

## مثلثات ماوراء(قسمت اول)

رشته علوم تجربی و ریاضی فیزیک

با سبکی متفاوت و روان

نویسنده: پویان بامری

ایمیل: pouyanbameri۶۷@gmail.com

تماس: ۰۹۱۵۴۶۵۸۱۸۵

هشدار: این روش ها فقط مختص کنکور بوده و به هیچ عنوان برای امتحانات نهایی و داخلی استفاده نگردد.

## دوست عزیزم سلام!

دارم به این فکر میکنم که بعد از خوندن این جزوه چه نگاهی به ریاضیات کنکور پیدا می کنی؟؟؟

دقت کردی این مبحث مثلثات چقدر فرمول داره؟!!!!

چه همه رابطه!!! که هر کدام یه جوری آدم و کلافه میکنه.٪

ولی من می خوام یه مورد مهم بگم. شنیدی میگم شانس یک بار در خونه آدم و میزنه؟؟؟ از نظر من این جزوه میتونه همون شانس باشه.

وقتی مطالب رو خوندی و تمام کردی ، دیگه مثلثات میشه نقطه قوت تو !!!!

فقط قول بده تا آخرش و با دقت بخونی. دیگه نمیخواد سراغ هیچ کتاب یا جزوه ای بری!!!!

مبحث مثلثات رو در دو قسمت جمع بندی کردم. بخش اول رو که هم اکنون داری زحمت خوندنش رو میکشی و بخش دوم که در حال آماده سازی هستم و به زودی در اختیارت قرار میدم. ( البته مباحث تابع و معادلات و دنباله ها و.... هم هستن که به وقتش در موردشون حرف ها دارم.)

آخرین نکته اینکه:

تمامی موارد مطوحه در این جزوه کاملا علمی هستن. فقط سبک بیان اونها متفاوت با بقیه ی جاهاست

بریم سراغ اصل مطلب:

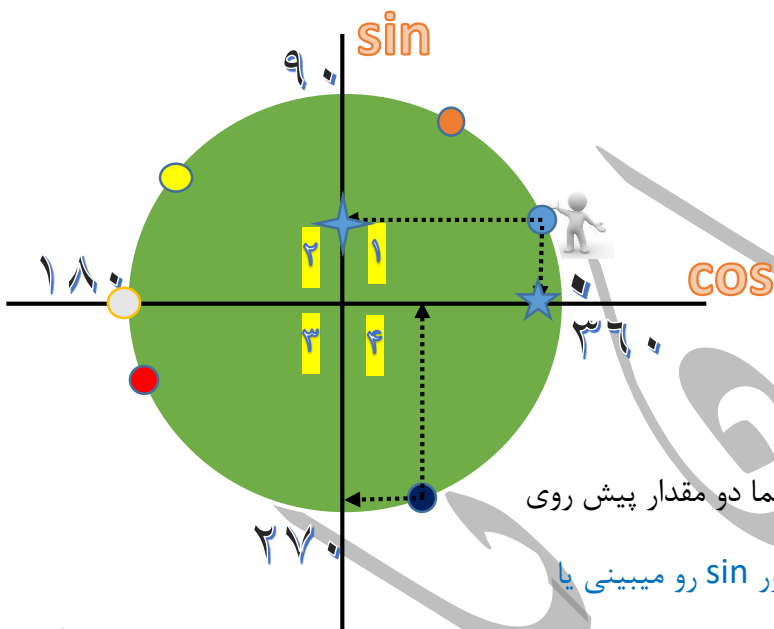
ابتدا توضیحات اولیه ای دارم که دونستن اونها از نون شب واجب تره!!!!!!

کل جریانات مثلثات حول یک دایره میچرخه! « که شعاع اون دایره ۱ هست »

این دایره با دو محور افقی ( یعنی محور کسینوس ها ) و محور عمودی ( یعنی محور سینوس ها ) ، به چهار قسمت ( ربع یا ناحیه ) تقسیم میشه. در حقیقت تو هر جای این دایره بایستی ، دو مقدار داری : یکی برای  $\cos$  و دیگری برای  $\sin$  .

خوب دقت کن، می خوام طوری بگم که متوجه بشی:

یه نگاه به شکل بنداز:.....



(در مورد دایره و زوایایی که دارید میبینید در ادامه صحبت خواهیم کرد)

فرض کنید شما روی نقطه ی ● ایستادید ، در این حالت شما دو مقدار پیش روی

خود خواهید دید.( بستگی به دید شما داره ، اینکه داری محور  $\sin$  رو میبینی یا

محور  $\cos$ ) ، اگر محور  $\cos$  ها رو میبینی یعنی مقدرات ★ هست و اگه داری محور  $\sin$  رو میبینی یعنی اینکه مقدرات

هست. ( دقت کردی هر دو مقدار هم مثبت خواهد بود؟؟؟ )

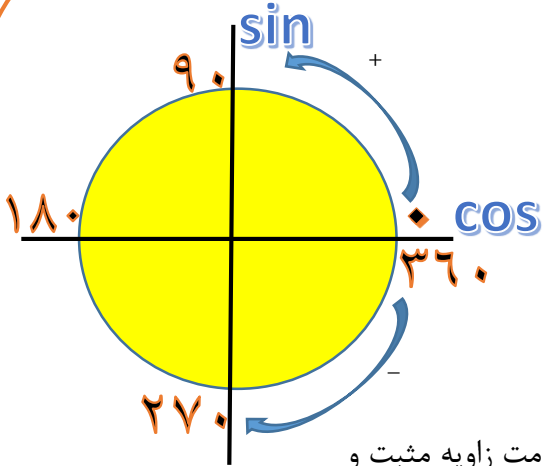
حالا فرض کن روی نقطه ی ● ایستادی ( ناحیه ۴ ) باز هم دو مقدار خواهی داشت ( مشخصه که مقدار کسینوس مثبت و مقدار سینوس منفی خواهد شد )

اما اما : جالب تر اینجاست که خودت رو در نقطه ی ○ تصور کنی !!!

قبلش باید یه توضیح مختصر در مورد زوایا ( ۰ و ۹۰ و ۱۸۰ و ۲۷۰ و ۳۶۰ ) بدم،

داخل کادر توضیحات کامل رو آوردم: خیلی با تمرکز بخون( اصلا مطلب عجیب و سختی نیست اما خیلی مهمه )

اولین مورد اینکه تو دایره مثلثاتی حرکت روی محیط دایره انجام میشه و ما نقطه شروع حرکت رو  $0$  درجه در نظر می گیریم،



(پس مبدا حرکت محور کسینوس ها شد)

دو مسیر پیش رو خواهید داشت، ساعتگرد (در جهت عقربه های ساعت)

یا پادساعتگرد (خلاف جهت عقربه های ساعت): اگر حرکت پادساعتگرد بود علامت زاویه مثبت و

اگر حرکت ساعتگرد بود علامت زاویه را منفی در نظر خواهیم گرفت.

می خوام حرکت پادساعتگرد انجام بدم: از  $0$  درجه شروع میکنم و تا  $90$  درجه به حرکت خودم ادامه میدم (حالا دقیقاً روی محور سینوس ها قرار گرفتم)، اگه همینطور  $90$  درجه دیگه برم میرسم به محور کسینوس (یعنی  $180$  درجه از مبدا حرکت فاصله گرفتم).

توجه: اگه از مبدا  $90$  درجه ساعتگرد حرکت میکردم (یعنی  $-90$ ) میرسیم به محور سینوس (اگه میخواستیم پادساعتگرد حرکت

کنم باید  $270$  درجه میرفتم تا بهش برسیم) (dareh jaleb mishe)

بریم ادامه مطلب صفحه قبل که رهاش کردیم،

پس فرض کن روی نقطه ی  $0$  ایستادی!!!

یعنی  $180$  درجه از مبدا عبور کردی، (نصف یک دور کامل) و رسیدی به محور کسینوس ها.

دو مقدار میتونی بدست بیاری:

اگر مقدار سینوس رو بخوای باید بصورت عمودی به محور سینوس ها نگاه کنی (چند رو میبینی؟؟؟)

احسنت، دقیقاً مبدا رو میبینیم، یعنی صفر (پس میتونم بگم سینوس زاویه  $180$  درجه برابر صفر هست)

اما مقدار کسینوس چی میشه؟؟؟؟

میشه  $-1$

چرا؟؟؟؟ (خیلی ساده) !!!!!: چون دایره ی مثلثاتی به شعاع ۱ هست .وقتی روی ۱۸۰ درجه ایستادی یعنی دقیقا ۱ واحد از مبدا روی محور کسینوس ها فاصله گرفتی ، و با توجه به اینکه سمت چپ مبدا قرار داری علامت هم منفی خواهد شد.

حالا سوال؟؟؟؟

به نظرت سینوس ۲۷۰ ( نوشته میشه  $\sin 270$ ) چنده؟

جواب: چون روی خود محور سینوس ها قرار داریم پس همونجا میشه مقدار سینوس ، اما چند؟؟؟؟

باز هم =-۱

چون به اندازه شعاع دایره از مبدا فاصله گرفتیم، ( پایین هم که هستیم ) پس میشه منفی ۱

برای اینکه کسینوس ۲۷۰ درجه رو پیدا کنم ، کافیه بصورت عمودی محور کسینوس رو ببینم که دقیقا میشه مبدا ( یعنی صفر)

پس :  $\cos 270 = 0$

فکر کنم دیگه بتونی مقادیر مقابل رو بدست بیاری؟؟؟

$$\sin 0 = \quad \cos 0 = \quad \sin 360 = \quad \cos 360 =$$

$$\sin 90 = \quad \cos 90 =$$

نکته ی فوق مهم:

عزیزم هیچ وقت مقدار سینوس و کسینوس یک زاویه نمیتونه از ۱ بیشتر و یا از -۱ کمتر باشه. (چون بیشترین و کمترین مقدار، یعنی شعاع دایره که اون هم ۱ هست)

$$-1 \leq \sin \theta, \cos \theta \leq 1$$

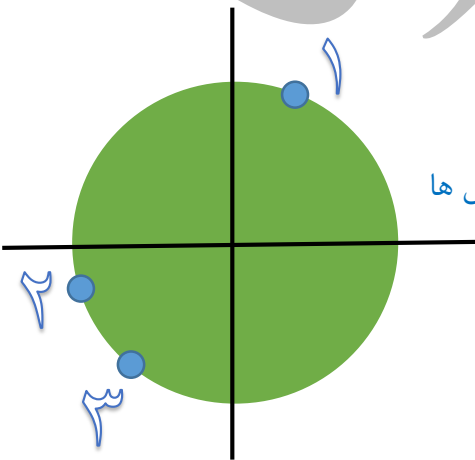
تا اینجا چطور بود؟؟؟؟

سوال: به نظرت اگر بخوایم مقادیر سینوس زوایای ۱ و ۲ و ۳ در شکل مقابل را به ترتیب از بزرگ به کوچک مرتب کنیم چطور میشه؟؟؟؟

$$\text{حل: } \sin 1 > \sin 2 > \sin 3$$

دلیل: چون مقدار سینوس هر زاویه رو میخوایم، پس باید بصورت عمودی به محور سینوس ها

نگاه کنیم، بلافاصله متوجه میشیم که مقدار سینوس در ۱ مثبت و در ۲ و ۳ منفی هست



پس فهمیدیم که سینوس ۱ از بقیه بزرگتره.

اما بین ۲ و ۳ چکار کنیم؟؟؟

اگر مستقیم به محور سینوس ها (محور عمودی) نگاه کنید میبینید که مقدار ۲ به مبدا نزدیکتره و چون منفی هستن میتونیم بگیریم که سینوس ۲ از سینوس ۳ بزرگتر خواهد بود. (تو دوران ابتدایی خوندی که اعداد منفی هر چه به صفر نزدیکتر باشن بزرگترن)

"من خودم تا اینجا خیلی لذت بردم ، چون دارم از ابتدایی ترین موارد شروع میکنم"

هنوز مقدمات هستیم

فعلا مقادیر سینوس و کسینوس رو بررسی کردیم ، اما تانژانت (tan) و کتانژانت (cot) چی؟؟

این یکی توضیح خاصی فعلا نداره: زیرا وقتی سینوس و کسینوس رو داری ، یعنی تانژانت و کتانژانت رو هم داری!!!!

$$\text{چون: } \tan = \frac{\sin}{\cos} \text{ و } \cot = \frac{\cos}{\sin}$$

به عنوان مثال:  $\tan 180 = ?$

$$\text{حل: قبلا طبق دایره مثلثاتی دیدم که } \sin 180 = 0 \text{ و } \cos 180 = -1 \text{ پس: } \tan 180 = \frac{\sin 180}{\cos 180} = \frac{0}{-1} = 0$$

مثال بعدی:  $\cot 90 = ?$

$$\text{حل: چون } \sin 90 = 1 \text{ و } \cos 90 = 0 \text{ لذا: } \cot 90 = \frac{\cos 90}{\sin 90} = \frac{0}{1} = 0$$

یه مثال دیگه:  $\tan 270 = ?$

$$\text{حل: تعریف نشده } \tan 270 = \frac{\sin 270}{\cos 270} = \frac{-1}{0}$$

اوه اوه اوه

رسیدیم بالاخره!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

صفحه بعد رو ببین

یه جدول مهم داریم که قبلا تو کتابها زیاد دیدی و حتما حفظ هستی ، منم همون رو آوردم ولی با کمی تغییرات و اینکه زوایای ۱۵ و ۷۵ درجه رو اضافه کردم: ( به نظرم جدول جالبی شده) ( حفظ کردنش از نون شب واجبتره).

	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
sin	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷	۰/۸۵	۰/۹۵	۱
cos	۱	۰/۹۵	۰/۸۵	۰/۷	۰/۵	۰/۲۵	۰
tan	۰	۰/۲۵	۰/۵۸	۱	۱/۷	۳/۷۵	∞
cot	∞	۳/۷۵	۱/۷	۱	۰/۵۸	۰/۲۵	۰

یه نکته رو متوجه شدی داخل جدول:

اگه دو تا زاویه متمم باشن ( یعنی مجموع اونها برابر ۹۰ بشه) : سینوس یکی برابر میشه با کسینوس اون یکی و برعکس، همچنین تانژانت یکی میشه کتانژانت اون یکی و بر عکس

مثلا :  $\sin 30 = \cos 60$  ،  $\sin 15 = \cos 75$  و  $\sin 75 = \cos 15$  و البته که مشخصه  $\tan 75 = \cot 15$  و...

پس حتما به عنوان مثال :  $\tan 10 = \cot 80$  و کلی مثال دیگه که میشه زد!!!!!!

اینجای کار میخوام محاسبه تقریبی زوایای غیر معمول و غیر مشهور رو بگم:

مثلا  $\sin 20$  رو چطور بدست بیاریم:

خوب دقت کن!!!

$$15 < 20 < 30$$

$$\sin 15 < \sin 20 < \sin 30$$

اینطور شروع میکنم:

با توجه به جدول  $\sin 20$  بین ۱۵ و ۳۰ قرار داره ، پس سینوس ۲۰ هم بین سینوس ۱۵ و سینوس ۳۰ خواهد بود،

متوجه هستید داخل جدول وقتی از ۱۵ به سمت ۳۰ میریم ( یعنی ۱۵ درجه)، مقدار سینوس  $0/25$  (  $0/25 - 0/5$ ) افزایش پیدا کرده؟؟؟؟؟

اما ما میخوایم سینوس ۲۰ درجه رو حساب کنیم ( یعنی ۵ درجه افزایش داشته باشیم: از ۱۵ تا ۲۰)، حالا باید تناسب ببندیم:

میزان افزایش زاویه	میزان افزایش مقدار سینوس
$(30-15)=15$	$(0.5-0.25)=0.25$
$(20-15)=5$	?

$$\frac{5 \times 0.25}{15} = 0.08$$

این یعنی میزان افزایش سینوس حدود ۰/۰۸ خواهد بود. پس کافیه سینوس ۱۵ (۰/۲۵) رو با ۰/۰۸ جمع کنیم:

$$0.25 + 0.08 = 0.33$$

مثال های بیشتر حل کنیم

$\cos 51 = ?$

طبق جدول ۵۱ بین ۴۵ و ۶۰ هست، پس سینوس ۵۱ هم بین سینوس ۴۵ و سینوس ۶۰ خواهد بود.

در واقع داخل جدول معلومه که وقتی ۱۵ درجه افزایش زاویه داشتیم (۶۰-۴۵) مقدار سینوس حدود ۰/۲ (۰/۵-۰/۷) کاهش پیدا کرده.

اما باید سینوس ۵۱ رو محاسبه کنیم، پس میزان افزایش زاویه ۱۵ درجه نیست بلکه ۶ درجه (۵۱-۴۵) هست

دوباره تناسب ببندیم:::

میزان افزایش زاویه	میزان افزایش یا کاهش سینوس
$(60-45)=15$	$(0.5-0.7)=-0.2$
$(51-45)=6$	?

$$\frac{6 \times (-0.2)}{15} = -0.08$$

پس سینوس ۴۵ (یعنی ۰/۷) باید حدود ۰/۰۸ کاهش پیدا کنه:  $0.7 - 0.08 = 0.62 = \cos 51$

دیگه به عنوان تمرین شما برید  $\tan 70$  رو محاسبه کنید (باید ۳/۰۶ بدست بیارید)



## تعیین رفتار نسبت های مثلثاتی

اگر خسته شدی برو استراحت کن (مجبور نیستی یه دفعه همه رو بخونی)

اگر هم رو به راهی عزیز!!! درسنامه رو بخون.

اگر زاویه ای منفی بود (یعنی حرکت ساعتگرد داشت)، نسبت ها اینطوری رفتار میکنند: (فقط ببین چقدر کسینوس متفاوت با بقیه عمل میکنه)!!!

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

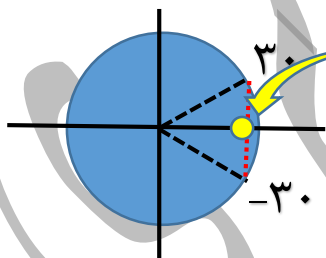
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

جالبش اینجا بود که فقط کسینوس منفی رو از بین برد، (اصطلاحاً می‌گیم کسینوس منفی خور هست)

دلیلش هم خیلی مشخصه:؟؟



طبق دایره مثلثاتی مقدار کسینوس دو زاویه قرینه (مثلاً ۳۰) یکی میشه

(در واقع وقتی می‌خوایم کسینوس زاویه ۳۰ و منفی ۳۰ رو محاسبه کنیم باید به محور

کسینوس ها عمود کنیم. که هر دو عمود به یک نقطه وارد میشن.)

راستی راستی راستی!!!!!!

اگه یک زاویه از ۹۰ درجه بیشتر بشه چطور به کمک جدول زوایای معروف، اندازهش رو پیدا کنیم؟؟؟؟

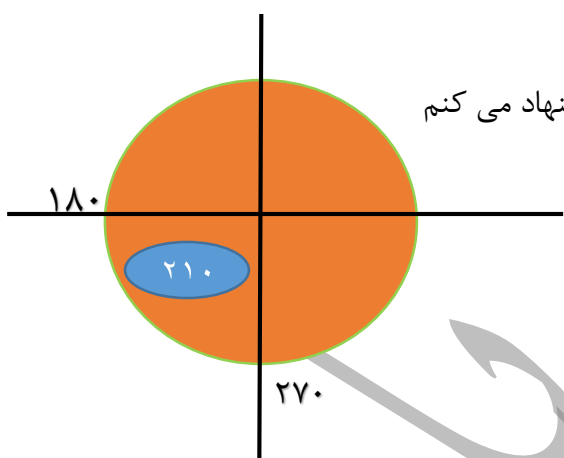
مثلاً:  $\sin 210 = ???$

(راهنمایی: بهتره تبدیلیش کنی به زاویه های معروف)

توجه کن و لذت ببر!!!!!!

گام ۱: چون  $210^\circ$  درجه مربوط به ناحیه ۳ هست و تو اون محدوده علامت سینوس منفی هست ، پس باید علامت منفی یادمون بمونه. (تا اینجا اوکی)

گام ۲: تو این گام باید بتونیم  $210^\circ$  رو به زاویه های معروفی که تو جدول داشتیم تبدیل کنیم: (به کمک دایره مثلثاتی راحت میشه درکش کرد و فهمید)



طبق شکل معلومه که  $210^\circ$  بین  $180^\circ$  و  $270^\circ$  هست ، پس دو حالت رو بهت پیشنهاد می کنم

اول اینکه از  $270^\circ$  یه مقداری کم کنی تا بشه  $210^\circ$  (یعنی  $270 - 60$ )

دوم هم این که به  $180^\circ$  مقداری اضافه کنی تا بشه  $210^\circ$  (یعنی  $180 + 30$ )

هر کدام که راحتی. (هیچ فرقی نمیکنه).

دیگه تمومه :

دو حالت مقابل رو داریم:

$$\sin 210 = \sin(270 - 60) = \text{یادت هست که } 270 \text{ درجه نسبت رو تغییر میداد؟} = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 210 = \sin(180 + 30) = \text{هم که تاثیری روی نسبت نداره} = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

احساسم میگه این قسمت رو بیشتر مثال بزنم: (فقط در حد مثال هست)

$$1) \tan 115 = \text{تو ناحیه ۲ قرار میگیره پس علامت تانژانت منقبه} = \tan(180 - 65) = -\tan 65 \text{ or } \tan(90 + 25) = -\cot 25$$

(توضیح مجدد:  $90^\circ$  درجه نسبت رو تغییر داد واسه همین نوشتیم کتانژانت  $25^\circ$ )

$$2) \cos 305 = \cos(360 - 55) = +\cos 55 \text{ or } \cos(270 + 35) = +\sin 35$$

$$3) \cot 150 = \text{????}$$

$$4) \tan 223 = \text{????}$$

شک ندارم آماده ای واسه تست زدن ، اما یه کوچولو دیگه صبر کنی خیالم راحت میشه

معمولا تو کنکور و سوالات تستی میان زاویه ها رو از  $360^\circ$  درجه بیشتر میگویند. (کاری نداره: شما وقتی یک دور دایره رو رد میکنی انگار اصلا حرکت نکردی)

فرض کن زاویه مورد نظر  $400^\circ$  درجه هست، چون از  $360^\circ$  بیشتره میام و  $400^\circ$  رو منهای  $360^\circ$  میکنم که میشه  $40^\circ$  درجه. و این یعنی اینکه شما فقط  $40^\circ$  درجه رو محاسبه کن

یا مثلا زاویه  $1810^\circ$  درجه رو میدن (ظاهرا وحشتناکه) اما کافیه اونقدر  $360^\circ$  رو ازش کم کنی تا مقدارش کوچک و کوچکتر بشه:

$$1810 - 360 = 1450 \quad 1450 - 360 = 1090 \quad 1090 - 360 = 730 \quad 730 - 360 = 370 \quad 370 - 360 = 10$$

(پس کافیه فقط برم سراغ  $10^\circ$  درجه)

مثال آخر هم اینکه:

$$\sin 480^\circ = \sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

شانسمون رو امتحان می کنیم ، شاید معروف شد

$$480 - 360 = 120$$

دیگه تمام شد: بریم حل سوالات کنکور

(تجربی ۹۴): حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با این فرض که  $\tan 15^\circ = \frac{1}{28}$  کدام است؟

$$\frac{16}{9}$$

$$\frac{9}{16}$$

$$-\frac{16}{9}$$

$$-\frac{9}{16}$$

حل:

یکی یکی بررسی کنیم

$$\cos 285^\circ = \cos(360^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ = \frac{1}{28}$$

چون تو ناحیه چهارم قرار می گیره پس علامت کسینوس مثبت. از طرفی ما میتونیم زاویه  $285^\circ$  رو تبدیل کنیم به  $360^\circ - 75^\circ$  و یا  $270^\circ + 15^\circ$  که در حالت اول نسبت تغییر نمیکنه ولی تو حالت دوم چرا. من حالت اول رو در نظر گرفتم. در پایان هم طبق جدول مقدار  $\frac{1}{28}$  رو بدست آوردم.

$$\sin 255^\circ = -\sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -\frac{1}{95}$$

تو ناحیه سوم قرار داره پس مقدار سینوس منفی هست. به صورت  $۱۵-۲۷۰$  نوشتیم ، لذا نسبت تغییر کرد . در پایان هم طبق جدول تونستیم مقدار رو محاسبه کنیم.

$$\sin ۵۲۵ = \boxed{۵۲۵-۳۶۰=۱۶۵} = \sin ۱۶۵ = \sin(۱۸۰-۱۵) = +\sin ۱۵ = +۰/۲۵$$

اول اومدم از  $۵۲۵$  عدد  $۳۶۰$  رو کم کردم تا مقدار  $۱۶۵$  بدست اومد. بعدش  $۱۶۵$  رو تبدیل کردم به  $۱۵-۱۸۰$ .

و چون تو ناحیه ی دوم قرار گرفت مقدار سینوس مثبت شد

$$\sin ۱۰۵ = \sin(۹۰ + ۱۵) = +\cos ۱۵ = +۰/۹۵$$

با جایگزینی حل تمام میشه:

$$\frac{۰/۲۵ - (-۰/۹۵)}{۰/۲۵ - (+۰/۹۵)} = \frac{۱/۲}{-۰/۷} = -۱/۷$$

اگر گزینه ها رو ساده کنیم نتیجه می گیریم که گزینه صحیح  $\frac{-۱۶}{۹}$  خواهد بود. (گزینه ب)

راستی دقت کردی از  $\tan ۱۵$  اصلا استفاده نکردیم؟؟؟؟

از این بهتر امکان نداره

کدام است؟  $\frac{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$   $\tan\theta = ۰/۲$  باشد مقدار (ریاضی ۹۱): اگر  $\theta = ۰/۲$

۳

۲

۱/۲

-۲

حل: اینجا زاویه ها با  $\theta$  نشون داده شده، پس احتمالا اول باید  $\theta$  رو پیدا کنیم.

چون  $\tan\theta = ۰/۲$  ، پس همیشه  $\theta$  رو تقریبی بدست بیاریم:

با توجه به اینکه تانژانت  $۰/۲$  هست با یه نگاه تو جدول زوایای معروف مشخص میشه که  $۰/۲$  بین  $۰$  و  $۰/۲۵$  هست (یعنی  $\theta$  بین

$۰$  و  $۱۵$  قرار داره ، زیرا  $\tan ۰ = ۰$  و  $\tan ۱۵ = ۰/۲۵$ ). از طرفی  $۰/۲$  به  $۰/۲۵$  نزدیکتره پس باید  $\theta$  هم به  $۱۵$  نزدیک بشه. (تقریبا

بگیریم  $\theta = ۱۰$ ).....توجه کنی که تقریب گرفتن برای  $\theta$  تو کنکور خیلی مهم نیست

حالا وقت جایگذاری هست:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 10^\circ\right) = +\sin 10^\circ = \boxed{\text{با روش های تخمین زدن که قبلاً گفتیم بریم جلو}} = 0.2$$

$$\cos(\pi + 10^\circ) = -\cos 10^\circ = -0.98$$

$$\sin(\pi - 10^\circ) = +\sin 10^\circ = 0.2$$

$$\sin(3\pi + 10^\circ) = \boxed{3 \times 180^\circ = 540^\circ} = \sin(540^\circ + 10^\circ) = \boxed{540^\circ - 360^\circ = 180^\circ} = \sin(180^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ = -0.2$$

تموم شد دیگه ، پس داریم:

$$\frac{0.2 - (-0.98)}{0.2 - (-0.2)} = \frac{+1.18}{0.4} = 2.95$$

چون تقریبی گرفته بودیم پس نزدیک ترین گزینه رو انتخاب میکنیم ، یعنی گزینه ۴

(تجربی ۹۴): اگر  $\tan \beta = \frac{1}{4}$  و  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$  باشند، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

۰/۸

۰/۷۵

۰/۶

۰/۴۵

حل: طبق گفته ی سوال :  $\tan \beta = 0.25$  ، طبق جدول زوایا میبینیم که  $\tan \beta$  بین  $\tan 15^\circ = 0.25$  و  $\tan 30^\circ = 0.58$  قرار می گیره، و چون  $0.25$  به  $0.58$  نزدیکتره، فرض می کنیم  $\beta = 15^\circ$  باشه.

از رابطه  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$  و میتونیم  $\alpha$  رو محاسبه کنیم:  $\alpha - 15^\circ = 45^\circ$  ، پس  $\alpha = 60^\circ$ .

در پایان هم مقدار خواسته شده برابر خواهد بود با:

$$\sin 2\alpha = \sin 2(60^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = +\sin 60^\circ = \boxed{\text{با محاسبه تقریبی}} = 0.87$$

یعنی گزینه ۲ .

(تجربی ۱۴۰۰): اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$  چند است؟

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

$$\frac{6+\sqrt{3}}{16}$$

$$\frac{6-\sqrt{3}}{16}$$

$$\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$$

حل: این سبک سوال رو همیشه با تکنیک های راحت تر هم حل کرد، اما واسه اینکه روش های حل مختلفی گفته نشه و سردرگم نشید با روش خودمون حل می کنیم:

جایگذاری کنیم:

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2\left(3 \times \frac{\pi}{36}\right) \cos^2\left(6 \times \frac{\pi}{36}\right) \cos^2\left(12 \times \frac{\pi}{36}\right) \cos^2\left(24 \times \frac{\pi}{36}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos^2\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2\left(\frac{18^\circ}{12}\right) \cos^2\left(\frac{18^\circ}{6}\right) \cos^2\left(\frac{18^\circ}{3}\right) \cos^2\left(2 \times \frac{18^\circ}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2(15^\circ) \cos^2(30^\circ) \cos^2(60^\circ) \cos^2(120^\circ)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \cos^2(90^\circ + 30^\circ)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-\sin 30^\circ)^2$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16 \times \frac{95 \times 95}{100 \times 100} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 0.676$$

سعی کردم تمام موارد رو کامل بگم.

حالا باید گزینه صحیح و نزدیک رو پیدا کنیم:

ساده شده ی گزینه ها به این شکله:

$$0.6997$$

$$0.4832$$

$$0.2667$$

$$0.502$$

مطمئنم گزینه ۴ رو انتخاب می کنید.

سعی کن دو سه بار این سوال رو خودت حل کنی

(تجربی ۱۴۰۰): اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه ی سوم مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot \alpha}$  کدام است؟

$$\frac{1056}{175}$$

$$\frac{96}{175}$$

$$\frac{1056}{175}$$

$$\frac{96}{175}$$

حل: چند حالت رو باید بررسی کنیم:

اول اینکه تو ناحیه ی سوم قرار داره ، پس روی علامت ها باید دقت کنی (اینکه هر نسبتی چه علامتی داره)

دوم: گفته تانژانت زاویه ای شده  $\frac{3}{4} = 0/75$ . بریم تو جدول ببینیم:  $\tan 30 = 0/58$  و  $\tan 45 = 1$  پس

شک نداریم که زاویه  $\alpha$  بین ۳۰ و ۴۵ درجه هست. (هر چند خیلی کم ولی ۰/۷۵ به ۰/۵۸ نزدیکتره، پس فرض کنیم

$$\alpha = 35$$

با جایگذاری داریم:

$$\frac{\cos(-90 + 70) + \cos(35 + 180)}{\cot 70} = \frac{\cos(20) + \cos(35)}{\cot 70} = \frac{\sin 70 + \cos 35}{\cot 70}$$

مقدار تقریبی هر کدام رو بدست میاریم:

$$\sin 70 \approx 0/93$$

$$\cos 35 \approx 0/81$$

$$\cot 70 \approx 0/34$$

$$\frac{0/93 + (0/81)}{0/34} = 5/117$$

پس داریم:

باید گزینه ها رو هم تقریبی ساده کنیم:

$$-6/03$$

$$0/548$$

$$6/03$$

$$-0/548$$

من هم اگه جای تو باشم گزینه ۲ رو انتخاب می کنم.

این هم به شکل دیگه از حل (دیگه چی می خوای؟؟)

آخرین آزمون برگزار شده (یعنی ۱۴۰۰)

(ریاضی فیزیک ۱۴۰۰): اگر  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  کدام است؟

$$\frac{91}{105}$$

$$\frac{16}{105}$$

$$-\frac{16}{105}$$

$$-\frac{91}{105}$$

حل: فرض کنیم  $\frac{\alpha}{2} = k$ .

حالا باید ببینیم تانژانت چه زاویه ای میشه  $0/25 = \frac{1}{4}$ :

مجدد طبق جدول معروف خودمون پیش میریم،  $0/25$  مربوط بود به تانژانت زاویه  $15$  درجه بود  $(\tan(15) = 0/25)$ . پس مقدار  $k = 15$  خواهد بود.

با توجه به رابطه ی  $\frac{\alpha}{2} = k$  نیز میدونیم که  $\alpha = 30$ . (دیگه تموم شد)

جایگذاری کن ببینم چکار میکنی!!!!

$$\frac{\tan(30) - \sin(30)}{\sin(30) - \cos(30)} = \frac{0/58 - 0/5}{0/5 - 0/85} = -0/228$$

گزینه ها رو ساده کنیم

$$0/866$$

$$0/152$$

$$-0/152$$

$$-0/866$$

من دیگه حرفی ندارم. (خود گزینه ۲ داره داد میزنه من از همه نزدیکترم)

(ریاضی فیزیک ۱۴۰۰): اگر  $f(\alpha) = 4\sin(\alpha)\cos(2\alpha) + 2\sin(\alpha)$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{41\pi}{9}\right)$  کدام است؟

$$-1$$

$$1$$

$$\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}$$

حل: چقدر ساده

ببینیم با جایگذاری  $180$  به جای  $\pi$  چه عددی حاصل میشه:

$$\frac{41\pi}{9} = \frac{41 \times 180}{9} = 820$$

پس باید اینطوری پیش بریم:



$$f(۸۲۰) = ۴ \sin(820) \cos(۱۶۴۰) + ۲ \sin(۸۲۰)$$

یاد داریم که واسه زاویه های بزرگتر از ۳۶۰ باید تا حد لازم (اینکه از ۳۶۰ کوچکتر بشه)، تعداد دورهای کامل (هر دور معادل ۳۶۰ درجه) رو از عدد خواسته شده کم کنیم، یعنی:

$$f(۸۲۰) = ۴ \sin(820) \cos(۱۶۴۰) + ۲ \sin(۸۲۰) =$$

$$۴ \sin(۸۲۰ - ۳۶۰ - ۳۶۰ = ۱۰۰) \cos(۱۶۴۰ - ۳۶۰ - ۳۶۰ - ۳۶۰ - ۳۶۰ = ۲۰۰) + ۲ \sin(۱۰۰) =$$

$$۴ \sin(۱۰۰) \cos(۲۰۰) + ۲ \sin(۱۰۰) =$$

باید زاویه ها رو بصورت مجموع یا تفاضل دو عدد بنویسیم بطوریکه بشه از جدول زوایا کمک گرفت:

$$f(۸۲۰) = ۴ \sin(۹۰+۱۰) \cos(۲۷۰-۷۰) + ۲ \sin(۹۰+۱۰) = ۴ \cos(۱۰) \times (-\sin(۷۰)) + ۲ \cos(۱۰) =$$

فهمیدی چی شد؟؟؟

زاویه های ۹۰ و ۲۷۰ نسبت رو تغییر میداد، پس این کار رو انجام دادم. ضمن اینکه دقت کردم ببینم تو کدوم ناحیه قرار میگیره که علامت رو هم درست بزارم.

مثلا  $\cos(۲۷۰-۷۰)$  تو ناحیه سوم قرار می گیره، پس علامت منفی هست. همچنین زاویه ۲۷۰ باعث تغییر نسبت میشه، لذا نوشتیم  $-\sin(۷۰)$ .

بریم سراغ محاسبه تقریبی:

$$\cos ۱۰ = \text{خودت تقریبی بادی حساب کنی} = ۰/۹۷$$

$$\sin ۷۰ = ۰/۹۲$$

$$+ ۴ \cos(۱۰) \times (-\sin(۷۰)) + ۲ \cos(۱۰) = ۴(۰/۹۷)(-۰/۹۲) + ۲(۰/۹۷) = -۱/۶۲$$

گزینه ها چه شکلی هستن؟

-۱

۱

۱/۷۳

-۱/۷۳

گزینه ۱ جذاب تر نیست؟؟؟؟؟؟

خدا میدونه وقتی دارم این راه و روش رو توضیح میدم خودم لذت میبرم

راستی:

دقت کردی مقدار تقریبی زوایا رو دارم چطور حساب میکنم؟؟

روش جدیدی دارم پیاده میکنم

یه مثال میزنم که خودت ببینی چکار کردم

همون  $\cos 10$  رو میگویم:

اومدم با خودم گفتم زاویه  $10$  درجه تو جدول بین  $0$  درجه و  $15$  درجه قرار میگیره. از طرفی به  $15$  نزدیکتر هم هست:

داخل جدول اینطور بود:  $\cos 0 = 1$  و  $\cos 15 = 0.95$  اول بین  $1$  و  $0.95$  میانگین گرفتم که عدد وسطشون مشخص بشه که شد  $= 0.98$ .

از طرفی  $10$  به  $15$  نزدیکتر بود، پس باید از  $0.98$  به سمت  $0.95$  میرفتم، واسه همین تقریبی با خودم گفتم  $\cos 10 = 0.97$

یه نکته مهم بگویم:

درسته بعضی وقتها راه حل طولانی میشه، ولی این رو بدون با تمرین و تکرار زیاد خیلی راحت میتونی زمان رو مدیریت کنی

و جدا از همه موارد تو دیگه نیازی به حفظ کردن فرمول های وحشتناک نداری.

دیگه چی از این بهتر که بتونی یکی از سخت ترین مطالب کتاب ریاضی رو به راحت ترین مطالب تبدیل کنی

(تجربی ۹۹): حاصل عبارت  $\tan(30^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(48^\circ)\sin(84^\circ)$  کدام است؟

۲

۱

صفر

 $\frac{1}{2}$ 

حل: باید زاویه ها رو به صورت جمع و تفریق دو جمله ای تبدیل کنیم:

$$\tan(360^\circ - 60^\circ) \cos(270^\circ - 60^\circ) + \tan(480^\circ - 360^\circ = 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ) \sin(840^\circ - 360^\circ - 360^\circ = 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ) =$$

$$-\tan(60^\circ) \times (-\sin(60^\circ)) + (-\tan(60^\circ)) \times \sin(60^\circ) = (-1/\sqrt{3})(-0.85) + (-1/\sqrt{3})(0.85) = 0$$

چقدر راحت بود!!!!!!

به نظرم حل سوال کافی باشه. میتونید برید سوالات مختلف رو خودتون حل کنید.

اگر پیشنهاد و یا انتقادی داشتید خوشحال میشم از طریق پیام ارسال بفرمایید.

منتظر بخش دوم مثلثات (معادلات مثلثاتی) و همچنین مابقی جزوه های من باشید. همشون با همین شکل و برنامه پیش میرن.

تماس: ۰۹۱۵۴۶۵۸۱۸۵