

به نام خدا



ریاضی دهم تجربی

مخصوص داوطلبان کنکور و شرکت کنندگان آزمون های آزمایشی

جزوه ی سطح دشوار برای داوطلبان رتبه ی زیر ۱۰۰۰ مناطق

منطبق بر آخرین کتاب درسی

تهیه : مهندس میعاد دارستانی دبیر رسمی آموزش و پرورش **جوانرود**

و موسس گروه آموزش مجازی آنلاین آفتاب کنکور

چه کسانی این جزوه را بخوانند؟ کنکوری هایی که میخوان زیر ۱۰۰۰ مناطق سه گانه شوند - دانش آموزان مدارس تیزهوشان و المپیادی ها

**روی چینش تست ها و سوالات این جزوه بر اساس میزان سختی و مهم بودن و احتمال طرح مفاهیم و تیپ مشابه در کنکور با نظر جمعی کار شده. لذا این جزوه نسبت به جزوه های دست نویس و تایپی اساتید منحصر به فرده. یعنی سوال الکی توی این جزوه نداریم !!

عزیزانی که درخواست جزوه یا تدریس خصوصی دارن میتونن به شماره ی زیر تماس بگیرند.

بازه (فاصله)

گاهی اوقات لازمه که تعداد و طیفی از اعداد را برای یک عملیات مهندسی یا ریاضی به کار ببریم. با توجه به این که اعداد حقیقی را خوانده ایم و به یاد داریم بین هر دو عدد حقیقی، بی نهایت عدد حقیقی دیگر میتونیم نام ببریم لذا نوشتن تک تک اعداد مثل اعداد اعداد طبیعی و صحیح غیر ممکن است. اینجا مفهوم بازه به وجود میاد.

بازه در اصل یعنی اعدادی که ما به صورت بزرگترین و کوچکترین اعداد خواسته شده مینویسیم.

مثلا ما میفوییم مجموعه ی تمام اعداد بین صفر تا ۱۰ رو به صورت بازه بگیم!!

$(0, 10)$

علامت (یعنی این که شامل خود اون عدد نمیشه. مثلا اینجا یعنی اعداد بین صفر تا ۱۰ اما خود صفر و ۱۰ رو شامل نمیشه. به این حالت بازه ی باز میگویند.

حال اگر به صورت [باشه یعنی شامل اون عدد هم میشه به مثال زیر نگاه کنید:

$[0, 10]$

این یعنی تمام اعداد بین صفر و ۱۰ که شامل خود اعداد صفر و ۱۰ هم میشه و پوشش بازه ی بسته می گویند.

تمرین (امتحان نهایی نمونه دولتی نور)

در بازه ی $(1/5, 17.5)$ چند عدد طبیعی وجود دارد که حاصل تقسیم آنها بر ۲، عدد صحیحی می باشد؟

حل: برای این که فوب جا بیفته براتون تمام اعداد طبیعی این بازه رو مینویسیم. (فقط جهت یادگیری. شما باید ذهنی این کارها رو انجام بدین)

اعداد ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ اعداد طبیعی این بازه هستند.

خب قرار باشه که حاصل تقسیم عددی بر ۲ بازم عددی طبیعی بشه یعنی باید زوج باشه.

اعداد ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ اعدادی هستند که حاصل تقسیم آنها بر ۲ بازم یک عدد صحیح می شود.

*برگزاری کلاس های آنلاین و حضوری کنکور برای دانش آموزان با تراز بالای ۷۰۰۰ توسط مهندس دارستانی ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (آزمون آزمایشی سازمان سنجش)

چند عدد صحیح در $[0, 1] - [-2, 2]$ وجود دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

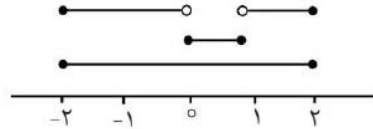
۴ (۲)

۳ (۱)

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$[-2, 0) \cup (1, 2]$$



$$[0, 1]$$

$$[-2, 2]$$

$$[-2, 2] - [0, 1] = [-2, 0) \cup (1, 2]$$

این بازه شامل اعداد صحیح ۲ و -۱ و -۲ است.

تمرین (قلمچی)

چه تعداد از موارد زیر، بیانگر مجموعه‌ای متناهی هستند؟

الف) همه کتاب‌های کتاب‌فروشی‌های خیابان انقلاب

ب) همه نوزادانی که در سال ۱۳۹۶ متولد شده‌اند.

پ) همه اعداد گنگ در بازه $(2, 4)$

ت) همه مولکول‌های موجود در سر یک سوزن

ج) همه انسان‌های روی کره زمین

$$\{x \in \mathbf{W} \mid x \in (-\infty, 10^6)\}$$

ه) تعداد نقاط روی محیط یک دایره

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

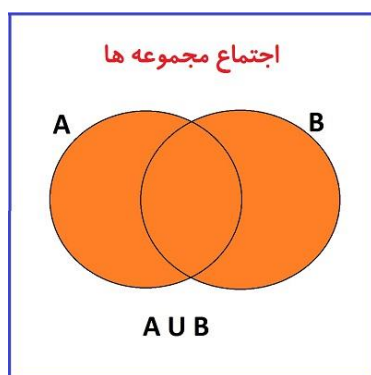
۳ (۱)

حل:

موارد (الف)، (ب)، (ت)، (ج) و (د) همگی مجموعه‌هایی را بیان می‌کنند که تعداد اعضای آن‌ها هر چند زیاد، ولی حسابی و قابل شمارش است. تنها موارد (پ) و (ه) نامتناهی است. تذکر: توجه کنید که در مورد (د) تعداد اعداد حسابی را در بازه $(10^6$ و $-\infty)$ یک عدد حسابی است، زیرا اعداد حسابی از صفر شروع می‌شوند و نه از $-\infty$.

اگر به صورت کلی بخواهیم بحث کنیم، روی مجموعه‌ها اعمال جبری قابل انجام می‌باشد. یعنی ما می‌توانیم مجموعه‌ها را با هم جمع کنیم و از هم کم کنیم و ... لذا شروع مفاهیم مجموعه‌ها را آغاز می‌کنیم.

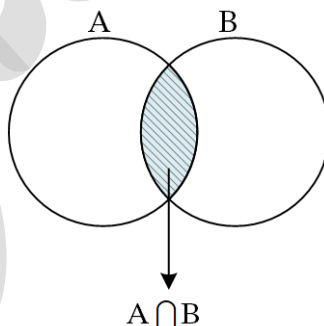
اگر دو یا چند مجموعه داشته باشیم اجتماع آنها را با \cup نشان می‌دهیم.



$$\bigcup S := \bigcup_{A \in S} A := \{x \in C : \exists A \in S, x \in A\}$$

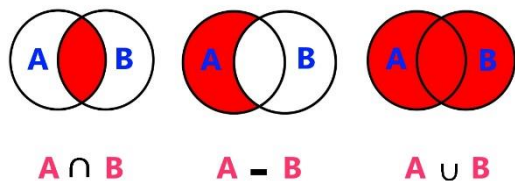
اشتراک دو یا چند مجموعه را اشتراک مجموعه‌ها گویند با \cap

نشان میدهد.



تفاضل دو مجموعه را با $A-B$ نشان میدهند و شامل اعضای از A که

در B نیستند.



مجموعه ای که تعداد اعضای آن مشخص و قابل شمارش باشند را متناهی می گویند.

مجموعه ای که تعداد اعضایش غیر قابل شمارش باشد را نامتناهی می گویند.

همیشه در یک مبحث مجموعه ای وجود دارد که تمامی مجموعه ها زیر مجموعه ی آن هستند که به آن مجموعه ی مرجع می گویند و با U نشان می دهند.

متمم یک مجموعه: متمم مجموعه ی A برابر است با تمام اعضای که در مجموعه ی مرجع وجود دارد اما در A نیستند متمم را با A' نشان می دهد.

$$۱) A \subset B \Rightarrow A \cap B = A, A \cup B = B$$

قوانین مجموعه ها به صورت زیر است:

$$۲) A \cap B \subset A \cup B$$

$$۳) B \subset A \cup B, A \subset A \cup B$$

$$۴) A \cap B \subset B, A \cap B \subset A$$

$$۵) A \cap M = A, A \cup N = M \quad (M \text{ مجموعه‌ی مرجع است})$$

$$۶) A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A$$

$$۷) A - B = A \cap B'$$

$$۸) A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$$

$$۹) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

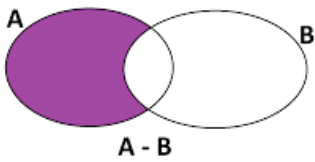
$$۱۰) A \cap A' = \phi$$

$$۱۱) A \cup A' = M$$

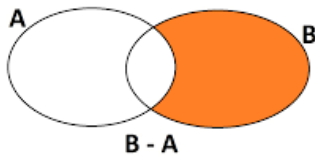
$$۱۲) \phi \cup M = M, \phi \supset M = \phi$$

همه ما می دانیم که یک تصویر گاهی می تواند بهتر از یک کتاب، گویا تر باشد. در ریاضیات تصویر نقش مهمی را ایفا می کند. در نظریه مجموعه ها نیز نمایش هندسی نقش مهمی را ایفا می کند، یکی از این اشکال ((نمودار ون)) است.

نمودارهای ون، مدل‌هایی شهوری در نظریه مجموعه‌ها هستند که برای نمایش روابط منطقی و ریاضی بین دو مجموعه به کار می‌روند. یک نمودار ون همه روابط منطقی بین مجموعه‌ها را نشان می‌دهد. این نمودارها نخستین بار توسط جان ون، فیلسوف و ریاضیدان انگلیسی در سال ۱۸۸۱ معرفی شدند. در این نمودارها مجموعه‌ها به صورت منحنی‌های بسته مشخص می‌شوند. در شکل‌ها زیر نمودار ون را برای دو مجموعه مشاهده می‌کنید. به تکرار منحنی‌های بسته‌ای که در نمودار ون به کار می‌رود مرتبه نمودار ون می‌گوییم



مثالی از مجموعه نمودار ون"

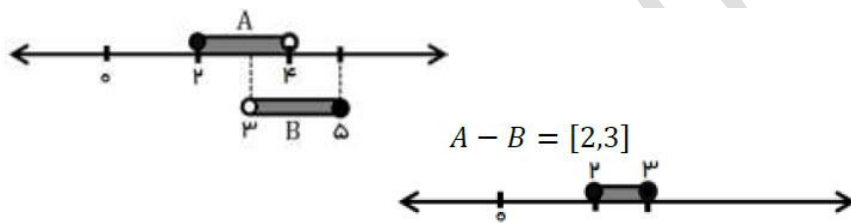


* قسمت مجموعه ها فرمول های زیادی داره . قرار هم نیست همه رو حفظ کنید. بنابراین دور ور خودتون رو شلوغ نکنید. توی حل سوالات سعی کنید که این فرمول ها پر(تون چا پیفته.

تمرین (امتحان نهایی)

اگر $A = [2,4]$ و $B = (3,5]$ باشد، آنگاه با رسم این دو بازه روی محور حاصل $A - B$ را به شکل بازه بنویسید.

حل:



تمرین (امتحان نهایی)

درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) بازه $[-2, 3]$ متناهی است.

ب) $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$

ت) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A' \subseteq B'$

حل: راحتی بر عهده ی خودتون

تمرین (امتحان نهایی)

گزینه مناسب را انتخاب نمایید (راه حل الزامی است)

الف- اگر عدد $4-m$ متعلق به بازه $(4, 3m+1)$ باشد، حدود m در کدام گزینه است؟

$$(1) -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{4} \leq m \leq \frac{5}{4} \quad (3) \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \quad (4) (0, 5)$$

ب- اگر A, B دو مجموعه جدا از هم باشند آن گاه کدام گزاره نادرست است؟

$$(1) A \subseteq B' \quad (2) A \cap B' = A \quad (3) A \cup B' = B \quad (4) A \cap B = \emptyset$$

حل:

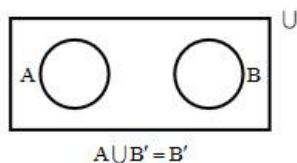
تمرین

(1) گزینه «4»

$$m - 1 < 4 < 3m + 4 \begin{cases} m - 1 < 4 \rightarrow m < 5 \\ 4 < 3m + 4 \rightarrow 3m > 0 \end{cases} \rightarrow m \in (0, 5)$$

(2) گزینه «3»

دو مجموعه جدا از هم هیچ گونه اشتراکی ندارند یعنی اگر A, B دو مجموعه جدا از هم باشند آنگاه، $A \cap B = \emptyset$ بنابراین $A \subseteq B'$
 $B \subseteq A'$

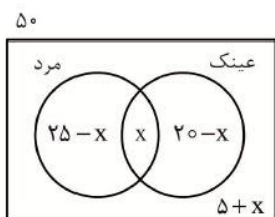


تمرین (سازمان سنجش)

- در یک همایش 50 نفر حضور دارند که 25 نفر مرد و 20 نفر عینک دارند. اگر 33 نفر زن باشند یا عینک داشته باشند، چند نفر از شرکت کنندگان مرد هستند ولی عینک ندارند؟

$$(1) 8 \quad (2) 13 \quad (3) 16 \quad (4) 17$$

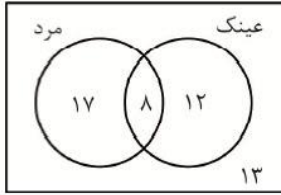
گزینه 4 درست است.

فرض می کنیم X نفر از مردان، عینک دارند، پس نمودار ون به صورت زیر است:

چون 33 نفر زن هستند یا عینک دارند، پس:

$$20 - X + 5 + X + X = 33 \Rightarrow 25 + X = 33 \Rightarrow X = 8$$

بنابراین نمودار ون به صورت زیر است و داریم:



\Rightarrow ۱۷ نفر مرد هستند ولی عینک ندارند.

تمرین (سنجش)

تمرین (سنجش)

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $2k-1$ عضو، ۴۹۶ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-1$ عضوی بیشتر می‌باشد. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه k عضوی، کدام است؟

۱۶ (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴)

گزینه ۲ درست است.

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه k عضوی برابر 2^k است.

$$2^{2k-1} - 2^{k-1} = 496, 2^k = t \Rightarrow \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} = 496 \Rightarrow t^2 - t - 992 = 0$$

$$\Rightarrow 2^k = 32$$

تمرین (سنجش)

اگر A متناهی، B و C هر دو نامتناهی باشند، آنگاه چند مجموعه زیر قطعاً نامتناهی است؟

$(B-A) \cup (C-A)$ • $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ • $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ • $A \cup (B-C)$ •
۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

حل:

گزینه ۱ درست است.

چون $B-A$ و $C-A$ نامتناهی، پس $(B-A) \cup (C-A)$ قطعاً نامتناهی می‌باشد. از سمت راست دو مجموعه اول به ازاء $B=C=\mathbb{N}$ و $A=\{1,2\}$ متناهی و مجموعه سوم به ازاء $B=Q$ و $C=Q'$ متناهی است.

با شرکت در کلاس‌های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی

پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (سنجش)

اگر $A_n = \left(\frac{1-n}{2}, \frac{2n+1}{n}\right)$ باشد، بازه $(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup A_4$ کدام است؟

- (۱) $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ (۲) $\left(0, \frac{7}{3}\right)$ (۳) $\left(-1, \frac{9}{4}\right)$ (۴) $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$A_1 = \left(0, \frac{3}{2}\right), A_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right), A_4 = \left(-1, \frac{9}{4}\right) \Rightarrow \left(0, \frac{7}{3}\right) \cup \left(-1, \frac{9}{4}\right) = \left(-1, \frac{7}{3}\right)$$

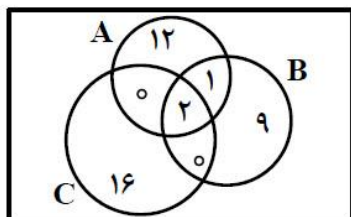
تمرین (سنجش)

اگر $n(A \cap C) = 2$ و $n(A \cap B) = 3$ ، $n(A \cap B \cap C) = 2$ ، $n(B \cap C) = 2$ ، $n(C) = 18$ ، $n(B) = 12$ ، $n(A) = 15$ باشد، مقدار $n(B' \cap C) + n(A' \cap B)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

حل:

گزینه ۳ درست است.



$$n(A' \cap B) = 9$$

$$n(B' \cap C) = 16$$

$$9 + 16 = 25$$

با توجه به نمودار ون :



پیام مشاوره ای؛ کنکور و امتحان نهایی با هم فرق دارن. مقوله ی کنکور و امتحان مدرسه با هم جداست. کسی که توی امتحان موفقه دلیل نمیشه توی کنکور و تست موفقه باشه. بنابراین هر کدوم تلاش و راه حل خودشو میطلبه.

تمرین (سنجش)

کدام گروه از مجموعه‌های زیر، قطعاً نامتناهی اند؟ (اعداد حقیقی مجموع مرجع است).

$$B = (0, 1) \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cap \left(\frac{1}{4}, 1\right) \cap \dots \cap \left(\frac{1}{n}, 1\right) (n \in \mathbb{N}), \quad A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n^2 - 1 < 0\}$$

$$D = (\mathbb{Q} \cup \mathbb{N}) \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{Q}'), \quad C = (\mathbb{N}' - \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z}' - \mathbb{N})$$

B, C, D (۴)

A, C, D (۳)

A, B, D (۲)

A, B, C (۱)

حل:

گزینه ۴ درست است.

فقط مجموعه A متناهی است.

$$n^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < n < 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$$

$$B = \left(\frac{1}{n}, 1\right) \quad \text{نامتناهی است}$$

مجموعه‌های C و D: اشتراک دو مجموعه نامتناهی می‌تواند نامتناهی باشد.

تمرین (سنجش)

اگر $A_i = \left(1 + \frac{1}{i}, 5 - \frac{2}{i}\right)$ باشد، $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{10}$ کدام است؟

(۱/۱ و ۳) (۲)

(۲ و ۳) (۱)

(۱/۱ و ۲) (۴)

(۳ و ۴/۸) (۳)

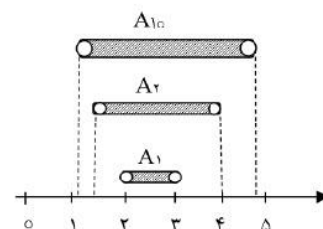
حل:

گزینه ۱ درست است.

$$A_1 = \left(1 + \frac{1}{1}, 5 - \frac{2}{1}\right) = (2, 3)$$

$$A_2 = \left(1 + \frac{1}{2}, 5 - \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 4\right) \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = (2, 3)$$

$$A_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}, 5 - \frac{2}{10}\right) = \left(1\frac{1}{10}, 4\frac{8}{10}\right)$$

بنابر این A_1 ، اشتراک تمام A_i ها می باشد.

دنباله

گاهی وقت ها توی زندگی بعضی چیزا با نظم تغییر میکنن. یا به عبارتی دیگه الگو دارن. مجموعه ای از اعداد که به صورت الگویی تکراری ادامه پیدا میکنه ، الگو یا دنباله می گویند.

مثلا اعداد $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ در نظر بگیرید. هر عدد به جز عدد اول این دنباله ، از جمع دو عدد قبلی به دست میاد. به این دنباله ، دنباله ی فیبوناتچی می گویند.

اگر در یک دنباله اختلاف هر دو جمله مقداری ثابت باشد به آن دنباله ، دنباله ی خطی می گویند.

$$1, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \dots$$

مثال: جمله ی n ام دنباله مقابل را به دست آورید.

$$a = 1, d = -\frac{1}{3} : a_n = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(n - 1) = \frac{2}{3} - \frac{n}{3}$$

تعداد زیادی دنباله با الگوهای مشخص وجود دارد. تنها کاری که ما در این گونه سوالات باید انجام دهیم اینه که رابطه ی بین جملات رو بفهمیم و مجهولات سوال را به دست آوریم.

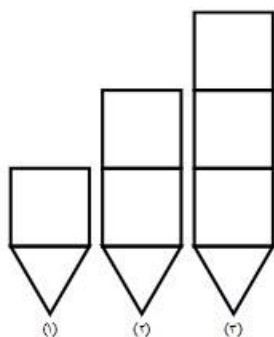
رابطه ی بازگشتی: در یک دنباله که هر جمله با جملات قبل از آن ، رابطه وجود داشته باشد را دنباله ی بازگشتی میگویند.

تمرین (امتحان نهایی)

الگوی زیر را در نظر گرفته و با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) جمله ی عمومی این الگو را مشخص کنید.

ب) در مرحله ی هفدهم، تعداد پاره خط ها را بیابید.



با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی ، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی

پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

(الف)

مرحله	۱	۲	۳	...
تعداد پاره خط	۶	۹	۱۲	...

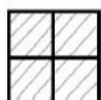
$$a_n = 3 + 3n = 3(n + 1)$$

(ب)

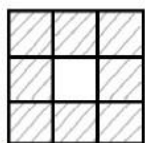
$$a_{17} = 3(17 + 1) = 3 \times 18 = 54$$

تمرین (سنجش)

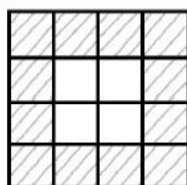
با توجه به الگوی مقابل، در شکل چندم تعداد مربع‌های رنگی برابر ۷۲ است؟



(۱)



(۲)



(۳)

...

۱۶ (۱)

۱۷ (۲)

۱۸ (۳)

۱۹ (۴)

گزینه ۳ درست است.

تعداد مربع‌های رنگی، دنباله ... ۱۲، ۸، ۴ را می‌سازند، پس یک دنباله خطی است و داریم:

$$4, 8, 12, \dots \Rightarrow t_n = 4n + b \xrightarrow{t_1=4} 4 = 4(1) + b \Rightarrow b = 0$$

$$t_n = 72 \Rightarrow 4n = 72 \Rightarrow n = 18$$

تمرین (سنجش)

در دنباله درجه دوم ... ۲۲، ۱۲، ۵، ۱ اختلاف جملات دهم و سیزدهم کدام است؟

۱۰۲ (۴)

۹۸ (۳)

۹۶ (۲)

۹۲ (۱)

پاشرکت در کلاس‌های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی

پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۰۶۷۵۸۹۷۷

گزینه ۴ درست است.

روش اول: در دنباله درجه دوم، اختلاف جملات، دنباله حسابی می‌سازند، اگر دنباله اختلاف جملات را با b_n نشان دهیم داریم:

$$1, 5, 12, 22, \dots \Rightarrow b_n = 4 + (n-1) \times 3 \Rightarrow b_n = 3n + 1$$

اختلاف جملات دهم و سیزدهم، مجموع جملات دهم، یازدهم و دوازدهم دنباله b_n است پس:

$$b_{10} + b_{11} + b_{12} = 31 + 34 + 37 = 102$$

روش دوم: می‌توانیم جمله عمومی دنباله درجه دوم را بنویسیم:

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = 145 \\ a_{13} = 247 \end{cases} \Rightarrow a_{13} - a_{10} = 247 - 145 = 102$$

تمرین (سنجش)

در یک دنباله خطی، جمله سوم ۷ و جمله هفتم ۳ است. چند جمله از این دنباله، مثبت هستند؟

۸ (۴) ۹ (۳) ۱۰ (۲) ۱۱ (۱)

گزینه ۳ درست است.

$$t_n = an + b$$

$$\begin{cases} t_3 = 7 \\ t_7 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + b = 7 \\ 7a + b = 3 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow a = -1 \\ \searrow b = 10 \end{matrix}$$

$$t_n = -n + 10 > 0$$

$$n < 10 \Rightarrow \boxed{n \leq 9}$$
 بنابراین ۹ جمله مثبت وجود دارد.

تمرین (سنجش)

جمله هفتم دنباله $a_n = 5a_{n-1} - 2$ ، $a_1 = 1$ کدام است؟

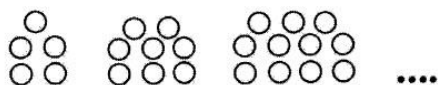
۸۱۸۳ (۴) ۸۰۶۳ (۳) ۸۰۲۳ (۲) ۷۸۱۳ (۱)

گزینه ۱ درست است.

$$a_2 = 5(1) - 2 = 3, a_3 = 5(3) - 2 = 13, a_4 = 5(13) - 2 = 63, \dots \Rightarrow a_7 = 7813$$

تمرین (سنجش)

- در الگوی زیر در شکل چندم ۳۸ دایره داریم؟

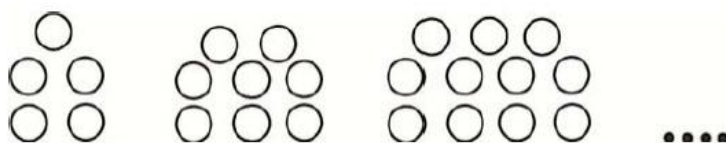


۱۲ (۱)

۶ (۲)

۱۱ (۳)

۵ (۴)



شماره شکل :

(۱)

(۲)

(۳)

تعداد دایره‌ها :

۵

۸

۱۱

+۳

+۳

تعداد دایره‌ها تشکیل دهنده یک الگوی خطی با قدر نسبت ۳ است.

$$a_n = bn + c \xrightarrow{b=3} a_n = 3n + c$$

$$a_1 = 3 + c = 5 \rightarrow c = 2$$

$$a_n = 3n + 2 = 38 \rightarrow 3n = 36$$

$$n = 12$$

تمرین (سنجش)

اگر $a_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ باشد، حاصل a_{10} کدام است؟

$$\frac{10}{19} \quad (۴)$$

$$\frac{10}{21} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{16} \quad (۱)$$

با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

گزینه ۳ درست است.

$$a_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a_n = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$2a_n = \frac{3-1}{1 \times 3} + \frac{5-3}{3 \times 5} + \dots + \frac{(2n+1) - (2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}$$

با تفکیک هر کدام از کسرها داریم:

$$2a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

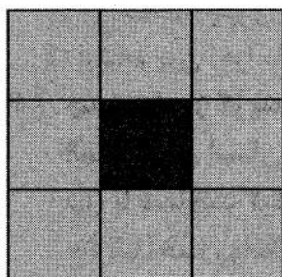
$$2a_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

مقدار a_{10} را می‌خواهیم پس $n=10$ قرار می‌دهیم:

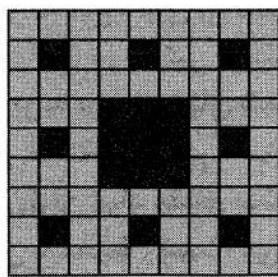
$$2a_{10} = 1 - \frac{1}{2(10)+1} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \xrightarrow{\div 2} a_{10} = \frac{10}{21}$$

تمرین (قلمچی)

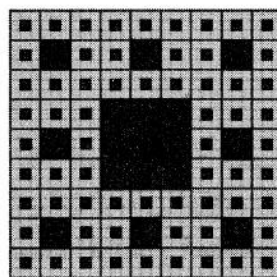
در الگوی زیر تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل پنجم کدام است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

۴۶۸۰ (۴)

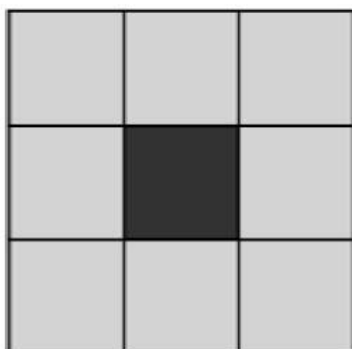
۴۶۷۲ (۳)

۴۶۸۱ (۲)

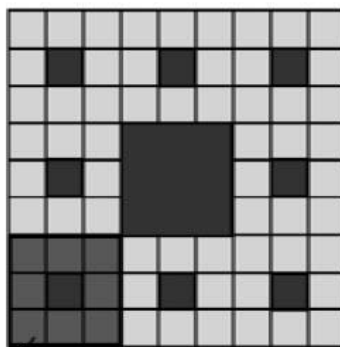
۵۸۵ (۱)

با شرکت در کلاس‌های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش‌آموزان قبولی رشته‌ی
پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

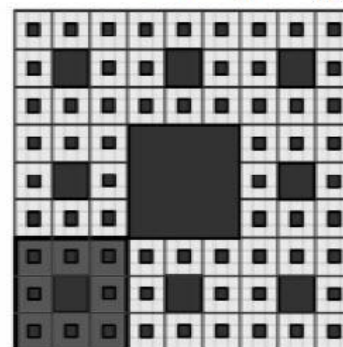
گزینه ۲ درست است.



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

در هر شکل جدید ۸ تا از شکل قبلی داریم که در طرفین مربع وسطی ایجاد شده است. پس تعداد مربع‌ها در هر شکل جدید برابر ۸ برابر شکل قبلی به اضافه ۱ می‌شود که اینطور می‌نویسیم که:

$$a_{n+1} = 8a_n + 1 \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = 8(1) + 1 = 9$$

$$a_3 = 8(9) + 1 = 73$$

$$a_4 = 8(73) + 1 = 585$$

$$a_5 = 8(585) + 1 = 4681$$

تمرین (گاج)

در یک الگوی خطی جملات سوم و هفتم به ترتیب ۳ و ۲۳ می‌باشند. مقدار جمله چندم این الگوی خطی با شماره آن برابر می‌باشد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

گزینه ۲ درست است.

جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت $a_n = bn + c$ می‌باشد و می‌دانیم $a_3 = 3$ و $a_7 = 23$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} a_3 = 3 \rightarrow 3b + c = 3 \\ a_7 = 23 \rightarrow 7b + c = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = -12 \end{cases}$$

$$a_n = 5n - 12 \rightarrow n = 5n - 12$$

$$4n = 12 \quad n = 3$$

شماره و مقدار جمله سوم این دنباله با هم برابر است.

با شرکت در کلاس‌های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی

پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۰۶۷۵۸۹۷۷

دنباله ی حسابی : دنباله ای که هر جمله از افزودن یک مقدار ثابت به جمله ی قبلی به دست می آید دنباله ی حسابی می گویند.

پیام مشاوره ای: کلا یادگیری ریاضی و دنباله به سوال زیاد حل کردنه . همیشه غر تزیید و معترض نباشید که چرا این سوال و فلان امتحان سخت یا غیر استاندارد بوده. درس ریاضی یک درس تحلیل می باشد که یادگیری آن مستمر و زمان پر میباشد. بنابراین انتظار نداشته باشید که در سریع ترین زمان ممکن درس هایی مثل ریاضی و فیزیک به تسلط برسید.



جمله ی اول دنباله ی هندسی رو با a نشان می دهند. فاصله ی ثابت بین جملات را هم قدر نسبت می گویند و با d نشان می دهند.

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n - 1)d$$

جمله ی n ام این دنباله $a + (n - 1)d$ است.

فب همون طور که مشخصه اگر فکر کنید اعدا طبیعی بارزترین مثال برای یک دنباله ی حسابی هستش. چون هر جمله با قدر نسبت a با جمله ی بعدی فاصله داره.

علامت قدر نسبت در روند صعودی یا نزولی بودن (با این اصطلاح ها سال دوازدهم آشنا میشیر) موثره. اگر علامت قدر نسبت مثبت باشد دنباله در حال افزایش و اگر قدر نسبت منفی باشد در حال کاهش است.

اگر a_m, a_n دو جمله ی دلخواه و $m > n$ فرض شود، ان گاه قدر نسبت از رابطه ی روبه رو به دست می آید.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

چند نکته: اگر تمامی جملات یک دنباله ی حسابی را با عددی جمع کنیم یا از عددی کم کنیم، مقدار قدر نسبت ثابت و تغییر نمی کند.

اگر تمامی جملات یک دنباله ی حسابی را در یک عدد ضرب یا تقسیم کنیم، قدر نسبت نیز در آن عدد ضرب یا تقسیم می شود.

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b به اندازه n واسطه حسابی درج کنیم، دنباله ی جدید تشکیل دنباله ی حسابی می دهد که قدر نسبت این دنباله ی حسابی برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

اگر سه عدد a, b, c تشکیل دنباله ی حسابی بدهند آن گاه $b = \frac{a+c}{2}$ یا $2b = a + c$

اضافه کاری!!!

کنکور ۱۴۰۰ ثابت کرد که طراحان کنکور زیاد مقید به کتاب درسی نیستند و اصلا مطالب حذف شده یا نشده توی کتشنون نمیره!!! برای همین در قسمت های اضافه کاری مطالبی را که توی کتاب درسی جدید حذف شده ولی قدیما بود و طراحان کنکور دلبستگی عجیبی بهشون دارند.

اگر در یک دنباله با قدرنسبت d و جمله ی اول a بخواهیم مجموع n جمله ی اول این دنباله را حساب کنیم از فرمول های زیر استفاده می کنیم.

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

اگر فقط تعداد جملات یک تصاعد عددی فرد باشد، در این صورت:

$$S_n = n \times (\text{جمله وسط}) \quad \text{یا} \quad S_{2n-1} = 2n-1 \times a_n$$

با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی پزشکی استاد پیپوندید. ۰۹۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (امتحان نهایی)

بین دو عدد ۲ و ۱۰۲ چند عدد قرار دهیم تا یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲/۵ حاصل شود؟

$$\frac{102 - 2}{m + 1} = 2/5 \Rightarrow \frac{100}{2/5} = m + 1$$

$$\Rightarrow 40 = m + 1 \Rightarrow m = 39$$

تمرین (امتحان مدرسه فلسطین تهران)

در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۶- است و مجموع سه جمله دوم ۲۱ است. جمله اول و قدرنسبت را به دست آورید.

$$\text{ب) } a + a + d + a + 2d = -6 \quad 3a + 3d = -6$$

$$a + 3d + a + 4d + a + 5d = 21 \quad 3a + 12d = 21$$

$$\begin{cases} 3a + 3d = -6 \\ -3a - 12d = -21 \end{cases} \rightarrow d = 3 \quad a = -5$$

تمرین (نمونه دولتی)

مقدار x را به گونه ای بیابید که سه عدد $3x + 3$ و $2x - 4$ و $2x + 1$ تشکیل دنباله حسابی دهند. سپس جملات را نوشته و قدرنسبت را بیابید.

حل:

$$2(2x - 4) = 2x + 1 + 3x + 3$$

$$4x - 8 = 5x + 4 \rightarrow x = -12$$

$$\text{جملات: } -23, -28, -33 \rightarrow d = -5$$

با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی پزشکی استاد پیپوندید. ۰۹)۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (موسسه تذکیه)

دنباله حسابی با جمله اول ۲۸- و جمله هشتاد و یکم ۱۲ چند جمله منفی دارد؟

حل: حلش بر عهده ی خودتون

تمرین (سنجش)

فرض کنید واسطه حسابی بین دو عدد برابر ۵ باشد. اگر بین دو عدد، ۵ واسطه حسابی درج کنیم و آنگاه قدر نسبت برابر ۲ تشکیل شود، جمله دهم این دنباله جدید کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

حل:

گزینه ۱ درست است.

روش اول:

$$\begin{cases} \frac{b-a}{5+1} = 2 \Rightarrow b-a = 12 \\ \frac{b+a}{2} = 5 \Rightarrow b+a = 10 \end{cases} \Rightarrow b = 11, a = -1$$

$$\Rightarrow a_{10} = -1 + 9 \times 2 = 17$$

روش دوم:

بین ۷ جمله این دنباله، جمله چهارم برابر ۵ و قدرنسبت ۲ است.

$$a_{10} = a_4 + 6 \times d = 17$$

پیام مشاوره ای: با عشق و علاقه درس فوندن فیلی متفاوتی تا به زور درس فوندن!! اصلا کیرایی چیزی که بهش علاقه



داریم پذیرن برابره و تازه فسته هم نمیشیم. آکه قراره پزشک یا دندون پزشک بشیم با دید مثبت و عشق به این کتابها (پل پیروزی به سمت آقا و خانم دکتر شدن) نگاه کنیم. تمرین کنید از الان!!!

تمرین (سنجش)

جملات دهم دنباله درجه دوم ... ۳, ۵, ۹, ۱۵, ... و یک دنباله حسابی با هم برابرند. اگر جمله چهارم دنباله حسابی ۳۹ باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

حل:

گزینه ۴ درست است.

جمله دهم دنباله درجه دوم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{3, 5, 9, 15, \dots} \\
 \underbrace{+2 \quad +4 \quad +6} \\
 \underbrace{+2 \quad +2}
 \end{array}
 \Rightarrow a_n = n^2 + bn + c \begin{cases} a_1=3 \\ a_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+b+c=3 \\ 4+2b+c=5 \end{cases} \Rightarrow b=-1, c=3$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 - n + 3 \Rightarrow a_{10} = 100 - 10 + 3 = 93$$

بنابراین جمله دهم دنباله حسابی ۹۳ و جمله چهارم آن ۳۹ است، پس:

$$d = \frac{t_{10} - t_4}{10 - 4} \Rightarrow d = \frac{93 - 39}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

تمرین (سنجش)

اگر α و β و γ سه جمله متوالی دنباله حسابی با قدرنسبت منفی و α و β ریشه‌های معادله

$$x^2 - (3m-1)x - m^2 = 11$$

-۶۴ (۴)

-۶۲ (۳)

-۵۶ (۲)

-۴۴ (۱)

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$2(2x^2 - 4) = x + 8x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 9x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3, -\frac{3}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4}, -\frac{23}{8}, -5, -\frac{57}{8}, -\frac{37}{4} = -9/25$$

تمرین (سنجش)

اگر $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{2x-1}$ و $\frac{2}{2x+5}$ دنباله‌ای حسابی باشد، کدام گزینه زیر نیز دنباله حسابی است؟

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{1}{2x-1}, \frac{1}{2x-2}, \frac{1}{3} \\ (2) \quad \frac{1}{4}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{2} \\ (3) \quad x^2, 6/25, 0/25 \\ (4) \quad x^2, 4/25, 1/75 \end{array}$$

حل:

گزینه ۳ درست است.

اگر a و b و c سه جمله متوالی دنباله باشند، $2b = a + c$ است.

$$\begin{aligned} \frac{4}{2x-1} &= \frac{2}{2x+5} + \frac{1}{2} = \frac{4+2x+5}{2(2x+5)} \Rightarrow 4x^2 + 16x - 9 = 16x + 40 \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{49}{4} \Rightarrow \frac{49}{4}, \frac{25}{4}, \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x^2, 6/25, 0/25 \end{aligned}$$

تمرین (سنجش)

- اگر مجموع سه جمله اول دنباله‌ای حسابی با جملات مثبت ۲۱ و مجموع مربعات آن سه جمله ۱۶۵ باشد، جمله چهارم این دنباله کدام است؟

$$\begin{array}{l} (1) \quad 13 \\ (2) \quad 15 \\ (3) \quad 17 \\ (4) \quad 19 \end{array}$$

حل:

گزینه ۱ درست است.

اگر b جمله دوم باشد، سه جمله اول برابر است با:

$$\begin{aligned} b-d, b, b+d &\Rightarrow b-d+b+b+d=21 \Rightarrow b=7 \\ (7-d)^2 + 7^2 + (7+d)^2 &= 165 \Rightarrow d^2=9 \Rightarrow d=3 \\ \Rightarrow a_4 &= 7+3 \times 2 = 13 \end{aligned}$$

تمرین (سنجش)

• دو دنباله حسابی به صورت $a_n: -3, 2, 7, \dots$ و $b_n: 5, 8, 11, \dots$ چند جمله مشترک کوچک تر از ۱۰۰۰ دارند؟

۶۴ (۴)

۶۵ (۳)

۶۶ (۲)

۶۷ (۱)

حل:

گزینه ۲ درست است.

$$a_n: -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots$$

$$b_n: 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots$$

اولین جمله مشترک در دنباله جدید ۱۷ و قدر نسبت نیز ک.م.م دو قدر نسبت ۵ و ۳ یعنی ۱۵ است:

$$C_n = a_1 + (n-1)d$$

$$C_n = 17 + (n-1)15 \rightarrow C_n = 15n + 2$$

$$15n + 2 < 1000$$

$$n \leq 66 \rightarrow \text{تعداد جملات مشترک ۶۶ مورد است.}$$

تمرین (گروه آموزشی مهندس دارستانی)

اگر a_n یک دنباله خطی باشد و $a_1 = 4$ و $a_n - a_{n+3} = 6$ به ازای هر عدد طبیعی n برقرار باشد، مقدار جمله چهارم کدام است؟

-۸۸ (۴)

-۸۴ (۳)

-۷۸ (۲)

-۷۴ (۱)

حل:

گزینه ۱ درست است.

دنباله خطی همان دنباله حسابی است با جمله عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_n - a_{n+3} = 6 \quad \text{بنابراین:}$$

$$a_1 + (n-1)d - [a_1 + (n+3-1)d] = 6$$

$$\cancel{a_1} + \cancel{nd} - d - \cancel{a_1} - \cancel{nd} - 2d = 6$$

$$-3d = 6 \rightarrow \boxed{d = -2}$$

$$a_{40} = a_1 + 39d = 4 + 39(-2) = -74$$

جهت مشاوره و برنامه ریزی هم میتوانید با واتس آپ مهندس دارستانی ۰۹۱۰۶۷۵۱۹۷۷

پیام بدین.

دنباله ی هندسی

در دنباله ای که هر جمله از ضرب یک مقدار ثابت با جمله ی قبلی به دست می آید را دنباله ی هندسی می گویند. این مقدار ثابت را قدرنسبت می گویند و با t یا q (فرقی نمیکند قاطی نکنید!!!) نشان می دهند.

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{(n-1)}$$

جمله ی n ام این دنباله $aq^{(n-1)}$ است .

اگر هر جمله را بر جمله ی قبلی تقسیم کنیم ، قدر نسبت به دست می آید.

اگر بخواهیم بین دو جمله ی a و b واسطه های هندسی درج کنیم :

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

اگر a و b و c سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند داریم:

$$b^2 = ac$$

نکته : دنباله ای که هم حسابی و هم هندسی باشد یک دنباله ی ثابت است.

اگر a^k, a^p, a^m سه جمله ی متوالی دنباله ی هندسی باشد ، آنگاه خواهیم داشت:

$$2p = m + k$$

یعنی بین توان ها رابطه ی حسابی برقرار است.

در دنباله ی هندسی با جمله ی اول a و قدر نسبت q مجموع n جمله اول برابر است با:

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

هر قسمت از ریاضی رو که نگاه کنی فرمول های زیادی میشه استخراج کرد. لازم هم نیست همه رو حفظ کنی. بعضی از فرمول های کلی و کلیدی رو حفظ کنی و بقیه رو با حل سوال در ذهنت فوتون با بندازین.

تمرین (امتحان نهایی مدرسه امیر کبیر)

در یک دنباله هندسی اگر جملات پنجم و هشتم به ترتیب ۴۰ و ۳۲۰ باشد، جمله عمومی را به دست آورید.

حل:

$$q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \quad q^{8-5} = \frac{320}{40} \quad q = 2$$

$$a_5 = a_1 q^4 \rightarrow 40 = a_1 \times 16 \rightarrow a_1 = \frac{5}{2}$$

$$a_n = \frac{5}{2} \times (2)^{n-1}$$

تمرین (امتحان نهایی)

الف) در یک دنباله هندسی جمله هفتم، ۱۳۵ و جمله چهارم آن ۵ است. جمله اول و قدرنسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب) بین ۶ و ۱۶۲ دو واسطه هندسی درج کنید.

حل:

الف) $a_7 = 135$ $a_4 = 5$ $q^{7-4} = \frac{a_7}{a_4}$ $q^3 = \frac{135}{5} = 27$ $q = 3$ $a_4 = a_1 q^3 = 5 \rightarrow a_1 = \frac{5}{27}$

ب) $q^{n+1} = \frac{b}{a} \rightarrow q^3 = \frac{162}{6} \rightarrow q = 3$

6, 18, 54, 162

تمرین (سنجش)

جمله سوم یک دنباله حسابی صفر است. اگر جملات چهارم، ششم و n ام این دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار n کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

حل:

گزینه ۳ درست است.

چون جمله سوم دنباله حسابی صفر است، پس:

$$a_3 + 2d = 0 \Rightarrow a_1 = -2d$$

از طرفی قدر نسبت دنباله هندسی برابر $r = \frac{a_6}{a_4}$ است، بنابراین داریم:

$$r = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} \xrightarrow{a_1 = -2d} r = \frac{3d}{d} = 3$$

حال داریم:

$$r = \frac{n-6}{6-4} \Rightarrow 3 = \frac{n-6}{2} \Rightarrow n-6 = 6 \Rightarrow n = 12$$

تمرین (سنجش)

در یک دنباله هندسی مثبت با قدر نسبت بزرگتر از یک، جمله سوم از دو برابر جمله اول و از جمله دوم به ترتیب یک و سه واحد بیشتر است. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

- ۱۷/۱۲۵ (۱) ۱۸/۶۷۵ (۲) ۲۰/۲۵ (۳) ۳۰/۳۷۵ (۴)

حل:

گزینه ۳ درست است.

سه جمله اول دنباله $a_3 = 2a + 1 = a_1 + 3 \Rightarrow a_1 = 2a - 2 \Rightarrow a, 2a - 2, 2a + 1$

$$\Rightarrow (2a - 2)^2 = a(2a + 1) \Rightarrow 4a^2 - 8a + 4 = 2a^2 + a \Rightarrow 2a^2 - 9a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = 4, \frac{1}{2}, a_1 = 2a - 2 \Rightarrow aq = 2a - 2 \Rightarrow q = \frac{2a - 2}{a}, t = \frac{2a - 2}{a} = \frac{3}{2}, -2 \Rightarrow a = 4, t = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a_5 = 4\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 20/25$$

تمرین (گروه آموزش آنلاین مهندس دارستانی)

مجموع سه عدد a, b, c که جملات متوالی یک دنباله هندسی اند، برابر ۱۲ است. اگر a, b, c تشکیل یک دنباله حسابی نزولی بدهند، حاصل جمع قدر نسبت دنباله هندسی با قدر نسبت دنباله حسابی، کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) -۱۴ (۳) -۱۲ (۴) -۱۰

حل:

گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} a+b+c=12 \\ 2a=b+c \\ b^2=ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=12 \\ 2a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow 3a=12 \Rightarrow a=4$$

$$\begin{cases} b+c=8 \\ b^2=4c \end{cases} \Rightarrow b+\frac{b^2}{4}=8 \Rightarrow b^2+4b-32=0 \Rightarrow (b+8)(b-4)=0$$

دنباله حسابی $16, 4, -8 \Rightarrow$ دنباله هندسی $4, -8, 16$

غیر قابل قبول $4, 4, 4 \Rightarrow$ $b=4 \Rightarrow c=4$

$q=-2, d=-12 \Rightarrow -2+(-12)=-14$

تمرین (سنجش)

در یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ ، حاصل ضرب n جمله اول برابر $2^{-n(n+1)}$ می باشد. جمله پنجم دنباله، کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) $-\frac{1}{16}$ (۳) ۳۲ (۴) $\frac{1}{32}$

حل: خودتون حلش کنید. گزینه ی ۴ صحیحه. سعی کنید جواب رو به دست بیارید!!

جهت مشاوره و برنامه ریزی هم میتونید با واتس آپ مهندس دارستانی ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

پیام برین.

تمرین (سنجش)

در یک دنباله هندسی با قدر نسبت منفی، مجموع سه جمله متوالی -15 و حاصلضرب آنها برابر 1000 می‌باشد، جمله پنجم این دنباله کدام است؟

- (۱) 100 (۲) 80 (۳) -80 (۴) -100

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$\frac{b}{q}, b, bq \Rightarrow b^3 = 1000 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow 10 + \frac{10}{q} + 10q = -15 \Rightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0$$

$$q = -2 \Rightarrow q_2 = bq^3 = -80$$

تمرین (سنجش)

اگر بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ ، یک واسطه هندسی درج کنیم، مجموع مربعات واسطه هندسی و قدر نسبت بزرگ‌تر از یک کدام است؟

- (۱) $14 + 5\sqrt{6}$ (۲) $18 + 7\sqrt{3}$
(۳) $15 + 6\sqrt{6}$ (۴) $14 + 4\sqrt{3}$

حل:

گزینه ۳ درست است.

روش اول:

$$b^2 = \sqrt{2}(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) = 10 + 4\sqrt{6}$$

$$q^2 = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$b^2 + q^2 = 10 + 4\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6} = 15 + 6\sqrt{6}$$

تمرینات دوره ای فصل اول

در این قسمت سعی کرده ایم تست های مناسب احتمالی برای کنکور های سال های آینده را جمع آوری کنیم.

اگر اشتراک دو مجموعه $(b-a, 2b+a)$ و (a^2-2b, a^2+b) برابر $[3a-4b, 3a-2b]$ باشد، اجتماع این دو مجموعه شامل چند عدد صحیح است؟ $(b \neq 0, a \neq 0)$

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

اگر سه مجموعه A و B و C نامتناهی و $C \subset B \subset A$ و M مجموعه مرجع باشد، کدام مجموعه قطعاً متناهی است؟

- (۱) $(C \cup A') \cup (B \cap A')$
(۲) $(C \cap B') \cap (A \cup B')$
(۳) $(B \cap A') \cup (B \cap C')$
(۴) $(B \cup C') \cap (A \cap C')$

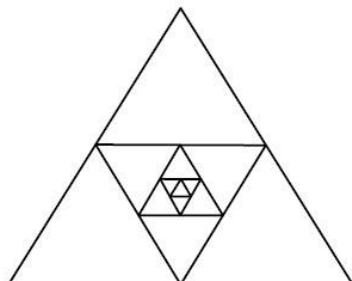
اگر M مجموعه مرجع و $n(M) = 60$ و مجموعه های A و B زیرمجموعه هایی دلخواه از مجموعه مرجع باشند به طوری که $n(A) = 35$ و $n(B) = 30$ و $n(A \cap B') = 25$ باشد، حاصل $n(M - (A' \cap B))$ کدام است؟

- (۱) ۴۵
(۲) ۴۰
(۳) ۳۵
(۴) ۳۰

چه تعداد از جملات دنباله ای با جمله عمومی $6n^2 - 17n - 14$ منفی هستند؟

- (۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۳
(۴) ۲

در شکل زیر از وصل کردن نقاط وسط اضلاع هر مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الاضلاع جدیدی به دست می آید.



نسبت مساحت بزرگترین مثلث به مساحت کوچکترین مثلث کدام است؟

- (۱) ۲۵۶
(۲) ۱۲۸
(۳) ۶۴
(۴) ۵۱۲

- حاصل ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی نزولی برابر ۱۲۵ است. اگر از جمله سوم این دنباله $\frac{2}{5}$ واحد کم شود، سه جمله تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. حاصل ضرب قدر نسبت‌های دنباله‌های حسابی و هندسی کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{4} \quad (2) & \frac{5}{2} \quad (1) \\ -\frac{5}{2} \quad (4) & -\frac{5}{4} \quad (3) \end{array}$$

- جمله بیست و ششم از دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1); a_1 = 1$ ، چند برابر کم‌ترین جمله دنباله $b_n = 2n^2 - 18n + 1$ است؟

$$\begin{array}{llll} -10 \quad (4) & -9/5 \quad (3) & -9 \quad (2) & -8/5 \quad (1) \end{array}$$

در دنباله «...، ۲۸، ۱۵، ۶، ۱» جمله ۱۹۷ام کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 9506 \quad (4) & 18835 \quad (3) & 9312 \quad (2) & 18721 \quad (1) \end{array}$$

مقادیر سه زاویه Z و Y و X بر حسب درجه از مثلثی، سه جمله متوالی دنباله حسابی هستند که اعداد Z و X اضلاع مثلث قائم‌الزاویه با یکی از اضلاع قائمه ۴۸ است. عدد بزرگتر به کدام گزینه نزدیکتر است؟

$$\begin{array}{llll} 68 \quad (4) & 70 \quad (3) & 72 \quad (2) & 74 \quad (1) \end{array}$$

در یک دنباله حسابی، $a_m = n$ و $a_n = m$ است. a_p کدام است؟

$$\begin{array}{llll} m+n-p+2 \quad (4) & -m-n+p \quad (3) & m+n-p \quad (2) & m+n+p \quad (1) \end{array}$$

حاصل کدام یک از گزینه‌های زیر نشان دهنده یک بازه بسته است؟

$$\begin{array}{ll} [-\frac{7}{4}, 6) - (1, 9) \quad (2) & (-\infty, \frac{5}{2}] \cap (-\frac{3}{2}, +\infty) \quad (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} [-5, 1) - [0, 12) \quad (4) & [-5, 4] \cup (-\infty, 12) \quad (3) \end{array}$$

دانش‌آموزان یک کلاس ۲۱ نفره حداقل به یکی از زمینه‌های ورزش، مطالعه یا موسیقی علاقه‌مند هستند.

۱۱ نفر به ورزش، ۹ نفر به مطالعه، ۳ نفر به ورزش و مطالعه، ۴ نفر به ورزش و موسیقی و ۴ نفر به

موسیقی و مطالعه علاقه‌مندند. یک دانش‌آموز هم به تمام فعالیت‌ها علاقه دارد. از میان دانش‌آموزان، چند

نفر به موسیقی علاقه‌مندند؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

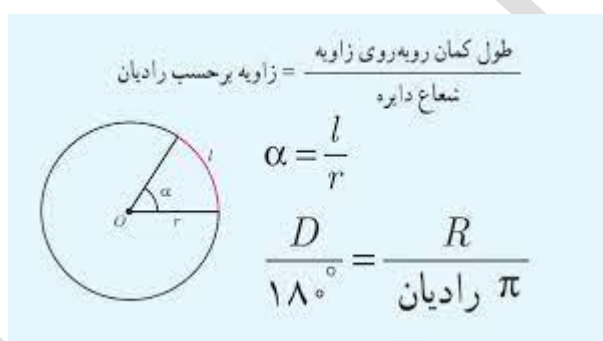
با شرکت در کلاس‌های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش‌آموزان قبولی رشته‌ی
پزشکی استاد پیپوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

پیشنهادات و انتقادات رو با ما در میان بگذارید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

مثلثات

مثلثات از فصل های مهم ریاضی به حساب می آید. به دلیل ترکیب شدن این فصل با مباحث دیگر، یادگیری این فصل و مفاهیم آن بسیار الزامی است. در دهم و یازدهم و دوازدهم مباحث مثلثات ادامه پیدا میکند. پس خوب این مباحث رو یاد بگیرید

رادیان زاویه مرکزی مقابل به کمانی از دایره است که طول آن با شعاع دایره برابر است. یعنی زاویه مرکزی متناظر با محیط دایره، مساوی 2π رادیان و اندازه زاویه نیم صفحه، π رادیان و اندازه زاویه قائمه، $\pi/2$ رادیان است.



در قسمت بالا فرمول تبدیل درجه به رادیان را نشان می دهد.

$$\text{رادیان که از رابطه ی } \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \text{ به دست می آید در واقع } 2\pi = 360^\circ$$

نسبت های مثلثاتی بر اساس مثلث قائم الزاویه اندازه گیری می شود. نسبت های مثلثاتی زیادی وجود دارد اما مهم ترین آنها به شرح زیر است.

نسبت های مثلثاتی

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{وتر}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{وتر}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{ضلع مجاور } A}$$

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{ضلع مقابل } A}$$

اول جزوه گفتیم که این جزوه برای دانش آموزان قوی و متوسط به بالا هستش. کسانی که توی مفهوم عبارات مثلثاتی هنوز مشکل دارن به کتاب درسی مراجعه کنند.

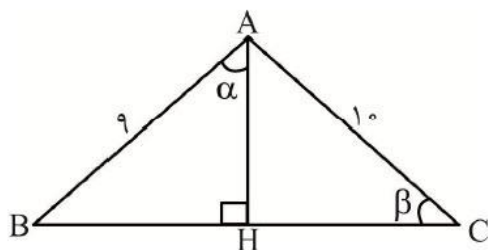
هر کدام از نسبت های مثلثاتی در زاویه ای مقدار مشخصی دارند که جدول زیر را باید حتما حفظ باشید.

جدول نسبت های مثلثاتی

زاویه	0	30	45	60	90	180	270	360	120	150
کمان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
Cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

تمرین (امتحان نهایی)

در شکل مقابل اگر $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، $\cos \beta$ کدام است؟



با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = 6$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه AHC به کمک قضیه فیثاغورس طول HC را به دست می‌آوریم:

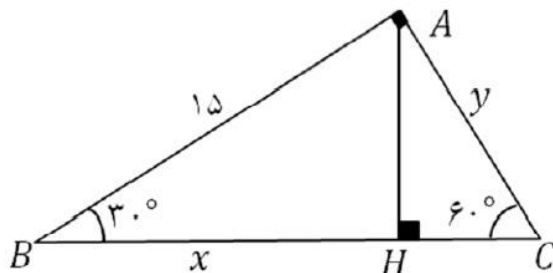
$$10^2 = 6^2 + CH^2 \Rightarrow CH^2 = 64 \Rightarrow CH = 8$$

بنابراین $\cos \beta$ برابر است با:

$$\cos \beta = \frac{CH}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

تمرین (امتحان نهایی)

در شکل زیر مقادیر x و y را بیابید.



حل:

$$\Delta ABH: \cos 30^\circ = \frac{x}{15} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{15} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{15} \rightarrow AH = \frac{15}{2}$$

$$\Delta ACH: \sin 60^\circ = \frac{AH}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{y} \rightarrow y = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$



پیام مشاوره ای: خرید منابع متعدد برای کنکور باعث سردرگمی می‌شود. سعی کنید توسط مشاوران قوی متناسب با اهداف و رشته ای که می‌فرواھید قبول شوید منابع را خریداری کنید. اینم بدونید که درس ریاضی با یک جزوه و کتاب جابه جا همیشه و نیاز به تدریس داره.

تمرین (امتحان نهایی)

در یک مثلث متساوی الساقین اندازه هر دو ساق برابر 6 واحد است و زاویه بین دوساق برابر 120 درجه است. محیط و مساحت این مثلث را بیابید.

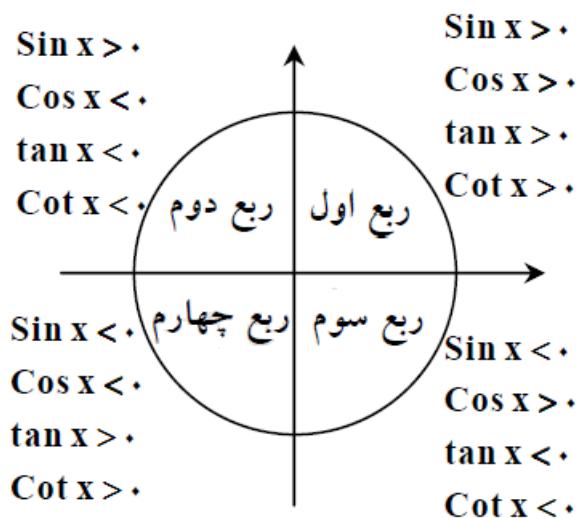
مل: فوتون زخمش رو بکشید.

برای آسان تر شدن نسبت مثلثاتی، دایره ی مثلثاتی به وجود آمده است. دایره ای که محور x ها در آن کسینوس و محور y ها در آن سینوس است.

دایره ی مثلثاتی به 4 ناحیه تقسیم می شود که مقادیر مثلثاتی و علامت های آنها در هر ناحیه متفاوت است.

زاویه ای که نسبت مثلثاتی به خود میگیرد و این

که در کدام ناحیه قرار میگیرد از مفاهیم فصل مثلثات است. حرکت مثبت در جهت پادساعتگرد است.



در ربع اول هر چه زاویه به 90 درجه نزدیک تر شود مقدار سینوس بیشتر می شود.

در ربع اول هر چه زاویه به 90 درجه نزدیک تر شود مقدار کسینوس کمتر می شود.

تمرین (امتحان نهایی)

اگر $\sin \theta = \frac{3}{5}$ و θ در ناحیه دوم دایره ی مثلثاتی باشد، سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را بیابید.

$$\text{حل:} \quad \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4}, \quad \cot \theta = -\frac{4}{3}$$

تمرین (امتحان نهایی مدرسه فلسطین)

ناحیه زاویه θ را در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta > 0$ ب) $\sin \theta \cdot \tan \theta < 0$

حل: الف) اول ب) دوم

تمرین (سنجش)

- اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم مثلثاتی و $\tan \alpha = -2$ باشد، حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (4)$$

$$-\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

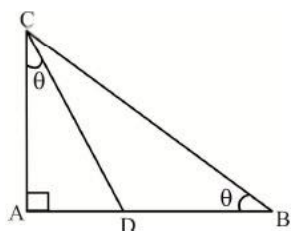
$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (1)$$

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$\tan \alpha = -2 \Rightarrow \begin{array}{c} \sqrt{5} \\ \alpha \\ 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

تمرین (سنجش)



- در شکل مقابل، $\tan \theta = \frac{1}{2}$ است. مقدار $\frac{BD}{AD}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) $\frac{3}{2}$

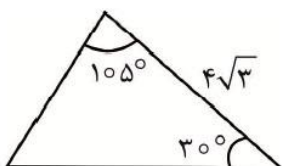
حل:

گزینه ۴ درست است.

با توجه به این که $\tan \theta = \frac{1}{2}$ است، با فرض $AD = a$ داریم:

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{AC} \Rightarrow AC = 2a \\ \tan \theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2a}{AB} \Rightarrow AB = 4a \end{cases} \Rightarrow BD = 3a \Rightarrow \frac{BD}{AD} = 3$$

تمرین (سنجش)



- در شکل زیر، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $2 + 2\sqrt{3}$
 (۲) $\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $6\sqrt{3} + 6$
 (۴) $4 + 4\sqrt{3}$

حل:

گزینه ۳ درست است.

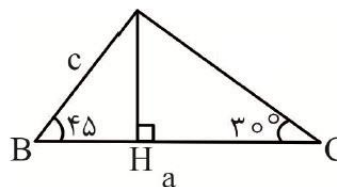
$$\frac{c}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$$

$$BH = 2\sqrt{6} \times \cos 45^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$CH = 4\sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$\Rightarrow a = BH + CH = 6 + 2\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2} (6 + 2\sqrt{3}) (4\sqrt{3}) \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} + 6$$



تمرین (سنجش)

اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha \cot \alpha < 0$ باشد، آنگاه α در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$\sin \alpha \cot \alpha = \cos \alpha < 0, \sin \alpha \cos \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$$

تمرین (سنجش)

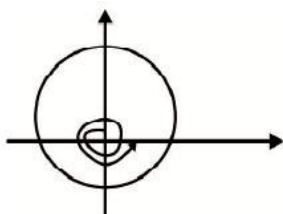
اگر $\tan \alpha = -10$ و $360^\circ < \alpha < 270^\circ$ باشد، آنگاه α چند مقدار می تواند اختیار کند؟

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل:

گزینه ۴ درست است.

چون $\tan \alpha < 0$ ، پس α در ناحیه دوم و چهارم را می تواند اختیار کند و با توجه به $360^\circ < \alpha < 270^\circ$ ، در هر ناحیه دوم و چهارم، ۲ مقدار، پس جمعاً ۴ مقدار را می تواند اختیار کند.



با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی

پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

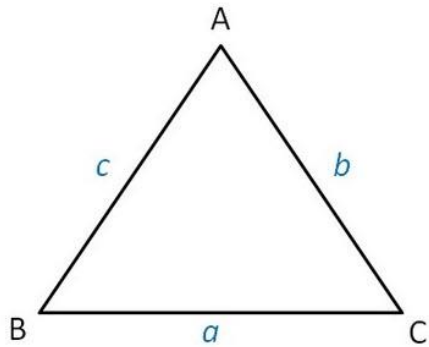
روابط و فرمول های مثلثاتی

بین نسبت های مثلثاتی روابطی وجود دارد. اثبات آنها آسان است و اگر خودتان مایل بودین میتونید اثبات کنید. حفظ کردن این فرمول ها بسیار حیاتی است .

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

کمی فرمول های بیشتری رو میگیریم. هر چند سال های آینده با اونا آشنا میشید اما فب چیز خاصی هم ندراره. (جهت اطلاع)



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی ، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

مقدار سینوس و کسینوس همواره بین $+1$ و -1 می باشد. (به ازای هر زاویه ای)
در نتیجه بیشترین مقدار ممکن برای سینوس و کسینوس (ماکزیمم) برابر 1 و کم ترین مقدار برای آنها (مینیمم) برابر -1 می باشد.

تمرین (سنجش)

اگر $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ باشد، آنگاه حاصل $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

حل:

گزینه ۲ درست است.

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{16 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{4} = \pm \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{6-2}{16}\right)^2} - 2 = 16 - 2 = 14$$

تمرین (سنجش)

اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم مثلثاتی و $\frac{7}{4} = 3 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha$ باشد، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

حل:

گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ است، پس:

$$\sin^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = \frac{7}{2} \Rightarrow \sin^2 \alpha + 3(\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}) = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ریاضی یعنی علم تمرین و حل مثال. برای یادگیری درس ریاضی باید به صورت مداوم تمرین و تست حل کنید. برای همین در درس ریاضی اصلاً دنباله درس نامه و این اداها نباشید!!! ۷۰ درصد یادگیری در حل تمرین و مثال‌ها اتفاق می‌فته.

تمرین (سنجش)

عضوهای کدام مجموعه تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

$$\{ \cos 9^\circ, \cos 18^\circ, \cos 27^\circ, \cos 36^\circ, \cos 45^\circ, \dots \} \quad (1)$$

$$\{ \cos 0^\circ, \cos 45^\circ, \cos 90^\circ, \cos 135^\circ, \cos 180^\circ, \dots \} \quad (2)$$

$$\{ \sin 0^\circ, \sin 9^\circ, \sin 18^\circ, \sin 27^\circ, \sin 36^\circ, \dots \} \quad (3)$$

$$\{ \sin 9^\circ, \sin 27^\circ, \sin 45^\circ, \sin 63^\circ, \dots \} \quad (4)$$

حل:

گزینه ۴ درست است.

دنباله هندسی است با قدر نسبت -1 $1, -1, 1, -1, \dots$

تمرین (امتحان نهایی)

اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x \right) (1 - \sin x) = \cos x$$

$$\text{طرف اول} = \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x \right) (1 - \sin x)$$

حل:

$$= \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right) (1 - \sin x)$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \times (1 - \sin x) = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x = \text{طرف دوم}$$

تمرین (امتحان)

بهنام و سالار که از هم به فاصله‌ی ۲۰ متر و در یک طرف برجی هستند، بالاترین نقطه این برج را به ترتیب با زوایای ۳۰ و ۴۵ درجه می‌بینند. ارتفاع برج را بیابید. (از قد افراد صرف نظر کنید).

حل:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{x + 20} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{x + 20} \Rightarrow \sqrt{3}x + 20\sqrt{3} = 3x \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

تمرین (امتحان)

مقدار عددی عبارت $4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ$ را بدست آورید.

$$4\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ$$

$$= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 5(1) - 3 \times \frac{1}{2} = 4 - 5 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = \frac{-5}{2}$$

در مثلث دلخواه ABC، داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A$$

مساحت مثلث ABC =

به زبان ساده ، مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس

زاویه بین آنها

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

مساحت ۶ ضلعی منتظم به ضلع a :

تمرین (امتحان)

الف) درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) = 1$$

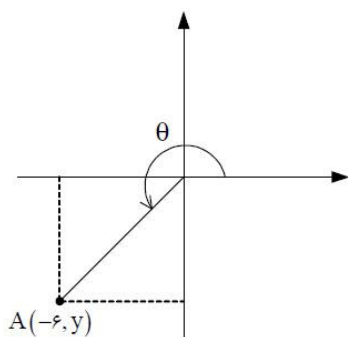
ب) حاصل را به دست آورید.

$$\cos^2 25^\circ + \tan^2 60^\circ + \sin^2 25^\circ =$$

حل: بر عهده ی خودتون .

تمرین (سنجش)

- در شکل زیر $\cos \theta = \frac{-3}{5}$ و مختصات نقطه A برابر $(-6, y)$ است. مقدار $\cot \theta$ کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{4}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{4}{5}$
- (۴) $\frac{2}{5}$

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = \frac{-6}{10} \Rightarrow x = -6, r = 10$$

$$y^2 = 10^2 - (-6)^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow y = \pm 8 \rightarrow y = -8 \text{ در ناحیه سوم، قابل قبول}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

تمرین (سنجش)

در مثلث قائم الزاویه ΔABC ، اگر زاویه $\widehat{B} = 90^\circ$ باشد، مقدار عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{(\sin^2 A + \sin^2 C) \left(\tan\left(\frac{A+C}{2}\right) + \cot\left(\frac{A+C}{2}\right) \right) + \cos(A+C) \cdot \cot^2 B}{\sqrt{2} (\sin^2 B + \cos^2 B) (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (4)$$

(۱) صفر

(۳) $\sqrt{2}$

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$A + C = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) (\tan 45^\circ + \cot 45^\circ) + 0 \times 0}{\sqrt{2} (1+0) (\cos^2 A + \sin^2 C + 0)} = \frac{1 \times (1+1) + 0}{\sqrt{2} (1)(1)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

*موفقیت اتفاقی نیست. بر آمده از سختی هاست.

تمرین (سنجش)

در یک ۱۲ ضلعی منتظم فاصله مرکز ۱۲ ضلعی تا هر رأس آن برابر ۱۲ است. مساحت ۱۲ ضلعی منتظم کدام است؟

۷۵۶ (۲)

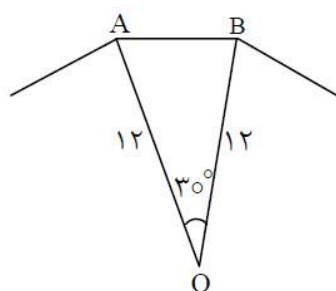
۸۶۴ (۱)

۴۳۲ (۴)

۶۴۸ (۳)

حل:

گزینه ۴ درست است.



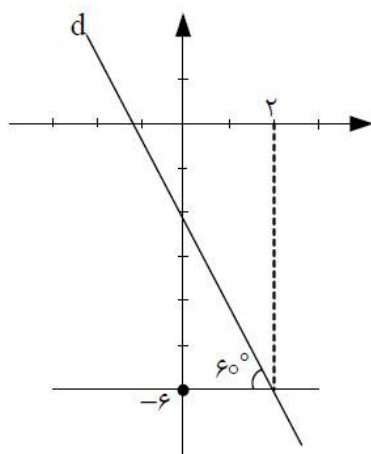
$$\widehat{AOB} = 360 \div 12 = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} S_{\widehat{AOB}} &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{O} \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \sin 30^\circ \\ &= 6 \times 12 \times \frac{1}{2} = 36 \end{aligned}$$

$$\text{مساحت ۱۲ ضلعی منتظم} = 12 \times 36 = 432$$

تمرین (سنجش)

با توجه به شکل زیر، طول نقطه تلاقی خط d با محور xها، کدام است؟



$$-2(2\sqrt{3}-1) \quad (1)$$

$$1-\sqrt{3} \quad (2)$$

$$-2\sqrt{3}+1 \quad (3)$$

$$-2(\sqrt{3}-1) \quad (4)$$

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$\tan 12^\circ = \tan(-6^\circ) = -\tan 6^\circ = -\sqrt{3} = m$$

نقطه $(2, -6)$ روی خط $d: y = mx + h$ قرار دارد:

$$-6 = -\sqrt{3}(2) + h \Rightarrow h = -6 + 2\sqrt{3}$$

$$y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 6 \quad \text{معادله خط } d$$

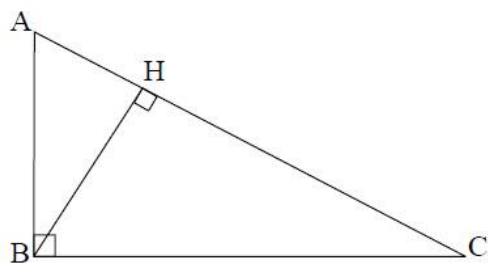
$$y = 0 \Rightarrow -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} + 2$$

$$x = -2(\sqrt{3} - 1)$$

تمرین (سنجش)

در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر AC است. اگر $BC = 12$ و $\hat{A} = 60^\circ$ باشد،

محیط مثلث BHC از محیط مثلث ABC چه مقدار کمتر است؟



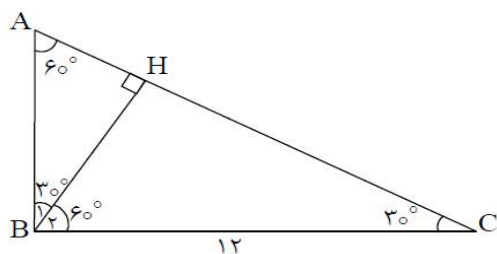
$$12(\sqrt{3} + 1) \quad (1)$$

$$6(\sqrt{3} + 1) \quad (2)$$

$$6(\sqrt{3} - 1) \quad (3)$$

$$12(\sqrt{3} - 1) \quad (4)$$

گزینه ۳ درست است.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{12}{AB} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$$

$$AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(4\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(12) = 6$$

$$\cos \hat{C} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HC}{12} \Rightarrow HC = 6\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ محیط} - \Delta BHC \text{ محیط} &= 12\sqrt{3} + 12 - 18 - 6\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3} - 6 \\ &= 6(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

تمرین (سنجش)

اگر انتهای کمان α در ربع دوم و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \sqrt{2+\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$

کدام است؟

$$\frac{7}{24} \quad (4)$$

$$\frac{7}{12} \quad (3)$$

$$\frac{5}{24} \quad (2)$$

$$\frac{5}{12} \quad (1)$$

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$1+2\sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

$$2+\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 2+(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2\underbrace{\tan \alpha \cot \alpha}_1 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2$$

$$\sqrt{1+2\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \sqrt{2+\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} = |\sin \alpha + \cos \alpha| \cdot |\tan \alpha + \cot \alpha|$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\left| \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \right| \times \left| -\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{5} \times \frac{25}{12} = \frac{5}{12}$$

• با حل کردن سوالات این جزوه می‌توانید برای آزمون‌های آزمایشی، آمادگی کامل پیدا کنید.

تمرین (قلمچی)

اگر در شکل زیر طول شخص و سایه‌اش به ترتیب $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{5}$ متر و طول X ، برابر $\frac{3}{6}$ باشد، آنگاه Y ، طول تیر

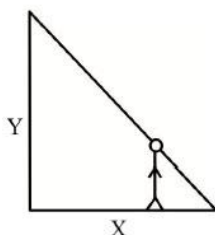
برق چقدر است؟

$$\frac{4}{32} \quad (1)$$

$$\frac{4}{35} \quad (2)$$

$$\frac{4}{45} \quad (3)$$

$$\frac{4}{48} \quad (4)$$



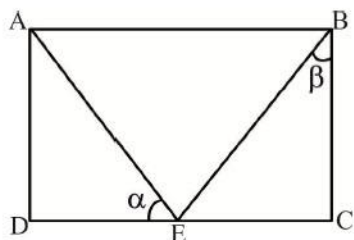
گزینه ۱ درست است.

اگر α زاویه بین امتداد نور و سطح زمین باشد، آنگاه داریم:

$$\tan \alpha = \frac{1/8}{1/5} = \frac{X}{3/6} \Rightarrow X = 4/32$$

تمرین (گاج)

در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مستطیل است. اگر $\tan \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cot \beta = \frac{6}{7}$ باشند، نقطه E طول



مستطیل را به چه نسبتی تقسیم می کند؟

- (۱) $\frac{9}{7}$
 (۲) $\frac{10}{7}$
 (۳) $\frac{11}{7}$
 (۴) $\frac{5}{4}$

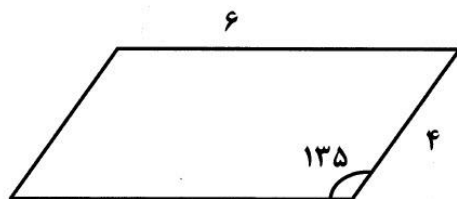
حل:

گزینه ۲ درست است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{3}{5} \\ \cot \beta = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{BC}{CE} = \frac{6}{7} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AD}{DE} \times \frac{CE}{BC} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{6} \xrightarrow{AD=BC} \frac{CE}{DE} = \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{10}{7}$$

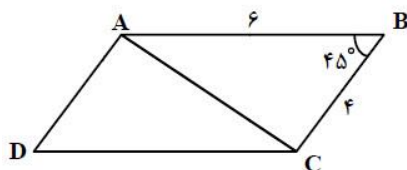
تمرین (لیموترش)

با توجه به اندازه‌های روی شکل، مساحت متوازی‌الاضلاع، کدام است؟



- (۱) $6\sqrt{2}$
 (۲) $12\sqrt{2}$
 (۳) $9\sqrt{2}$
 (۴) $18\sqrt{2}$

گزینه ۲ درست است.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 45^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = 2 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

تمرین (گزینه ی دو)

- اگر در مثلث ABC ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، $AB = \sqrt{6}$ و $BC = \sqrt{2}$ را داشته باشیم، مساحت مثلث ABC حداکثر چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 120^\circ \text{ یا } 60^\circ$$

$$\hat{C} = 120^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{3}$$

تمرین (سنجش)

اگر α زاویه‌ای منفرد و $\sin \alpha = 0/28$ باشد، آنگاه حاصل $\tan^2 \alpha - \cos \alpha$ تقریباً کدام است؟

- (۱) $1/05$ (۲) $0/9$ (۳) $-0/55$ (۴) $-0/9$

گزینه ۱ درست است.

$$\sin \alpha = 0/28 \Rightarrow \cos \alpha = -0/96, \tan \alpha \approx -0/3$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha - \cos \alpha = 0/09 + 0/96 = 1/05$$

تمرین (سنجش)

شخصی سوار چرخ و فلکی به شعاع ۶ متر که مرکز آن از سطح زمین ۷ متر فاصله دارد، می‌شود. بعد از طی زاویه

1020° ، شخص در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

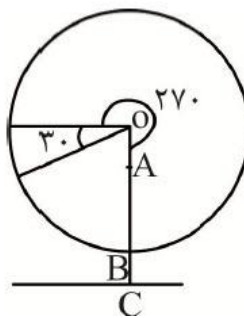
- (۱) ۴ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) ۱۰ (۴) $7 + 3\sqrt{3}$

گزینه ۱ درست است.

$$1020 = 2 \times 360 + 270 + 30$$

$$OA = r \times \sin 30 = 3 \Rightarrow AB = 6 - 3 = 3$$

$$, BC = 7 - 6 = 1 \Rightarrow AC = 3 + 1 = 4$$



تمرین (سنجش)

در مثلث ΔABC ، $AB = 2/6$ ، $AC = 5/1$ ، $\cot C = 1/175$ و $\cot B = 2/4$ است. طول BC کدام است؟

$$5/8 \quad (4)$$

$$5/6 \quad (3)$$

$$4/5 \quad (2)$$

$$6/9 \quad (1)$$

حل:

گزینه ۱ درست است.

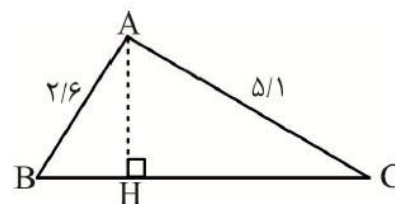
$$BH = 2/6 \cos B$$

$$CH = 5/1 \cos C$$

$$\cot B = 2/4 = \frac{12}{5} \Rightarrow \cos B = \frac{12}{13} \Rightarrow BH = 2/6 \times \frac{12}{13} = 2/4$$

$$\cot C = 1/175 = \frac{15}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{15}{17} \Rightarrow CH = 5/1 \times \frac{15}{17} = 4/5$$

$$BC = 2/4 + 4/5 = 6/9$$



تمرین (گروه آموزشی استاد دارستانی)

اگر $90 < \alpha < 135$ باشد، حاصل $\sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} - 2$ کدام است؟

$$\tan \alpha + \cot \alpha \quad (4)$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha \quad (3)$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha \quad (2)$$

$$-\tan \alpha - \cot \alpha \quad (1)$$

گزینه ۳ درست است.

$$90 < \alpha < 135 \Rightarrow \cot \alpha > \tan \alpha \Rightarrow \cot \alpha - \tan \alpha > 0$$

$$\sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} - 2 = \sqrt{(\cot \alpha - \tan \alpha)^2} = |\cot \alpha - \tan \alpha| = \cot \alpha - \tan \alpha$$

فصل ۳

توان های گویا و عبارت های جبری

در اصل این فصل رو در سال های گذشته خوانده اید. در مورد ریشه های توانی و رادیکالی می باشد. یادگیری این فصل خیلی مهمه. به طور غیر مستقیم این فصل ابزاری برای حل سوالات ریاضی در دیگر فصول می باشد.

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $b^n = a$ باشد، می گوئیم b ریشه ی n ام a است و می نویسیم: $\sqrt[n]{a} = b$. هر گاه فرجه رادیکال زوج باشد، رادیکال به شرطی تعریف شده است که عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد.

پیدا کردن مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a}$ در روی نمودار و اعداد به صورت زیر عمل میکنیم:

(۱) تعیین میکنیم که $\sqrt[n]{a}$ بین کدام دو عدد صحیح یا گویا قرار دارد.

(۲) با توجه به تقریبی که سوال از ما خواسته $\sqrt[n]{a}$ را تعیین می کنیم.

رادیکال ها از نکات مهم کنکور هستند که قوانین مربوط به فرجه ی آنها به صورت زیر است.

$$\sqrt[n]{m}\sqrt{a} = \sqrt[m]{n}\sqrt{a} \text{ و } \sqrt[n]{m}\sqrt{a} = \sqrt{nm}\sqrt{a} : \text{رادیکال در رادیکال}$$

$$\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} : \text{ساده شدن فرجه و توان}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} : \text{رادیکال با توان}$$

$$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b} : \text{خارج کردن از زیر رادیکال}$$

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} : \text{بردن عدد به زیر رادیکال}$$

بخش های یک عبارت رادیکالی



$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

به توان رساندن یک عدد توان دار

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$(\underbrace{5^2}_x)^4 = 5^8$$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = |a| \rightarrow \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \sqrt[n]{a^n} = a \rightarrow \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y} \quad \text{یا} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a < -1 \quad \text{فرد } n$$

$$a > a^3 > a^5 > \dots > a^n > \dots$$

$$a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots < \sqrt[n]{a} < \dots$$

$$\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

توان در صورت \rightarrow
فرجه در مخرج \rightarrow

برای تسلط بر قوانین فوق لازمه که اول مثال های ساده کتاب درسی رو حل کنید و سپس در تست ها و سوالات سراسری پس از تمرین بسیار مهارت لازم برای استفاده از آنها رو کسب می کنید.

$$\begin{array}{cccc} a < -1 & -1 < a < 0 & 0 < a < 1 & a > 1 \\ \sqrt[n]{a} < -1, \sqrt[n]{a} > a & -1 < \sqrt[n]{a} < 0, \sqrt[n]{a} < a & 0 < \sqrt[n]{a} < 1, \sqrt[n]{a} > a & \sqrt[n]{a} > 1, \sqrt[n]{a} < a \end{array}$$

نکته: در مورد اعداد منفی رابطه ی نامساوی فقط در مورد ریشه های فرد برقرار است.

تمرین (سنجش)

- حاصل عبارت $(\sqrt{5} + \sqrt{22} + \sqrt{5}) \times (\sqrt{5} - \sqrt{22} + \sqrt{5}) (\sqrt[4]{9} + 1)^{-1} (\sqrt{3} + \sqrt{5})$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3} - 1$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

حل:

گزینه ۳ درست است.

ابتدا عبارت $\sqrt{5+\sqrt{22+\sqrt{5}}}\times\sqrt{5-\sqrt{22+\sqrt{5}}}$ را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{25-(22+\sqrt{5})}=\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

حال داریم:

$$(\sqrt{3+\sqrt{5}})\times(\sqrt{3-\sqrt{5}})\times(\sqrt{9+1})^{-1}=\sqrt{9-5}\times(\sqrt{3+1})^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3+1}}\times\frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{3-1}}=\frac{2(\sqrt{3-1})}{2}=\sqrt{3-1}$$

تمرین (سنجش)

- مقدار $\sqrt{1/45}+\sqrt{0/062}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

$$\frac{8}{5} \quad (4)$$

$$\frac{31}{20} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{29}{20} \quad (1)$$

حل:

گزینه ۱ درست است.

چون $\sqrt{0/0625}=\frac{1}{4}$ و $\sqrt{1/44}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$ ، پس، حاصل به $\frac{6}{5}+\frac{1}{4}=\frac{29}{20}$ نزدیک‌تر است.

تمرین (سنجش)

اگر $\sqrt{a}=\frac{1}{3}$ و $\sqrt{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، آنگاه حاصل $ab\sqrt{25}$ کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{10} \quad (2)$$

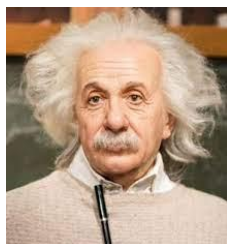
$$\frac{1}{15} \quad (1)$$

گزینه ۴ درست است.

$$ab\sqrt{2} = b\sqrt{a\sqrt{2}} = b\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{b\sqrt{3}} = \sqrt{2} \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow ab\sqrt{25} = 5$$

پیام مشاوره ای : انگیزه و استعداد فیلی مومه . اما تلاش ۹۹ درصد داستانه. حتی انیشتین روزانه در دوران

دانشجویی ۸ ساعت فقط ریاضی می‌فوند.



تمرین (سنجش)

. حاصل $\sqrt[4]{2\sqrt{2}\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{2\sqrt{2}\sqrt{2}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

حل:

گزینه ۲ درست است.

با توجه به $\frac{5}{8} = \frac{50}{80}$ ، داریم:

$$\sqrt[4]{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^2 \times 2} = \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{2} = 2$$

تمرین (سنجش)

حاصل $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3} - \sqrt{6}\sqrt[3]{15+6\sqrt{6}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{18}$ (۳) ۳ (۴) $3\sqrt{3}$

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(3-\sqrt{6})^2(15+6\sqrt{6})} &= \sqrt[3]{(15-6\sqrt{6})(15+6\sqrt{6})} = \sqrt[3]{225-216} \\ &= \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = 3 \end{aligned}$$

روش اول:

روش دوم:

$$\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3} - \sqrt{6}\sqrt[3]{(3+\sqrt{6})^2} = \sqrt[3]{9 \times (3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})} = \sqrt[3]{9 \times 3} = 3$$

با شرکت در کلاس های درس آنلاین استاد دارستانی ، به جمع دانش آموزان قبولی رشته ی پزشکی استاد پیوندید. ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

تمرین (امتحان)

اعداد $\sqrt{111}$ ، $\sqrt[3]{243}$ ، $\sqrt[6]{1398}$ و ۷ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

حل:

$$\sqrt[6]{1398} < \sqrt[3]{243} < 7 < \sqrt{111}$$

تمرین (قلمچی)

حاصل $\sqrt[6]{(26+15\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \sqrt[3]{12-4\sqrt{3}}$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad \sqrt{3} \quad (2) \quad 2\sqrt{3} \quad (3) \quad 3\sqrt{3} \quad (4)$$

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$(2-\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{12-4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^2}$$

$$\sqrt[6]{26+15\sqrt{3}} \sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^3} \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} = 1$$

اتحاد

اتحادها به عبارت های جبری گفته می شود که به ازای هر مقدار X مقادیر مساوی در دو طرف به دست آید.

●●● اتحادهای جبری ●●●

اتحادهای اصلی	اتحادهای فرعی
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	----
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	----
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	----
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$	$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)$

فاکتوری گیری : اشتقاق یا بیرون کشیدن یک عدد یا متغیر در یک عبارت جبری را فاکتور گیری می گویند.

به کمک اتحاد ها و روابط جبری و فاکتورگیری میتوان روابط پیچیده را ساده کرد.

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy & x^2 + y^2 &= (x - y)^2 + 2xy & (x + y)^2 - (x - y)^2 &= 4xy \\
 (x - y)^2 - (x + y)^2 &= -4xy & x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) & x^3 - y^3 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \\
 x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) & (x - y)^2 + (x + y)^2 &= 2x^2 + 2y^2
 \end{aligned}$$

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

$$1 - y^n = (1 + y)(1 - y + y^2 - \dots + y^{n-1})$$

گویا کردن کسرهای رادیکالی

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
 &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}} \quad \text{طبق اتحاد مزدوج} \\
 &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}
 \end{aligned}$$

رادیکال‌هایی به شکل کلی $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ یا $\sqrt{a - \sqrt{b}}$ را رادیکال مرکب می‌نامیم. برای محاسبه‌ی این رادیکال‌ها از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$۱) \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{۲}} + \sqrt{\frac{a-c}{۲}} \quad : \quad c^۲ = a^۲ - b, c > ۱$$

$$۲) \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{۲}} - \sqrt{\frac{a-c}{۲}} \quad : \quad c^۲ = a^۲ - b, c < ۱$$

مثال ۱۲: مقدار $\sqrt{۷ + ۴\sqrt{۳}}$ را محاسبه کنید.

ابتدا باید ۴ را به زیر رادیکال ببریم، سپس $c^۲$ را به دست آوریم.

$$\sqrt{۷ + ۴\sqrt{۳}} = \sqrt{۷ + \sqrt{۴^۲ \times ۳}} = \sqrt{۷ + \sqrt{۴۸}}$$

$$c^۲ = a^۲ - b = ۷^۲ - ۴۸ = ۴۹ - ۴۸ = ۱ \rightarrow c = ۱$$

برای گویا کردن مخرج کسر کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم. برای این کار دو حالت وجود دارد:

حالت اول: گویا کردن کسرهایی به صورت $\frac{۱}{A+B\sqrt{C}}$:

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج یعنی $A + B\sqrt{C}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۵}{\sqrt{x+1}-۲} \times \frac{\sqrt{x+1}+۲}{\sqrt{x+1}+۲} = \frac{۵(\sqrt{x+1}+۲)}{x-۳} \quad \text{مثال ۹:}$$

حالت دوم: گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت $\frac{1}{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}$:

صورت و مخرج را در $(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1} \quad \text{مثال ۱۰:}$$

مخرج کسرها را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{3 - \sqrt{7}} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{9 - 7} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{2} = 3 + \sqrt{7}$$

$$\text{ج) } \frac{3}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{3(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{3(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x - 8}$$

با مشاوره و برنامه ریزی استاد دارستانی ، نتیجه ی مطلوب را در کنکور به دست آورید.

تمرین (سنجش)

حاصل عبارت $\frac{1}{2} \times \sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})} \times \left(\frac{2(2-\sqrt{2})}{19-8\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

- (۱) $6 + \sqrt{3}$ (۲) $4 + 2\sqrt{3}$ (۳) $8 + 2\sqrt{3}$ (۴) $2 + 2\sqrt{3}$

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$13 \times \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})} \times \sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}}{\sqrt{19-8\sqrt{3}}} = 13 \times \frac{\sqrt[4]{4(6-4\sqrt{2})} \times \sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}}{\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}}$$

$$= 13 \times \frac{\sqrt[4]{4(36-32)}}{4-\sqrt{3}} = \frac{26}{4-\sqrt{3}} \times \frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{26(4+\sqrt{3})}{13} = 8 + 2\sqrt{3}$$

تمرین (سنجش)

حاصل عبارت $\frac{(2x-3)^2 + 6(2x^2 - 5x + 3) + 1}{(x-2)^2 + 2x - 3}$ به ازاء $x = 42573$ کدام است؟

- (۱) ۳۴۰۵۷۶ (۲) ۴۹۷۴۷۰ (۳) ۵۵۸۴۹۴ (۴) ۴۲۵۷۱

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$\frac{(2x-3)^2 + 6(2x^2 - 5x + 3) + 1}{(x-2)^2 + 2x - 3} = \frac{(2x-3)^2 + 6(2x-3)(x-1) + 1}{x^2 - 4x + 4 + 2x - 3}$$

$$= \frac{(2x-3)^2 + 2(2x-3)(2x-3+1) + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(2x-3+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{8(x-1)^3}{(x-1)^2} = 8(x-1), \quad x = 42573 \Rightarrow$$

$$= 340576$$

تمرین (سنجش)

- اگر $a = 5 - 2\sqrt{6}$ باشد، $\sqrt[4]{10a^3 - a^2} \times \sqrt{10a - a^2}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$10 - a = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow 10a - a^2 = (10 - a)(5 - 2\sqrt{6}) = 1$$

$$10a - 1 = 49 - 20\sqrt{6} = (5 - 2\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$$

$$a = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \Rightarrow a^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{10a^3 - a^2} \times \sqrt{10a - a^2} = \sqrt[4]{(10a - 1)a^2} \times 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

تمرین (سنجش)

- در تجزیه عبارت $4x^4 - \frac{y^4}{16} + \frac{3}{4}xy^3 - \frac{9}{4}x^2y^2$ کدام عامل وجود ندارد؟

(۱) $\frac{y}{2} - 2x$ (۲) $y - 2x$ (۳) $2x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{3}{2}xy$ (۴) $2x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{3}{2}xy$

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$16A = 64x^4 - y^4 + 12xy^3 - 36x^2y^2 = 64x^4 - (y^4 - 12xy^3 + 36x^2y^2) =$$

$$64x^4 - (y^2 - 6xy)^2 = (4x^2 - y^2 + 6xy)(4x^2 + y^2 - 6xy) = (4x^2 - y^2 + 6xy)(y - 4x)(y - 2x)$$

$$\Rightarrow A = (2x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{3}{2}xy)(\frac{y}{2} - 2x)(\frac{y}{2} - x)$$

تمرین (سنجش)

- اگر $x > 0$ و $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

۱۲√۲ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰√۲ (۲)

۱۰ (۱)

حل:

گزینه ۲ درست است.

$$2x = x^2 - 1 \Rightarrow 2 = x - \frac{1}{x}, \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 16\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

تمرین (سنجش)

- حاصل $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{-1}$ کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

√۳ + ۱ (۲)

√۲ + ۱ (۱)

گزینه ۴ درست است.

ابتدا کسر داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2})^3 + (\sqrt{3})^3}{5 - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})((\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2)}{5 - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(5 - \sqrt{6})}{5 - \sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

حال حاصل $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^{-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + (-(\sqrt{2} + \sqrt{3})) = 0$$

تمرین (سنجش)

- در تجزیه عبارت $(x^2 - 2x)^2 - 32x^2 + 64x + 192$ کدام عامل وجود ندارد؟

$(x^2 - 16) \quad (4)$

$(x + 8) \quad (3)$

$(x - 6) \quad (2)$

$(x + 2) \quad (1)$

حل : جواب با خودتون

تمرین (گروه آموزشی استاد دارستانی)

- عبارت $\frac{23\sqrt{6}}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ با کدام عدد برابر است؟

$(2) \quad 24 + 2\sqrt{6} + 9\sqrt{2} - 10\sqrt{3}$

$(1) \quad 15 - 5\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 7\sqrt{6}$

$(4) \quad 6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{6} - 15$

$(3) \quad 10\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 9\sqrt{2} - 24$

حل:

گزینه ۲ درست است.

$$23 \frac{\sqrt{6}(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3})}{4 + 2 - 4\sqrt{2} - 3} = \frac{23(2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(3 + 4\sqrt{2})}{9 - 32}$$

$$= -1(6\sqrt{6} + 16\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 11\sqrt{6} - 9\sqrt{2} - 24)$$

$$= (24 + 2\sqrt{6} + 9\sqrt{2} - 10\sqrt{3})$$

فصل چهارم

معادله ی درجه دوم

معادله ی درجه دوم از مهم ترین مباحث ریاضیات می باشد. تقریباً فصلی ندرین که حل معادله ی درجه دوم در آن نیاز نباشه!!!

پس در یادگیری و حل تست های آن دقت کافی رو داشته باشید.

هر عبارت جبری به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ را معادله ی درجه دوم می گویند.

برای حل معادله ی درجه دوم دو روش وجود دارد. روش دلا و روش تجزیه.

روش دلتا:

برای حل معادله درجه دوم قراردادهای زیر را در نظر می گیریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه متمایز دارد} \Rightarrow x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \Rightarrow x' = x'' = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \end{array} \right.$$

۱. هرگاه در معادله درجه دوم مجموع ضرایب برابر (۰) باشد، در این صورت یکی از ریشه‌ها

برابر (۱) است و ریشه دیگر برابر $\left(\frac{c}{a}\right)$ خواهد بود.

$$a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=1 \\ x''=\frac{c}{a} \end{cases}$$

مثال: $3x^2 - 7x + 4 = 0$

$$\text{جمع ضرایب} \Rightarrow 3 - 7 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x'=1 \\ x''=\frac{c}{a}=\frac{4}{3} \end{cases}$$

هنگامی معادله درجه دوم دارای ریشه مضاعف (۰) است که $(b=c=0)$ باشد.

$$b=c=0 \Rightarrow ax^2=0 \xrightarrow{a \neq 0} x^2=0 \rightarrow x=0 \text{ ریشه مضاعف}$$

هنگامی معادله درجه دوم دارای یک ریشه (۰) است که $(c=0)$ باشد، در این صورت ریشه

دیگر آن برابر $\left(\frac{-b}{a}\right)$ است.

$$c=0 \Rightarrow ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ x''=\frac{-b}{a} \end{cases}$$

۲. هرگاه در معادله درجه دوم $a+c=b$ باشد در این صورت یکی از ریشه‌ها برابر (۱) است

و ریشه دیگر برابر $\left(\frac{-c}{a}\right)$ خواهد بود.

$$a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x'=-1 \\ x''=\frac{-c}{a} \end{cases}$$

هنگامی معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی قرینه است که

$$\begin{cases} b=0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

هرگاه در معادله درجه دوم a , c مختلف علامه باشند در این صورت معادله دارای دو

ریشه حقیقی مختلف علامه است.

۷. هنگامی معادله درجه دوم دارای دو ریشه معکوس یکدیگر می باشد که :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a = c \end{cases} \quad \text{دو ریشه متمایز دارد}$$

$$x'x'' = 1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow a = c \quad \text{اثبات شرط عکس بودن :}$$

روش تجزیه : با استفاده از اتحاد ها که فصل قبل خواندیم معادله را تجزیه کرده و به جواب می رسیم.

رابطه بین ضرایب و ریشه ها در معادله درجه دوم

$$۱) \quad x' + x'' = \frac{-b}{a} = S$$

$$۳) \quad x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P$$

$$۲) \quad x'x'' = \frac{c}{a} = P$$

$$۴) \quad x'^3 + x''^3 = S^3 - 3SP$$

تعیین علامت معادله درجه دوم

اگر دلتا بزرگتر از صفر باشد:

$$y = ax^2 + bx + c$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y	موافق علامت a	مخالف علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

اگر دلتا برابر صفر باشد:

$$y = ax^2 + bx + c$$

x	$-\infty$	x	$+\infty$
y	موافق علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a

اگر و فقط اگر در معادله درجه دوم a , c مختلف علامه باشند ، معادله دارای دو ریشه

مختلف علامه است.

بنگامی معادله درجه دوم دارای دو ریشه مثبت است که :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{دو ریشه مثبت است} \rightarrow \text{دو ریشه هم علامت دارد} \rightarrow \text{معادله دو ریشه متمم دارد.}$$

هنگامی معادله درجه دوم دارای دو ریشه منفی است که :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{دو ریشه منفی است} \rightarrow \text{دو ریشه هم علامت دارد} \rightarrow \text{معادله دو ریشه متمایز دارد.}$$

هنگامی عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است که :

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه ها را محاسبه نموده و به ترتیب S , P می نامیم.

معادله درجه دوم موردنظر ، معادله $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود.

هرگاه ضرایب یکمعادله درجه دوم « اعداد گویا » بوده و یکی از ریشه ها

$m \ominus \sqrt{n}$ باشد ، در این صورت ، ریشه دیگر آن حتماً $m \oplus \sqrt{n}$ است.

معادله درجه دومی که ریشه های آن قرینه ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد ،

معادله $ax^2 - bx + c = 0$ خواهد بود.

معادله درجه دومی که ریشه های آن معکوس ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد ،

معادله $Cx^2 + bx + a = 0$ خواهد بود.

معادله درجه دومی که ریشه های آن قرینه و عکس ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد،

معادله $cx^2 - bx + a = 0$ خواهد بود.

معادله درجه دومی که ریشه های آن k برابر ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد ،

معادله $ax^2 + b kx + ck^2 = 0$ خواهد بود.

تمرین (سنجش)

اگر $x = -2$ یک ریشه معادله $mx^2 - (m+1)x - 3m - 5 = 0$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

(۴) -۶

(۳) ۴

(۲) ۸

(۱) ۱۲

حل:

گزینه ۳ درست است.

ریشه معادله در معادله صدق می کند، پس:

$$m(-2)^2 - (m+1)(-2) - 3m - 5 = 0 \Rightarrow 4m + 2m + 2 - 3m - 5 = 0 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$$

بنابراین معادله داده شده $x^2 - 2x - 8 = 0$ است، پس:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

تمرین (سنجش)

اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - mx - 1 = 0$ باشند و در رابطه $(\alpha + 3)(\beta + 3) = 4$ صدق کنند، m کدام است؟

$$-\frac{19}{4} \quad (4) \qquad \frac{7}{4} \quad (3) \qquad -\frac{19}{3} \quad (2) \qquad -\frac{1}{3} \quad (1)$$

حل:

گزینه ۲ درست است.

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m}{4}, \quad \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 = 4$$

$$\Rightarrow 3 \times \left(\frac{m}{4}\right) - \frac{1}{4} = -5 \Rightarrow 3\left(\frac{m}{4}\right) = -\frac{19}{4} \Rightarrow m = -\frac{19}{3}$$

تمرین (سنجش)

معادله $(x-1)(x^2 - 4x + m) = 0$ ریشه مضاعف دارد. مجموع مقادیر m کدام است؟

$$4 \quad (1) \qquad 3 \quad (2) \qquad 7 \quad (3) \qquad 11 \quad (4)$$

حل:

گزینه ۳ درست است.

برای آن که معادله $(x-1)(x^2 - 4x + m) = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، باید معادله درجه دوم ریشه مضاعف داشته باشد یا یک ریشه معادله درجه دوم عدد ۱ باشد، پس:

$$\begin{cases} \Delta = 16 - 4(1)(m) = 0 \Rightarrow m = 4 \\ 1 - 4 + m = 0 \Rightarrow m = 3 \end{cases} \Rightarrow m \text{ مجموع مقادیر} = 4 + 3 = 7$$

پیام مشاوره ای: آیا کلاس کنکور مفیده؟ آکه شما تگاهی به سفتی سوالات کنکور و تایم بسیار کمشون نگاه کنیر میبینیر که کنکور یک

پیریه ی جمعی است. یعنی فیلی چیزاشو توی فونه نمیتونی یار بگیری. باید عتما بری

کلاس. برای تسلط کامل و پزشک شدن نیازه که کارهایی فراتر از دانش آموز معمولی

انجام بریم، البته در حد اعتدال



تمرین (تلمپی)

- اگر در معادله $2x^2 - 2x + c = 0$ ، یک ریشه از قرینه ۲ برابر ریشه دیگر یک واحد کمتر باشد، آنگاه اختلاف دو ریشه کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$\beta = -2\alpha - 1, \alpha + \beta = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha + \beta = 1 + \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 3$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = 3 - (-2) = 5$$

تمرین (سنجش)

حدود m کدام باشد تا معادله $mx^2 - (m-3)x + 1 = 0$ دو ریشه مثبت داشته باشد؟

- (۱) $(3 + \infty)$ (۲) $(1, 9)$ (۳) $(1, -\infty)$ (۴) $(3, 9)$

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{m} > 0, -\frac{b}{a} = \frac{m-3}{m} > 0 \Rightarrow m > 3$$

$$\Rightarrow 3 < m < 9$$

$$\Delta = (m-3)^2 - 4m > 0 \Rightarrow m^2 - 10m + 9 > 0 \Rightarrow 1 < m < 9$$

تمرین (سنجش)

هرگاه معادله‌های $ax^2 + bx + 1 = 0$ و $a(x - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{8}$ ریشه‌های برابر داشته باشند، ab کدام است؟

- ۶ (۴) ۴ (۳) -۴ (۲) -۶ (۱)

$$\frac{1}{8} = a(x - \frac{3}{4})^2 = ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{9}{16}a \quad b = -\frac{3}{2}a \Rightarrow b = -3 \quad \frac{9}{16}a - \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow ab = -6$$

تمرین (گاج)

اگر ریشه معادله $x^2 + bx + a = 6$ برابر $-\frac{a}{2} + 3$ و ریشه معادله $bx^2 - ax - 2 = 0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، کدام

است؟

۶ (۴)

۰ (۳)

-۶ (۲)

-۱۰ (۱)

حل:

گزینه ۱ درست است.

هر گاه در $ax^2 + bx + c = 0$ یک ریشه $\frac{c}{-2a}$ باشد ریشه دیگر -2 می‌باشد.

$$x^2 + bx + a - 6 = 0, \frac{a-6}{-2} = -\frac{a}{2} + 3 \Rightarrow 4 - 2b + a - 6 = 0$$

$$\frac{b}{4} - \frac{a}{2} - 2 = 0 \Rightarrow b - 2a = 8, a - 2b = 2 \Rightarrow a = -6, b = -4$$

$$\Rightarrow a + b = -10$$

تمرین (سنجش)

اگر ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + m = 0$ ، ۲ واحد اختلاف داشته باشند، کدام m است؟

 $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{19}{16}$ (۳) $\frac{17}{16}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۱)

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$\alpha, \beta = \alpha + 2 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 5\alpha + m = 0 \\ 2(\alpha^2 + 4\alpha + 4) - 5(\alpha + 2) + m = 0 \end{cases} \Rightarrow 8\alpha + 8 - 10 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{4}\right) + m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{8}$$

تمرین (گزینه ی دو)

اگر ریشه‌های دو معادله $2x^2 - 3x - 2 = 0$ و $(x-a)^2 + b = 0$ برابر باشند و α کوچک‌ترین ریشه باشد، $6\alpha - 4a$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۰ (۳) -۶ (۴) -۸

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{4}, \alpha = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 6\alpha - 4a = -6$$

تمرین (سنجش)

معادله درجه دوم $ax^2 + (a-3)x + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی است. حدود a ، کدام است؟

- (۱) $a > 9$ (۲) $0 < a < 9$ (۳) $0 < a < 3$ (۴) $3 < a < 9$

حل:

گزینه ۱ درست است.

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow a > 0 \quad (1)$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-(a-3)}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a-3}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad \text{یا} \quad a > 3 \quad (2)$$

$$\Delta = (a-3)^2 - 4a > 0 \Rightarrow a^2 - 10a + 9 > 0 \Rightarrow (a-1)(a-9) > 0 \Rightarrow a < 1 \quad \text{یا} \quad a > 9 \quad (3)$$

اشتراک (۱) و (۲) و (۳): $a > 9$

عبادت به جز خدمت خلق نیست

به سجاده و تسبیح و دلق نیست.

تمرین (سنجش)

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره زیر محور x ها است؟

(۱) $-2 < m < 0$ (۲) $-4 < m < -2$ (۳) $-4 < m < 0$ (۴) $0 < m < 4$

حل:

گزینه ۳ درست است.
سهمی محور x ها را قطع نمی کند.

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 4m < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow -4 < m < 0$$

تمرین (سنجش)

- اگر ریشه های معادله های $2x^2 + 5x - 3 = 0$ و $|x - a| \pm b = 0$ برابر باشند، $a + |b|$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) 1

حل:

گزینه ۳ درست است.

$$x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow \left|x + \frac{5}{4}\right| = \frac{7}{4} \Rightarrow a = -\frac{5}{4}, |b| = \frac{7}{4} \Rightarrow a + |b| = \frac{1}{4}$$

تمرین (سنجش)

- اگر α و β ریشه های معادله $3\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$ باشد، حاصل $3\alpha^2\beta + 2\alpha$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) 0 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

گزینه ۲ درست است.

$$3\alpha^2 - 2 = 2\alpha \Rightarrow 3\alpha^2\beta + 2\alpha = 3\alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha + 2\beta = 2\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta$$

چون $\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\Delta = b^2 - 4ac$ ، پس $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ است. $2\left(\frac{c}{a}\right) + 2\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

تمرین (سنجش)

کدامیک از معادلات زیر به ازاء هر مقدار k ریشه دارد؟

$$(2) \quad 4kx^2 - (6k - 2)x + 2k = 1$$

$$(1) \quad x^2 - kx + k + 1 = 0$$

$$(4) \quad 2kx^2 - (3k + 1)x + 6k = 1$$

$$(3) \quad x^2 - 2kx + 3k = 1$$

حل:

گزینه ۲ درست است.

در گزینه ۲، $X = \frac{1}{2}$ صدق می‌کند ولی در گزینه‌های دیگر به ازاء مقادیر Δk می‌تواند منفی، مثبت یا صفر باشد.

تمرین (سنجش)

به ازاء چه مقادیری از m ، منحنی $y = (m+1)x^2 + 4x + m$ ، خط $y = 2$ را در ۲ نقطه با طول مثبت قطع می‌کند؟

$$(2) \quad -1 < m < 3$$

$$(1) \quad -2 < m < 3$$

$$(4) \quad -2 < m < -1$$

$$(3) \quad -2 < m < 1$$

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$(m+1)x^2 + 4x + m = 2 \Rightarrow (m+1)x^2 + 4x + m - 2 = 0$$

می‌بایست در معادله فوق، اولاً $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = 2(4 - (m^2 - m - 2)) > 0 \Rightarrow m^2 - m - 6 > 0 \Rightarrow -2 < m < 3$$

ثانیاً: $\frac{c}{a} = \frac{m-2}{m+1} > 0$ و $-\frac{b}{a} = \frac{-4}{m+1} > 0$ باشد.

$$m+1 < 0, m-2 < 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow -2 < m < -1$$

یه کسر جالب !!!! = پزشکی تلاش
تنبلی

تمرین (سنجش)

- اگر معادله $ax^2 + bx + 1 = 0$ ریشه مضاعف و معادله $3x^2 - ax + b = 0$ ریشه‌ای مثبت برابر $\frac{b}{3}$ داشته باشد،

$a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

حل: بر عهده ی خودتون

تمرین (سنجش)

- اگر α ریشه معادله $\frac{1}{x} + 3 - \frac{2}{x} = 0$ باشد، حاصل $(\lambda\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

حل: تغییر متغیر از روش های حل معادلات بالاتر از درجه ی دوم است. به صورتی که توان هایی از متغیر ها را یک متغیر به توان کمتر تبدیل کرده و آن را تبدیل به معادله ی درجه دوم میکنیم.

گزینه ۲ درست است.

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + 3 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$1 - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

این مقدار را
t
در نظر گرفتیم

$$(\lambda\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda \times 2} = 4$$

تمرین (سنجش)

- در معادله درجه دوم $mx^2 - x - 6 = 0$ ، یک ریشه از ۲ برابر ریشه دیگر، ۵ واحد بیشتر است. مقدار m کدام می تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

گزینه ۲ درست است.

$$\alpha + \beta = \frac{1}{m}, \alpha\beta = -\frac{6}{m} \Rightarrow 3\beta = \frac{1}{m} - 5 \Rightarrow \beta = \frac{1-5m}{3m}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2+5m}{3m} \Rightarrow \frac{(1-5m)(2+5m)}{9m^2} = -\frac{6}{m} \Rightarrow m = 2$$

تمرین (سنجش)

- مجموع ارقام ریشه معادله $\sqrt{x} + \sqrt{4/5x - 41} = 15$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

حل:

گزینه ۲ درست است.

$$\sqrt{x} + \sqrt{4/5x - 41} = 15 \Rightarrow \sqrt{4/5x - 41} = 15^2 - x \Rightarrow 4/5x - 41 = 15^4 - 45 \cdot x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 454/5x + 5 \cdot 666 = 0 \Rightarrow x = 196 \Rightarrow 1+9+6=16$$

تمرین (سنجش)

اگر $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله $9ax^2 - 3bx + 2a = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟ ($a, b \neq 0$)

- ۱ (۱) $\frac{1}{9}$ ۲ (۲) ۹ ۳ (۳) $\frac{1}{4}$ ۴ (۴) ۴

$x = 2$ در معادله صدق می کند، پس داریم:

$$9a(2)^2 - 3b(2) + 2a = 0 \Rightarrow 38a = 6b \Rightarrow 3b = 19a$$

در این معادله $x = \frac{1}{9}$ ریشه دیگر است.

$$\Rightarrow 9ax^2 - 19ax + 2a = 0 \Rightarrow 9x^2 - 19x + 2 = 0$$

تمرین (سنجش)

به ازای کدام مقادیر m منحنی $y = mx^2 - \sqrt{10}x + m - 9$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

(۱) $m < 0$ (۲) $m > 9$ (۳) $1 < m < 10$ (۴) $0 < m < 9$

حل:

گزینه ۴ درست است.

منحنی درجه دوم محور X ها را با طول‌های مختلف علامه قطع کند. یعنی $\frac{c}{a} < 0$ یا $\frac{m-9}{m} < 0$ در نتیجه $0 < m < 9$

تمرین (قلمچی)

در حل معادله $x^2 - x = 6$ به روش مربع کامل از چه عددی جذر گرفته می‌شود؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۶ (۳) $\frac{۲۵}{۴}$ (۴) ۹

حل: حلش با خودتون

تمرین (گاج)

مربع عددی مثبت از نصف آن عدد $1/5$ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) $\frac{۵}{۴}$ (۳) $\frac{۵}{۲}$ (۴) $\sqrt{۲}$

آن عدد را x در نظر می‌گیریم و داریم:

$$x^2 = \frac{1}{5}x + 1/5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{5}x + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times 2} 2x^2 = x + 3$$

روش اول:


$$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \text{ (غ قق)} \\ x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{۳}{۲} \checkmark \end{cases}$$


با شرکت در کلاس های استاد دارستانی ، میتونید نتیجه ی مطلوب را در فیزیک به دست آورید

۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷

فرم کلی توابع درجه دو به صورت $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ می باشد.

نمودار هر تابع درجه دو یک سهمی است که با توجه به علامت a شکل تقریبی آن به یکی از صورت های زیر است.

(الف) اگر $a > 0$ باشد نمودار آن به شکل  می باشد. یعنی دهانه ی سهمی به سمت بالا باز می شود.

(ب) اگر $a < 0$ باشد نمودار آن به شکل  می باشد. یعنی دهانه ی سهمی به سمت پایین باز می شود.

رأس سهمی: نقطه ای از سهمی درجه ۲ که بیش ترین عرض یا کم ترین عرض را دارد، رأس سهمی نامیده می شود. رأس سهمی را با S نمایش می دهند و مختصات آن به صورت زیر است:

$$S \begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} \\ y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

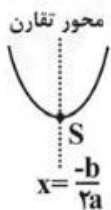
تذکره: طول نقطه ی رأس سهمی به کمک مشتق به دست آمده است.

اگر $\frac{c}{a} < 0$ معادله دارای دو ریشه ی مختلف علامت است پس در دو طرف محور y ها به محور x ها برخورد می کند.

اگر $\frac{c}{a} > 0$ معادله ممکن است ریشه نداشته باشد ولی اگر دارای ریشه باشد حتماً هر دو ریشه متحدالعلامت اند.

محور تقارن سهمی: هر سهمی دارای یک محور تقارن عمودی است که از رأس آن می گذرد و معادله ی آن به صورت

$$x = x_S = -\frac{b}{2a} \text{ می باشد.}$$



محل برخورد نمودار با محور x همان ریشه های معادله ی درجه دوم هستند.

اگر در یک معادله ی درجه دوم به جای x عدد صفر را بگذاریم، مقداری که به دست می آید عرض از مبدا

معادله ی درجه دوم است (همان c)

تمرین (سنجش)

پایین ترین نقطه سهمی $f(x) = mx^2 - 8x + 2m - 4$ روی محور x ها قرار دارد. مقدار m کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} -4 & (4) & 4 & (3) & 2 & (2) & -2 & (1) \end{array}$$

باید Δ برابر صفر و ضرب x^2 مثبت باشد، پس:

$$\Delta = (-8)^2 - 4(m)(2m - 4) = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m - 4)(m + 2) = 0 \Rightarrow m = 4$$

تمرین (سنجش)

سهمی $y = 2x^2 - 4x - 6$ محور x ها را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر S رأس سهمی باشد، مساحت مثلث ASB کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

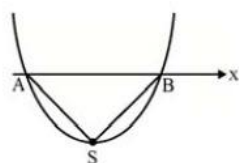
۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

حل:

گزینه ۳ درست است.

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = -1 \Rightarrow \text{طول قاعده} = 3 - (-1) = 4$$

$$x_s = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \Rightarrow y_s = -8 \Rightarrow \text{ارتفاع} = 8$$

بنابراین مساحت مثلث ASB برابر $16 = \frac{1}{2} \times 4 \times 8$ می‌باشد.

تمرین (سنجش)

- نمودار تابع $y = x^2 + 3x + 5$ را 7 واحد به طرف y های منفی، سپس 1 واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در بازه $(1, 3)$ زیر تابع خطی $y = f(x)$ قرار دارد. $f(2)$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

حل:

گزینه ۳ درست است.

ابتدا ضابطه تابع جدید را به دست می‌آوریم:

$$y = (x - 1)^2 + 3(x - 1) + 5 - 7 \Rightarrow y = x^2 + x - 4$$

چون نمودار جدید در بازه $(1, 3)$ زیر تابع خطی $f(x) = ax + b$ قرار دارد، پس $f(x)$ از نقاط $(1, -2)$ و $(3, 8)$ می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2 \\ f(3) = 8 \Rightarrow 3a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = -7 \Rightarrow f(x) = 5x - 7 \Rightarrow f(2) = 3$$

تمرین (سنجش)

اگر m کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + (a^2 - 4)x + 3$ در $x = -\frac{3}{2}$ رخ دهد، m کدام است؟

- (۱) -۹ (۲) -۸ (۳) -۷ (۴) -۶

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a^2 - 4}{2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4, -1$$

$$a > 0 \Rightarrow a = 4, y = 4x^2 + 12x + 3 = 9 - 18 + 3 = -6$$

تمرین (سنجش)

- نقطه A روی منحنی $y = 24 - x^2$ و نقطه B روی خط $y = -2x - 4$ بین نقاط برخورد دو منحنی به گونه‌ای قرار دارند که خط گذرنده از آن‌ها، بر محور x عمود است. بیشترین مقدار برای طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۷ (۳) ۲۸ (۴) ۲۹

حل:

گزینه ۴ درست است.

مختصات نقطه A به صورت $(x, 24 - x^2)$ و مختصات نقطه B به صورت $(x, -2x - 4)$ است. حال طول AB برابر است با:

$$T(x) = |AB| = \sqrt{(24 - x^2 + 2x + 4)^2} = \sqrt{(-x^2 + 2x + 28)^2}$$

برای آن که $T(x)$ بیشترین شود باید $y = -x^2 + 2x + 28$ بیشترین مقدار ممکن شود. پس:

$$y' = -2x + 2 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow T(1) = \sqrt{(-1 + 2 + 28)^2} = \sqrt{29^2} = 29$$

تمرین (سنجش)

سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نقطه‌ای به طول ۲ از بالا بر محور x مماس است. اگر خط $y = x + 2$ سهمی را روی محور y ها قطع کند، مجموع مؤلفه‌های نقطه تلاقی دیگر کدام است؟

۱۴ (۴) ۱۲ (۳) ۱۰ (۲) ۸ (۱)

حل:

گزینه ۴ درست است.

ابتدا نقطه تلاقی سهمی با محور y ها که همان نقطه تلاقی خط $y = x + 2$ با محور y ها است را به دست می‌آوریم:

$$y = x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2$$

بنابراین رأس سهمی رو به بالای $f(x)$ نقطه $(0, 2)$ بوده و از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد. پس:

$$f(x) = a(x-2)^2 + 0 \xrightarrow{(0,2)} 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

بنابراین نقطه تلاقی دیگر برابر است با:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{1}{4}(x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow x + 2 = \frac{1}{4}(x-2)^2 \Rightarrow 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 6 \Rightarrow y = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه‌ها} = 14$$

تمرین (سنجش)

نقطه $(0, -1)$ بالاترین نقطه سهمی $f(x) = ax^2 + bx - c$ است. اگر این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع کند، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

گزینه ۱ درست است.

نقطه (۰ و -۱) رأس سهمی است، پس:

$$f(x) = a(x+1)^2 + 0$$

چون سهمی محور Y ها را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع می‌کند، پس:

$$f(x) = a(x+1)^2 \xrightarrow{(0, -2)} -2 = a(0+1)^2 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین $f(x) = -2(x+1)^2$ می‌باشد، پس:

$$f(x) = -2(x+1)^2 = -2x^2 - 4x - 2 \xrightarrow{f(x) = ax^2 + bx - c} \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a + b + c = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

نامعادله

روش حل نامعادله $ax + b \leq 0$ دقیقاً شبیه معادله درجه اول است. یعنی ابتدا عدد ثابت (b) را با تغییر علامت به طرف دیگر نامعادله می‌بریم و سپس دو طرف نامعادله را بر ضریب مجهول (a) تقسیم می‌کنیم.

هنگام تقسیم کردن باید به نکته مهم زیر توجه کنیم:

هرگاه دو طرف نامعادله در عددی منفی ضرب شود، طرف نامعادله عوض می‌شود.

برای حل نامعادلات باید یک طرف نامعادله صفر شود و نامعادله را حل کرد.

به طور کلی برای حل اینگونه نامعادلات، باید ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها را پیدا کنیم و اعداد حقیقی را به

بازه‌های مجزا افراز کنیم تا قدرمطلق‌ها حذف شوند سپس نامعادله بدست آمده را حل کنیم و جواب هر

خط را با شرط آن خط اشتراک بگیریم و در نهایت جواب‌ها را اجتماع بگیریم.

برای حل نامعادلات قدرمطلق می توانیم از روابط زیر استفاده کنیم.

$$|U| \leq a \quad \xleftrightarrow{a > 0} \quad -a \leq U \leq a$$

$$|U| \geq a \quad \xleftrightarrow{a > 0} \quad U \geq a \quad , \quad U \leq -a$$

$$|U| \leq |V| \quad \leftrightarrow \quad U^2 \leq V^2$$

تمرین (سنجش)

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+a}{2x-b} \leq 0$ به صورت $[-1, 3]$ است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۶

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$\frac{x+a}{2x-b} \leq 0 \Rightarrow (x+a)(2x-b) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -a = 3 \Rightarrow a = -3 \\ \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = -2 \end{cases} \Rightarrow ab = 6$$

تمرین (سنجش)

مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{2x+2}{x-1} < 6$ به صورت بازه (a, b) است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

گزینه ۳ درست است.

$$3 < \frac{2x+2}{x-1} < 6 \Rightarrow 3-2 < \frac{2x+2}{x-1} - 2 < 6-2 \Rightarrow 1 < \frac{4}{x-1} < 4 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x-1} < 1 \Rightarrow 1 < x-1 < 4 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow (a, b) = (2, 5) \Rightarrow a+b = 7$$

تمرین (سنجش)

- مجموع مقادیر صحیح a که در نامساوی $\frac{a^2 + 6a + 9}{a^2 - 5a} \leq 0$ صدق می کنند کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) ۷ (۴) ۶

حل:

گزینه ۳ درست است.

a	-3	0	5
$a^2 + 6a + 9$	+	+	+
$a^2 - 5a$	+	+	-
$\frac{a^2 + 6a + 9}{a^2 - 5a}$	+	+	-

\Rightarrow مجموعه جواب $= (0, 5) \cup \{-3\} \Rightarrow$
 a مجموع مقادیر $= -3 + 1 + 2 + 3 + 4 = 7$

تمرین (سنجش)

- چند مقدار صحیح در نامعادله $x \leq |x-3| + 2|x+1|$ صدق می کند؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) بی شمار

گزینه ۱ درست است.

$$x < -1 \Rightarrow -6x + 10 \leq x \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -2x + 14 \leq x \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$x > 3 \Rightarrow 6x - 10 \leq x \Rightarrow x \in \emptyset$$

تمرین (سنجش)

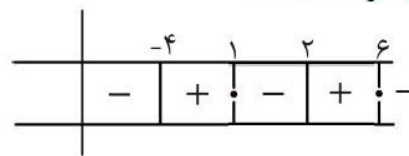
- اگر $\frac{-a^2x^2 + (a^2 + 6)x - 6}{ax^2 + bx + c} \leq 0$ در اعداد حقیقی تنها به ازاء $(2, 6] \cup (-4, 1]$ برقرار باشد، $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) ۳ یا -۳ (۲) ۵ یا -۵ (۳) ۵ (۴) ۳

گزینه ۳ درست است.

$$-a^2x^2 + (a^2 + 6)x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{6}{a^2} = 6 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$a = 1 \Rightarrow x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[c=-8]{b=2} x = -4, 2$$

پس $a = 1$ غیر قابل قبول می باشد.

$$a = -1 \Rightarrow -x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[c=-1]{b=-2} x = -4, 2 \Rightarrow a + b + c = 5$$

تمرین (سنجش)

هر گاه حداکثر جواب نامعادله $\frac{x+a}{x+b} \geq 2$ بازه $(3, 10]$ باشد، $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۱

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$\frac{x+a}{x+b} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-x-2b+a}{x+b} \geq 0 \Rightarrow b = -3, a - 2b = 10 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a + b = 1$$

تمرین (سنجش)

علامت عبارت $P(x) = \frac{|x^2-1| \sqrt{16-x^2} (x^2+x+1)^5}{-x^4(x-1)^4(-x^2+2x-3)^3}$ در کدام بازه همواره مثبت است؟

- (۱) (۱, ۲) (۲) (۰, ۱) (۳) (-۱, ۰) (۴) (-۲, -۱)

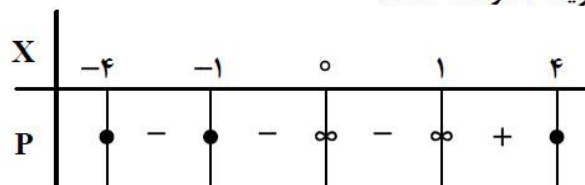
گزینه ۱ درست است.

$$|x^2-1| \geq 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{همواره بزرگتر مساوی صفر}$$

$$16-x^2 \geq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$x^2+x+1 > 0 \quad \text{همواره مثبت}$$

$$-x^4 \leq 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{همواره کوچکتر مساوی صفر}$$



تمرین (سنجش)

مجموع طول‌های طبیعی نقاطی که نمودار $y = x^2 - 6x + 7$ پایین‌تر از نمودار $y = \frac{7}{2}|x-3|$ باشد، کدام است؟

۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

حل:

گزینه ۴ درست است.

$$x^2 - 6x + 7 < \frac{7}{2}|x-3| \Rightarrow 2x^2 - 12x + 14 - 7|x-3| < 0$$

$$\Rightarrow 2(x-3)^2 - 7|x-3| - 4 < 0, \quad t = |x-3| \Rightarrow 2t^2 - 7t - 4 < 0$$

$$\Delta = 49 + 32 = 81 \Rightarrow -\frac{1}{2} < t < 4 \Rightarrow |x-3| < 4$$

$$\Rightarrow -1 < x < 7 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \in \mathbb{N} \quad \text{مجموع برابر ۲۱ است.}$$

تمرین (سنجش)

کدام نامعادله نشان‌دهنده اعداد بزرگ‌تر از ۵ و کوچک‌تر از -۳ است؟

$|x+1| > 4$ (۱) $|x-4| > 1$ (۲) $|x+4| > 1$ (۳) $|x-1| > 4$ (۴)

حل:

گزینه ۴ درست است.

$|x-a| > b$ نشان‌دهنده اعدادی است که فاصله آنها از a بیشتر از b است.

با توجه به شکل چون $a = 1 = \frac{5 + (-3)}{2}$ و

$$b = 5 - 1 = 4 \quad \text{پس ناحیه جواب } |x-1| > 4$$

می‌باشد.

