زیر نمودار فرآیند در صفحه P-V است. (جهت چرخش و علامت کار)

$W = 0$ (فرآیند هم‌حجم)

$W = -P\Delta V$ (کار در فرآیند هم‌فشار)

$\Delta U = 0$ (در فرآیند هم‌دما)

(در نمودار دما ثابت)



$T_3 > T_2 > T_1$

* در چرخه ترمودینامیکی، دستگاه پس از طی چند فرآیند مختلف به حالت اولیه خود باز می‌گردد؛ چون در چرخه ترمودینامیکی حالت نهایی و حالت ابتدایی یکسان هستند، تغییر انرژی درونی برابر صفر است $(\Delta U = 0)$

$Q = 0$ (فرآیند بی‌دررو)

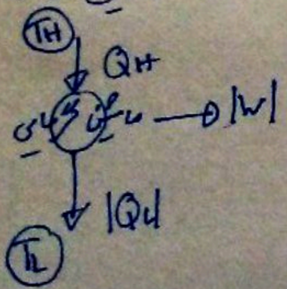
* اندازه کار انجام شده در چرخه برابر با مساحت سطح داخل چرخه در صفحه $P-V$ است و می‌توان نشان داد در چرخه‌های ساعتگرد کار انجام شده بر روی دستگاه منفی و در چرخه‌های پادساعتگرد، مثبت است.

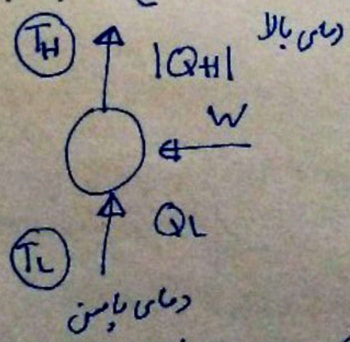
---

* گرمایی را که دستگاه از منبع با دمای بالاتر می‌گیرد با Q_H، و گرمایی را که دستگاه به منبع با دمای پایین‌تر می‌دهد با $|Q_L|$، و کار خالص انجام شده توسط دستگاه در طی چرخه را با $|W|$ نمایش می‌دهیم.

بازده ماشین گرمایی $\Rightarrow \eta = \dfrac{|W|}{Q_H}$

قانون دوم ترمودینامیک (به بیان ماشین گرمایی): ممکن نیست دستگاه چرخه‌ای را بسازید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دما بالا جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.





قانون دوم ترمودینامیک (به بیان یخچالی): ممکن نیست گرما به طور خود به خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود.

$q = ne$
بارهای مثبت ثابت
و تنها بارهای منفی
جابجا می‌شوند

$F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$
در راستای خط واصل
آنها اثر می‌کند
هم‌نام = دفع
ناهم‌نام = جذب

* برآیند و تفاضل برای زاویه‌های ۴۵°، ۶۰°، ۱۲۰°، ۹۰°، ...

$\vec{F} = q\vec{E}$
میدان الکتریکی

* بار مثبت باشد
$\vec{F}$ و $\vec{E}$ هم جهت هستند
$\vec{F}$ و $\vec{E}$ مخالف جهت هستند (بار منفی باشد)

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار $\Rightarrow F = k\dfrac{q q_0}{r^2}$ ، $E = \dfrac{F}{q} \Rightarrow E = k\dfrac{q_0}{r^2}$

* از بار مثبت خارج می‌شود و به بار منفی وارد می‌شود. (میدان الکتریکی برآیند)
* هرجا خطوط میدان متراکم‌تر باشد، اندازه میدان بیشتر است.
* خطوط میدان الکتریکی برآیند هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

---

* میدان الکتریکی یکنواخت $(F = qE)$
* تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار ذره‌ای q:
(بار ذره‌ای q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$
که جابه‌جایی $\vec{d}$ را موازی میدان الکتریکی، انجام می‌دهد)

$W = \Delta U = F_E \times d \times \cos\theta$
$= qEd\cos\theta$

---

* نسبت تغییر انرژی پتانسیل به بار ذره، مستقل از نوع و اندازه بار الکتریکی است.
به این نسبت، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه می‌گوییم.

$\Delta V = V_2 - V_1 = \dfrac{\Delta U}{q}$ $(\Delta U =$ تغییر انرژی پتانسیل$)$

V) پتانسیل الکتریکی کمیتی نرده‌ای است.

$\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q} = \dfrac{-qEd \times \cos\theta}{q} = Ed$

* رابطه اختلاف پتانسیل دو نقطه و اندازه میدان الکتریکی یکنواخت
* قضیه کار - انرژی جنبشی (تغییرات در انرژی جنبشی)

---

* چگالی بار در نقاط تیزتر سطح یک جسم رسانای باردار بیشتر است.

$\sigma = \dfrac{Q}{A}$ چگالی سطحی بار الکتریکی رسانا

$Q=CV$ ، خازن با دی الکتریک $\Rightarrow C=\kappa C_0=\kappa\,\varepsilon_0\frac{A}{d}$

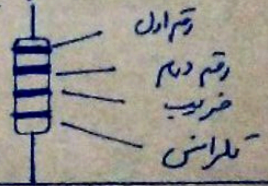
κ : ثابت دی الکتریک

ε_0 : ضریب گذردهی الکتریکی خلأ

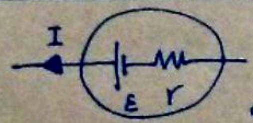
$U_{\text{خازن}}=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ، $\bar{P}=\frac{U}{t}$ (توان متوسط انرژی تخلیه شده)

جریان الکتریکی متوسط $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$ ، (یادآوری: $\Delta V=\frac{\Delta U}{q}$) ، $V=IR$

$R=\rho\frac{L}{A}$ (ρ: مقاومت ویژه) ، $\rho=\rho_0(1+\alpha\Delta\theta)$



نیروی محرکه الکتریکی $\Rightarrow e=\frac{\Delta W}{\Delta q}$ یا ε



$I \Rightarrow$ $\Delta V=-\varepsilon-Ir$

$\Leftarrow I$ $\Delta V=\varepsilon-Ir$

* جریان از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر می رود.
* در هر دور زدن کامل حلقه‌ای از مدار، جمع جبری اختلاف پتانسیل های اجزای مدار صفر است.

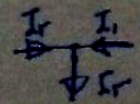
$P=\frac{W}{t}=\frac{q\Delta V}{t}=I\Delta V$ (توان) $P=IV=RI^2=\frac{V^2}{R}$

توان خروجی یک منبع نیروی محرکه واقعی $\Rightarrow P_{\text{خروجی}}=I\Delta V=I(\varepsilon-Ir)=\underbrace{\varepsilon I}_{\text{توان تولیدی}}-\underbrace{rI^2}$

توان مصرفی در مقاومت داخلی باتری یا توان تلف شده

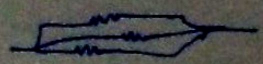
ترکیب مقاومت ها

متوالی:  $R_T=\sum R_n$ ، $V_T=\sum V_n$ ، $I_1=I_2=I_3=\dots$



قاعده انشعاب $\Rightarrow I_1+I_2=I_3$

$\frac{1}{R_T}=\sum\frac{1}{R_n}$ ، $I_T=\sum I_n$

موازی:  $V_1=V_2=V_3=\dots$

* خط های میدان مغناطیسی از قطب N خارج و به قطب S وارد می شوند

* اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آنکه جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد) بر آن نیرویی وارد خواهد شد که بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است و جهت آن با قاعده ی دست راست بدست می آید.

قاعده دست راست: چهار انگشت در جهت $\vec{v}$ و در جهت B آن را خم می کنیم، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت خواهد بود. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.

$\otimes$ $\odot$

$$F = |q| vB\sin\theta$$

ضرب خارجی

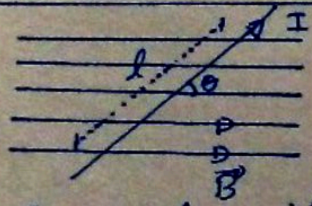
* وقتی بار الکتریکی q عمود بر راستای میدان مغناطیسی حرکت کند، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی، بیشینه می شود.

* تسلا یکای بزرگی است و برخی موارد از یکای کوچکتری به نام گاوس (G) استفاده می کنند

$$\text{یکای SI میدان مغناطیسی} \equiv \frac{N}{C.m/s} = \frac{N}{A.m} = \underset{\text{تسلا}}{1T}$$

$$1T = 10^4 G$$

* نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

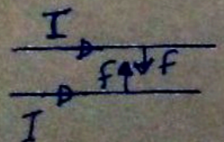


$$F = I l B\sin\theta$$

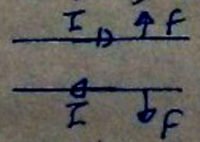
* چهار انگشت را در جهت I قرار داده و در جهت B آن ها را خم می کنیم، جهت شست جهت F را نشان خواهد داد.

* میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی: شست را در جهت I قرار می دهیم، چهار انگشت جهت میدان مغناطیسی B را نشان خواهد داد.

* نیروی بین سیم های موازی حامل جریان



هم جهت = جذب

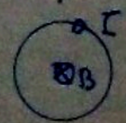


مخالف جهت = دفع

* میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه دایره ای حامل جریان:

شست را در جهت I قرار می دهیم، چهار انگشت جهت B را تعیین خواهد کرد.

یا اینکه چهار انگشت را در جهت I قرار دهیم، و جهت شست، جهت B را مشخص خواهد کرد.

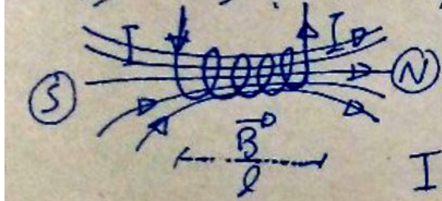


اندازه میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ای به شعاع R که حامل جریان است از رابطه $B=\frac{\mu_0 I}{2R}$ به دست می‌آید. که در آن μ_0 تراوایی مغناطیسی خلاء است.

* اگر به جای تک تک حلقه، پیچه‌ای شامل N حلقه نزدیک به هم و با شعاع یکسان R داشته باشیم، آنگاه اندازه میدان مغناطیسی در مرکز این پیچه، (که معمولاً به آن پیچه مسطح نیز گفته می‌شود) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_0 N I}{2R}$$

* میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله حامل جریان
* چهار انگشت را در جهت I سیملوله قرار می‌دهیم در جهت شست، جهت میدان مغناطیسی را نشان خواهد داد.



$$B=\frac{\mu_0 N I}{l}$$

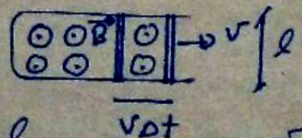
N: تعداد دورهای سیملوله ؛ l: طول سیملوله ؛ I: جریان

$\Phi = A\times B\times\cos\theta$ ، $\theta =$ زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و خط عمود بر سطح حلقه

* شار مغناطیسی کمیتی نرده‌ای است. یکای SI شار مغناطیسی، وبر (Wb) است. $\Rightarrow 1Wb = 1T\times 1m^2$

* قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:
آهنگ تغییر شار $= \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$
با تغییرات به وجود آمده مخالفت می‌کند — قانون لنز

$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, $\bar{I}=\frac{\bar{\varepsilon}}{R}$



$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\cancel{N}\frac{B\times V\times\Delta t\times l}{\Delta t} = BlV$, $V\times\Delta t\times l = \Delta A$

(ضریب القاوری) $L = \mu_0\frac{A N^2}{l}$ ؛ انرژی ذخیره شده در القاگر $U=\frac{1}{2}LI^2$

$\Phi = BA\cos\frac{2\pi}{T}t$, $\varepsilon = \varepsilon_m\sin\frac{2\pi}{T}t$, $I = I_m\sin\frac{2\pi}{T}t$ $(T=\frac{1}{f})$

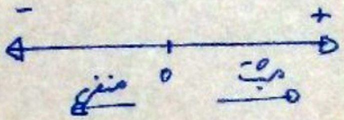
$\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}$ (مبدل‌ها) $\Rightarrow$ نسبت اختلاف پتانسیل‌ها با نسبت دورها برابر است

مسافت ، جابجایی

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابجایی}}{\text{زمان}}$$

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$$

$$\left(\frac{km}{hr}\right) \div 3.6 = \left(m/s\right)$$



نمودار مکان - زمان ، سرعت - زمان ، شتاب - زمان (مساحت ، شیب خط)

* سرعت در هر لحظه دلخواه (t) برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه است.

$$\text{تندی لحظه‌ای} = \frac{dx}{dt}$$

---

* شتاب در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در آن لحظه است

$$\text{شتاب متوسط} \quad \vec{a}_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

---

* در سقوط آزاد شتاب حرکت g بوسیله پایین است ($g\downarrow$)

$x = Vt + x_0 \Rightarrow \Delta x = V\Delta t$ (حرکت با سرعت ثابت)

$V = at + V_0 \Rightarrow \Delta V = a\Delta t$ (حرکت با شتاب ثابت)

$V_{av} = \frac{V_0 + V_1}{2}$ (معادله سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت)

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$ (معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت)

* سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی برابر جابجایی در آن بازه است . (مساحت بالای نمودار ⊕ ، مساحت پایین نمودار ⊖)

$V_2^2 - V_1^2 = 2a\Delta x$ (معادله سرعت - جابجایی در حرکت با شتاب ثابت)

---

* قانون اول نیوتون : تک جسم ، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند مگر آنکه نیروی خالص (غیر صفر) به آن وارد شود.

* به این خاصیت اجسام که میل دارند وضعیت حرکت خود را هنگامی که نیروی خالص وارد نمی‌شود حفظ کنند، لختی گویند.

کند، لختی

* قانون دوم نیوتن : هرگاه بر جسم نیروی خالص وارد شود ، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در جهت نیروی خالص است و با جرم جسم نسبت وارون دارد .

$(\Sigma F = ma)$

* قانون سوم نیوتن : هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند ، جسم دوم نیز ، جسم اول نیرویی هم اندازه و هم راستا اما در خلاف جهت وارد می‌کند .

نیروی اصطکاک ایستایی، جنبشی (f_s ، f_k)، نیروی عمودی سطح (N)، نیروی مقاومت هوا (تندی حرکت)، وزن جسم $= mg$

$f_{s,max} = \mu_s f_N$ (نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه)، $f_k = \mu_k f_N$ (نیروی اصطکاک جنبشی)

μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی — μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی

تعادل $\begin{cases} \Sigma f_x = 0 \\ \Sigma f_y = 0 \end{cases}$

$F = k\Delta x$ (نیروی کشسانی فنر)، نیروی کشش طناب

نیروی کشسانی فنر

$F = ma = m\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$

قانون دوم نیوتون برحسب تکانه برای نیروی ثابت

$P = m \times V$ (تکانه جسم)

$\Delta P = F \times \Delta t$

دوره: در حرکت دایره ای یکنواخت، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دوره تناوب (دوره) می نامیم.

$T = \dfrac{2\pi r}{V}$

$a_c = \dfrac{v^2}{r}$ (اندازه شتاب مرکزگرا)، $F_{net} = m\dfrac{v^2}{r}$ (قانون دوم نیوتون در حرکت دایره ای یکنواخت)

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ (اندازه نیروی گرانشی بین دو ذره)

* رابطه وزن و نیروی گرانشی

مثال: نشان دهید شتاب گرانشی روی زمین برابر است با $g = G\dfrac{M_e}{R_e^2}$

$f = \dfrac{1}{T}$ (بسامد)، $\underbrace{x(t) = A\cos\omega t}_{\text{معادله مکان زمان در حرکت هماهنگ ساده}}$، $\underbrace{\omega}_{\text{بسامد زاویه‌ای}} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$، $A =$ دامنه نوسان

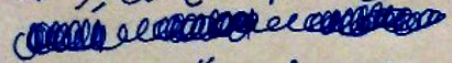
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (دوره تناوب سامانه جرم ـ فنر)، $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ بسامد زاویه‌ای سامانه جرم ـ فنر

$E = \frac{1}{2} k A^2$ (انرژی مکانیکی سامانه جرم ـ فنر) $= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 2\pi^2 m A^2 f^2$ (انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده)

$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ (دوره تناوب آونگ ساده)　　تشدید (ارزونانس) $\Rightarrow f_d = f_0$

* معمولاً موج‌ها را به دو دسته تقسیم بندی می‌کنند: موج‌های مکانیکی و موج‌های الکترومغناطیسی
* اگر به حرکت جزئی از فنر که در هنگام عبور موج، بالا و پایین نوسان می‌کند دقت کنید درمی‌یابید جابه‌جایی هر جزء نوسان کننده‌ای از فنر، عمود بر جهت حرکت موج است، که به آن موج عرضی گفته می‌شود.

* از این فنر بلند می‌توان برای ایجاد نوع دیگری از موج موسوم به موج طولی نیز استفاده کرد.



* به موج‌های عرضی و طولی که تا اینجا بررسی شد، موج‌های پیش‌رونده گفته می‌شود.

---

* فاصله بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور، طول موج نامیده می‌شود و آن را با λ نشان می‌دهند.

تندی انتشار موج (v)، بسامد (f)، دوره تناوب (T)، دامنه (A)

(تندی انتشار موج) $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$　　$T \equiv \lambda \equiv 2\pi$

* تندی انتشار موج عرضی در یک فنر، تار یا ریسمان کشیده به نیروی کشش (F) و چگالی خطی جرم ($\mu = \frac{m}{L}$) بستگی دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

---

* ثابت می‌شود مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی (توان متوسط) در یک موج سینوسی برای همه انواع امواج مکانیکی با مربع دامنه (A^2) و نیز مربع بسامد (f^2) موج متناسب است.
* میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ همواره بر جهت حرکت موج عمودند و در نتیجه موج الکترومغناطیسی، یک موج عرضی است.
* چهار انگشت در جهت $\vec{E}$ و آن‌ها را در جهت $\vec{B}$ خم می‌کنیم جهت شست، جهت سرعت ($\vec{v}$) را نشان می‌دهد.

پرتوهای گاما ، پرتوهای X ، فرابنفش ، مرئی ، فروسرخ ، میکروموج ، امواج رادیویی

طول موج زیاد ، فرکانس کاهش ، انرژی کاهش

P_{av} آهنگ متوسط انتقال انرژی و A مساحت سطحی است که صوت با آن برخورد می‌کند، بنابراین یکای شدت صوت، وات بر متر مربع (W/m^2) است.

$I = \frac{P_{av}}{A}$ (شدت صوت)

(تراز شدت صوت) $\beta = (10dB)\log(\frac{I}{I_0})$ که $I_0 = 10^{-12} W/m^2$

مثال: یک موج صوتی با شدت $I = I_0$ تراز شدت صوتی برابر $0dB$ دارد.

چشمه متحرک و ناظر (شنونده) ساکن: وقتی ماشین ساکن است تجمع جبهه‌های موج در جلو و عقب ماشین یکسان است. با حرکت رو به جلوی ماشین، تجمع جبهه‌های موج در جلوی ماشین بیشتر و در عقب آن کمتر می‌شود.

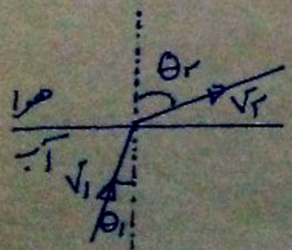
چشمه ساکن و ناظر (شنونده) متحرک: در مدت زمان یکسان خودرویی که به چشمه ساکن صوت نزدیک می‌شود با جبهه‌های موج بیشتری برخورد می‌کند، در حالی که خودرویی که از این چشمه دور می‌شود با جبهه‌های موج کمتری برخورد می‌کند.

---

* اگر تپی را در یک فنر (یا یک ریسمان) کشیده بلند که یک سر آن بر تکیه‌گاهی ثابت شده است روانه کنیم، تپ وقتی باز می‌تابد، وارونه می‌شود.

$\theta_i = \theta_r$ قانون بازتاب عمومی ⟸ زاویه تابش = زاویه بازتابش

* بازتاب
* زاویه حد ...



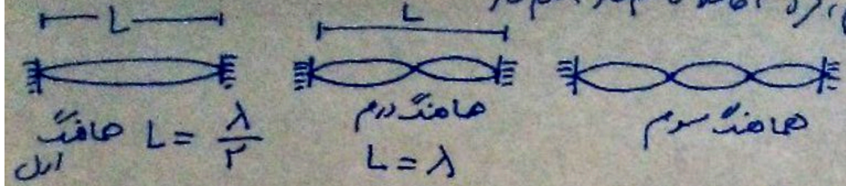
قانون شکست عمومی ⟹ $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{V_2}{V_1}$

ضریب شکست n = $\frac{\text{تندی نور در خلاء}}{\text{تندی نور در یک محیط}} = \frac{c}{v}$

قانون شکست اسنل ⟹ $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

موج ایستاده، شکم، گره، کاملاً ناهم فاز، هم فاز

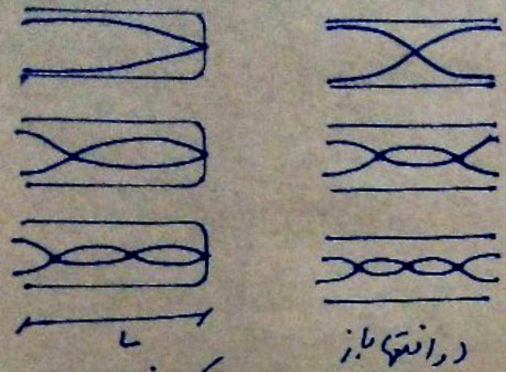
در ریسمان کشیده



موج ایستاده و تشدید در لوله‌های صوتی

$$V = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

$$T \equiv \lambda \equiv 2\pi$$



---

* اگر بر کلاهک برق‌نمای با بار منفی، نور فرابنفش تابیده شود، مشاهده می‌شود که انحراف ورقه‌های آن کاهش می‌یابد. در حالی که با تابش نور مرئی، تغییری در انحراف ورقه‌های برق‌نما رخ نمی‌دهد. این پدیده فیزیکی را، اثر فوتوالکتریک، و الکترون‌های جدا شده از سطح فلز را فوتوالکترون می‌نامند.

(فرابنفش)

---

* فرض کرد که نور با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بسته انرژی، که بعدها فوتون نامیده شد، دارای انرژی‌ای است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = hf \quad \text{(انرژی فوتون)}$$

(h: ثابت پلانک)

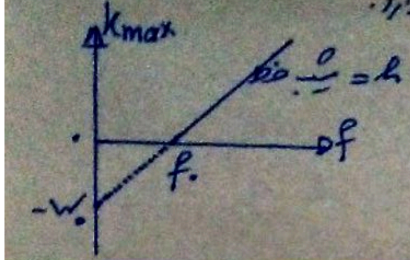
* W کار (انرژی) لازم برای خارج کردن الکترون‌ها از سطح یک فلز

$$hf = W + K \quad \left(\text{قانون پایستگی انرژی در اثر فوتوالکتریک}\right)$$

و K انرژی جنبشی آنها پس از جدا شدن از سطح آن فلز است. از آنجا که برخی از الکترون‌ها در فلز کم‌تر مقیدند، برای خارج کردن آنها از فلز کار کمتری لازم است. بنابراین اگر حداقل کار لازم برای خارج کردن الکترون‌ها از سطح یک فلز خاص W_0 باشد، انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل شده از آن برابر خواهد بود با:

$$K_{max} = hf - W_0 \quad \text{معادله فوتوالکتریک}$$

* W_0 را تابع کار فلز می‌نامند که به جنس فلز بستگی دارد.



$$f_0 = \frac{W_0}{h}$$ (بسامد آستانه فوتوالکترون‌ها)

(معادله بالمر) طول موج هر یک از خط‌های شناخته شده مربوط به طیف گسیلی خطی هیدروژن اتمی

$$\lambda = (364{,}56\ nm)\frac{n^2}{n^2 - 2^2}$$

که در آن $n \geq 3$ و همواره عددی صحیح است.

$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
خط قرمز	خط آبی	خط نیلی	خط بنفش

$$\frac{1}{\lambda} = \underbrace{R}_{\text{ثابت ریدبرگ}}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n > n'$$ (معادله ریدبرگ)

* n' عدد صحیح مثبتی است که به ازای $n'=2$، رابطه بالمر به دست می‌آید.

$n'=1$ (لیمان)	$n'=2$ (بالمر)	$n'=3$ (پاشن)
فرابنفش	فرابنفش و مرئی	فروسرخ

$n'=4$ (براکت)	$n'=5$ (پفوند)
فروسرخ	فروسرخ

$$r_n = a_0 n^2$$

شعاع مدارهای الکترون در اتم هیدروژن

$$E_n = \frac{-13{,}6\ eV}{n^2}$$

ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن

* الکترون می‌تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود.
هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U، به یک حالت مانا با انرژی کمتر E_L، یک فوتون تابش می‌شود:

$$E_U - E_L = hf$$ ← معادله گسیل فوتون از اتم

* $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ ← تبدیل $1eV$ به ژول J

* نیمه عمر: تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده ← $N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

که در آن n از رابطه‌ی $n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$

مثال: پس از گذشت ۹ روز، تعداد هسته‌های پرتوزای یک نمونه، به $\frac{1}{8}$ تعداد موجود در آغاز کاهش یافته است. نیمه عمر (برحسب روز) ماده چقدر است؟

موفق باشید