

۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۲- اگر مجموعه‌های $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\}$ و $B = \left\{ \frac{8}{x} \mid x \in N \right\}$ مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر، متناهی است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

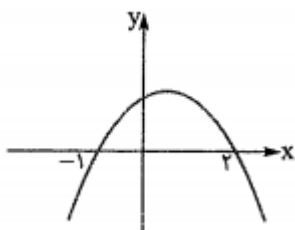
۳- اگر $\tan^2 x + \cot^2 x = 5$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{7}{5}$ (۳) $\frac{5}{7}$ (۴) $\frac{3}{7}$

۴- حاصل $\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ چه قدر از ۱ بیشتر است؟

- (۱) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

۵- خط $y = 2$ بر نمودار سهمی مقابل مماس است. عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها کدام است؟



- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۶- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) -۳ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) -۲

۷- از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به طوری که لااقل دو نفر از آن‌ها دانش آموز تجربی باشند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۸- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۹- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5$ برابر ۶ می‌باشد؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ (۴) $\frac{9}{5}$ و -۱

۱۰- نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(4, 3)$

۱۱- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x^2 - 4x + 5 ; x \leq 2$ (۲) $y = -x^2 - 4x + 5 ; x \leq 2$
 (۳) $y = x^2 - 4x + 5 ; x \geq 1$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5 ; x \geq 1$

۱۲- اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $1/2$ (۳) 2 (۴) 3

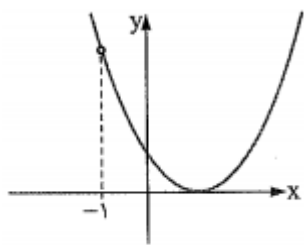
۱۳- اگر نمودار تابع $f(X) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۴- از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۱۵- اگر شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + 1}{x + c}$ باشد، مقدار b کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۳

(۴) -۳

۱۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) 2

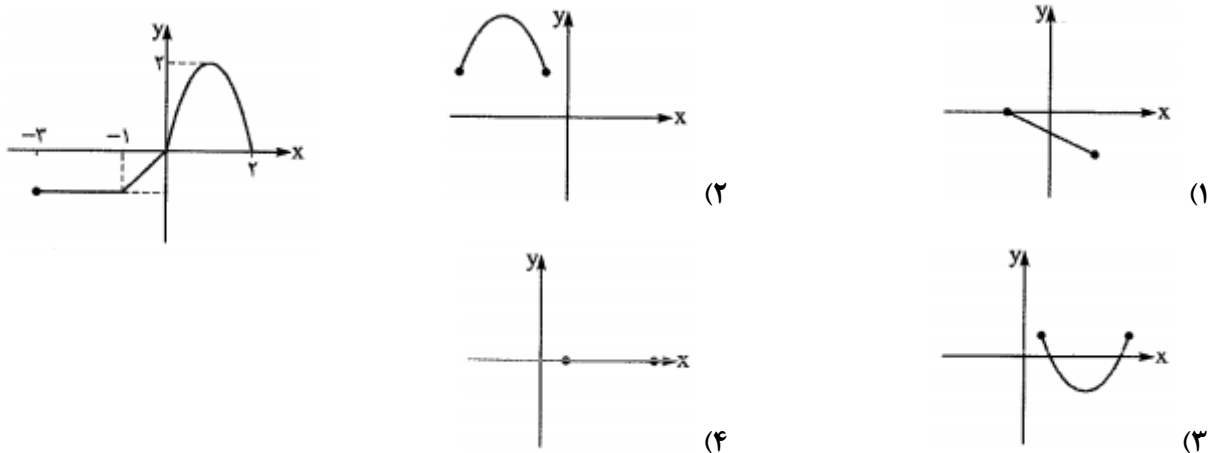
۱۷- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش، سفید و سومین موش، سیاه است؟

- (۱) $\frac{11}{56}$ (۲) $\frac{17}{56}$ (۳) $\frac{13}{56}$ (۴) $\frac{15}{56}$

۱۸- در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

- (۱) ۱۴/۷۲ (۲) ۱۴/۸۱ (۳) ۱۵/۳۳ (۴) ۱۶/۶۶

۱۹- اگر شکل زیر نمودار تابع $y = f(2x) - 1$ باشد، کدام گزینه، قسمتی از نمودار تابع $y = -f(x - 1)$ است؟



۲۰- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



۲۱- بزرگ‌ترین جواب معادله مثلثاتی $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{7\pi}{12}$ (۴) $\frac{11\pi}{12}$

۲۲- اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x+1}{x^2-x} = +\infty$ باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{0\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) \emptyset

۲۳- در تابع $f(x) = \frac{9x^2 - x}{x\sqrt{x}}$ اگر $f'(a) = 5$ باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۴- در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ چه قدر بیشتر است؟

(۱) $\frac{7}{540}$ (۲) $\frac{11}{540}$ (۳) $\frac{7}{270}$ (۴) $\frac{11}{270}$

۲۵- تابع $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ مفروض است. در کدام بازه تابع f نزولی و تابع f' صعودی است؟

(۱) $(1, 3)$ (۲) $(1, 4)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(0, 3)$

۲۶- در یک بنای تاریخی، پنجره‌ای وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن است. اگر محیط این پنجره $\frac{4}{5}$ باشد، به ازای کدام مقدار برای r ، پنجره بیشترین نوردهی را خواهد داشت؟

(۱) $\frac{9}{2\pi+8}$ (۲) $\frac{9}{\pi+4}$

(۳) $\frac{9}{8-2\pi}$ (۴) $\frac{9}{4-\pi}$

۲۷- شعاع دایره‌ گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۲۸- نقاط $A(-6, 1)$ و $A'(2, 1)$ مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی هستند. خروج از مرکز بیضی کدام باشد تا بیضی بر محور x ها مماس شود؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۹- پاره خط AB به طول ۶ مفروض است. در این صورت ۲ نقطه وجود دارد که از A به فاصله m و از B به فاصله $m + 1$ باشد. حدود m کدام است؟

(۱) $m = \frac{3}{2}$ (۲) $m > \frac{5}{2}$ (۳) $6 > m > \frac{3}{2}$ (۴) $m > 6$

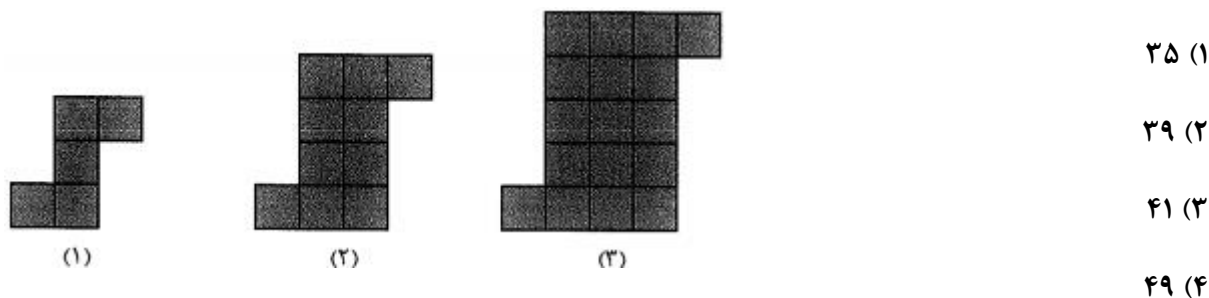
۳۰- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۶، ۵ و ۱ می‌باشند. کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ‌ترین ضلع آن است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد x ، $12 + x$ و $8 - x$ ، به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع جملات سوم و پنجم این دنباله کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{20}{9}$

۳۲- اگر تعداد مربع‌ها در شکل n ام را برابر a_n فرض کنیم، آن‌گاه حاصل $a_{20} - a_{19}$ کدام است؟

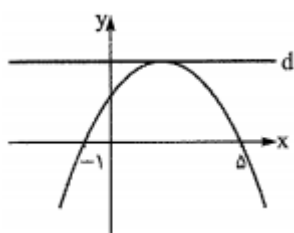


۳۳- اگر $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\cot^2 x$ کدام است؟

- $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۱)

۳۴- اگر $-1 < a < 0$ باشد و بدانیم $x = \frac{a}{\sqrt{-a}}$ و $y = a\sqrt{-a}$ ، آن‌گاه کدام رابطه صحیح است؟

- $y < a < x$ (۴) $a < y < x$ (۳) $a < x < y$ (۲) $x < a < y$ (۱)



۳۵- تابع f تابعی درجه دو و معادله خط d به صورت $y = 6$ است. تابع f محور

y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- $\frac{10}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۱)
 $\frac{14}{3}$ (۴) $\frac{13}{3}$ (۳)

۳۶- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول

نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟

- ۳ (۴) ۲ (۳) $1/5$ (۲) ۱ (۱)

۳۷- از هر یک از مدارس A, B, C, D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان

سه دانش‌آموز که دوه‌دو غیر هم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

- ۶۴۰ (۴) ۴۸۰ (۳) ۳۲۰ (۲) ۱۶۰ (۱)

۳۸- در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با

کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟

- $\frac{73}{84}$ (۴) $\frac{67}{84}$ (۳) $\frac{37}{42}$ (۲) $\frac{31}{42}$ (۱)

۳۹- به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای

مختصات مماس است؟

- ۱۲ (۴) ۱۲ و -۴ (۳) -۱۲ و ۴ (۲) -۴ (۱)

۴۰- نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟

- ۸۰ (۴) ۷۵ (۳) ۴۵ (۲) ۴۰ (۱)

۴۱- ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- $y = -x^2$; $x < 0$ (۲) $y = x|x|$; $x \in \mathbb{R}$ (۱)
 $y = \pm x|x|$; $x \in \mathbb{R}$ (۴) $y = \pm x^2$; $x \in \mathbb{R}$ (۳)

۴۲- اگر $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. آن گاه حاصل $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$ کدام است؟

- $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{7}{5}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۱)

۴۳- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1}$ از نقطه $A(0, 4)$ کدام است؟

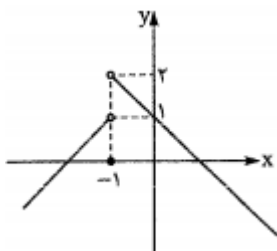
- ۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۴۴- از تساوی $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$. مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

- ۲ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۴۵- اگر شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(-x) + 1$ تعریف شود. حاصل

$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ کدام است؟



- ۱ (۱)
 ۲ (۲)
 -۱ (۳)
 -۲ (۴)

۴۶- کدام یک از توابع زیر در بازه $(0, 1]$ پیوسته است ولی در بازه $[0, 1)$ ناپیوسته است؟

- $y = -[x]$ (۱) $y = [-x]$ (۲) $y = [\sqrt{x}]$ (۳) $y = -[x^2]$ (۴)

۴۷- میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

- ۹/۲۵ (۱) ۹/۳۶ (۲) ۹/۵۲ (۳) ۹/۶۳ (۴)

۴۸- اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$. مقدار $f(3)$ کدام است؟

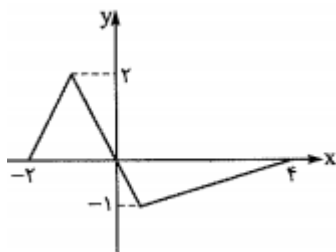
۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

۴۹- اگر نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $y = 1 - f(2x + 1)$ کدام است؟



[-1, 1/2] (۱)

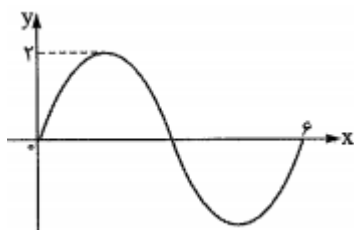
[-5/2, 7/2] (۲)

[-1, 5] (۳)

[-7, 15] (۴)

۵۰- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$

کدام است؟



5/3 (۲)

4/3 (۱)

8/3 (۴)

7/3 (۳)

۵۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱)

۵۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

1/6 (۴)

1/12 (۳)

-1/12 (۲)

-1/6 (۱)

۵۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای

آن در نقطه $x = 4$ چه قدر کم تر است؟

1/12 (۴)

5/72 (۳)

1/18 (۲)

1/36 (۱)

۵۴- خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط به معادله $x - 3y = 2$ عمود است. این خط

مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

(2, -4) (۴)

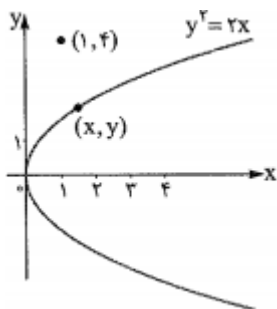
(2, -6) (۳)

(1, 4) (۲)

(1, 3) (۱)

۵۵- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکستریم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

 $0 < a < 2$ (۴) $-2 < a < 0$ (۳) $a < 0$ یا $a > 2$ (۲) $a < -2$ یا $a > 0$ (۱)



۵۶- کمترین فاصله نقاط روی منحنی $y^2 = 2x$ از نقطه $A(1, 4)$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{5}$

(۴) $2\sqrt{3}$

۵۷- شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۴

۵۸- در یک بیضی فاصله کانونی با طول قطر کوچک برابر است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۹- از بین تمام مستطیل‌ها با محیط ثابت ۲۸ واحد، مستطیلی که بیشترین مساحت را دارد، حول ضلع بزرگ‌ترش دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

(۱) 288π (۲) 343π (۳) 216π (۴) 384π

۶۰- مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{1}{8}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

(۱) ۱۵ (۲) $17/5$ (۳) $22/5$ (۴) ۳۰

۶۱- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد: $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام کدام است؟

(۱) ۱۷۰۰ (۲) ۱۷۵۰ (۳) ۱۸۰۰ (۴) ۱۸۵۰

۶۲- مجموعه A و $B - A$ به ترتیب ۳۲ و ۲۰ عضو دارند. اگر از دو مجموعه A و B ، ۷ عضو برداریم، از اشتراک آن‌ها ۳ عضو کم می‌شود. اگر در این حالت مجموعه $A - B$ دارای ۲۳ عضو باشد، A و B در ابتدا چند عضو مشترک داشته‌اند؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۳- علی در فاصله ۴ متری از پای ستونی که روی آن یک قاب شیشه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه دید پایین و بالای قاب شیشه‌ای با سطح افقی به ترتیب 55° و 60° است. ارتفاع (بلندی) قاب شیشه‌ای کدام است؟

($\tan 55^\circ = 1/43$, $\sqrt{3} = 1/73$)

(۱) $1/2$ (۲) $1/4$ (۳) $1/6$ (۴) $1/8$

۶۴- اگر معکوس عدد $3^0 + 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{2}{3}}$ را A بنامیم، حاصل $(4A - 1)^3$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۳ (۴) ۹

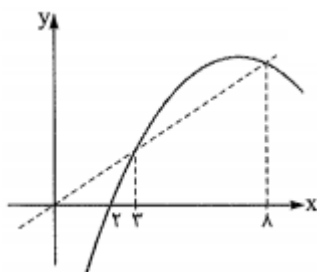
۶۵- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{|x-\alpha|(x-\beta)^3}{(x-t)^2}$ به صورت زیر باشد، دربارهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $\alpha x^2 + \beta x + t = 0$ کدام جمله درست است؟

x	۱	۲	۳
P	-	+	+

(۱) ریشهٔ حقیقی ندارد. (۲) ریشهٔ مضاعف دارد.

(۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (۴) دو ریشهٔ منفی دارد.

۶۶- شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



(۱) $(0, 2]$

(۲) $[2, 3]$

(۳) $[2, 8]$

(۴) $[3, 8]$

۶۷- در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۲ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

- (۱) $\frac{28}{45}$ (۲) $\frac{29}{45}$ (۳) $\frac{31}{45}$ (۴) $\frac{32}{45}$

۶۸- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کم‌تر است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۶۹- نقطهٔ A با طول مثبت روی خط $y = x - 1$ قرار دارد. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $4y - 3x = 2$ برابر با ۲ باشد، عرض نقطهٔ A کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۷۰- در دوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۴ و ۹ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

- (۱) $11\frac{1}{4}$ (۲) $11\frac{1}{6}$ (۳) $12\frac{1}{2}$ (۴) $12\frac{1}{8}$

۷۱- تابع با ضابطهٔ $y = x|x - 2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{1+x}$; $x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1-x}$; $x < 1$

$$1 - \sqrt{1-x} ; 0 < x < 1 \quad (۴) \qquad 1 + \sqrt{1-x} ; 0 < x < 1 \quad (۳)$$

۷۲- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ کدام است؟

$$\frac{16}{9} \quad (۴) \qquad \frac{9}{16} \quad (۳) \qquad -\frac{9}{16} \quad (۲) \qquad -\frac{16}{9} \quad (۱)$$

۷۳- تابع $y = |2^{x-1} - 2|$ و خط $y = k$ در یک نقطه متقاطع اند. محدوده k کدام است؟

$$[2, +\infty) \cup \{0\} \quad (۴) \qquad [2, +\infty) \quad (۳) \qquad (0, 2) \quad (۲) \qquad [0, 2) \quad (۱)$$

۷۴- اگر $\log 5 = 3k$ ، آن گاه $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

$$1 - k \quad (۴) \qquad 1 - 2k \quad (۳) \qquad 2 - 5k \quad (۲) \qquad 1 - 4k \quad (۱)$$

۷۵- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی

بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \qquad \frac{1}{4} \quad (۳) \qquad -\frac{1}{4} \quad (۲) \qquad -\frac{1}{2} \quad (۱)$$

۷۶- چهار دانش آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آنها

یکسان است؟

$$\frac{55}{96} \quad (۴) \qquad \frac{23}{48} \quad (۳) \qquad \frac{41}{96} \quad (۲) \qquad \frac{19}{48} \quad (۱)$$

۷۷- ۲۰ داده آماری با ضریب تغییرات $0/3$ و واریانس ۹ داریم. اگر تمام این داده‌ها را در عدد ۳ ضرب کنیم و سپس

۵ واحد از آنها کم کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

$$0/31 \quad (۴) \qquad 0/4 \quad (۳) \qquad 0/36 \quad (۲) \qquad 0/32 \quad (۱)$$

۷۸- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$[-4, -2] \cup (0, 2] \quad (۴) \qquad [-4, -1] \cup (1, 2] \quad (۳) \qquad [-2, 0] \quad (۲) \qquad [-4, 2] \quad (۱)$$

۷۹- اگر $1 - \tan^4 x = \frac{1}{2-2\sin^2 x}$ باشد، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

$$-\frac{2}{3} \quad (۴) \qquad \frac{2}{3} \quad (۳) \qquad -\frac{1}{3} \quad (۲) \qquad \frac{1}{3} \quad (۱)$$

۸۰- تابع $\frac{\cos 2x - 1}{\sin 2x}$ در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی

(۳) ابتدا صعودی سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۸۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۸۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۸۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در بازه $[1, 1/21]$ از شیب خط مماس بر منحنی در ابتدای این بازه، چه قدر کم تر است؟

(۱) $\frac{1}{42}$ (۲) $\frac{1}{21}$ (۳) $\frac{3}{42}$ (۴) $\frac{3}{21}$

۸۴- اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) مشتق ندارد.

۸۵- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشند، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f'(x)$ در کدام بازه است؟

(۱) $[-2, 0]$ (۲) $[-2, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[0, 1]$

۸۶- در استوانه‌ای جمع شعاع قاعده و ارتفاع ۶ است. بیشترین حجم این استوانه کدام است؟

(۱) 48π (۲) 36π (۳) 32π (۴) 28π

۸۷- دایره‌ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ تر کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۸۸- کانون‌های یک بیضی $F(1, -5)$ و $F'(1, 3)$ هستند. اگر $b = 3$ باشد، در این صورت خط $y = 3$ بیضی را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

(۱) $-\frac{4}{5}$ و $\frac{14}{5}$ (۲) $\frac{18}{5}$ و صفر (۳) $\frac{1}{4}$ و $\frac{17}{4}$ (۴) ۴ و صفر

۸۹- پاره‌خط $y = 2x$ را با شرط $0 \leq x \leq 3$ در نظر بگیرید. اگر این پاره‌خط را حول محور y ها دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟

(۱) 12π (۲) 18π (۳) $6\sqrt{10}\pi$ (۴) $4\sqrt{10}\pi$

۹۰- در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیل ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

(۱) $۰/۷$ (۲) $۰/۷۵$ (۳) $۰/۸$ (۴) $۰/۸۵$

۹۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد: ... (1), (2, 3), (4, 5, 6), (1) مجموع جملات اول و آخر دسته بیستم کدام است؟

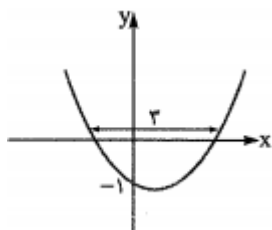
- (۱) ۴۰۱ (۲) ۴۰۲ (۳) ۴۰۳ (۴) ۴۰۴

۹۲- دو مجموعه A و B و اجتماعشان به ترتیب دارای ۲۸، ۳۲ و ۵۲ عضو هستند. اگر از هر دو مجموعه A و B ، ۷ عضو برداریم، تعداد اعضای مشترک این دو مجموع ۳ تا کم می‌شود. در این حالت مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۳۸ (۳) ۳۹ (۴) ۴۱

۹۳- اگر $4^x + 4^{-x} = 5 + 4\sqrt{3}$ باشد، حاصل $2^x + \frac{1}{2^x}$ کدام است؟

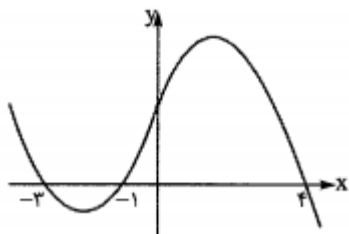
- (۱) $\sqrt{3} + 1$ (۲) $\sqrt{3} + 2$ (۳) $\sqrt{3} - 1$ (۴) $2\sqrt{3} - 1$



۹۴- شکل مقابل مربوط به سهمی $y = x^2 + bx + c$ است. عرض رأس سهمی کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

۹۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



- (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

- (۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

- (۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

- (۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

۹۶- در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

- (۱) $\frac{30}{91}$ (۲) $\frac{25}{77}$ (۳) $\frac{40}{143}$ (۴) $\frac{50}{143}$

۹۷- به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟ ($a \neq -5$)

- (۱) $a < -4$ (۲) $a > -4$ (۳) $a < 4$ (۴) $a > 4$

۹۸- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده است. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

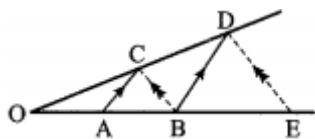
۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

۹۹- در شکل روبه‌رو، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = 3$ و $AB = 5$ ، اندازه BE کدام است؟



$12\frac{2}{3}$ (۲)

$13\frac{1}{3}$ (۱)

$10\frac{2}{3}$ (۴)

$11\frac{1}{3}$ (۳)

۱۰۰- تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه کدام است؟

$\frac{1}{3}x + 2$; $x > 3$ (۲)

$-x + 7$; $x > 8$ (۱)

$\frac{1}{2}x - 1$; $-4 < x < 8$ (۴)

$x + 7$; $x > -4$ (۳)

۱۰۱- حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ ، با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$ کدام است؟

$\frac{5}{8}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

۱۰۲- تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_2(bx - 4)$ از دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد. a کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۰۳- اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

$2 + 4k$ (۴)

$1 + k$ (۳)

$4k$ (۲)

$2k$ (۱)

۱۰۴- تابع $f(x) = (x^2 - x)[x]$ در بازه $[-1, k]$ ، فقط در یک نقطه ناپیوسته است. حداکثر مقدار k کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۰۵- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

$\frac{39}{64}$ (۴)

$\frac{19}{32}$ (۳)

$\frac{37}{64}$ (۲)

$\frac{27}{64}$ (۱)

۱۰۶- ۱۲ داده آماری با واریانس ۱۰ داریم. چند داده برابر با میانگین به آن‌ها اضافه کنیم تا واریانس ۲۰ درصد کاهش پیدا کند؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۰۷- در داده‌های ۸، $c + 2$ ، $b - 1$ و a انحراف معیار برابر صفر است. بیشترین مقدار a ، b و c کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۰۸- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

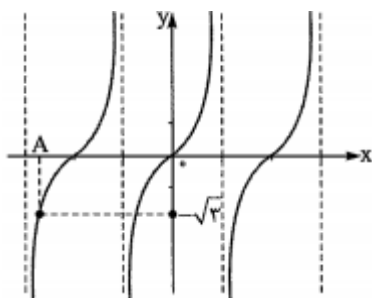
۱۰۹- اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۱۰- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۱۱- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ است. طول نقطه A کدام است؟



- (۱) $-\frac{7\pi}{6}$
(۲) $-\frac{4\pi}{3}$
(۳) $-\frac{2\pi}{3}$
(۴) $-\frac{5\pi}{6}$

۱۱۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۱۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a}{x + b}$ باشد، کدام نتیجه حتماً درست است؟

- (۱) $a = b = -1$ (۲) $a < b = -1$ (۳) $a > b = -1$ (۴) $b < a = -1$

۱۱۴- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در بازه $[1, 1/44]$ ، از

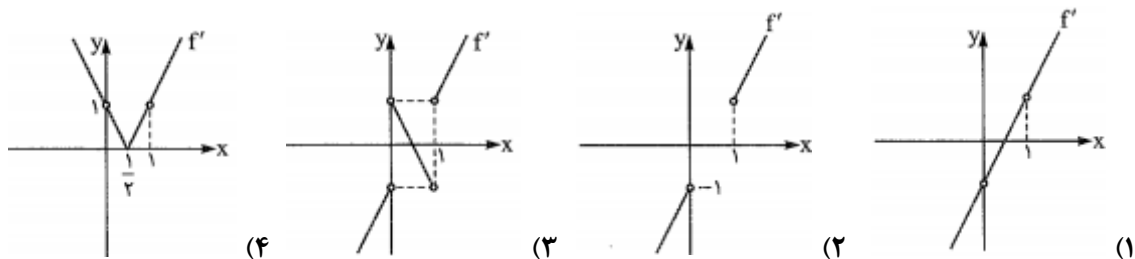
شیب خط مماس بر تابع در ابتدای این بازه، چه قدر کم تر است؟

- (۱) $\frac{1}{30}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۱۵- اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۱۶- اگر $f(x) = |x^2 - x|$ نمودار f' به کدام شکل است؟



۱۱۷- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 8x$ ، دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(-9, 0)$ (۲) $(-7, -1)$ (۳) $(-\infty, -3)$ (۴) $(-\infty, -7)$

۱۱۸- کم‌ترین فاصله نقاط منحنی $y = x^2 + \frac{4}{9}$ از خط $3y - 4x + 12 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{2}{2}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۱۱۹- دایره‌ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\sqrt{5}$ (۴) 3

۱۲۰- در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{31}{168}$ (۲) $\frac{11}{56}$ (۳) $\frac{17}{84}$ (۴) $\frac{13}{56}$

۱۲۱- در یک دنباله اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$. جمله هشتم این دنباله کدام است؟

- (۱) 127 (۲) 159 (۳) 247 (۴) 255

۱۲۲- از ۱۰۰ دانش‌آموز مدرسه‌ای، ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال هستند و ۵۶ نفر عضو تیم والیبال نیستند. اگر فقط ۱۱ نفر عضو هر دو تیم باشند، چند نفر عضو هیچ‌یک از دو تیم نیستند؟

- (۱) 15 (۲) 17 (۳) 25 (۴) 27

۱۲۳- اگر $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$ را به صورت کسری با مخرج ۶ گویا کنیم، صورت آن کدام است؟

- (۱) $4 - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ (۲) $4 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ (۳) $4 + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}$ (۴) $4 + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$

۱۲۴- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$ (۲) $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ (۳) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ (۴) $\left(1, \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, 2\right)$

۱۲۵- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۳

۱۲۶- هر یک از ارقام 1, 2, 3, 4, 5 بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آنها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه‌رقمی حاصل، مضرب ۳ می‌باشد؟

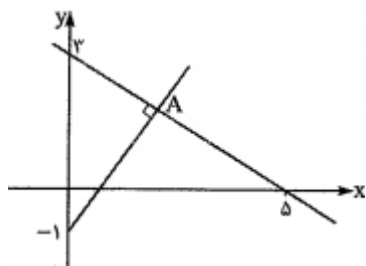
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۲۷- در عبارت «آزمون رشته تجربی ۶۴۱۲۷۲ نفر شرکت کننده دارد و در ساعت ۸:۰۰ صبح شروع می‌شود.» کدام متغیر به کار نرفته است؟

- (۱) کمی پیوسته (۲) کمی گسسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی

۱۲۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟

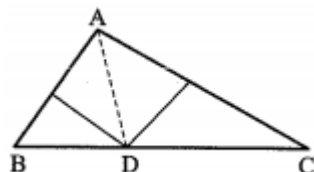
- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱



۱۲۹- در شکل روبه‌رو طول نقطه A کدام است؟

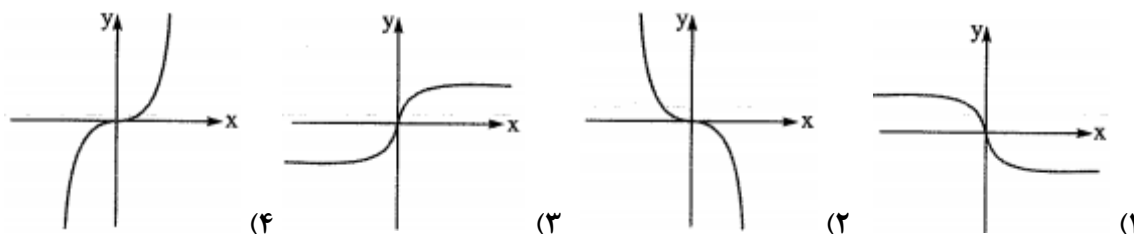
- (۱) $\frac{15}{17}$ (۲) $\frac{30}{17}$ (۳) $\frac{15}{34}$ (۴) $\frac{60}{17}$

۱۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟



- (۱) $1/4\sqrt{2}$ (۲) $2/1$ (۳) $2/8$ (۴) $2/1\sqrt{2}$

۱۳۱- اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



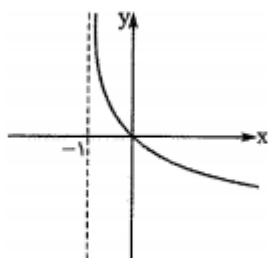
۱۳۲- دو شهر A و B ، دارای طول جغرافیایی برابرند و عرض جغرافیایی آنها به ترتیب ۲۸° و ۲۲° است. اگر شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنیم، فاصله تقریبی دو شهر روی کره زمین تقریباً چند کیلومتر است؟ ($\pi \approx 3$)

- (۱) ۶۴۰ (۲) ۶۷۰ (۳) ۷۲۰ (۴) ۷۰۰

۱۳۳- از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه ۸ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۳۴- اگر نمودار تابع $f(x) = 1 - \log_2(ax + b)$ به صورت مقابل باشد، مقدار $f^{-1}(-4)$ کدام است؟



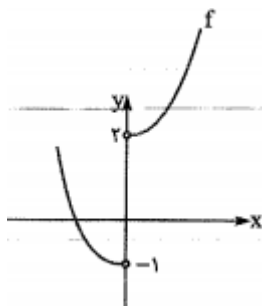
(۱) ۱۲

(۲) ۱۳

(۳) ۱۴

(۴) ۱۵

۱۳۵- اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x - x^2)$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) صفر

(۴) -۱

۱۳۶- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

۱۳۷- احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $۰/۹$ و برای شخص B برابر $۰/۸$ است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر موفقیت آمیز است؟

- (۱) $۰/۹۲$ (۲) $۰/۹۴$ (۳) $۰/۹۶$ (۴) $۰/۹۸$

۱۳۸- در ۱۳ داده آماری میانگین و واریانس ۱۲ و ۲۰ هستند. با حذف داده‌های ۱۰ ، ۹ و ۱۷ ، واریانس ۱۰ داده باقی مانده کدام است؟

- (۱) $۲۳/۲$ (۲) $۲۲/۲$ (۳) $۲۳/۸$ (۴) $۲۲/۸$

۱۳۹- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۶

۱۴۰- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۴۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۴۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آن گاه حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۴۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) -۲۱ (۲) -۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۴۴- کدام گزینه برای تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ نادرست است؟

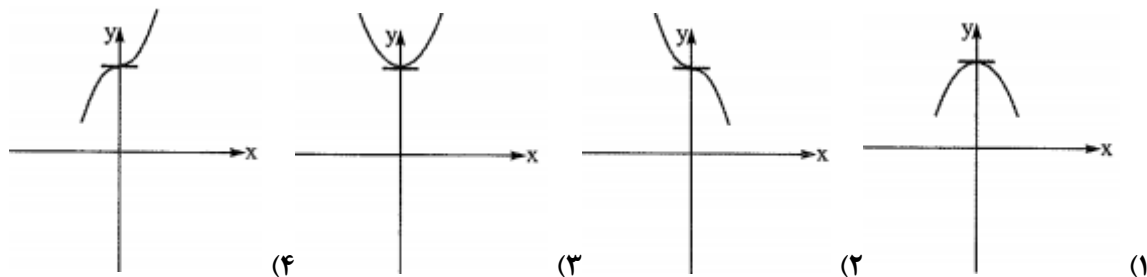
(۱) پیوسته است. (۲) مشتق ناپذیر است.

(۳) دارای مماس قائم است. (۴) نقطه گوشه‌ای است.

۱۴۵- مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ کدام است؟

- (۱) -۱۸ و ۲۴ (۲) -۴۵ و ۲۷ (۳) -۳۶ و ۲۷ (۴) -۲۷ و ۳۶

۱۴۶- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ در نزدیکی $x = 0$ چگونه است؟



۱۴۷- مطابق شکل زیر، مستطیلی داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ واحد محاط شده است. بیشترین مقدار محیط این مستطیل کدام است؟



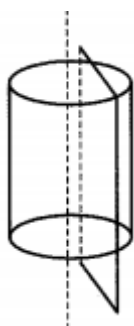
(۱) ۱۲ (۲) $4\sqrt{5}$

(۳) ۸ (۴) $\frac{24}{\sqrt{5}}$

۱۴۸- دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) ۱ و ۳ (۲) ۱ و ۴ (۳) ۲ و ۳ (۴) ۱/۵ و ۴

۱۴۹- استوانه‌ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ را با صفحه‌ای که از محور آن ۲ واحد فاصله دارد، برش می‌زنیم. سطح مقطع حاصل کدام است؟



(۱) $5\sqrt{3}$

(۲) $10\sqrt{3}$

(۳) $20\sqrt{3}$

(۴) $15\sqrt{3}$

۱۵۰- در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آنها، دفترچه سلامت دارد؟

(۱) ۰/۶۵۸ (۲) ۰/۶۶۹ (۳) ۰/۶۸۵ (۴) ۰/۶۹۶

۱۵۱- در یک دنباله اعداد، $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$. حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴

۱۵۲- در یک نظرسنجی از ۱۸۰ مشتری یک فروشگاه، مشخص شد که ۷۶ نفر آن‌ها در ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۹۱ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. هم‌چنین ۴۳ نفر از آن‌ها از هیچ‌کدام از این دو شرکت خرید نکرده‌اند. چند نفر از آن‌ها دقیقاً از یکی از دو شرکت A و B خرید کرده‌اند؟

(۱) ۱۰۴ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۰۶ (۴) ۱۰۷

۱۵۳- مساحت یک شش‌ضلعی منتظم، برابر $9\sqrt{3}$ است، اندازه قطر کوچک آن کدام است؟

(۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۳

۱۵۴- حاصل $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}$ کدام است؟

$$\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \quad (4) \quad 3 + \sqrt{8} \quad (3) \quad \sqrt{2} + 1 \quad (2) \quad \sqrt{2} - 1 \quad (1)$$

۱۵۵- اگر $2 < |x - 1| < 5$ باشد، حاصل $[x]$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

$$12 \quad (4) \quad 10 \quad (3) \quad 8 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

۱۵۶- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

$$6 \quad (4) \quad \frac{16}{3} \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad \frac{8}{3} \quad (1)$$

۱۵۷- دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

$$\frac{4}{9} \quad (4) \quad \frac{7}{18} \quad (3) \quad \frac{5}{18} \quad (2) \quad \frac{2}{9} \quad (1)$$

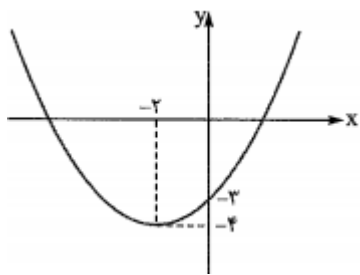
۱۵۸- در جعبه‌ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم،

با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

$$\frac{9}{14} \quad (4) \quad \frac{10}{21} \quad (3) \quad \frac{17}{42} \quad (2) \quad \frac{8}{21} \quad (1)$$

۱۵۹- شکل روبه‌رو مربوط به نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. اگر α و β ، جواب‌های معادله

$f(x) = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ کدام است؟



$$-48 \quad (1)$$

$$36 \quad (2)$$

$$48 \quad (3)$$

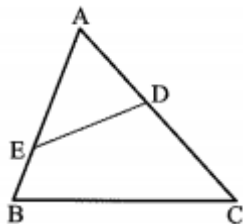
$$-36 \quad (4)$$

۱۶۰- فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $x + \frac{3}{4}y = k$ برابر ۱ است. جمع دو مقدار k کدام است؟

$$5 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۱۶۱- در چهارضلعی $BCDE$ ، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هم‌اند. اگر $BC = 20$ و $DE =$

12، آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



$$0.56 \quad (1) \quad 0.64 \quad (2)$$

$$0.72 \quad (3) \quad 0.80 \quad (4)$$

۱۶۲- از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ ، مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x + 1}$ در

پایه ۴، کدام است؟

$$1 \text{ (۴)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

۱۶۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آن گاه b کدام است؟

$$2 \text{ (۴)} \quad 1 \text{ (۳)} \quad -1 \text{ (۲)} \quad -2 \text{ (۱)}$$

۱۶۴- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

$$3 \text{ (۴)} \quad 2 \text{ (۳)} \quad 1 \text{ (۲)} \quad -1 \text{ (۱)}$$

۱۶۵- در ۲۳ داده آماری، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر ۳۳ و میانگین داده‌های کوچک‌تر از چارک اول برابر $\frac{21}{6}$ و میانگین بقیه داده‌ها برابر ۲۵ است. میانگین کل داده‌ها کدام است؟

$$26/2 \text{ (۴)} \quad 26/1 \text{ (۳)} \quad 26 \text{ (۲)} \quad 25/8 \text{ (۱)}$$

۱۶۶- در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

$$\frac{8}{9} \text{ (۴)} \quad \frac{7}{8} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{7}{9} \text{ (۱)}$$

۱۶۷- تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbb{R} چگونه است؟

$$1 \text{ نزولی} \quad 2 \text{ صعودی} \quad 3 \text{ وارون ناپذیر} \quad 4 \text{ یک به یک}$$

۱۶۸- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $f \circ g(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

$$2x^2 + x + 3 \text{ (۴)} \quad 2x^2 - x + 4 \text{ (۳)} \quad 2x^2 - 2x + 3 \text{ (۲)} \quad 2x^2 + 3x + 1 \text{ (۱)}$$

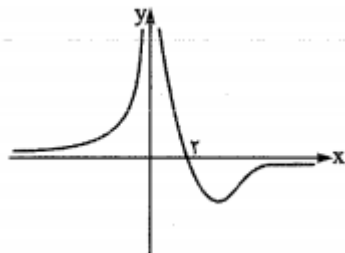
۱۶۹- اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ کدام است؟

$$2 \text{ (۴)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -2 \text{ (۱)}$$

۱۷۰- نمودار تابع با معادله $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ ، روی بازه $[-1, 1]$ ، در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

$$4 \text{ (۴)} \quad 3 \text{ (۳)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱)}$$

۱۷۱- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x^2+b}$ است. مقدار $a - b$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

۱۷۲- در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x - 1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۷۳- اگر $f(x) = \frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ حاصل $g'(x) \cdot f'(g(x))$ کدام است؟

 $\frac{x-3}{x^2}$ (۴) $\frac{1}{3x}$ (۳) $\frac{3}{x^2}$ (۲) $\frac{3}{x}$ (۱)

۱۷۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1)-2}{x^2-4}$ باشد، شیب خط مماس بر تابع $y = f^2(x)$ در $x = 3$ کدام است؟

-۱۶ (۴)

۱۶ (۳)

-۸ (۲)

۸ (۱)

۱۷۵- بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه $[-2, 2]$ ، کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۱۷۶- منحنی تابع با ضابطه $f(x) = x^4 + ax^3 + bx - 1$ ، نقطه اکسترممی به مختصات $(1, 2)$ دارد. b کدام است؟

۵ (۴)

-۵ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

۱۷۷- تحقیقات نشان می‌دهد گونه‌ای خاص از فیتوپلانکتون‌ها در شدت نور x با نرخ $P(x) = \frac{100x}{x^2+x+4}$ فتوسنتز انجام می‌دهند ($P(x)$ میزان اکسیژن تولیدشده برحسب میلی‌گرم بر متر مکعب در یک ساعت است). حداکثر اکسیژن تولیدشده در یک ساعت، چند میلی‌گرم بر متر مکعب است؟

 $20\sqrt{2}$ (۴)

۲۰ (۳)

 $40\sqrt{2}$ (۲)

۴۰ (۱)

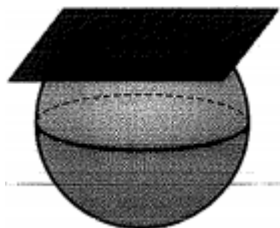
۱۷۸- دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۴)

 $\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

 $\sqrt{3}$ (۱)



۱۷۹- مساحت مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با کره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر برابر $5\pi \text{ cm}^2$ می‌باشد. فاصله مرکز کره از این صفحه کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴

(۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{3}$

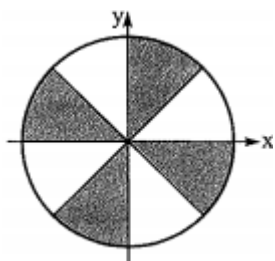
۱۸۰- ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

(۱) $61/4$ (۲) $61/8$ (۳) $62/4$ (۴) $62/8$

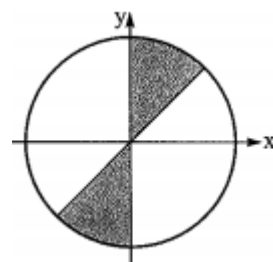
۱۸۱- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

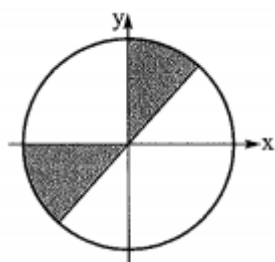
۱۸۲- در چه نقاطی از دایره مثلثاتی $\tan x > \cot x$ و $\tan x > \sin x$ است؟



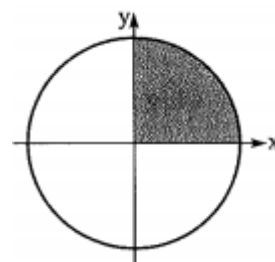
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

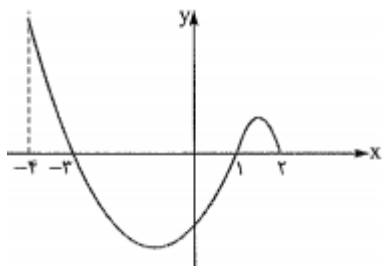
۱۸۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 1 = 0$ باشند، در این صورت حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟ ($\alpha > \beta$)

(۱) $7 + 4\sqrt{3}$ (۲) $7 - 4\sqrt{3}$ (۳) $5 + 2\sqrt{3}$ (۴) $5 - 2\sqrt{3}$

۱۸۴- مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $x < \frac{1}{2}$ (۲) $x < 3$ (۳) $-3 < x < \frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2} < x < 3$

۱۸۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



(۱) $[0, 2]$

(۲) $[-3, 2]$

(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

۱۸۶- چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

(۴) ۱۰۸

(۳) ۹۶

(۲) ۸۴

(۱) ۷۲

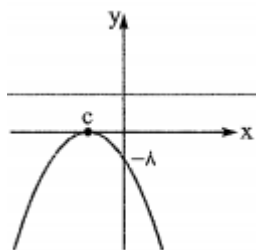
۱۸۷- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج‌شده، متفاوت است؟

(۴) $\frac{4}{11}$

(۳) $\frac{7}{22}$

(۲) $\frac{3}{11}$

(۱) $\frac{5}{22}$



۱۸۸- نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. مقدار $a - c$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) صفر

(۴) -۴

(۳) -۲

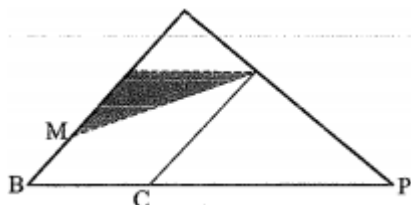
۱۸۹- دو نقطه بر خطی به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خطی به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. مجموع طول این دو نقطه کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۴

(۲) -۴

(۱) -۶



۱۹۰- در شکل زیر، نقطه M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟

(۲) $\frac{1}{9}$

(۱) $\frac{1}{12}$

(۴) $\frac{3}{16}$

(۳) $\frac{1}{8}$

۱۹۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 1 \\ x + a & x < 1 \end{cases}$ معکوس‌پذیر باشد، $f(0)$ کدام می‌تواند باشد؟

(۴) ۳

(۳) ۴

(۲) ۵

(۱) ۶

۱۹۲- از تساوی $\frac{2 \sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2$ مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۱/۵

۱۹۳- از دو معادله دو مجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار y کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۴- نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۹۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۹۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۹۷- احتمال این که زنی بارداری طبیعی و زایمان طبیعی داشته باشد، $\frac{1}{4}$ است. در میان زنان یک شهر احتمال

بارداری طبیعی $\frac{3}{4}$ است. اگر یک زن، بارداری طبیعی داشته باشد با کدام احتمال زایمان طبیعی خواهد داشت؟

- (۱) $\frac{3}{10}$ (۲) $\frac{8}{10}$ (۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۹۸- ضریب تغییر داده‌های ۳، ۳، ۳، ۵، ۲، ۲ چند برابر ضریب تغییر داده‌های ۲، ۲، ۲، ۴، ۱ است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۹۹- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{2-x}$ باشند، کدام عبارت درباره $g \circ f(x)$ نادرست است؟

(۱) اکیداً صعودی است. (۲) تابع خطی است. (۳) تابع متناوب است. (۴) وارون پذیر است.

۲۰۰- دو تابع $f(x) = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند اگر

$f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۲۰۱- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۰۲- تابع $y = -\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ در فاصله $(\alpha, 0)$ اکیداً یکنوا است. کمترین مقدار α کدام است؟

- (۱) -2π (۲) $-\pi$ (۳) $-\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{2}$

۲۰۳- حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x + \sqrt{9x^2 + 5x}}{x - \sqrt{4x^2 + 3x}}$ وقتی که $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۰۴- اگر $f(x) = \sqrt{2x+3}$ باشد، حاصل $ff'' + (f')^2$ کدام است؟

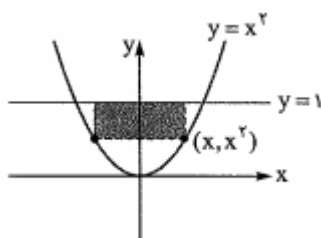
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) x (۴) $2x$

۲۰۵- تابع $f(x) = |(x-1)x^3|$ در $x = \alpha$ مشتق ناپذیر است. $f'_+(\alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۲۰۶- اگر $A(1, -3)$ نقطه اکسترمم نسبی منحنی به معادله $f(x) = \frac{ax^3}{3} - x^2 - 3x + b$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{3}$ (۲) $\frac{19}{3}$ (۳) $\frac{13}{3}$ (۴) $\frac{25}{3}$



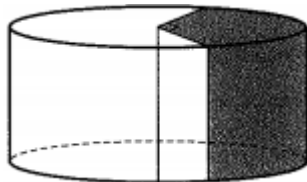
۲۰۷- مساحت بزرگترین مستطیلی که دو رأس آن روی خط $y = 1$ و دو رأس دیگرش پایین آن‌ها و روی $y = x^2$ باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

۲۰۸- دو رأس یک بیضی افقی در $A(6, 1)$ و $B(1, 4)$ هستند. فاصله کانونی این بیضی چه قدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۲۰۹- از یک کیک استوانه‌ای شکل به شعاع قاعده ۱۴ و ارتفاع ۱۰، یک قاچ ۹۰ درجه بریده‌ایم. سطح کل قسمت جدا شده کدام است؟ ($\pi \approx 3$)



- (۱) ۶۶۲ (۲) ۶۸۰ (۳) ۷۸۴ (۴) ۷۴۸

۲۱۰- در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت، مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

- (۱) $\frac{15}{2}$ (۲) $\frac{15}{6}$ (۳) $\frac{15}{8}$ (۴) $\frac{16}{2}$

۲۱۱- در یک دنباله حسابی جمع ۴ جمله اول برابر ۱۷ و جمله هفتم ۱۱ است. واسطه حسابی جمله دوم و پنجم کدام است؟

- (۱) ۵/۷۵ (۲) ۶/۲۵ (۳) ۶/۵ (۴) ۵/۵

۲۱۲- اندازه دو قطر از متوازی الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲

۲۱۳- اگر $2x - \frac{1}{x} = A$ باشد، حاصل $x^3 - \frac{1}{8x^3}$ چند برابر A است؟

- (۱) $A^2 + \frac{3}{2}$ (۲) $\frac{A^2+3}{4}$ (۳) $\frac{A^2+6}{8}$ (۴) $A^2 - \frac{3}{2}$

۲۱۴- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x ، در کدام بازه است؟

- (۱) $[\frac{2}{3}, 2]$ (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$ (۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

۲۱۵- اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه $g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) x (۲) $-x$ (۳) $-x - 1$ (۴) $x + 1$

۲۱۶- در چند عدد سه رقمی، ارقام مجاور متمایزند؟

- (۱) ۷۲۹ (۲) ۶۴۸ (۳) ۵۰۴ (۴) ۵۷۶

۲۱۷- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

- (۱) $\frac{41}{120}$ (۲) $\frac{37}{60}$ (۳) $\frac{79}{120}$ (۴) $\frac{31}{60}$

۲۱۸- اگر سهمی $y = 4x^2 - 12x + 1$ ، محور x ها را در α و β قطع کند، $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

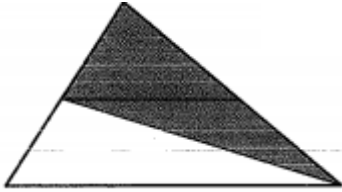
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۴

۲۱۹- جواب‌های مورد قبول معادله رادیکالی $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+3} = 1$ چگونه‌اند؟

- (۱) فقط یک جواب منفی (۲) فقط یک جواب مثبت

- (۳) دو جواب مثبت (۴) یک جواب منفی و یک جواب مثبت

۲۲۰- در شکل مقابل، نسبت قاعده‌های دوزنقه $\frac{3}{5}$ است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت دوزنقه است؟



$$\frac{7}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{15}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{14}{15} \quad (۳)$$

۲۲۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$۱, ۴ \quad (۴)$$

$$۱, -۴ \quad (۳)$$

$$-۱, ۴ \quad (۲)$$

$$-۱, -۴ \quad (۱)$$

۲۲۲- از دو معادله دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ مقدار x کدام است؟

$$۱/۶ \quad (۴)$$

$$۱/۵ \quad (۳)$$

$$۱/۴ \quad (۲)$$

$$۱/۲ \quad (۱)$$

۲۲۳- در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$ ، $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$. مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

$$۸ \quad (۲)$$

$$۶ \quad (۱)$$

۲۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} \right)$ ، کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-۲ \quad (۱)$$

۲۲۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x > 1 \\ ax - a + 2 & x \leq 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

$$a \text{ هیچ مقدار } \quad (۴)$$

$$a \text{ هر مقدار } \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۲۲۶- احتمال قبولی فرد A در یک آزمون، $۰/۸۴$ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون، $۰/۷۵$ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

$$۰/۹۸ \quad (۴)$$

$$۰/۹۶ \quad (۳)$$

$$۰/۹۴ \quad (۲)$$

$$۰/۹۲ \quad (۱)$$

۲۲۷- یک جامعه با اندازه ۱۲ و واریانس $۱۲/۶$ ، با جامعه دیگری با اندازه ۲۴ و واریانس $۷/۲$ ، تشکیل جامعه جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه جدید کدام است؟

$$۳/۲ \quad (۴)$$

$$۳/۱ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲/۹ \quad (۱)$$

۲۲۸- دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

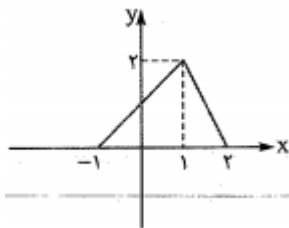
$$۷ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۲۲۹- نمودار $y = f(x)$ شبیه شکل مقابل است. تابع $y = f(1-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



(۱) $[0, 2]$

(۲) $[2, 3]$

(۳) $[0, 1]$

(۴) $[-2, 0]$

۲۳۰- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

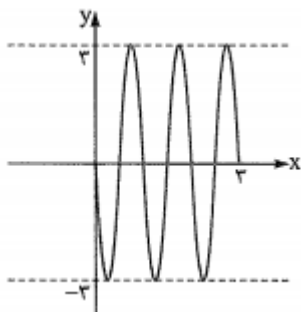
(۴) 5π

(۳) $\frac{9\pi}{2}$

(۲) 4π

(۱) $\frac{14\pi}{3}$

۲۳۱- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. a, b کدام است؟



است؟

(۱) -۶

(۲) -۳

(۳) ۴/۵

(۴) ۶

۲۳۲- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{ax^2+2}}{x+\sqrt{4x^2+7x}} = -2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x}{x-a}$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) $-\infty$

(۱) $+\infty$

۲۳۳- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$ برابر با $2\sqrt{x}$ باشد، آن گاه $f'(4)$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۴

(۲) $\frac{4}{3}$

(۱) $\frac{2}{3}$

۲۳۴- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & x > 1 \\ ax+b & x \leq 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

(۴) $\frac{10}{3}$

(۳) $\frac{8}{3}$

(۲) $\frac{7}{3}$

(۱) $\frac{4}{3}$

۲۳۵- اگر تابع $f(x) = -x^3 + bx^2 + 9x - 14$ از نقطه $A(1, -3)$ عبور کند، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم

نسبی آن کدام است؟

(۴) ۱۳

(۳) -۱۹

(۲) ۱۹

(۱) -۱۳

۲۳۶- بیشترین مساحت از زمینی را که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیل که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟

- ۹۵۸ (۱) ۹۶۸ (۲) ۹۷۸ (۳) ۹۸۸ (۴)

۲۳۷- اگر خط $2x + y = k$ بر دایره به معادله $x^2 + 2x + y^2 - 4 = 0$ مماس باشد، مقادیر k کدام است؟

- ۷ و ۳ (۱) ۳ و -۷ (۲) ۳ و -۷ (۳) ۳ و -۷ (۴)

۲۳۸- قطر بزرگ یک بیضی ۲ برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

۲۳۹- مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a را حول ضلعش دوران می دهیم، حجم حاصل چند برابر πa^3 است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (۴)

۲۴۰- در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری قرار می دهیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- $\frac{13}{72}$ (۱) $\frac{7}{36}$ (۲) $\frac{15}{72}$ (۳) $\frac{31}{144}$ (۴)

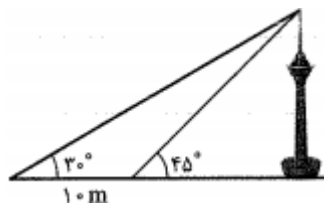
۲۴۱- اگر از جمله دوم یک دنباله حسابی، ۱ واحد کم کنیم، دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ به دست می آید. مجموع سه جمله سوم در دنباله هندسی کدام است؟

- ۸۷۲ (۱) ۸۷۶ (۲) ۸۹۲ (۳) ۸۹۶ (۴)

۲۴۲- اگر $[a, \frac{12}{a+5}, b) \cap [b^2 - 8, 12 - a] = [1, 3)$ چند مقدار طبیعی می تواند داشته باشد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۲۴۳- افراد A و B از هم به فاصله ۱۰ متر و در یک طرف برجی هستند. بالاترین نقطه این برج را به ترتیب با زاویه های 30° و 45° می بینند. ارتفاع برج کدام است؟

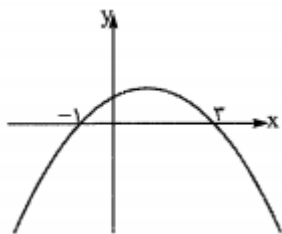


- $10(\sqrt{3} + 1)$ (۱) $10(\sqrt{3} - 1)$ (۲)

- $5(\sqrt{3} - 1)$ (۳) $5(\sqrt{3} + 1)$ (۴)

۲۴۴- حاصل $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ کدام است؟

- $-\sqrt{2} - 1$ (۱) $\sqrt{2} + 1$ (۲) $\sqrt{2} - 1$ (۳) $-\sqrt{2} + 1$ (۴)



۲۴۵- اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد، پاسخ

نامعادله $\frac{f(x)}{x^2-4} \geq 0$ کدام بازه است؟

(۲) $(-2, -1] \cup (2, 3]$

(۱) $[-2, -1] \cup [2, 3]$

(۴)

(۳) $(-2, -1] \cup [3, +\infty)$

$(-\infty, -2) \cup (2, 3]$

۲۴۶- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

۲۴۷- دو تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{5}{18}$

۲۴۸- نوع آلاینده‌گی هوا چگونه متغیری است؟

(۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی

۲۴۹- به ازای کدام مقادیر m معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

(۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$ (۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

۲۵۰- قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (۴) $\frac{4}{\sqrt{13}}$

۲۵۱- در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود. ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

(۱) کوچک‌تر از ۱ (۲) مساوی ۱ (۳) بزرگ‌تر از ۱ (۴) متغیر نسبت به اضلاع

۲۵۲- اگر $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ ، برد تابع $y = (f \cdot g)(x)$ کدام است؟

(۱) \mathbb{R} (۲) $[2, 9]$ (۳) $[9, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 9]$

۲۵۳- نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است. b کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

۲۵۴- در یک زلزله اگر شدت زلزله یک واحد افزایش یابد، انرژی آزاد شده چند برابر می شود؟ $(+ 11/8 \log E)$
(1/5 M)

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) ۱۰ (۳) $10\sqrt{10}$ (۴) $100\sqrt{10}$

۲۵۵- حد چپ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{a+[x]}$ در نقطه $x = 1$ ، به اندازه $\frac{1}{6}$ از حد راست آن در این رابطه بیشتر است. مقدار کم تر a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۲۵۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & x < 3 \\ a \log_2(1+x) & x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است، $f(2)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۵۷- احتمال این که یک تیم فوتبال اصلی ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{3}$ و در صورتی که اصلی ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{1}{2}$ افزایش می یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق «قهرمانی» یا «بردن رقیب اصلی» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

- (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{7}{12}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۵۸- میانگین طول ضلع مربع هایی ۲۵ واحد، با ضریب تغییر $0.06+$ است. واریانس محیط این مربع ها کدام است؟

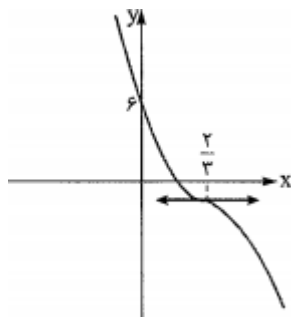
- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۶ (۴) ۳۶

۲۵۹- در بازه ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است. نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

۲۶۰- اگر نمودار تابع $f(x) = (a - bx)^3 - a$ به شکل مقابل باشد، آن گاه $a + b$

کدام است؟



- (۱) $\frac{11}{3}$

- (۲) $\frac{14}{3}$

- (۳) ۵

- (۴) $\frac{9}{2}$

۲۶۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

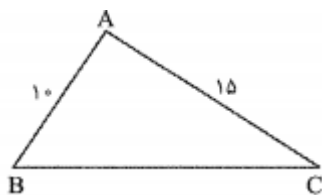
$$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{4} \quad (۱)$$

۲۶۲- مساحت مثلث روبه‌رو برابر با ۴۵ است. اگر اندازه دو ضلع AB و AC ثابت بماند و زاویه A دو برابر شود، مساحت مثلث جدید چه قدر است؟



$$۷۲ \quad (۲)$$

$$۶۰ \quad (۱)$$

$$۸۴ \quad (۴)$$

$$۷۵ \quad (۳)$$

۲۶۳- حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{9\pi}{2}\right)} \tan x$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 2x}$ به ترتیب کدام است؟

$$+\infty \text{ و } +\infty \quad (۴)$$

$$-\infty \text{ و } -\infty \quad (۳)$$

$$+\infty \text{ و } -\infty \quad (۲)$$

$$-\infty \text{ و } +\infty \quad (۱)$$

۲۶۴- اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

$$۶ \quad (۴)$$

$$+۳ \quad (۳)$$

$$-۳ \quad (۲)$$

$$-۶ \quad (۱)$$

۲۶۵- دامنه تابع مشتق، تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ x|x| + \sqrt[3]{x+1} & x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

$$R - \{1, -1, 0\} \quad (۴)$$

$$R - \{-1, 1\} \quad (۳)$$

$$R - \{1\} \quad (۲)$$

$$\mathbb{R} \quad (۱)$$

۲۶۶- مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = |x|x - 1|$ در بازه $[-1, 3]$ کدام است؟

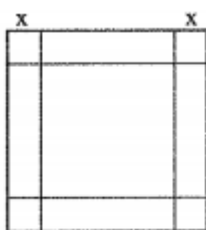
$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۲۶۷- ورق فلزی مربعی شکلی به ضلع ۲۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه آن، مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. پس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های



مشخص شده در شکل، یک جعبه در باز بسازیم. مقدار x چه قدر باشد تا حجم این جعبه در باز

ماکزیمم باشد؟

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

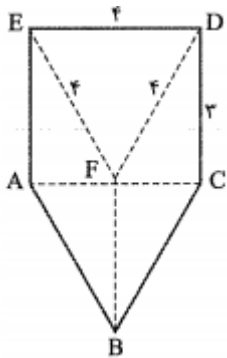
۲۶۸- فاصله نقاط روی یک دایره از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن‌ها از مبدأ مختصات است. طول قطر دایره کدام است؟

$$4\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$2\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$



۲۶۹- در منشور قائم مقابل، مساحت مقطعی که صفحه گذرا از نقاط B, D و E با منشور پدید می آورد، کدام است؟

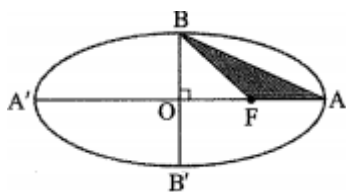
(۱) $\sqrt{21}$

(۲) $2\sqrt{21}$

(۳) $\sqrt{19}$

(۴) $2\sqrt{19}$

۲۷۰- در شکل مقابل $AA' = 2BB' = 8$ است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



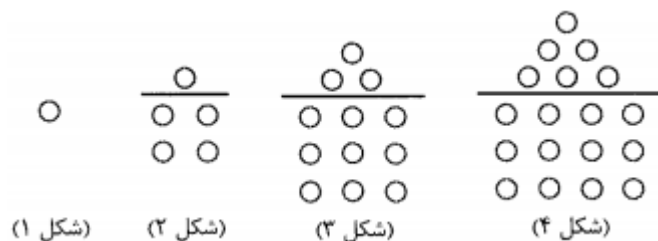
(۱) $2 - \sqrt{3}$

(۲) $4 - 2\sqrt{3}$

(۳) $2 + \sqrt{3}$

(۴) $4 + 2\sqrt{3}$

۲۷۱- در الگوی مقابل، در شکل چندم، ۱۴۵ دایره وجود دارد؟



(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

۲۷۲- ۱۰۰ قرص نان بین ۵ فرد چنان تقسیم شده است که سهم‌های دریافت شده تشکیل دنباله حسابی بدهند. اگر مجموع دو سهم کوچک‌تر یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر باشد، بیشترین سهم دریافت شده کدام است؟

(۴) عدد ۲۴

(۳) عدد ۲۵

(۲) عدد ۲۸

(۱) عدد ۳۰

۲۷۳- خط $3y + 4x - 1 = 0$ با جهت مثبت محور x ها، زاویه θ می‌سازد. حاصل $\sin \theta - \cos \theta$ چه قدر است؟

(۴) $-1/4$

(۳) $1/4$

(۲) $-0/2$

(۱) $0/2$

۲۷۴- اگر $x = 5 + \sqrt{17}$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{x-1}{16}} + \frac{1}{2x}$ کدام است؟

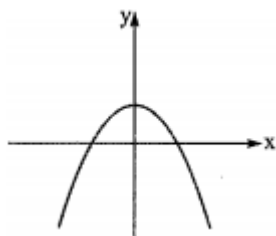
(۴) $1/5$

(۳) $1/25$

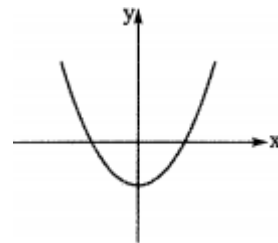
(۲) $0/75$

(۱) $0/5$

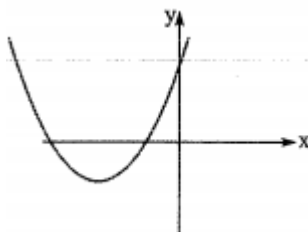
۲۷۵- نمودار تابع $2^m x^2 - mx - 3^m = 0$ به ازای مقادیر مختلف m شبیه به کدام گزینه می‌شود؟



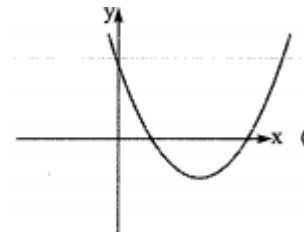
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۲۷۶- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

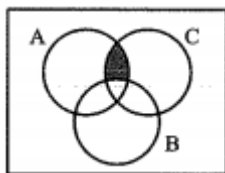
۱/۵ (۴)

۱ (۳)

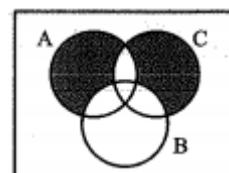
۰/۵ (۲)

-۲ (۱)

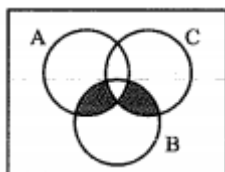
۲۷۷- کدام نمودار ون برای عبارت توصیفی «پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.» مناسب است؟



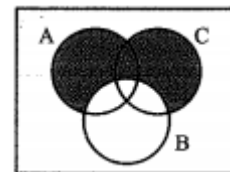
(۲)



(۱)



(۴)



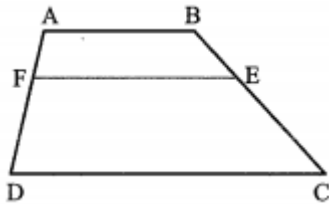
(۳)

۲۷۸- اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m+5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

 $4 < m < 9$ (۴) $-4 < m < 4$ (۳) $m > 4$ (۲) $m < -4$ (۱)

۲۷۹- قطاری در یک مسیر ۱۰۰ کیلومتری اگر ۱۵ کیلومتر در ساعت، بر سرعت خود بیفزاید، ۲۰ دقیقه زودتر به مقصد می‌رسد. سرعت قطار چه قدر بوده است؟

 $80 \frac{km}{h}$ (۴) $70 \frac{km}{h}$ (۳) $60 \frac{km}{h}$ (۲) $50 \frac{km}{h}$ (۱)



۲۸۰- در ذوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{5}{2}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{1}{4}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟

(۱) $\frac{11}{20}$ (۲) $\frac{7}{15}$

(۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۲۸۱- کدام یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

(۱) $\log \frac{x^2-4}{x^2+2x} (2 \log(x-2) - \log x)$ (۲) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ (۳) $2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ (۴)

۲۸۲- از معادله $10^{\log(x+1)} = 3$ مقدار x کدام است؟

(۱) $\log 2$ (۲) $\log 0/3$ (۳) 2 (۴) 3

۲۸۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ ، کدام است؟

(۱) 8 (۲) 12 (۳) 16 (۴) 24

۲۸۴- تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+ax+b}$ در $R - \{2\}$ پیوسته است، $f(-1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

۲۸۵- در پرتاب یک تاس سالم، پیشامد A ، آمدن عدد بزرگ تر از ۴ و پیشامد B ، آمدن عدد زوج است. کدام گزینه درباره پیشامدهای A و B درست است؟

(۱) مستقل و ناسازگارند. (۲) مستقل و سازگارند.

(۳) ناسازگارند و مستقل نیستند. (۴) سازگارند و مستقل نیستند.

۲۸۶- اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a ، برابر ۱۳ باشد، میانه آن‌ها کدام است؟

(۱) 10 (۲) 11 (۳) 12 (۴) 14

۲۸۷- نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت مقابل است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

$A: 15, 14, 15, 16, 17, 19$

$B: 16, 14, 17, 14, 17, 18$

(۱) A (۲) B

(۳) یکسان (۴) غیر قابل پیش‌بینی

۲۸۸- اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

۲۸۹- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند. جواب معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ ، کدام است؟

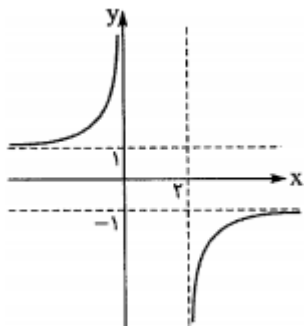
- (۱) -۱ و -۷ (۲) -۷ و ۱ (۳) -۱ و ۷ (۴) ۱ و ۷

۲۹۰- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۲۹۱- اگر $f(x) = \sin^4 x$ و $g(x) = \cos^4 x$ ، دوره تناوب تابع با ضابطه $(f - g)(x)$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$



۲۹۲- با توجه به نمودار مقابل کدام رابطه نادرست است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

(۲) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = 1$

(۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -1$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x)) = -1$

۲۹۳- به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ ، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۹۴- اگر $f(x) = x\sqrt{x} + 1$ ، مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{21\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{21\sqrt{2}}{6}$

۲۹۵- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x > 0 \\ x^2 - x & x \leq 0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۹۶- کمترین فاصله نقاط روی منحنی $y = \sqrt{2x + 5}$ از مبدأ مختصات در نقطه‌ای با کدام عرض رخ می‌دهد؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

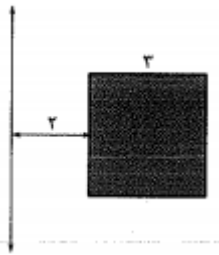
۲۹۷- دایره گذرا بر نقطه $(1, -2)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

- (۱) ۱ و ۴ (۲) ۱ و ۵ (۳) ۲ و ۴ (۴) ۲ و ۵

۲۹۸- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع (۴) متخارج

۲۹۹- مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد. حجم شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده، کدام است؟



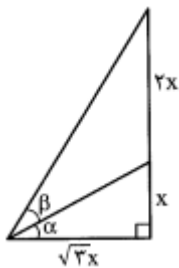
- (۱) 75π
 (۲) 68π
 (۳) 65π
 (۴) 63π

۳۰۰- اگر دو پیشامد A و B افزای از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A) = 2P(B)$ و $P(C|A) = 0/2$ و $P(C|B) = 0/3$ آن گاه مقدار $P(A|C)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{4}{7}$

۳۰۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع این سه جمله کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴



۳۰۲- با توجه به شکل روبه‌رو زاویه β کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۳۰۳- حاصل $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{5}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

۳۰۴- بزرگ‌ترین مجموعه جواب نامعادله $1 < \left| \frac{x-1}{ax+2} \right|$ به صورت بازه $(b, +\infty)$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۳۰۵- کدام معادله درجه دوم زیر دو ریشه دارد؟

$$(\sqrt{3} - 1)x^2 + x + 1 = 0 \quad (2) \quad (\sqrt{3} + 1)x^2 - x + (\sqrt{3} - 1) = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - x + (\sqrt{3} + 1) = 0 \quad (4) \quad (\sqrt{3} + 1)x^2 - x - 1 = 0 \quad (3)$$

۳۰۶- دامنه تابع خطی و نزولی $f(x)$ بازه $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ است. مقدار $f(1)$ کدام عدد می تواند باشد؟

$$-\frac{1}{8} \quad (1) \quad -\frac{1}{4} \quad (2) \quad -\frac{1}{2} \quad (3) \quad -\frac{3}{4} \quad (4)$$

۳۰۷- یک آشپز ۱۰ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر سه تا از این ادویه ها یک طعم خاص درست می کند. اگر سه نوع ادویه باشند که نباید دو به دو یا سه تایی با هم استفاده شوند، تعداد طعم های قابل تهیه کدام است؟

$$۸۵ \quad (1) \quad ۱۱۶ \quad (2) \quad ۹۹ \quad (3) \quad ۹۸ \quad (4)$$

۳۰۸- ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه هستند. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده، سفید است؟

$$\frac{25}{63} \quad (1) \quad \frac{26}{63} \quad (2) \quad \frac{10}{21} \quad (3) \quad \frac{11}{21} \quad (4)$$

۳۰۹- به ازای کدام مقدار m ، دو خط $mx + y = m - 1$ و $3x + (m - 2)y = 4$ بر هم منطبق می شوند؟

$$-۲ \quad (1) \quad -۱ \quad (2) \quad ۳ \quad (3) \quad \text{هیچ مقدار } m \quad (4)$$

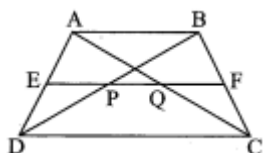
۳۱۰- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می باشد؟

$$-\frac{9}{5} \quad (1) \quad ۱ \quad (2) \quad -\frac{9}{5} \text{ و } ۱ \quad (3) \quad -\frac{9}{5} \text{ و } -۱ \quad (4)$$

۳۱۱- پاره خط AB با هیچ یک از اضلاع مربع $CDEF$ موازی یا بر آن ها عمود نیست. حداکثر چند نقطه بر روی مربع وجود دارد که فاصله آن ها از A و B برابر باشد؟

$$۱ \quad (1) \quad ۲ \quad (2) \quad ۳ \quad (3) \quad ۴ \quad (4)$$

۳۱۲- در دوزنقه $ABCD$ ، نقاط E و F وسط ساق های AD و BC هستند. AC و BD قطرهای دوزنقه هستند. اگر $AB = 3$ و $DC = 6$ باشند آن گاه طول پاره خط PQ کدام است؟



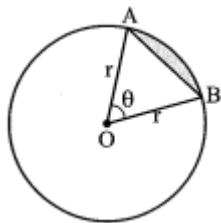
$$\frac{3}{2} \quad (1) \quad \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$۱ \quad (3) \quad \frac{5}{4} \quad (4)$$

۳۱۳- اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$

۳۱۴- مساحت قسمت رنگ شده در شکل زیر کدام است؟ ($r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}$)



(۱) $1 + \frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{5\pi}{6}$

(۳) $\frac{\pi}{3} - 1$

(۴) $\frac{\pi}{6}$

۳۱۵- از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۳۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2x^2 + 5x + 2}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۳۱۷- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

(۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

۳۱۸- در یک خانواده ۴ فرزندی، دو فرزند وسط هم جنس هستند. با کدام احتمال این خانواده دارای حداقل دو فرزند دختر است؟

(۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$

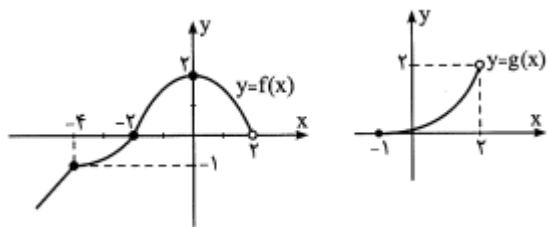
۳۱۹- در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می باشد. اگر داده های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آنها حذف شوند، واریانس داده های باقیمانده، کدام است؟

(۱) $14/72$ (۲) $14/81$ (۳) $15/33$ (۴) $16/66$

۳۲۰- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع اند؟

(۱) $-3/5$ (۲) -۳ (۳) $-2/5$ (۴) -۲

۳۲۱- اگر نمودار دو تابع f و g به صورت مقابل باشند، دامنه $g \circ f$ کدام است؟



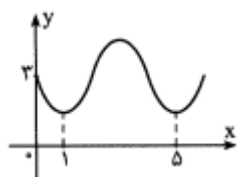
(1) $[2, -2]$

(2) $[-4, 2]$

(3) $[-4, 2] - \{0\}$

(4) $(-2, 2)$

۳۲۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



(1) ۲

(2) $\frac{2}{5}$

(3) ۳

(4) $\frac{3}{5}$

۳۲۳- در معادله مثلثاتی $\sin x (\sin x + \cos x) = \cos x (\cos x - \sin x)$ مجموعه تمام جواب‌ها، در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

(4) $\frac{3\pi}{4}$

(3) $\frac{5\pi}{4}$

(2) $\frac{9\pi}{8}$

(1) $\frac{7\pi}{8}$

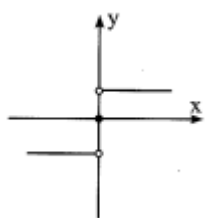
۳۲۴- اگر حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{b}{x^2 - ax}$ برابر $-\infty$ باشد کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ ($b \neq 0, a > 0$)

(1) $b > 0, a = 2$ (2) $b > 0, a = -2$ (3) $b < 0, a = 2$ (4) $b < 0, a = -2$

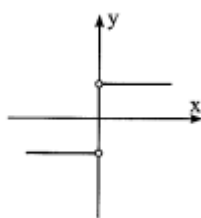
۳۲۵- در تابع $y - \sqrt{2x + 5} - \frac{16}{3x} = 0$ ، معادله خط مماس، در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

(1) $y = -x + \frac{20}{3}$ (2) $3y + 3x = 23$ (3) $y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3}$ (4) $3y - 5x = 5$

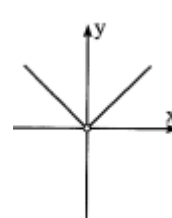
۳۲۶- نمودار مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ چگونه است؟



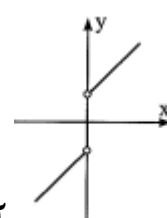
(4)



(3)



(2)



(1)

۳۲۷- در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ ، چقدر بیشتر است؟

(4) $\frac{11}{270}$

(3) $\frac{7}{270}$

(2) $\frac{11}{540}$

(1) $\frac{7}{540}$

۳۲۸- اگر M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13$ در فاصله $[-1, 2]$ باشند مقدار $M + m$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۱۳ (۴) -۱۳

۳۲۹- شعاع دایره گذرا از سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

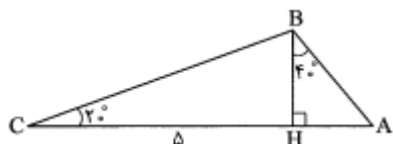
۳۳۰- در مدرسه‌ای دو کلاس پایه دوازدهم وجود دارد. در یکی از آن‌ها ۵۰ درصد دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ و در دیگری ۴۰ درصد دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ دارند. یک دانش‌آموز به تصادف از بین دوازدهمی‌ها انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی معدل این دانش‌آموز بالای ۱۸ است؟

- (۱) ۰/۵۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۴ (۴) ۰/۴۵

۳۳۱- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد. $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام، کدام است؟

- (۱) ۱۷۰۰ (۲) ۱۷۵۰ (۳) ۱۸۰۰ (۴) ۱۸۵۰

۳۳۲- با توجه به شکل مقابل طول پاره خط AB کدام است؟ ($\cot 70 = 0/36$, $\sin 50 = 0/76$)



- (۱) ۲/۳

- (۲) ۱/۹

- (۳) ۲/۹

- (۴) ۳/۲

۳۳۳- اگر $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 4$ باشد حاصل $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}$ کدام است؟

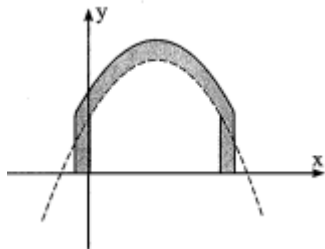
- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۳۴- یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، طول قاب عکس کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۳۳۵- مطابق با شکل، قوس طاق بر روی سهمی $y = -2x^2 + 3x + 3$ منطبق است. حداکثر طول ارتفاع قوس

کدام است؟



(۱) $\frac{33}{8}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{31}{4}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۳۳۶- در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام

احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

(۴) $\frac{32}{45}$

(۳) $\frac{31}{45}$

(۲) $\frac{29}{45}$

(۱) $\frac{28}{45}$

۳۳۷- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر

است؟

(۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۳۳۸- در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها

در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

(۴) $12/8$

(۳) $12/2$

(۲) $11/6$

(۱) $11/4$

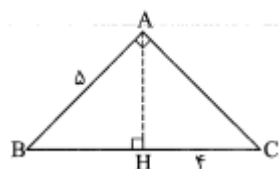
۳۳۹- با توجه به شکل مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول پاره‌خط BH کدام است؟

(۱) $\sqrt{29} - 2$

(۲) $\sqrt{29} + 2$

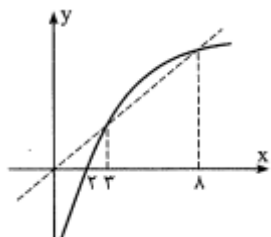
(۳) $\sqrt{27} - 2$

(۴) $\sqrt{27} + 2$



۳۴۰- شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ ،

کدام است؟

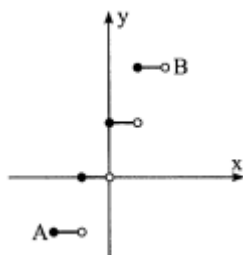


(۱) $(0, 2]$

(۲) $[2, 3]$

(۳) $[2, 8]$

(۴) [3, 8]

۳۴۱- اگر نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = [2x] + 1$ باشد، طول پاره خط AB کدام است؟

(۱) $\sqrt{12}$

(۲) $\sqrt{13}$

(۳) $\sqrt{14}$

(۴) $\sqrt{15}$

۳۴۲- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{16}{9}$

(۲) $-\frac{9}{16}$

(۳) $\frac{9}{16}$

(۴) $\frac{16}{9}$

۳۴۳- کارایی کارگر عادی، در کارخانه‌ای پس از t ماه، روزانه به تعداد $f(t) = 90 - 40(3)^{-0/02t}$ واحد است.پس از چند ماه تجربه کاری، روزانه ۷۰ واحد را کامل می‌کند؟ ($\log 2 \approx 0/3$, $\log 3 \approx 0/5$)

(۱) ۲۰

(۲) ۲۵

(۳) ۳۰

(۴) ۳۵

۳۴۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) -۳

۳۴۵- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد

حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۳۴۶- در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند، در غیر این صورت ۳ تیر

رها می‌کند. می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{2}{3}$ است. با کدام احتمال، همه شلیک‌های وی به هدف

می‌خورد؟

(۱) $\frac{12}{27}$

(۲) $\frac{10}{27}$

(۳) $\frac{20}{81}$

(۴) $\frac{22}{81}$

۳۴۷- واریانس داده‌های بین چارک اول و سوم داده‌های زیر کدام است؟

11, 5, 9, 1, 12, 17, 19, 20, 10, 7, 4, 4

(۱) $5/6$

(۲) $9/8$

(۳) $8/5$

(۴) $11/6$

۳۴۸- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۳۴۹- تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

(۱) $1 - \sqrt{1+x}$; $x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1-x}$; $x < 1$

(۳) $1 + \sqrt{1-x}$; $0 < x < 1$ (۴) $1 - \sqrt{1-x}$; $0 < x < 1$

۳۵۰- اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{45}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{75}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۳۵۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۳۵۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^{n-3}}{-x^2-x+2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ باشد آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) 2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۳۵۳- حاصل حد چپ تابع $f(x) = \frac{|x|x|}{|x+1|} + \frac{x^3+1}{2x^2+x-1}$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-\infty$ (۳) $+\infty$ (۴) 1

۳۵۴- اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) مشتق ندارد.

۳۵۵- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو

متغیر $\frac{1}{21}$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کم‌تر است؟

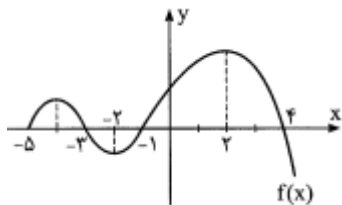
(۱) $\frac{1}{42}$ (۲) $\frac{1}{21}$ (۳) $\frac{3}{42}$ (۴) $\frac{2}{21}$

۳۵۶- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشند آن گاه مجموعه

مقدارهای m در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) $(5, 9)$ (۲) $(1, 5)$ (۳) $(-5, 1)$ (۴) $(-9, -5)$

۳۵۷- اگر نمودار $f'(x)$ به صورت مقابل باشد، طول وسیع‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ در آن صعودی اکید باشد چقدر است؟



(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۶

۳۵۸- اگر a و b به ترتیب نصف قطر بزرگ و نصف قطر کوچک یک بیضی باشند و رابطه $3(a^2 + b^2) = 10ab$ بین آن‌ها برقرار باشند، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

$$\frac{3}{4}\sqrt{2} \quad (۴) \quad \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad (۳) \quad \frac{3}{4} \quad (۲) \quad \frac{2}{3} \quad (۱)$$

۳۵۹- اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 - 4(x + y) = 0$ نقطه W و محل برخورد دایره با محور x ها با طول مثبت A باشد، معادله دایره‌ای که دو سر قطر آن W و A باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0 \quad (۲) \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y = 8 \quad (۱)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0 \quad (۴) \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0 \quad (۳)$$

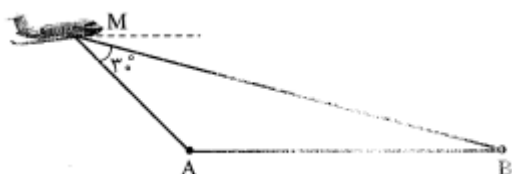
۳۶۰- ماهان می‌خواهد فقط در یکی از دو رشته پزشکی یا دندانپزشکی کنکور سراسری ۱۳۹۴ انتخاب رشته کند. احتمال پذیرفته شدن ماهان در رشته پزشکی $\frac{1}{2}$ و در رشته دندانپزشکی $\frac{1}{3}$ است. اگر ماهان با احتمال $\frac{1}{7}$ رشته پزشکی را انتخاب کند، با چه احتمالی او در کنکور سراسری ۹۴ پذیرفته خواهد شد؟

$$\frac{1}{14} \quad (۱) \quad \frac{1}{23} \quad (۲) \quad \frac{1}{9} \quad (۳) \quad \frac{1}{28} \quad (۴)$$

۳۶۱- در یک دنباله اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$. جمله هشتم این دنباله، کدام است؟

$$۱۲۷ \quad (۱) \quad ۱۵۹ \quad (۲) \quad ۲۴۷ \quad (۳) \quad ۲۵۵ \quad (۴)$$

۳۶۲- مطابق شکل یک هواپیما بر فراز منطقه‌ای پرواز می‌کند. از نقطه M دو هدف A و B به فاصله ۴ کیلومتر روی زمین به زاویه 30° از هواپیما دیده می‌شوند و زاویه مسیر افقی هواپیما با MA نیز 45° است. هواپیما در چه ارتفاعی از زمین بر حسب کیلومتر واقع است؟



$$2(\sqrt{3} + 1) \quad (۱)$$

$$2(\sqrt{3} - 1) \quad (۲)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) \quad (۴)$$

۳۶۳- اگر $\alpha = \sqrt[12]{6 + \sqrt{11}}$ و $\beta = \sqrt[12]{6 - \sqrt{11}}$ مقدار عبارت $A = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta)$ کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (۱) \quad -\sqrt{2} \quad (۲) \quad \sqrt{22} \quad (۳) \quad -\sqrt{22} \quad (۴)$$

۳۶۴- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

$$\left(1, \frac{3}{2}\right) \quad (۱) \quad \left(1, \frac{5}{3}\right) \quad (۲) \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \quad (۳) \quad \left(\frac{5}{3}, 2\right) \quad (۴)$$

۳۶۵- به ازای چه مقادیری از k سهمی $y = (k-2)x^2 - kx - k + 3$ از ناحیه سوم عبور نمی‌کند و از بقیه نواحی عبور می‌کند؟

$$k > 0 \quad (۱) \quad k > 2 \quad (۲) \quad 0 < k \leq 3 \quad (۳) \quad 2 < k \leq 3 \quad (۴)$$

۳۶۶- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

$$2 \quad (۱) \quad \frac{7}{3} \quad (۲) \quad \frac{8}{3} \quad (۳) \quad 3 \quad (۴)$$

۳۶۷- از میان ۴ معلم ریاضی، ۳ معلم فیزیک و ۲ معلم شیمی، به چند طریق می‌توان یک گروه علمی ۴ نفره تشکیل داد به طوری که حداقل ۲ نفر از این گروه معلم ریاضی باشند؟

$$45 \quad (۱) \quad 81 \quad (۲) \quad 90 \quad (۳) \quad 126 \quad (۴)$$

۳۶۸- هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{1}{4} \quad (۲) \quad \frac{1}{5} \quad (۳) \quad \frac{1}{6} \quad (۴)$$

۳۶۹- معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$ چند ریشه دارد؟

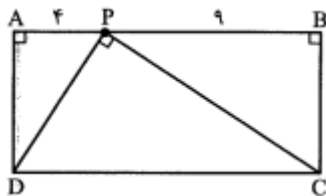
$$\text{صفر} \quad (۱) \quad \text{یک ریشه مثبت} \quad (۲)$$

$$\text{یک ریشه منفی} \quad (۳) \quad \text{یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی} \quad (۴)$$

۳۷۰- در دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

$$18 \quad (۱) \quad 20 \quad (۲) \quad 24 \quad (۳) \quad 28 \quad (۴)$$

۳۷۱- در شکل زیر، $ABCD$ مستطیل است و CPD یک مثلث قائم الزاویه می باشد. اگر $AP = 4$ و $BP = 9$



باشد، نسبت محیط های دو مثلث APD و BPC کدام است؟

(۱) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{3}{4}$

۳۷۲- وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{3} & x \geq 5 \\ \sqrt{x+4} & x < 5 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2} & x \geq 3 \\ x^2 + 4 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$

(۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{3} & x > 5 \\ x^2 - 4 & -4 < x < 5 \end{cases}$

(۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{2} & x > 3 \\ x^2 + 4 & x < 3 \end{cases}$

(۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2} & x \geq 3 \\ x^2 - 4 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$

۳۷۳- در دایره ای به شعاع ۳ واحد، مساحت قطاع محدود به ۲ شعاع دایره و کمانی از محیط دایره به طول ۲ واحد، کدام است؟

(۱) ۳

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) 3π

(۴) $\frac{3\pi}{2}$

۳۷۴- از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه ۸، کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{3}$

۳۷۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۶

(۳) $\frac{1}{6}$

(۴) $-\frac{1}{6}$

۳۷۶- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{1}{2}$

۳۷۷- احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $\frac{1}{9}$ و برای شخص B برابر $\frac{1}{8}$ است. با کدام احتمال، لاقط عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟

(۱) $\frac{1}{92}$

(۲) $\frac{1}{94}$

(۳) $\frac{1}{96}$

(۴) $\frac{1}{98}$

۳۷۸- میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات $\frac{1}{2}$ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع ها، کدام است؟

۲۳۶ (۴)

۲۳۴ (۳)

۲۳۲ (۲)

۲۲۹ (۱)

۳۷۹- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

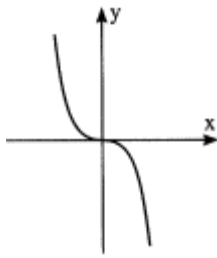
۶ (۴)

۴/۵ (۳)

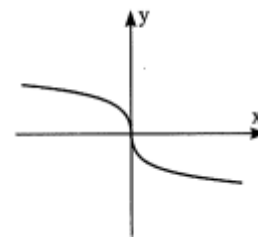
۴ (۲)

۳ (۱)

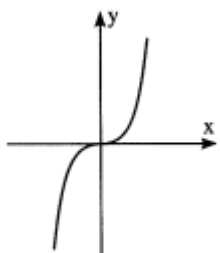
۳۸۰- اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



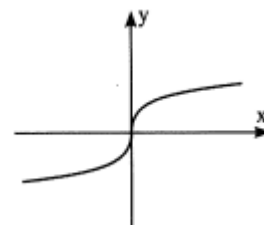
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۳۸۱- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

 $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{3}{8}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

۳۸۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟

 $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۱)

۳۸۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آن گاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

 $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

۳۸۴- در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

-۱۸ (۲)

-۲۱ (۱)

۳۸۵- در نقطه‌ای از منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+1} - \frac{4x}{3}$ خط مماس بر منحنی، عمود بر نیمساز ربع اول است. طول نقطه تماس کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۸۶- مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ ، کدام است؟

۱ (۱) -۱۸ و ۲۴

۲ (۲) -۴۵ و ۲۷

۳ (۳) -۳۶ و ۲۷

۴ (۴) -۲۷ و ۳۶

۳۸۷- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{ax}{2+x^2}$ در فاصله $[-2, 2]$ برابر $6\sqrt{2}$ باشد، کمترین مقدار آن کدام است؟
($a > 0$)

۱ (۱) ۶

۲ (۲) -۶

۳ (۳) $-6\sqrt{2}$

۴ (۴) $6\sqrt{2}$

۳۸۸- دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱ (۱) ۱ و ۳

۲ (۲) ۱ و ۴

۳ (۳) ۲ و ۳

۴ (۴) ۱/۵ و ۴

۳۸۹- در یک بیضی فاصله هر کانون از دورترین رأس سه برابر فاصله هر کانون از نزدیک‌ترین رأس آن است، خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱ (۱) $\frac{1}{3}$

۲ (۲) $\frac{1}{2}$

۳ (۳) $\frac{1}{4}$

۴ (۴) $\frac{1}{5}$

۳۹۰- دو تلفنچی شماره ۱ و شماره ۲ به ترتیب ۴۰٪ و ۶۰٪ تلفن‌های شرکت را وصل می‌کنند، تلفنچی شماره ۱ در ۰/۰۳ موارد و تلفنچی شماره ۲ در ۰/۰۴ موارد دچار خطا می‌شوند، چند تا از تلفن‌های مرکز اشتباه وصل می‌شوند؟

۱ (۱) ۰/۰۳۶

۲ (۲) ۰/۰۳۶

۳ (۳) ۰/۰۲۴

۴ (۴) ۰/۰۲۴

۳۹۱- اگر A یک زیرمجموعه متناهی و B یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه اعداد صحیح باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱ (۱) $A - B$ مجموعه‌ای متناهی است.

۲ (۲) $B - A$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

۳ (۳) $A - B'$ مجموعه‌ای متناهی است.

۴ (۴) $A' - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

۳۹۲- در مثلثی یکی از زاویه‌ها ۲۰ و ضلع مقابل آن $2\sqrt{3}$ و زاویه‌ای دیگر ۴۰ و ضلع مقابل آن ۵ است. مساحت مثلث کدام است؟

۱ (۱) ۷/۵

۲ (۲) $5\sqrt{3}$

۳ (۳) $10\sqrt{3}$

۴ (۴) ۲/۵

۳۹۳- در تجزیه عبارت $4x^2 + 6\sqrt{x^3} + 2x + 3\sqrt{x}$ کدام عامل وجود دارد؟ ($x > 0$)

۱ (۱) $2x - 1$

۲ (۲) $2x - 3\sqrt{x}$

۳ (۳) $2x + 3\sqrt{x}$

۴ (۴) $2\sqrt{x} + 1$

۳۹۴- مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ ، به کدام صورت است؟

- $x < \frac{1}{2}$ (1) $x < 3$ (2) $-\frac{1}{2} < x < 3$ (3) $\frac{1}{2} < x < 3$ (4)

۳۹۵- تابع $f(x)$ به گونه‌ای است که $f(x) = \frac{f(x+1)+f(x-1)}{2}$ ، اگر $f(0) = 2$ و $f(-1) = 5$ باشند آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟

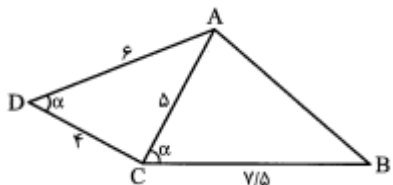
- (1) -۳ (2) -۴ (3) ۵ (4) -۵

۳۹۶- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

- (1) $\frac{5}{22}$ (2) $\frac{3}{11}$ (3) $\frac{7}{22}$ (4) $\frac{4}{11}$

۳۹۷- خط عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه $A(1, 3)$ و $B(-3, 5)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

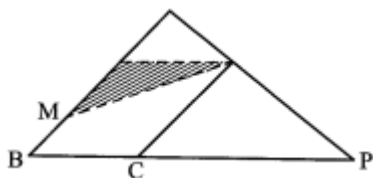
- (1) ۲ (2) -۵ (3) -۳ (4) -۶



۳۹۸- در شکل روبه‌رو طول AB کدام است؟

- (1) ۴ (2) ۵/۵ (3) ۶/۲۵ (4) ۶

۳۹۹- در شکل زیر، نقطه M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث است؟

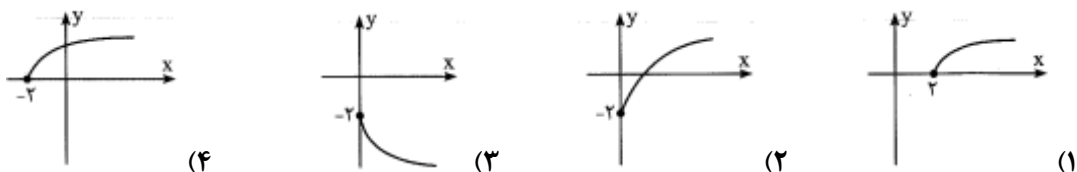


- (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{3}{16}$

۴۰۰- دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $\frac{5}{2}$

۴۰۱- اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع $f + g$ کدام است؟



۴۰۲- حاصل $\cos^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{5\pi}{24} + \cos^2 \frac{7\pi}{24} + \cos^2 \frac{11\pi}{24}$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۴۰۳- از دو معادله دو مجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار y کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۴۰۴- اگر تابع $f(x) = [-x] + m[x + 2]$ در $x = 1$ دارای حد باشد، m کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۴- هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

۴۰۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

$$-2 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۴۰۶- در یک کشور ۳۰٪ سرقت‌های مسلحانه در روز و ۸۵٪ درون شهرهای بزرگ صورت می‌گیرد و ۵٪ سرقت‌های مسلحانه در حومه شهر و در طول روز انجام می‌شود. اگر سرقت‌های مسلحانه‌ای در حومه شهر رخ دهد، چقدر احتمال دارد در شب اتفاق افتاده باشد؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4)$$

۴۰۷- ضریب تغییرات در داده‌های زیر کدام است؟

داده‌ها: $\underbrace{6, \dots, 6}_{\text{تا } 7}, \underbrace{8, \dots, 8}_{\text{تا } 9}, \underbrace{10, \dots, 10}_{\text{تا } 17}, \underbrace{12, \dots, 12}_{\text{تا } 11}, \underbrace{14, \dots, 14}_{\text{تا } 6}$

$$0/16 \quad (1) \quad 0/18 \quad (2) \quad 0/24 \quad (3) \quad 0/28 \quad (4)$$

۴۰۸- ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

$$-x^2 \quad (1) \quad x^2 \quad (2) \quad x|x| \quad (3) \quad -x|x| \quad (4)$$

۴۰۹- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$x-1 \quad (1) \quad x+1 \quad (2) \quad x \quad (3) \quad 2x \quad (4)$$

۴۱۰- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (1) \quad -\frac{3}{2} \quad (2) \quad \frac{4}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4)$$

۴۱۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

۴۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x^3+4x^2-x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۴۱۴- مشتق تابع $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} + 1)^3$ در نقطه $x = -8$ کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{3}$ (۲) 25 (۳) -25 (۴) $-\frac{25}{3}$

۴۱۵- معادله خط مماس بر منحنی به معادله $\frac{1}{x} = 2y - x\sqrt{x}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $4y - x = 3$ (۲) $4y + x = 5$ (۳) $x - 4y = -3$ (۴) $4x + y = 5$

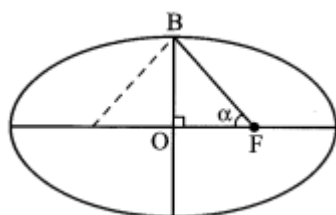
۴۱۶- اگر تابع $f(x) = x^3 - 4x^2 + mx - 1$ به ازای هر x صعودی اکید باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m > \frac{16}{3}$ (۲) $m < \frac{16}{3}$ (۳) $m > \frac{3}{8}$ (۴) $m < \frac{3}{8}$

۴۱۷- اگر نقطه $(1, -2)$ و اکستریم نسبی تابع $f(x) = x^4 - ax + b$ باشد، دوتایی (a, b) و نوع اکستریم تابع f در این نقطه کدام است؟

(۱) $(4, 3)$ ، ماکزیمم نسبی (۲) $(4, -3)$ ، مینیمم نسبی

(۳) $(-4, 3)$ ، مینیمم نسبی (۴) $(4, -3)$ ، ماکزیمم نسبی



۴۱۸- در بیضی مقابل $\tan \alpha = 2$ است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

۴۱۹- معادله دایره‌ای که مرکز آن $(5, -1)$ باشد و با دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ مماس برون باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 20 = 0$

(۳) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 24 = 0$

۴۲۰- در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

- (۱) $15/2$ (۲) $15/6$ (۳) $15/8$ (۴) $16/2$

۴۲۱- در یک دنباله حسابی غیر ثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، جمله چندم این دنباله حسابی برابر با صفر است؟

- (۱) دهم (۲) یازدهم (۳) دوازدهم (۴) سیزدهم

۴۲۲- در یک متوازی‌الاضلاع، با زاویه 60° درجه، اندازه‌های دو ضلع آن $5 + \sqrt{6}$ و $5 - \sqrt{6}$ می‌باشد، ارتفاع کوچک مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{19\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}$ (۲) $\frac{19\sqrt{3}}{5+\sqrt{6}}$ (۳) $\frac{19\sqrt{3}}{10+2\sqrt{6}}$ (۴) $\frac{19\sqrt{3}}{10-2\sqrt{6}}$

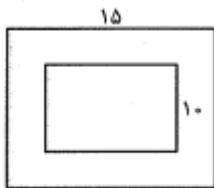
۴۲۳- اگر $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ و $a, b \neq 0$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $a + b > 0$ (۲) $a + b < 0$ (۳) $ab < 0$ (۴) $ab > 0$

۴۲۴- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-1/5$ (۳) -1 (۴) $-0/5$

۴۲۵- یک فرش به اندازه 10 در 15 سانتی‌متر در کف یک اتاق مستطیلی شکل به مساحت 300 سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های فرش تا دیوارهای اتاق برابر باشند، محیط اتاق کدام است؟



(۱) ۳۵

(۲) ۷۰

(۳) ۱۵۰

(۴) ۳۰۰

۴۲۶- نمودار تابع $y = |x|$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و سپس آن را 2 واحد به سمت عرض‌های مثبت انتقال می‌دهیم. مساحت سطح محصور بین این نمودار و خط $y = -1$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۴۲۷- چند کلمه هفت حرفی با حروف a, b, c می‌توان نوشت که سومین حرف a در جایگاه پنجم ظاهر شده باشد؟

- (۱) ۲۱۶ (۲) ۳۶۰ (۳) ۴۸۶ (۴) ۷۲۹

۴۲۸- دو تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده مضرب 4 باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{5}{18}$

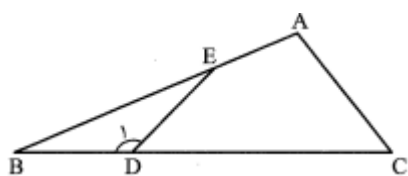
۴۲۹- به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

- (۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$ (۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

۴۳۰- در یک دوزنقه قائم الزاویه، از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود. ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

- (۱) کوچک‌تر از ۱ (۲) مساوی ۱ (۳) بزرگ‌تر از ۱ (۴) متغیر نسبت به اضلاع

۴۳۱- در مثلث ABC زاویه D_1 را برابر با A فرض می‌کنیم. حاصل $BE \times AB$ با حاصل کدام گزینه برابر است؟



(۱) DE^2

(۳) BC^2

(۴) $BC \cdot BD$

(۲) $BD \cdot AC$

۴۳۲- قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۳۳- اگر $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 2$ باشد، $\tan x$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۳

۴۳۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{1-2^x}{2^x}$ از کدام ربع محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول (۲) دوم و چهارم (۳) اول و سوم (۴) سوم

۴۳۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ ، کدام است؟

- (۱) -۱۱۲ (۲) -۹۶ (۳) -۸۴ (۴) -۷۲

۴۳۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(1+x) & ; x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است، $f(2)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-1/5$ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۳۷- میانگین اندازه طول ضلع سه مربع ۲۵ و ضریب تغییرات $0/06$ است. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

- (۱) $626/5$ (۲) $627/25$ (۳) $627/75$ (۴) $628/5$

۴۳۸- فرض می‌کنیم احتمال این که تیم ملی والیبالی ایران به جام جهانی برود $\frac{1}{6}$ و احتمال قهرمانی این تیم در آسیا $\frac{1}{4}$ باشد. اگر احتمال قهرمانی در آسیا به شرط صعود به جام جهانی $\frac{1}{3}$ باشد، با چه احتمالی تیم ایران به جام جهانی صعود خواهد کرد یا قهرمان آسیا خواهد شد؟

- (۱) $\frac{11}{36}$ (۲) $\frac{15}{36}$ (۳) $\frac{13}{36}$ (۴) $\frac{17}{36}$

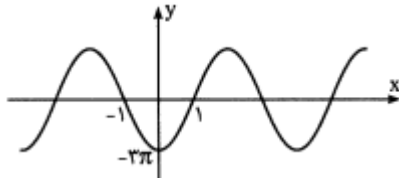
۴۳۹- اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 3$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

۴۴۰- در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

۴۴۱- نمودار تابع $y = a \cos bx$ به صورت مقابل است. حاصل $a + |b|$ کدام است؟

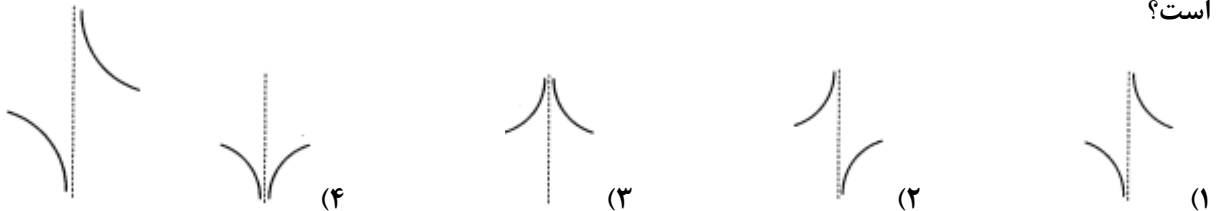


- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) $-\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) $-\frac{7\pi}{2}$

۴۴۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos x} = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

۴۴۳- اگر تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + a}$ در همسایگی $x = 2$ به صورت شکل مقابل باشد، در همسایگی $x = -3$ چگونه است؟



۴۴۴- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۴۴۵- جدول زیر مقادیر تابع پیوسته $f(x)$ را در اطراف نقطه $x = 4$ نمایش می‌دهد. شیب خط قائم بر نمودار تابع $f(x)$ حدوداً کدام است؟

x	۳/۹۹	۴	۴/۰۰۱	۴/۰۱
-----	------	---	-------	------

$f(x)$	$4/8$	5	$5/0.4$	$5/2$
--------	-------	-----	---------	-------

(4) -1

(3) -0.5 (2) -0.25 (1) -0.1

۴۴۶- نمودار تابع $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ در کدام بازه صعودی است؟

(4) $(-\infty, 0)$ (3) $(1, +\infty)$ (2) $(-\infty, 1)$ (1) $(0, +\infty)$

۴۴۷- در مورد تابع $f(x) = 2x + |x - 1|$ کدام گزینه صحیح است؟

(1) نقطه $(1, 2)$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است. (2) نقطه $(1, 2)$ بحرانی تابع $f(x)$ است.

(3) مبدأ مختصات نقطه بحرانی تابع $f(x)$ است. (4) تابع $f(x)$ نقطه بحرانی ندارد.

۴۴۸- فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان

نقاط M کدام است؟

(4) $4\sqrt{5}$ (3) $4\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{5}$ (1) $2\sqrt{3}$

۴۴۹- به ازای چند مقدار طبیعی m ، معادله $x^2 + y^2 + x + y + \frac{m}{17} = 0$ یک دایره است؟

(4) 9

(3) 8

(2) 6

(1) 7

۴۵۰- احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر در یک خانواده 0.6 است. اگر احتمال انتقال نوعی بیماری به فرزند پسر

0.06 و به فرزند دختر 0.05 باشد، در صورتی که این خانواده منتظر فرزندی باشند، با چه احتمال فرزندشان بیمار

خواهد بود؟

(4) 0.38 (3) 0.54 (2) 0.48 (1) 0.45

۴۵۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد $8 - x$ ، x و $12 + x$ به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی نزولی اند. مجموع

این سه جمله کدام است؟

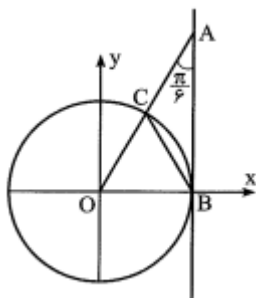
(4) 26

(3) 22

(2) 18

(1) 12

۴۵۲- با توجه به شکل زیر مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟ ($OB = 1$)

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۵۳- حاصل $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$ کدام است؟

- (۱) $1 - 2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2} - 1$ (۳) ۲ (۴) -۳

۴۵۴- اگر جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، مقدار b کدام است؟

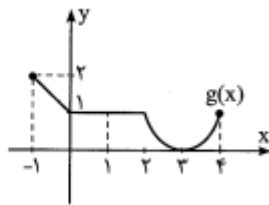
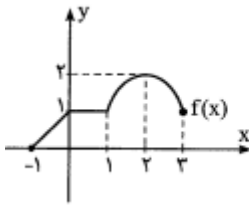
x	-2	1
$f(x)$	$-$	$+$

- (۱) ۲ (۲) -۳ (۳) صفر (۴) ۱

۴۵۵- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول مختصات، مماس است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ و -۱۲ (۳) -۴ و ۱۲ (۴) ۱۲

۴۵۶- نمودارهای ۲ تابع $f(x)$ و $g(x)$ رسم شده است. دامنه تابع $y = \frac{x}{\sqrt{f(x)-g(x)}}$ کدام است؟



(۱) (0, 3)

(۲) [0, 3]

(۳) (1, 3)

(۴) [1, 3]

۴۵۷- به چند طریق می توان بازی ۴ نفره ای بین اعضای دو خانواده ۵ نفره و ۴ نفره تعریف کرد به طوری که از هر خانواده دو نفر و در هر بازی فقط یکی از پدرها حضور داشته باشد؟ (هر دو نفر همیار هم از یک خانواده اند)

- (۱) ۷۲ (۲) ۵۴ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰

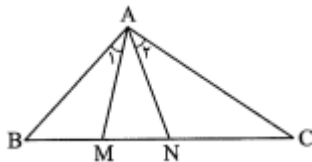
۴۵۸- در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی، خارج می شود؟

- (۱) $\frac{31}{42}$ (۲) $\frac{37}{42}$ (۳) $\frac{67}{84}$ (۴) $\frac{73}{84}$

۴۵۹- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1}$ ، از نقطه $A(0, 4)$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۶۰- در مثلث ABC ، پاره خطهای AM و AN را طوری رسم می کنیم که $\hat{A}_1 = \hat{C}$ و $\hat{A}_2 = \hat{B}$ ، اگر $BM = 3$ و $CN = 4$ ، آن گاه طول AM چقدر است؟



- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۵

۷ (۴)

 $\frac{7}{2}$ (۳)

۴۶۱- نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۴۵ (۲)

۴۰ (۱)

۴۶۲- اگر $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ و $g = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 3), (1, 2)\}$ و $(2f - g)(a) = b$ باشد، حاصل $a + B$ کدام است؟

-۶ (۴)

۶ (۳)

-۷ (۲)

۷ (۱)

۴۶۳- اگر $\tan 214^\circ = a - 1$ ، حاصل $\frac{3 \sin 146^\circ + 2 \cos 124^\circ}{4 \sin 304^\circ + \cos 56^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

 $\frac{a-5}{a-1}$ (۴) $\frac{a}{a-1}$ (۳) $\frac{a-1}{a-5}$ (۲) $\frac{a-1}{a-2}$ (۱)

۴۶۴- از تساوی $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۴، کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۴۶۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ ، کدام است؟

 $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{12}$ (۳) $-\frac{1}{12}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۱)

۴۶۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} & \pi < x < 2\pi \\ a \cos \frac{2x}{3} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = \pi$ پیوسته است؟

 $-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۲) $-2\sqrt{2}$ (۱)

۴۶۷- در یک عمل جراحی، احتمال زنده ماندن بیمار برابر $\frac{1}{7}$ است. اگر یک بیمار پس از این عمل زنده بماند، احتمال این که پس از دوره نقاهت دچار مشکل شود و بمیرد، $\frac{1}{2}$ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پس از انجام عمل طی دوره نقاهت چقدر است؟

 $\frac{1}{72}$ (۴) $\frac{1}{36}$ (۳) $\frac{1}{56}$ (۲) $\frac{1}{14}$ (۱)

۴۶۸- میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می باشد. اگر داده های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

 $\frac{9}{63}$ (۴) $\frac{9}{52}$ (۳) $\frac{9}{36}$ (۲) $\frac{9}{25}$ (۱)

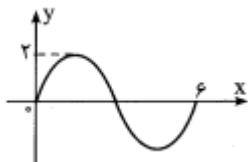
۴۶۹- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟

۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۴۷۰- اگر تابع $f(x) = x^2 + ax - 3$ در بازه $(1, \frac{3}{2})$ وارون پذیر نباشد حدود a کدام است؟

(۱) $(-4, -1)$ (۲) $(-3, 0)$ (۳) $(0, 3)$ (۴) $(-3, -2)$

۴۷۱- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$

(۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۴۷۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۴۷۳- اگر حد تابع $f(x) = \frac{1}{x^2-x+a}$ وقتی $x \rightarrow b$ برابر $+\infty$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۴۷۴- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای

آن در نقطه $x = 4$ ، چقدر کمتر است؟

(۱) $\frac{1}{36}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{5}{72}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۴۷۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & , x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & , x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است. b کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷۶- مجموع عرض‌های اکستریم نسبی تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ در فاصله $[-2, 3]$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۴

۴۷۷- فاصله سهمی $y = x^2$ از خط $y = x - 2$ چقدر است؟

(۱) $\frac{7}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{7}{4\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{7}{3\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$

۴۷۸- شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ، کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۴

۴۷۹- طبق شکل صفحه مربعی با ضلع ۲ واحد به فاصله ۱ واحد از خط d قرار دارد. اگر صفحه را حول خط d دوران دهیم، حجم شکل حاصل چقدر خواهد بود؟



(۱) 14π

(۲) 16π

(۳) 18π

(۴) 12π

۴۸۰- شصت درصد از کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنان تحصیلات دانشگاهی دارند؟

(۴) $0/198$

(۳) $0/196$

(۲) $0/192$

(۱) $0/189$

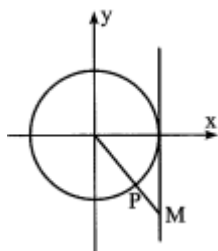
۴۸۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد. $(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$ مجموع جمله‌های اول و آخر دسته بیستم کدام است؟

(۴) 404

(۳) 403

(۲) 402

(۱) 401



۴۸۲- مطابق شکل، شعاع دایره یک واحد و عرض نقطه P برابر $0/8-$ است. عرض نقطه M کدام است؟

(۲) $-\frac{4}{3}$

(۱) $-\frac{4}{3}$

(۴) $-\frac{5}{3}$

(۳) $-\frac{3}{5}$

۴۸۳- اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $\frac{x^6+1}{x^3}$ کدام است؟

(۴) 45

(۳) 36

(۲) 27

(۱) 18

۴۸۴- نمودار تابع $y = x^2 + x + 3$ ، خط $y = mx + 1$ را قطع نمی‌کند. بزرگ‌ترین بازه حدود m کدام است؟

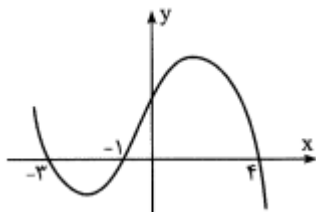
(۲) $(-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1)$

(۱) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(۴) $(-2\sqrt{2} + 1, 2\sqrt{2} + 1)$

(۳) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

۴۸۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



$$[-1, 1] \cup [0, 6] \quad (1)$$

$$[-3, 1] \cup [0, 2] \quad (2)$$

$$[-5, -3] \cup [-1, 2] \quad (3)$$

$$[-5, -3] \cup [0, 2] \quad (4)$$

۴۸۶- در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

$$\frac{50}{143} \quad (4)$$

$$\frac{40}{143} \quad (3)$$

$$\frac{25}{77} \quad (2)$$

$$\frac{30}{91} \quad (1)$$

۴۸۷- مجموع ریشه‌های معادله $(x^2 - 1)^2 = 3x^2 - 5$ کدام است؟

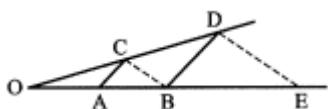
صفر (۴)

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

۴۸۸- در شکل زیر، دو جفت پاره خط موازی اند. $OA = 3$ و $AB = 5$ ، اندازه BE ، کدام است؟



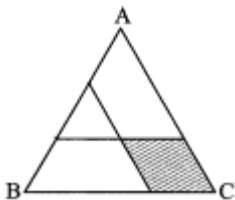
$$12\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$13\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$10\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$11\frac{1}{3} \quad (3)$$

۴۸۹- در شکل زیر، ضلع AC در مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت ۱ به ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چه نسبتی از مساحت مثلث اصلی است؟



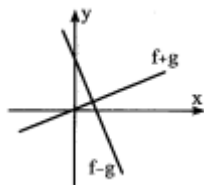
$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} \quad (1)$$

$$\frac{2}{12} \quad (4)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

۴۹۰- اگر نمودار تابع‌های $f + g$ و $f - g$ به صورت زیر باشند، نمودار تابع f از کدام ناحیه مختصات عبور نمی‌کند؟



(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

۴۹۱- تابع f تابعی یک به یک است. مجموعه‌های A و B به ترتیب دامنه‌های f و f^{-1} هستند و نمودار زیر ارتباط بین f و f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر عضو a از مجموعه B نظیر 5 عضو از مجموعه A باشد، کدام است؟



(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۹۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۴۹۳- انرژی آزادشده در یک زلزله از رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ به دست می‌آید که در آن M واحد بزرگی زلزله و E انرژی آزاد شده است. انرژی آزادشده در یک زلزله 7 ریشتری چند برابر انرژی آزادشده در یک زلزله 5 ریشتری است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۱۰۰۰۰

۴۹۴- توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = 1$ دارای حدی غیر صفر هستند و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2g(x)}{g^2(x)}$ است. اگر حد تابع $f(x)$

در $x = 1$ برابر $-\frac{1}{8}$ باشد آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ در کدام بازه است؟

(۱) $(-\frac{1}{2}, 0)$ (۲) $(-1, -\frac{1}{2})$ (۳) $(0, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{1}{2}, 1)$

۴۹۵- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^3 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin 5x - a & ; \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته

است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۹۶- ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آن‌ها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A ، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{8}$ است. اگر ماده واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{11}{40}$ (۳) $\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{13}{40}$

۴۹۷- میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها $65/44$ می‌باشد. ضریب تغییرات طول اضلاع این مربع‌ها کدام است؟

(۱) $0/12$ (۲) $0/15$ (۳) $0/2$ (۴) $0/25$

۴۹۸- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right) \text{ (۴)} \quad (-2, 0) \text{ (۳)} \quad \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ (۲)} \quad \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ (۱)}$$

۴۹۹- تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه کدام است؟

$$\frac{1}{2}x - 1; -4 < x < 8 \text{ (۴)} \quad x + 7; x > -4 \text{ (۳)} \quad \frac{1}{3}x + 2; x > 3 \text{ (۲)} \quad -x + 7; x > 8 \text{ (۱)}$$

۵۰۰- اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{4}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۲)} \quad -\frac{3}{2} \text{ (۱)}$$

۵۰۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ (۴)} \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ (۱)}$$

۵۰۲- به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟

$$a > 4 \text{ (۴)} \quad a < 4 \text{ (۳)} \quad a > -4 \text{ (۲)} \quad a < -4 \text{ (۱)}$$

۵۰۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{ax^n - 6}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

$$1 \text{ (۴)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{6} \text{ (۲)} \quad -1 \text{ (۱)}$$

۵۰۴- اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})$ کدام است؟

$$-2 \text{ (۴)} \quad -1 \text{ (۳)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱)}$$

۵۰۵- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در نقطه $x = 1$ با نمو $0/44$ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$$\frac{1}{6} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{24} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{30} \text{ (۱)}$$

۵۰۶- اگر تابع $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m - 1)x^2 + 8x$ دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشد، آن گاه مقادیر m در کدام بازه قرار دارند؟

$$(3, +\infty) \text{ (۴)} \quad (-\infty, -3) \text{ (۳)} \quad (1, +\infty) \text{ (۲)} \quad (-\infty, -1) \text{ (۱)}$$

۵۰۷- اگر x و y دو عدد مثبت و $x + 2y = 6$ باشد، بیشترین مقدار x^2y کدام است؟

$$32 \text{ (۴)} \quad 16 \text{ (۳)} \quad 12 \text{ (۲)} \quad 6 \text{ (۱)}$$

۵۰۸- معادله دایره‌ای که مرکز آن $(2, \beta)$ و بر محور عرض‌ها مماس باشد و محور x ها را در نقطه‌ای به طول $2 + \sqrt{3}$ قطع کند کدام است؟ ($\beta > 0$)

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y = 1 \quad (2) \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y = 2 \quad (4) \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$$

۵۰۹- یک بیضی در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور x ها مماس است و رأس کانونی آن $(-1, -2)$ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

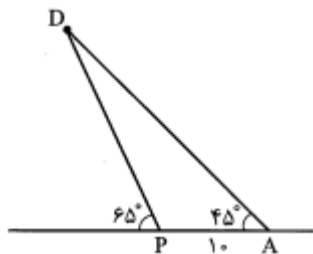
۵۱۰- دو جعبه داریم به نام‌های A و B ، که جعبه A شامل ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و جعبه B شامل ۱۰ مهره سفید و یک مهره سیاه است. از جعبه B مهره‌ای را خارج می‌کنیم و به جعبه A می‌اندازیم، سپس از جعبه A مهره‌ای انتخاب می‌کنیم با چه احتمالی مهره انتخابی سفید است؟

$$(1) \quad \frac{65}{112} \quad (2) \quad \frac{65}{132} \quad (3) \quad \frac{56}{132} \quad (4) \quad \frac{56}{112}$$

۵۱۱- در یک دنباله اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$. حاصل $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

$$(1) \quad 32 \quad (2) \quad 48 \quad (3) \quad 56 \quad (4) \quad 64$$

۵۱۲- فردی از نقطه D نقاط A و P را با زوایای 45° و 65° مطابق شکل مشاهده می‌کند. اگر فاصله A و P برابر ۱۰ متر باشد، فاصله نقطه D از خط AP کدام است؟ ($\tan 65^\circ = 2$)



$$(1) \quad 10$$

$$(2) \quad 15$$

$$(3) \quad 20$$

$$(4) \quad 25$$

۵۱۳- مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x^2 - 3x}{x^3 - 1} < 1$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad \text{بی شمار}$$

۵۱۴- عبارت $x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$ را به حاصل ضرب سه عامل تجزیه کرده‌ایم. اگر یکی از این عوامل $x^4 + 1$ باشد، مجموع دو عامل دیگر به کدام صورت خواهد بود؟

$$(1) \quad 2x - 1 \quad (2) \quad 2x + 1 \quad (3) \quad 2x + 3 \quad (4) \quad 2x - 3$$

۵۱۵- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

(1) $(-2, 1)$ (2) $(-1, 1)$ (3) $(-1, 2)$ (4) $(1, 2)$

۵۱۶- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

(1) $\frac{8}{3}$ (2) ۴ (3) $\frac{16}{3}$ (4) ۶

۵۱۷- با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۵ رقمی با تکرار ارقام با دقیقاً ۳ رقم فرد وجود دارد؟

(1) ۱۰۸ (2) ۲۷۰ (3) ۵۴۰ (4) ۱۰۸۰

۵۱۸- دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

(1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{5}{18}$ (3) $\frac{7}{18}$ (4) $\frac{4}{9}$

۵۱۹- علی و رضا با هم کاری را در ۴۵۰ دقیقه انجام می‌دهند و علی به تنهایی همان کار را ۸ ساعت زودتر از رضا

انجام می‌دهد. رضا کار را به تنهایی در چند ساعت انجام می‌دهد؟

(1) ۸ (2) ۲۰ (3) ۱۵ (4) ۱۸

۵۲۰- درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگری طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث

اصلی باشد. اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث

کوچک‌تر است؟

(1) $\frac{1}{75}$ (2) ۱ (3) $\frac{1}{25}$ (4) $\frac{1}{5}$

۵۲۱- نقطه A و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. در این صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله معلوم k و

از خط d به فاصله معلوم k' باشد؟

(1) ۴ نقطه (2) ۲ نقطه (3) حداکثر ۴ نقطه (4) حداکثر ۲ نقطه

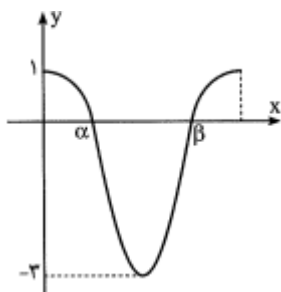
۵۲۲- کدام دو تابع زیر با هم مساوی‌اند؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \\ g(x) = x+1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{-x} \\ g(x) = \sqrt{(-x)^3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(x) = [|x|] \\ g(x) = |[x]| \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \end{cases} \quad (3)$$



۵۲۳- اگر نمودار $f(x) = a \cos x + b$ به شکل زیر باشد، مجموع $2\alpha + \beta$ کدام

است؟

(۱) $\frac{7\pi}{3}$

(۲) $\frac{8\pi}{3}$

(۳) $\frac{4\pi}{3}$

(۴) $\frac{7\pi}{6}$

۵۲۴- از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در

پایه ۴، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۵۲۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آن گاه b کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۲۶- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $\begin{cases} \frac{\sin 2x - \sin x}{\sin^2 x} & ; x \neq \pi \\ a & ; x = \pi \end{cases}$ در نقطه $x = \pi$ پیوسته است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) هیچ مقدار a

۵۲۷- در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با

کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

(۱) $\frac{8}{21}$ (۲) $\frac{17}{42}$ (۳) $\frac{10}{21}$ (۴) $\frac{9}{14}$

۵۲۸- در ۳۰ داده آماری مجموع تمام داده‌ها ۲۴۰ و مجموع مربعات تفاضل میانگین از هر داده برابر ۴۸۰ است.

ضریب تغییرات، کدام است؟

(۱) ۰/۲۲۵ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۳۲۵ (۴) ۰/۵

۵۲۹- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) $2x^2 + 3x + 1$ (۲) $2x^2 - 2x + 3$ (۳) $2x^2 - x + 4$ (۴) $2x^2 + x + 3$

۵۳۰- تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbb{R} ، چگونه است؟

(۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون ناپذیر (۴) یک‌به‌یک

۵۳۱- اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ ، کدام است؟

$$-2 \quad (1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۵۳۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

۵۳۳- حاصل کدام یک از حدود زیر $+\infty$ است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|(x-1)}{[x](x^2-1)} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \quad (4)$$

۵۳۴- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

$$\frac{7}{48} \quad (1) \quad \frac{5}{24} \quad (2) \quad \frac{7}{24} \quad (3) \quad \frac{7}{16} \quad (4)$$

۵۳۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & ; x > 0 \\ x^2 - x & ; x \leq 0 \end{cases}$ مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad -2 \quad (4)$$

۵۳۶- چند تا از جملات زیر در مورد تابع $f(x)$ در نقطه $x = c$ صحیح است؟

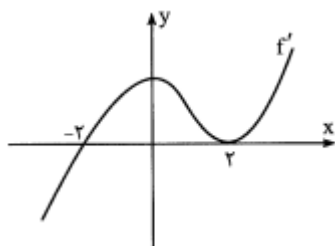
الف) اگر $f'(c) = 0$ شود، آن گاه c در f اکسترمم نسبی دارد.

ب) اگر $x = c$ اکسترمم نسبی باشد، آن گاه $f'(c) = 0$ است.

ج) هر نقطه مانند c که اکسترمم نسبی تابع f باشد، بحرانی نیز خواهد بود.

$$1 \quad \text{صفر} \quad (1) \quad 2 \quad \text{یک} \quad (2) \quad 3 \quad \text{دو} \quad (3) \quad 4 \quad \text{سه} \quad (4)$$

۵۳۷- اگر نمودار تابع چند جمله‌ای f' به صورت مقابل باشد در این صورت در مورد تابع $f(x)$ کدام گزینه صحیح است؟



(1) $f(x)$ در $x = 2$ اکسترمم نسبی دارد.

(2) $f(x)$ در فاصله $(-\infty, 0)$ صعودی اکید است.

(3) $f(x)$ در $x = -2$ مینیمم نسبی دارد.

(4) $f(x)$ در $x = -2$ ماکزیمم نسبی دارد.

۵۳۸- سطح مقطع حاصل از برش یک مکعب با یک صفحه، چند تا از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

الف) مربع	ب) مستطیل	پ) مثلث
ت) متوازی‌الاضلاع (غیر مستطیل و مربع)	ث) دوزنقه	
۲ (۱)	۳ (۲)	۴ (۳)
		۵ (۴)

۵۳۹- دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$	۲) ۲	۳) $\sqrt{5}$	۴) ۳
---------------	------	---------------	------

۵۴۰- درون جعبه‌ای ۵ سیب خراب و n سیب سالم وجود دارد. ۲ سیب را به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که سیب دوم خراب باشد برابر $\frac{5}{16}$ است. مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰	۲) ۱۱	۳) ۱۲	۴) ۱۳
-------	-------	-------	-------

۵۴۱- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند و A زیرمجموعه B باشد حاصل $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$ کدام است؟

۱) A	۲) B	۳) $B - A$	۴) \emptyset
--------	--------	------------	----------------

۵۴۲- اندازه دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه 60° درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۸	۲) ۵۴	۳) ۶۴	۴) ۷۲
-------	-------	-------	-------

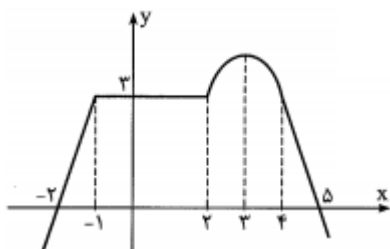
۵۴۳- اگر تساوی $\frac{a^4\sqrt{x^3} + b^4\sqrt{x} + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}$ برای $x > 1$ همواره برقرار باشد، $a + 2b$ کدام است؟

۱) -۳	۲) -۱	۳) ۳	۴) ۱
-------	-------	------	------

۵۴۴- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ ، عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

۱) $[\frac{2}{3}, 2]$	۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$	۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$	۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$
-----------------------	----------------------------------	------------------------------------	--

۵۴۵- اگر نمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{\sqrt{3-f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

۲) $[-1, 5]$

۳) $(-\infty, 2)$

۴) $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$

۵۴۶- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

(۱) $\frac{41}{120}$ (۲) $\frac{27}{60}$ (۳) $\frac{79}{120}$ (۴) $\frac{31}{60}$

۵۴۷- اگر $A(3, -2)$ ، $B(-1, 1)$ و $C(4, 3)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(۱) $2\sqrt{23}$ (۲) $\frac{23}{2}$ (۳) ۲۳ (۴) $4\sqrt{23}$

۵۴۸- در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه $\frac{3}{5}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت دوزنقه است؟



(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{7}{8}$

(۳) $\frac{14}{15}$ (۴) $\frac{15}{16}$

۵۴۹- مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویه حاده 30° مفروض است. ارتفاع وارد بر وتر، وتر را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۵۵۰- دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷

۵۵۱- دامنه تابع $f(x) = \frac{x^3-x}{x^3+2kx^2+2x}$ با شرط $|k| < \sqrt{2}$ شامل چند عضو از مجموعه اعداد صحیح نیست؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۵۲- در مثلث ABC رابطه $\cos(A-B)\cos(B-C) = 1$ برقرار است. این مثلث حتماً چگونه است؟

(۱) متساوی‌الاضلاع (۲) متساوی‌الساقین (۳) قائم‌الزاویه (۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۵۵۳- از دو معادله دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ ، مقدار x کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۵۵۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-7x+12}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۵۵۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \\ ax - a + 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) هر مقدار a ۴ (۴) هیچ مقدار a

۵۵۶- احتمال قبولی فرد A در یک آزمون 0.84 و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون 0.75 است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان در این آزمون قبول می‌شوند؟

۰/۹۲ (۱) ۰/۹۴ (۲) ۰/۹۶ (۳) ۰/۹۸ (۴)

۵۵۷- ضریب تغییرات در داده‌های آماری مقابل کدام است؟

12, 12, 14, 14, 14, 16, 16, 22

۰/۱۵ (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۲۵ (۳) ۰/۳ (۴)

۵۵۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱-۴ و -۱ (۱) ۱-۴ و ۱ (۲) ۱-۴ و ۱ (۳) ۱ و ۴ (۴)

۵۵۹- اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه $g(f(x))$ تابع کدام است؟

x (۱) $-x$ (۲) $-x-1$ (۳) $x+1$ (۴)

۵۶۰- اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ کدام است؟

$-\frac{2\sqrt{14}}{9}$ (۱) $-\frac{\sqrt{14}}{9}$ (۲) $\frac{2\sqrt{14}}{9}$ (۳) $\frac{\sqrt{14}}{9}$ (۴)

۵۶۱- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{14\pi}{3}$ (۱) 4π (۲) $\frac{9\pi}{2}$ (۳) 5π (۴)

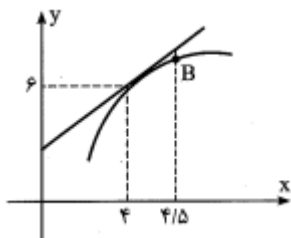
۵۶۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right)$ ، کدام است؟

-۲ (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

۵۶۳- اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a+q)x^2 + (x+1)^2}{(x-1)^2 + (3x-1)^2} = 0$ باشد آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{a+1}{x^2+4x+4}$ کدام است؟

-۲ (۱) ۲ (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴)

۵۶۴- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت شکل مقابل است و $f'(4) = 1/5$ است. عرض نقطه B حدوداً کدام است؟



(1) ۷

(2) ۷/۲۵

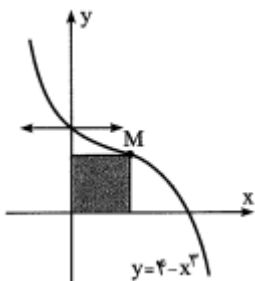
(3) ۶/۲۵

(4) ۶/۷۵

۵۶۵- اگر نقطهٔ وسط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 - 3x - 1$ باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

(1) -۳ (2) ۳ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{3}{2}$

۵۶۶- مطابق شکل نقطهٔ M روی تابع $y = 4 - x^3$ و در ناحیه اول قرار دارد و با محورهای مختصات مستطیل می‌سازد. بیشترین مساحت مستطیل چقدر است؟



(1) ۲

(2) ۴

(3) ۳

(4) ۱

۵۶۷- حدود تغییرات طول‌های نقاطی بر روی بیضی به کانون‌های $(1, -1)$ و $(1, 1)$ و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ کدام است؟

(1) $[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$ (2) $[-2, 2]$ (3) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (4) $[-1, 3]$

۵۶۸- اگر دایره‌ای بر هر دو خط $3x + 4y = 3$ و $6x + 8y = 2$ مماس باشد و معادلهٔ آن به صورت $x^2 + y^2 - 4x + 2y + a = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

(1) ۴/۹۶ (2) ۳/۷۳ (3) ۵/۰۲ (4) ۴/۶۹

۵۶۹- در برخورد یک صفحهٔ مایل با هرم مربع‌القاعده (به طوری که رأس نگذرد) سطح مقطع کدام است؟

(1) مثلث (2) متوازی‌الاضلاع (3) مربع (4) دوزنقه

۵۷۰- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشد و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۴ درصد، ۵ درصد و ۲ درصد باشد. اگر فردی را به تصادف از این جامعه انتخاب کنیم با چه احتمالی به این بیماری مبتلا نمی‌شود؟

(1) ۰/۰۲۹ (2) ۰/۳۹۱ (3) ۰/۰۳۹ (4) ۰/۹۶۱

۵۷۱- جملات اول و آخر از یک دنباله حسابی ۹۱ جمله‌ای به ترتیب ۱۴- و ۴۰ است. تعداد جملات منفی این دنباله کدام است؟

- ۲۴ (۱) ۲۵ (۲) ۶۶ (۳) ۶۷ (۴)

۵۷۲- اگر $a + b - c = 1$ ، آن‌گاه چند مورد از روابط زیر صحیح است؟

الف) $a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2c$ (الف) ب) $a^2 - b^2 + c^2 = 1 + 2ac - 2b$

پ) $a^2 + b^2 - c^2 = -1 - 2ab + 2a + 2b$ (ت) $a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2ab + 2bc + 2ac$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۷۳- اگر $x = 2 - \sqrt{5}$ ، حاصل $\sqrt[3]{x + x^{-1}} - 3\sqrt{5}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{5}$ ۲ (۲) $-\sqrt{5}$ ۳ (۳) -2 ۴ (۴) 2

۵۷۴- اگر خط $y = -1$ تنها خط افقی مماس بر سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + m$ باشد، عرض از مبدأ این سهمی کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{2}{9}$ ۲ (۲) $-\frac{11}{9}$ ۳ (۳) $\frac{11}{9}$ ۴ (۴) $\frac{2}{9}$

۵۷۵- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ‌ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) -2 ۲ (۲) 0.5 ۳ (۳) 1 ۴ (۴) 1.5

۵۷۶- اگر $f(x) = \frac{2x-3}{5x+1}$ باشد، $f\left(\frac{2}{f(2)}\right)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{16}{5}$ ۲ (۲) $\frac{19}{56}$ ۳ (۳) $\frac{41}{111}$ ۴ (۴) $\frac{1}{11}$

۵۷۷- در یک جمع شش زوج حضور دارند. به چند طریق می‌توان هفت نفر از آن‌ها را انتخاب کرد به طوری که بین آن‌ها دقیقاً دو زوج حضور داشته باشند؟

- ۱ (۱) 320 ۲ (۲) 480 ۳ (۳) 792 ۴ (۴) 840

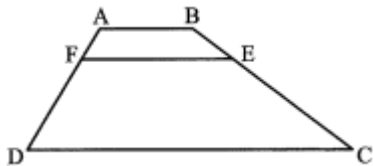
۵۷۸- دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن که مجموع اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{4}$ ۲ (۲) $\frac{1}{3}$ ۳ (۳) $\frac{5}{18}$ ۴ (۴) $\frac{7}{18}$

۵۷۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

- ۱ (۱) $-1 < m < 0$ ۲ (۲) $m < 0$ ۳ (۳) $2 < m < 8$ ۴ (۴) $m > 8$

۵۸۰- در دوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{5}{2}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{1}{4}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟



$$\frac{7}{15} \quad (2)$$

$$\frac{11}{20} \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{8}{15} \quad (3)$$

۵۸۱- کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

(۱) برای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.

(۲) در هر مثلث، ضلع نظیر ارتفاع کوچک تر، از بقیه اضلاع بزرگ تر است.

(۳) در هر مثلث، اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ تر است.

(۴) در هر متوازی الاضلاع قطر ها برابرند.

۵۸۲- از رابطه $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

$$\frac{1}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

۵۸۳- کدام یک از توابع زیر، با تابع $f(x) = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$$\log \frac{x^2-4}{x^2+2x} \quad (2)$$

$$\log(x-2) - \log x \quad (1)$$

$$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \quad (3)$$

۵۸۴- نمودار دو تابع $f(x) = 4^x + 1$ و $g(x) = 3(2)^x - 1$ یکدیگر را در دو نقطه قطع می کند، فاصله دو

نقطه کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\sqrt{8} \quad (2)$$

$$\sqrt{7} \quad (1)$$

۵۸۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ ، کدام است؟

$$24 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۵۸۶- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & ; x < 1 \\ x^2 + ax & ; x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

$$2/5 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

$$1/25 \quad (2)$$

$$0/5 \quad (1)$$

۵۸۷- اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a ، برابر ۱۳ باشد، واریانس آن ها کدام است؟

$$15/73 \quad (4)$$

$$16/66 \quad (3)$$

$$16/33 \quad (2)$$

$$14/27 \quad (1)$$

۵۸۸- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم مجموع آن‌ها ۵ یا ۱۰ آمده است. چقدر احتمال دارد که هر دو عدد رو شده زوج نباشند؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{5}{27}$ (۴) $\frac{7}{27}$

۵۸۹- اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

۵۹۰- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند، جواب معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ کدام است؟

- (۱) $-۱, -۷$ (۲) $۱, -۷$ (۳) $-۱, ۷$ (۴) $۱, ۷$

۵۹۱- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = a^2 - \frac{5}{4} \sin \pi(a + 1)x$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، با شرط $a < 0$ حداقل مقدار تابع f کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۴ (۴) -۴

۵۹۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۵۹۳- اگر حد تابع $f(x) = \frac{x^3 - (x+1)^3 + 7}{ax^2 - 4x + 5}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر ۳ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۵۹۴- به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۹۵- اگر مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 2$ برابر $\frac{1}{3}$ باشد، شیب خط قائم بر منحنی $y = f(x^2 + 1)$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۹۶- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ در آن صعودی اکید است را بازه (a, b) در نظر می‌گیریم. $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} + 1$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

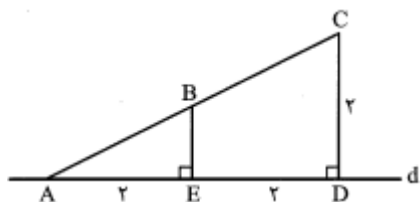
۵۹۷- بیشترین مقدار تابع $f(x) = x^3 + kx - 2$ در فاصله $[-2, 1]$ از کمترین مقدار آن ۱۲ واحد بیشتر است. حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)$ چقدر است؟ ($k > 0$)

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱۲ (۴) ۱۲

۵۹۸- دایره گذرا بر نقطه $(1, -2)$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

- (۱) ۱٫۴ (۲) ۱٫۵ (۳) ۲٫۴ (۴) ۲٫۵

۵۹۹- در شکل روبه‌رو صفحه مثلث ACD را حول خط d دوران می‌دهیم، سپس شکل حاصل را با صفحه عمود بر d و شامل برش BE می‌دهیم، مساحت سطح مقطع چقدر است؟



- (۱) π (۲) 2π

- (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$

۶۰۰- اگر احتمال انتقال نوعی بیماری به فرزند پسر P و به فرزند دختر 0.3 باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشند، اگر با احتمال $\frac{11}{200}$ بیماری به فرزند آن‌ها منتقل شود، مقدار P کدام است؟

- (۱) 0.07 (۲) 0.06 (۳) 0.04 (۴) 0.08

۶۰۱- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۶۰۲- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه تابع $f(3 - x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 3]$ (۴) $[1, 2]$

۶۰۳- در متوازی‌الاضلاع اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه بین دو قطر 135° درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۲

۶۰۴- از هر یک از مدارس A, B, C, D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوه‌دو غیر هم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۴۸۰

۶۰۵- در 150 داده آماری با میانگین 12 ، به دو برابر هر یک از داده‌ها 3 واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شوند. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

$$\frac{7}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{8}{9} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{7}{9} \text{ (۱)}$$

۶۰۶- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{5}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{18} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{9} \text{ (۱)}$$

۶۰۷- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به‌طور تصادفی پی‌درپی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

$$0/2 \text{ (۴)} \quad 0/25 \text{ (۳)} \quad 0/15 \text{ (۲)} \quad 0/1 \text{ (۱)}$$

۶۰۸- مجموع جواب نامعادله $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$ ، کدام است؟

$$\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \text{ (۲)} \quad \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ (۱)}$$

$$\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \text{ (۴)} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ (۳)}$$

۶۰۹- اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ ، نمودارهای دو تابع f و g با کدام طول متقاطع‌اند؟

$$1 \text{ (۴)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad -1 \text{ (۱)}$$

۶۱۰- در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

$$\frac{2}{5} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{14} \text{ (۱)}$$

۶۱۱- در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است و تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = A(10)^{0/04t}$ می‌باشد. پس از چند دقیقه، ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ($\log 5 = 0/6$)

$$13 \text{ (۴)} \quad 18 \text{ (۳)} \quad 17 \text{ (۲)} \quad 15 \text{ (۱)}$$

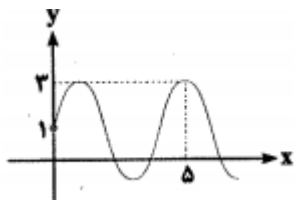
۶۱۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ (۴)} \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ (۳)} \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ (۲)} \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ (۱)}$$

۶۱۳- حاصل عبارت $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ کدام است؟

$$\frac{1}{8} \cot 10^\circ \text{ (۴)} \quad \frac{1}{8} \tan 10^\circ \text{ (۳)} \quad \frac{1}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{8} \sin 80^\circ \text{ (۱)}$$

۶۱۴- اگر نمودار تابع $t = a + b \sin(cx)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $\frac{c}{a+b}$ کدام است؟ ($b > 0$)



$$\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (4)$$

۶۱۵- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

$$y = -x^2 + 4x - 5 \quad ; \quad x \leq 2 \quad (2) \quad y = x^2 - 4x + 5 \quad ; \quad x \leq 2 \quad (1)$$

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad ; \quad x \geq 1 \quad (4) \quad y = -x^2 + 4x - 5 \quad ; \quad x \geq 1 \quad (3)$$

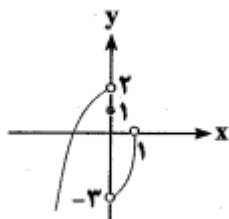
۶۱۶- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^3}{\alpha+3} + \frac{\beta^3}{\beta+3}$ کدام است؟

$$-3 \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (1)$$

۶۱۷- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع اکیداً نزولی باشند، کدام تابع به شرط تعریف الزاماً اکیداً صعودی است؟

$$\frac{f}{g} \quad (4) \quad fog \quad (3) \quad f \cdot g \quad (2) \quad f - g \quad (1)$$

۶۱۸- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - x^3)$ کدام است؟



$$1 \quad (1)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

(4) وجود ندارد.

۶۱۹- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}$ باشد، آن‌گاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ ، کدام است؟

$$4 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۶۲۰- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & , \quad x < 2 \\ a & , \quad x = 2 \\ x + 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ پیوسته

است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$4 \quad (1) \quad 4/5 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad \text{هیچ مقدار } a \quad (4)$$

۶۲۱- تابع $f(x) = ||x^2 - 4 - 2|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

$$7 \quad (4) \quad 6 \quad (3) \quad 5 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

۶۲۲- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی تابع $\sqrt{x^3 + x + 2}$ در نقطه $x = 1$ ، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۶۲۳- بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه $[-2, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۷

۶۲۴- تابع $f(x) = x^5 - 5x^3 + 2$ چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۲۵- تمام مقادیر قابل قبول m تا تابع $y = \frac{x^3}{3} + mx + x - 3$ تابعی اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) $|m| \leq 1$ (۲) $|m| < 1$ (۳) $|m| > 1$ (۴) $0 < m < 1$

۶۲۶- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

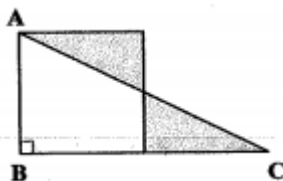
۶۲۷- مرکز دایره‌ای که از نقطه $A(1, 2)$ و $B(0, -1)$ بگذرد و خط $y = x + 1$ از مرکز آن عبور کند، کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ (۲) $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$ (۳) $(-2, -1)$ (۴) $(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4})$

۶۲۸- در مثلث ABC $AB = AC$ ، $\hat{A} = 80^\circ$ می‌باشند. اگر عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

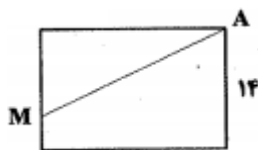
۶۲۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، بر روی ضلع AB مربعی ساخته شده است. اگر دو مثلث سایه‌زده همنهشت باشند، مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{9}$

- (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۶۳۰- در شکل زیر، پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{5}{9}$ تقسیم کرده است. اگر



قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره خط AM چند واحد است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۱

(۳) $9\sqrt{7}$

(۴) $10\sqrt{6}$

۶۳۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 + 4$ ، $2x$ و $x^2 - 2$ ، به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

(۱) $\frac{117}{16}$ (۲) $\frac{125}{16}$ (۳) $\frac{63}{4}$ (۴) $\frac{127}{8}$

۶۳۲- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع اند؟

(۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) -3 (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) -2

۶۳۳- در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناچور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، تقریباً کدام است؟

(۱) $14/72$ (۲) $14/81$ (۳) $15/33$ (۴) $16/66$

۶۳۴- ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

(۱) $\frac{25}{63}$ (۲) $\frac{26}{63}$ (۳) $\frac{10}{21}$ (۴) $\frac{11}{21}$

۶۳۵- محمد برادر زهرا در یک خانواده ۵ فرزندی زندگی می‌کند. احتمال آن که محمد فقط دو برادر داشته باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۶۳۶- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

(۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) 1 (۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$ و -1

۶۳۷- اگر نمودار تابع $f(x) = ab^x - 1$ ، از دو نقطه $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۶۳۸- از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

(۱) -1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۶۳۹- به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟

۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

۶۴۰- تعداد ریشه حقیقی معادله $\sqrt{x^3 + x - 2} + |x^2 + 3x - 4| = 0$ کدام است؟

۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۴۱- اگر دو تابع $y = x + c$ و $y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq b \\ a & ; x = b \end{cases}$ برابر باشند، $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۴

۶۴۲- اگر $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{x+2}{x-3}$ ، حاصل $(g^{-1} \circ f)(2)$ کدام است؟

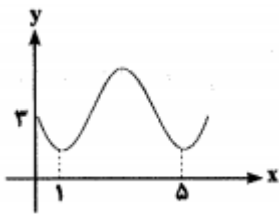
۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۶۴۳- اگر تابع $y = f(x)$ یک تابع اکیداً نزولی با دامنه \mathbb{R} باشد به طوری که $f(2) = 0$ ، دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x+3}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$ (۲) $(-1, 3)$

۳) $[-3, 2]$ (۴) $[-3, 2)$

۶۴۴- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ای به طول $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

۶۴۵- اگر کوچک‌ترین دوره تناوب تابع $y = \sin^2 mx$ ، برابر با $T = 2$ باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $-\pi$ (۴) 2π

۶۴۶- معادله $\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ چند ریشه در فاصله $[0, 2\pi]$ دارد؟

۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۴۷- اگر $f(x) = \begin{cases} 2; & x \in \mathbb{Z} \\ 3; & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$ کدام است؟

۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۱

۶۴۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{2x^2+ax+b} = +\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt{x^2+3x}}{bx+3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{-5}{2}$ (۴) -۴

۶۴۹- اگر تابع $y = (x^2 + ax + b) \left[\frac{x}{2} \right]$ در بازه $[0, 5]$ پیوسته باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۶۵۰- در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ چه قدر بیشتر است؟

- (۱) $\frac{7}{540}$ (۲) $\frac{11}{540}$ (۳) $\frac{7}{270}$ (۴) $\frac{11}{270}$

۶۵۱- در تابع $y(x) = (x - 2)^2 [x]$ ، حاصل $y''_+(2) + y''_-(2)$ کدام است؟ (نماد $[]$ به معنای جزء صحیح است.)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۵۲- اگر خط $y = 2x - 1$ بر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = 3$ مماس باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر تابع $y = f^2(3x)$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) -۱۵ (۲) -۲۵ (۳) ۳۵ (۴) -۳۵

۶۵۳- شیب خطی که اکستریم‌های نسبی تابع $y = x^3 - 3x - 2$ را به یک‌دیگر متصل می‌کند، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۶۵۴- ماکزیمم مطلق تابع $y = \sin x - 4\sqrt{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۶۵۵- حداکثر مساحت مستطیلی که دو رأس آن بر روی محور x ها و دو رأس آن بر روی منحنی $y = \sqrt{4 - x^2}$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{4}$

۶۵۶- شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۶۵۷- در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{2}{3}$ ، اگر طول وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی ۲ باشد، فاصله کانونی بیضی کدام است؟

۲/۴ (۴) ۲/۲ (۳) ۲/۱ (۲) ۲/۵ (۱)

۶۵۸- در مثلث ABC ، زاویه $A = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

۵۴ (۴) ۳۶ (۳) ۳۲ (۲) ۲۴ (۱)

۶۵۹- اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چه قدر است؟

2π (۴) 4π (۳) 6π (۲) 8π (۱)

۶۶۰- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۶، ۵ و ۱ می‌باشند. کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ‌ترین ضلع آن است؟

$\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

۶۶۱- عدد $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ با کدام یک از اعداد زیر برابر است؟

۲ (۴) $\sqrt{3}$ (۳) ۴ (۲) $2\sqrt{3}$ (۱)

۶۶۲- با توجه به الگوی زیر در کدام مرحله برای اولین بار تعداد پاره‌خطها عددی ۳ رقمی خواهد بود؟



مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

۱۱۹ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۱۸ (۳)

۱۱۵ (۴)

۶۶۳- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد ... $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌ام، کدام است؟

۱۸۵۰ (۴) ۱۸۰۰ (۳) ۱۷۵۰ (۲) ۱۷۰۰ (۱)

۶۶۴- اگر به حقوق تمام کارمندان یک اداره ۲۰٪ اضافه شود، عدد واریانس حقوق‌های این کارمندان چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) تغییر نمی‌کند (۲) $\frac{5}{4}$ برابر می‌شود. (۳) $\frac{36}{25}$ برابر می‌شود. (۴) $\frac{6}{5}$ برابر می‌شود.

۶۶۵- قرینهٔ نقطهٔ $A(2, 1)$ نسبت به کدام یک از خطوط زیر نقطهٔ $A'(-2, 3)$ خواهد شد؟

$y = x - 2$ (۴) $y = 2x + 2$ (۳) $y = x + 2$ (۲) $y = 2x - 2$ (۱)

۶۶۶- در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$$\frac{28}{45} \quad (1) \quad \frac{29}{45} \quad (2) \quad \frac{31}{45} \quad (3) \quad \frac{32}{45} \quad (4)$$

۶۶۷- در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود، تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند. در غیر این صورت ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{2}{3}$ است. با کدام احتمال، فقط ۲ بار موفقیت حاصل می‌شود؟

$$\frac{8}{27} \quad (1) \quad \frac{10}{27} \quad (2) \quad \frac{11}{27} \quad (3) \quad \frac{13}{27} \quad (4)$$

۶۶۸- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ درجه دوم، یک واحد کم‌تر است؟

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (4)$$

۶۶۹- تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

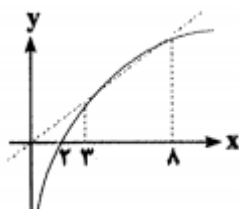
$$1 - \sqrt{1+x} \quad ; \quad x < 0 \quad (1) \quad 1 - \sqrt{1-x} \quad ; \quad x < 1 \quad (2)$$

$$1 + \sqrt{1-x} \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad (3) \quad 1 - \sqrt{1-x} \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad (4)$$

۶۷۰- کارایی کارگر عادی در کارخانه‌ای پس از t ماه، روزانه به تعداد $f(t) = 90 - 40\left(\frac{1}{10}\right)^{0.02t}$ واحد است. پس از چند ماه تجربه کاری روزانه ۷۰ واحد را کامل می‌کند؟ ($\log 2 = 0.3$)

$$10 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

۶۷۱- شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



$$(0, 2] \quad (1)$$

$$[2, 3] \quad (2)$$

$$[2, 8] \quad (3)$$

$$[3, 8] \quad (4)$$

۶۷۲- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$[-4, 2] \quad (1) \quad [-2, 0] \quad (2) \quad [-4, -1] \cup (1, 2] \quad (3) \quad [-4, -2) \cup (0, 2] \quad (4)$$

۶۷۳- اگر برای تابع خطی $f(x)$ داشته باشیم $2f(x-1) + f(2-x) = 3x + 4$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ کدام است؟

$$\frac{1}{9} \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad \frac{5}{9} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (4)$$

۶۷۴- در دایره‌ای به شعاع ۵، اگر طول کمان AB برابر با $\frac{5\pi}{6}$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟ (O مرکز دایره می‌باشد).

- (۱) $12/5$ (۲) $6/25$ (۳) 25 (۴) 6

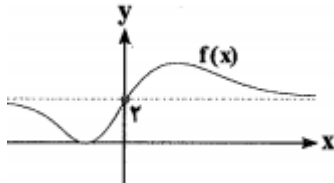
۶۷۵- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۶۷۶- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۶۷۷- اگر $f(x)$ نموداری به صورت روبه‌رو داشته باشد و $g(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$ کدام است؟



- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) صفر (۴) 1

۶۷۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -4 (۳) 3 (۴) 5

۶۷۹- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۸۰- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطهٔ $x = 1$ با نمو متغیر $(0/2)$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کم‌تر است؟

- (۱) $\frac{1}{42}$ (۲) $\frac{1}{21}$ (۳) $\frac{3}{42}$ (۴) $\frac{2}{21}$

۶۸۱- اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) مشتق ندارد.

۶۸۲- اگر $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ و $g(x) = \frac{\cos x}{x}$ باشد، حاصل $f'f + g'g$ در نقطهٔ $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

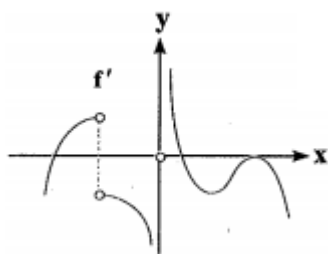
۶۸۳- به ازای چه مقادیری از m ، تابع $y = |x^2 + mx + 3|$ ۳ نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) $|m| < 2\sqrt{3}$ (۲) $|m| > \sqrt{3}$ (۳) $|m| > 2\sqrt{3}$ (۴) $|m| < 3$

۶۸۴- اگر تابعی به صورت $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشند، m کدام مقدار زیر نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) -۵ (۳) -۲ (۴) ۲

۶۸۵- f تابعی در \mathbb{R} پیوسته است و نمودار تابع مشتق آن به صورت زیر می‌باشد. $y = f(x)$ چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۲

۶۸۶- در مورد خروج از مرکز یک بیضی، کدام مورد نا درست است؟

(۱) عددی است بین صفر و یک.

(۲) هر چه به صفر نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر است.

(۳) هر چه به یک نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر است.

(۴) دو بیضی با خروج از مرکز یکسان الزاماً فاصله کانونی برابر دارند.

۶۸۷- شعاع دایره‌ای با حداقل مساحت که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطه $(1, -1)$ بگذرد، کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۶۸۸- اگر نقطه O محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث ABC باشد، رئوس B و C نسبت به دایره‌ای به شعاع OA و مرکز O چگونه‌اند؟

(۱) هر دو داخل دایره هستند.

(۲) هر دو روی دایره هستند.

(۳) هر دو خارج دایره هستند.

(۴) بستگی به نوع مثلث هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

۶۸۹- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) در رأس A ، خط عمودی بر AC نیمساز زاویه داخلی C را در D قطع می کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD برابر کدام است؟

- (۱) AM (۲) MD (۳) MC (۴) $\frac{1}{2}AC$

۶۹۰- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، قاعده BC را به اندازه ساق تا نقطه D امتداد می دهیم. اگر زاویه خارجی رأس A از مثلث ABD برابر 102° درجه باشد، کوچک ترین زاویه مثلث ABC ، چند درجه است؟

- (۱) 34° (۲) 38° (۳) 42° (۴) 44°

۶۹۱- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

- (۱) 2 (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) 3

۶۹۲- از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_2(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه 8 ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۶۹۳- میانگین طول اضلاع مربع هایی 15 واحد با ضریب تغییرات $\frac{1}{2}$ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع ها کدام است؟

- (۱) 229 (۲) 232 (۳) 234 (۴) 236

۶۹۴- هر یک از ارقام $1, 2, 3, 4, 5$ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن ها را کنار هم قرار می دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل، مضرب 3 می باشد؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۶۹۵- مجموع جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (۲) $\left(1, \frac{5}{3}\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ (۳) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ (۴) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$

۶۹۶- احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $\frac{1}{9}$ و برای شخص B برابر $\frac{1}{8}$ است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟

- (۱) $\frac{1}{92}$ (۲) $\frac{1}{94}$ (۳) $\frac{1}{96}$ (۴) $\frac{1}{98}$

۶۹۷- آزمایشی فقط دو نتیجه دارد، احتمال پیروزی در هر بار $\frac{3}{4}$ است. در تکرار 6 بار این آزمایش مستقل، احتمال 4 پیروزی چند برابر احتمال 3 بار پیروزی است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۶۹۸- در یک دنباله هندسی $a_2 = 5$ می‌باشد. از جمله سوم دنباله هندسی چه تعدادی کم کنیم تا ۳ جمله نخست آن تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۴ بدهند؟

- ۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

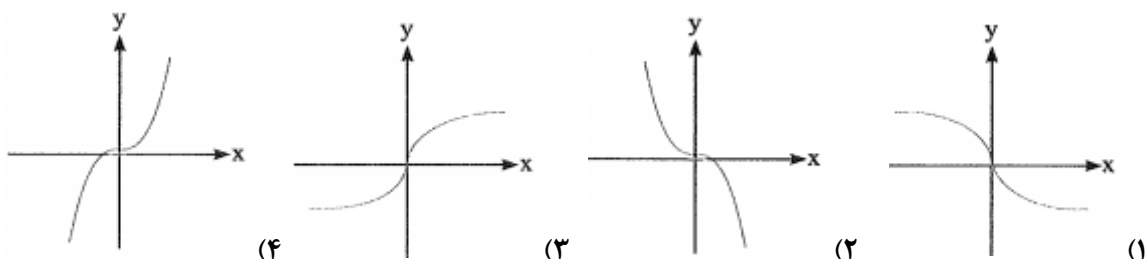
۶۹۹- معادله $[x^2] + [x] = x + 4$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۷۰۰- تمام مقادیر قابل قبول برای m کدام باشد تا تابع $y = x^2 - mx + 1 - m$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات عبور کند؟

- ۱ (۱) $m > 1$ ۲ (۲) $m < 1$ ۳ (۳) $0 < m < 1$ ۴ (۴) $1 < m < 3$

۷۰۱- اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



۷۰۲- کدام یک از توابع زیر یک به یک می‌باشند؟

۱ (۱) $y = \sin x + \cos 2x$ ۲ (۲) $y = x^3 - x$

۳ (۳) $y = x^3 + \sqrt{x} + 2$ ۴ (۴) $y = x + |x|$

۷۰۳- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۶ (۴)

۷۰۴- تابع $f(x) = \begin{cases} 4x+1 & ; x \geq 0 \\ x+\sqrt[3]{x} & ; x < 0 \end{cases}$ مفروض است. تعداد نقاط برخورد f و f^{-1} کدام است؟

- ۱ (۱) صفر ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۷۰۵- اگر برای تابع متناوب $y = f(x)$ داشته باشیم $f(x+3) + f(x) = 0$ ، مقدار $f(29)$ با کدام مقدار زیر الزاماً برابر است؟

- ۱ (۱) $f(-1)$ ۲ (۲) $f(0)$ ۳ (۳) $f(1)$ ۴ (۴) $f(2)$

۷۰۶- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{3}{8}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

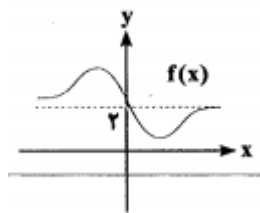
۷۰۷- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟

$k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۱)

۷۰۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آن گاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

۷۰۹- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد و $g(x) = [x^3 - x]$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$ کدام است؟



- ۶ (۱)
- ۵ (۲)
- ۴ (۳)

(۴) وجود ندارد.

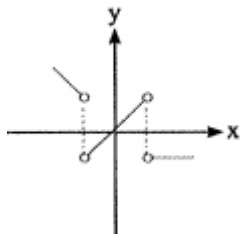
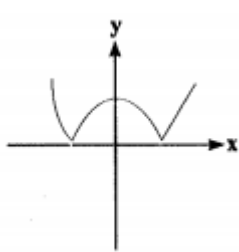
۷۱۰- اگر تابع $y = (x^2 - 1)[x^2]$ در بازهٔ $(-\sqrt{2}, \alpha)$ پیوسته باشد، حداکثر مقدار α کدام است؟

صفر (۴) -۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۲) ۱ (۱)

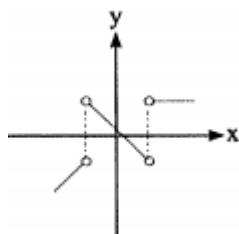
۷۱۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

۱۵ (۴) ۱۲ (۳) -۱۸ (۲) ۲۱ (۱)

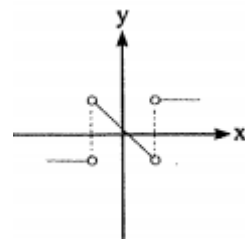
۷۱۲- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y = f'(x)$ کدام می‌تواند باشد؟ (قسمت‌های منحنی سهمی است.)



- (۲)
- (۱)



(۴)



(۳)

۷۱۳- فاصله دو نقطه از منحنی $y = \frac{2}{x}$ که در آن‌ها خط مماس بر خط $y = 2x$ عمود است، کدام می‌باشد؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۷۱۴- مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ ، کدام است؟

- (۱) -18 و 24 (۲) -45 و 27 (۳) -36 و 27 (۴) -27 و 36

۷۱۵- اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} + 5$ (۴) $5\sqrt{2}$

۷۱۶- تابع $y = \frac{1}{|x|+2}$ در همسایگی نقطه $x = 0$ چگونه است؟

- (۱) ماکزیمم نسبی دارد. (۲) مینیمم نسبی دارد. (۳) صعودی است. (۴) نزولی است.

۷۱۷- در کدام حالت سطح مقطع ایجادشده توسط برش یک صفحه بر روی یک سطح مخروطی هذلولی است؟

(۱) صفحه عمود بر محور باشد و از رأس آن عبور نکند.

(۲) صفحه موازی محور باشد و از رأس آن عبور نکند.

(۳) صفحه با مولد سطح مخروطی موازی و از رأس آن عبور نکند.

(۴) صفحه با محور سطح مخروطی غیر عمود باشد و با مولد موازی نباشد و از رأس نیز نگذرد.

۷۱۸- دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) 3 و 1 (۲) 4 و 1 (۳) 3 و 2 (۴) 4 و $1/5$

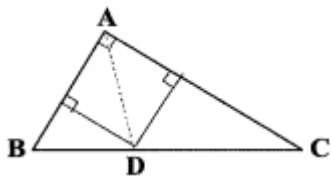
۷۱۹- اگر پاره خط OH در نقطه H بر یک ضلع مثلث عمود باشد و نقطه O محل برخورد دو نیمساز داخلی این

مثلث باشد، دایره رسم شده به مرکز O و شعاع OH نسبت به اضلاع مثلث چگونه است؟

(۱) مماس (۲) برخورد دارند اما می‌توانند مماس یا قاطع باشند.

(۳) فاقد نقطه برخورد (۴) اضلاع مثلث بر دایره عمود می‌باشند.

۷۲۰- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم 3 و 7 واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟



$$1/4\sqrt{2} \quad (1)$$

$$2/1 \quad (2)$$

$$2/8 \quad (3)$$

$$2/1\sqrt{2} \quad (4)$$

۷۲۱- دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (4) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

۷۲۲- از دو معادله دو مجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار y کدام است؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۷۲۳- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

$$\frac{4}{11} \quad (4) \quad \frac{7}{22} \quad (3) \quad \frac{3}{11} \quad (2) \quad \frac{5}{22} \quad (1)$$

۷۲۴- مجموع جواب نامعادله $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ ، به کدام صورت است؟

$$\frac{1}{2} < x < 3 \quad (4) \quad -\frac{1}{2} < x < 3 \quad (3) \quad x < 3 \quad (2) \quad x < \frac{1}{2} \quad (1)$$

۷۲۵- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

$$2x \quad (4) \quad x \quad (3) \quad x+1 \quad (2) \quad x-1 \quad (1)$$

۷۲۶- در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

$$16/2 \quad (4) \quad 15/8 \quad (3) \quad 15/6 \quad (2) \quad 15/2 \quad (1)$$

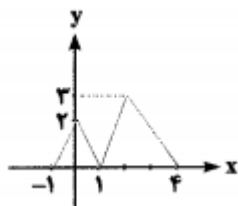
۷۲۷- ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

$$-x|x| \quad (4) \quad x|x| \quad (3) \quad x^2 \quad (2) \quad -x^2 \quad (1)$$

۷۲۸- کمترین فاصله نقاط روی منحنی $y = x^2 - x$ از خط $y + 5 = x$ کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (4) \quad 3\sqrt{2} \quad (3) \quad 2\sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{2} \quad (1)$$

۷۲۹- اگر تابع $y = f(x)$ متناوب با دوره تناوب ۵ و قسمتی از نمودار آن به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین منحنی و محور x ها در بازه $(-26, -24)$ کدام است؟



۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴)

۷۳۰- در دنباله حسابی $\dots, 2, x, \frac{1}{2}$ اگر ۲ واحد به قدر نسبت اضافه کنیم چه عددی را باید از جمله اول کم کنیم تا حاصل جمع ۹ جمله اول ثابت بماند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۴)

۷۳۱- دانش آموزی به ۶ پرسش ۴ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال ۳ پرسش را پاسخ درست داده است؟

۱ (۱) $\frac{135}{1024}$ ۲ (۲) $\frac{135}{512}$ ۳ (۳) $\frac{45}{512}$ ۴ (۴) $\frac{27}{512}$

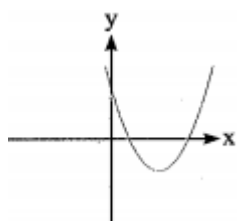
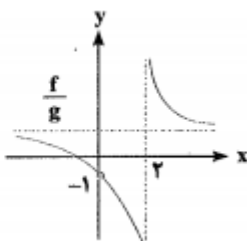
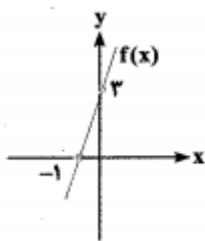
۷۳۲- میانۀ یک مجموعه از داده‌های مرتب‌شده، برابر میانگین چهارمین و پنجمین داده و مجموع کل داده‌ها مساوی با ۳۶۰ شده است، میانگین کل داده‌ها چه قدر است؟

۱ (۱) ۳۰ ۲ (۲) ۴۰ ۳ (۳) ۴۵ ۴ (۴) ۳۶

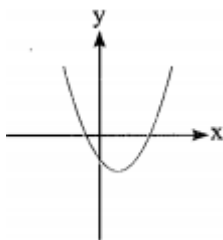
۷۳۳- اگر $f = \{(-1, m), (2, 1 - m^2), (0, 4)\}$ و $g(x) = 3x + 1$ باشد، تمام مقادیر قابل قبول برای m چقدر باشد تا تابع $y = f - g$ یک تابع اکیداً نزولی شود؟

۱ (۱) $m > 1$ ۲ (۲) $m < 1$ ۳ (۳) $-1 < m < 1$ ۴ (۴) $m < -1$

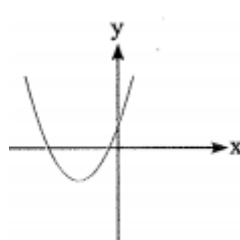
۷۳۴- اگر نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت زیر باشند، نمودار سهمی $y = f(x)g(x)$ کدام است؟



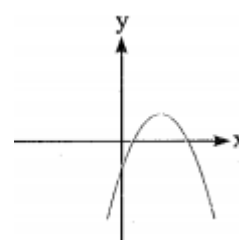
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۷۳۵- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x$ ، کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

۷۳۶- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ ، کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۱)$$

۷۳۷- در مثلثی یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه و ضلع مقابل به این زاویه $3\sqrt{7}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد، اندازهٔ ضلع سوم کدام است؟

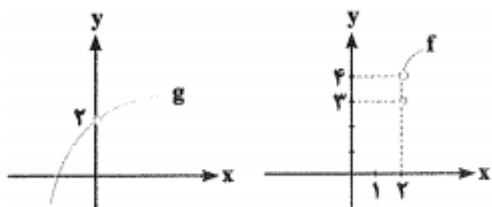
$$3\sqrt{2}, 5\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{3}, 4\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$۴, ۷ \quad (۲)$$

$$۳, ۶ \quad (۱)$$

۷۳۸- اگر نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به صورت زیر باشد،



حاصل $f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right)$ کدام است؟

$$۳ \quad (۲)$$

(۱) وجود ندارد.

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

۷۳۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$\text{صفر} \quad (۳)$$

$$-\infty \quad (۲)$$

$$+\infty \quad (۱)$$

۷۴۰- تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته است؟

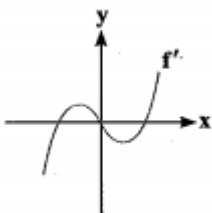
$$۲ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-۱ \quad (۲)$$

$$-۲ \quad (۱)$$

۷۴۱- اگر نمودار $y = f'(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع f کدام می‌تواند باشد؟



۷۴۲- دامنهٔ تابع مشتق $y = \begin{cases} |x^2 - 4| & ; |x| \leq 5 \\ \sqrt{|x|} & ; |x| > 5 \end{cases}$ کدام است؟

$$(-5, +\infty) - \{2, -2, 5\} \quad (۴) \quad \mathbb{R} - \{2, -2, 5, -5\} \quad (۳) \quad (-5, +\infty) - \{\pm 2\} \quad (۲) \quad \mathbb{R} - \{2, -2, 5\} \quad (۱)$$

۷۴۳- چه قدر m باشد تا تابع $y = mx + 2 + 2|x|$ در نقطهٔ گوشه دارای دو نیم‌مماس راست و چپ عمود بر هم باشد؟

- (۱) ± 1 (۲) $\pm\sqrt{2}$ (۳) $\pm\sqrt{3}$ (۴) صفر

۷۴۴- تابع $y = \frac{1}{x^2-x-2}$ در کدام یک از بازه‌های زیر صعودی است؟

- (۱) $(-1, 2)$ (۲) $(-2, \frac{1}{2})$ (۳) $(0, 3)$ (۴) $(-3, -2)$

۷۴۵- اگر تابع $y = \frac{x}{mx^2+1}$ اکسترممی برابر با ۲ داشته باشد، کدام مقدار زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۷۴۶- تعداد نقاط بحرانی متعلق به دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۷۴۷- دو دایره $x^2 + y^2 = 2x + 4$ و $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

- (۱) متخارج (۲) مماس داخل (۳) مماس خارج (۴) متقاطع

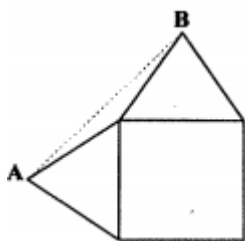
۷۴۸- در چهارضلعی محدب $ABCD$ رابطه $\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{5\hat{D}}{12}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین

نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل A و C ، چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۷۴۹- بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصله AB چند

واحد است؟



(۱) $1 + 2\sqrt{3}$

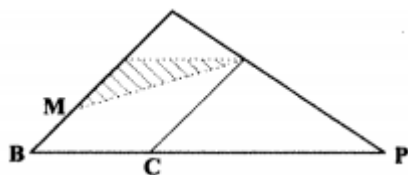
(۲) $3 + \sqrt{3}$

(۳) $3 + \sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

۷۵۰- در شکل زیر، نقطه M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده،

چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



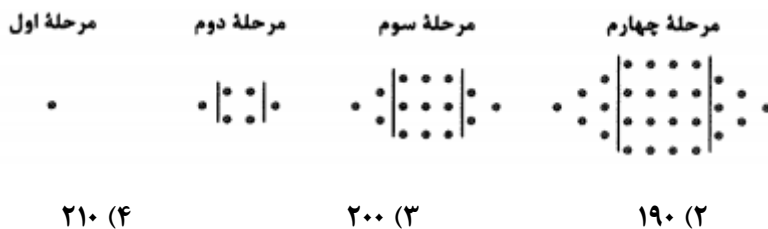
(۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{9}$

(۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{3}{16}$

۷۵۱- اگر $x^2 - x < 0$ باشد، کدام نامساوی زیر الزاماً درست است؟

- (۱) $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$ (۲) $\sqrt[5]{x^2} < \sqrt[3]{x}$ (۳) $x^2 < x^3$ (۴) $\sqrt[3]{x^4} > x$

۷۵۲- با توجه به الگوی زیر، در مرحله دهم چه تعداد نقطه خواهیم داشت؟



۷۵۳- قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۵۴- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) -۱ (۴) -۰/۵

۷۵۵- در یک متوازی‌الاضلاع با زاویه 60° درجه، اندازه‌های دو ضلع آن $5 + \sqrt{6}$ و $5 - \sqrt{6}$ می‌باشد. اندازه قطر بزرگ آن، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۷۵۶- میانگین طول ضلع مربع‌هایی ۲۵ واحد، با ضریب تغییرات 0.06 است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) $626/5$ (۲) $627/25$ (۳) $627/75$ (۴) $628/5$

۷۵۷- دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{5}{18}$

۷۵۸- به ازای کدام مقدار m ، معادله درجه دوم $(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

- (۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$ (۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

۷۵۹- اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

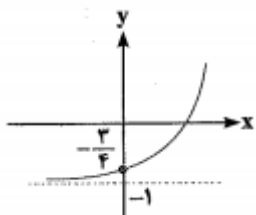
۷۶۰- در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ فاقد نقطه مشترک

۷۶۱- اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(3-x) + 2f(2) = x^2$ باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۴۳/۳ (۴) ۴۶/۳ (۳) ۴۵/۳ (۲) ۴۷/۳ (۱)

۷۶۲- اگر نمودار تابع $y = a + \left(\frac{1}{2}\right)^{b-x}$ به صورت زیر باشد، $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{1}{2}$

۲) -2

۳) $\frac{1}{2}$

۴) 2

۷۶۳- حاصل جمع طول پاره‌خط‌های تشکیل‌دهنده نمودار تابع $y = |x| - \left[\frac{x}{2}\right]$ در بازه $[-2, 4]$ کدام است؟

۸√۲ (۴) ۲√۲ (۳) ۶√۲ (۲) ۴√۲ (۱)

۷۶۴- ۶۰٪ دانشجویان پزشکی دانشگاه تهران دختر هستند که ۲۰٪ دختران و ۴۰٪ پسران این رشته دانشگاه قدی بالای ۱/۷۰ متر دارند. یک نفر از این دانشگاه را انتخاب می‌کنیم، اگر این شخص قدی بالای ۱/۷۰ متر داشته باشد، احتمال آن که دختر باشد کدام است؟

۲/۷ (۴) ۴/۷ (۳) ۳/۷ (۲) ۵/۷ (۱)

۷۶۵- اگر $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ و انتهای کمان x در ربع چهارم باشد، حاصل $2 \sin x + \cos x$ کدام است؟

$-\frac{4\sqrt{13}}{13}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ (۳) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ (۲) $\frac{8\sqrt{13}}{13}$ (۱)

۷۶۶- جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{4}$ (۱)

۷۶۷- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

۲ (۴) ۱ (۳) صفر (۲) -3 (۱)

۷۶۸- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $g(x) = \begin{cases} 2 & ; x \geq 3 \\ 3 & ; x < 3 \end{cases}$ باشد، حد چپ تابع $y = (g \circ f)(x)$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) وجود ندارد. (۴)

۷۶۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

- (۱) -۱۱۲ (۲) -۹۶ (۳) -۸۴ (۴) -۷۲

۷۷۰- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(1+x) & ; x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است، کدام است $f(2)$ ؟

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) ۱ (۴) صفر

۷۷۱- اگر $f(x) = 1 - |x|$ باشد، تابع $y = (f \circ f)(x)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) صفر

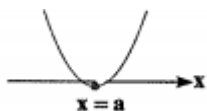
۷۷۲- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[0, 3]$ ، از آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x = \sqrt{2}$ چه قدر کمتر است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۷۷۳- اگر به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $f'(a) \neq 0$ باشد و خط $y = m$ بر تابع $y = f(x^2 - 4x)$ مماس باشد، m کدام است؟

- (۱) $f(2)$ (۲) $f(4)$ (۳) $f(-4)$ (۴) $f(-2)$

۷۷۴- اگر نمودار $f'(x)$ در همسایگی نقطه $x = a$ به صورت زیر باشد، تابع f در همسایگی نقطه $x = a$ چگونه است؟



- (۱) مینیمم نسبی (۲) ماکزیمم نسبی (۳) صعودی (۴) نزولی

۷۷۵- تعداد نقاط بحرانی تابع $y = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۷۶- به ازای کدام مقدار a تابع $y = x^2 + \frac{a}{x}$ دارای ماکزیمم نسبی است؟

- (۱) $|a| > 2$ (۲) $a < 0$ (۳) $a > 0$ (۴) هیچ مقدار a

۷۷۷- مشخص کنید که در مورد خروج از مرکز بیضی‌های رسم شده می‌تواند درست باشد؟

$$\begin{cases} e_1 = \frac{2}{5} \\ e_2 = \frac{3}{5} \\ e_3 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (1)$$



$$\begin{cases} e_1 = \frac{3}{5} \\ e_2 = \frac{2}{5} \\ e_3 = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{5} \\ e_2 = \frac{3}{5} \\ e_3 = \frac{2}{5} \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{5} \\ e_2 = \frac{2}{5} \\ e_3 = \frac{3}{5} \end{cases} \quad (۴)$$

۷۷۸- فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{5}$

۷۷۹- در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع و میانه نظیر وتر، زاویه ۱۲ درجه با هم ساخته‌اند. کوچک‌ترین زاویه این مثلث، چند درجه است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۸ ۳) ۳۷ ۴) ۳۹

۷۸۰- در یک متوازی‌الاضلاع با زاویه ۶۰ درجه، نیمسازهای دو زاویه مجاور ضلع بزرگ، روی ضلع دیگر آن متقاطع‌اند. اگر محیط این متوازی‌الاضلاع $12\sqrt{3}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $9\sqrt{3}$ ۲) ۱۸ ۳) $12\sqrt{3}$ ۴) $18\sqrt{3}$

۷۸۱- اگر تعیین علامت تابع $f(x) = \frac{(x+1)(x-a)^2(x+b)}{(x-c)}$



به صورت زیر باشد، حاصل $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{9}{4}$

۳) $-\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۷۸۲- در یک دنباله هندسی، جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۱) $2 + \sqrt{3}$ ۲) $5 + 2\sqrt{3}$ ۳) $5 + 4\sqrt{3}$ ۴) $7 + 4\sqrt{3}$

۷۸۳- مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه ضلع متوسط a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{39}$ (۲) $\sqrt{41}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{2}$

۷۸۴- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «SYSTEM» به طوری که Sها کنار هم نباشند، کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۶۰

۷۸۵- میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها، کدام است؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/27$ (۳) $0/28$ (۴) $0/33$

۷۸۶- چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

- (۱) $\frac{19}{48}$ (۲) $\frac{41}{96}$ (۳) $\frac{23}{48}$ (۴) $\frac{55}{96}$

۷۸۷- همه مقادیر ممکن برابر m تا معادله $x^4 - mx^2 + 1 - m^2 = 0$ دو ریشه متمایز داشته باشد، کدام است؟

- (۱) $|m| < 1$ (۲) $|m| > 1$ (۳) $m > 1$ (۴) $m < -1$

۷۸۸- در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{31}{168}$ (۲) $\frac{11}{56}$ (۳) $\frac{17}{84}$ (۴) $\frac{13}{56}$

۷۸۹- مجموعه جواب نامعادله $|x - 2| < x^2 - 2x$ به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$

۷۹۰- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$ (۲) $-\frac{1}{2} \sin^2 2x$ (۳) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$ (۴) $\frac{1}{2} \cos^2 2x$

۷۹۱- ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R}$ (۲) $y = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$y = x|x|; x \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$y = x|x|; x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (۳)$$

۷۹۲- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$, $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

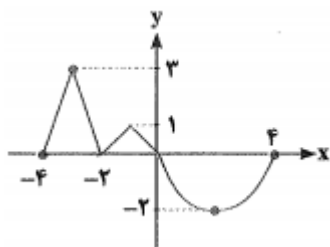
$$۷/۵ \quad (۴)$$

$$۷ \quad (۳)$$

$$۶/۵ \quad (۲)$$

$$۶ \quad (۱)$$

۷۹۳- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، برد تابع $y = 3 - 2f(1 - 4|x|)$ کدام است؟



$$[-4, 6] \quad (۱)$$

$$[0, 7] \quad (۲)$$

$$[-3, 7] \quad (۳)$$

$$[3, 7] \quad (۴)$$

۷۹۴- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

$$\frac{5}{14} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{14} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

۷۹۵- از دو معادله $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟

$$۹ \quad (۴)$$

$$۸ \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۶ \quad (۱)$$

۷۹۶- مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$11\pi \quad (۴)$$

$$10\pi \quad (۳)$$

$$9\pi \quad (۲)$$

$$8\pi \quad (۱)$$

۷۹۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{-1}{3}\right)^-} \left[\frac{-1}{x}\right]$ کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

۷۹۸- اگر برای تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ کدام گزینه زیر الزاماً درست است؟

(۱) حد $[f(x)]$ نیز در $x = 3$ برابر ۳ است.

(۲) تابع در $x = a$ تعریف می‌شود و $f(a) = 3$ است.

(۳) تابع در هر دو همسایگی راست و چپ $x = a$ تعریف شده است.

(۴) تابع $y = \sqrt{f(x) - 3}$ در $x = a$ حدی برابر با صفر دارد.

۷۹۹- به ازای چه مقدار m تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x-2}{x-1} & ; x \neq 1 \\ m & ; x = 1 \end{cases}$ در \mathbb{R} پیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۰۰- چنانچه تابع $y = \sqrt[3]{x^4 - 2x^3}$ در نقطه $a =$ مشتق ناپذیر باشد، اما خط مماس داشته باشد، a چند مقدار مختلف را می تواند بپذیرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۸۰۱- اگر تابع $y = f(x)$ مشتق پذیر و همواره بزرگ تر از یک باشد، مشتق تابع $y(x) = \frac{(x^2-2x)f(x)}{f(2x-2)}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲

(۳) ۴ باید ضابطه $f(x)$ مشخص باشد.

۸۰۲- اگر $f(x) = x^2|x-2|$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) وجود ندارد.

۸۰۳- کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ ، کدام است؟

- (۱) -۳۶ (۲) -۳۲ (۳) -۲۴ (۴) -۱۸

۸۰۴- تابع $y = \frac{x+1}{x-2}$ در کدام یک از بازه های زیر اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(3, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 3)$ (۳) $(-1, 4)$ (۴) هر ۳ گزینه صحیح است.

۸۰۵- تعداد اکسترمم های نسبی تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

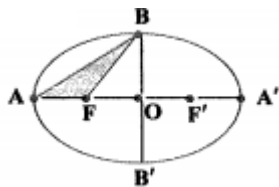
۸۰۶- اگر دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(3, 2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، معادله دایره کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 + 4x = 1$ (۲) $x^2 + y^2 = 4y + 1$

(۳) $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 = 4x + 1$

۸۰۷- اگر طول قطر کوچک یک بیضی ۴ و خروج از مرکز آن $\frac{1}{2}$ باشد، مساحت ناحیه سایه زده شده کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

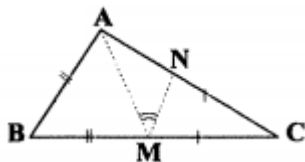


$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

۸۰۸- در شکل مقابل، دو مثلث کناری متساوی الساقین اند و $\widehat{M} = 43^\circ$. اندازه زاویه BAC چند درجه است؟



$$94 \quad (2)$$

$$93 \quad (1)$$

$$97 \quad (4)$$

$$96 \quad (3)$$

۸۰۹- مساحت یک مثلث قائم الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک تر آن ساخته می شود. اندازه میانه وارد بر ضلع متوسط، چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

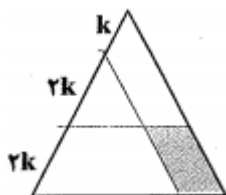
$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

۸۱۰- در شکل مقابل، یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع به نسبت های 2, 2, 1 تقسیم شده است. مساحت متوازی الاضلاع سایه زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



$$18 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

$$24 \quad (4)$$

$$20 \quad (3)$$

۸۱۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد x ، $12 + x$ و $8 - x$ ، به ترتیب سه جمله اول یک دنباله هندسی نزولی هستند. چنان چه بخواهیم بین دو عدد $\frac{x}{2}$ و $3x$ ، ۴ واسطه هندسی درج کنیم قدر نسبت آن کدام است؟

$$\sqrt[5]{4} \quad (4)$$

$$\sqrt[5]{6} \quad (3)$$

$$\sqrt[5]{3} \quad (2)$$

$$\sqrt[5]{5} \quad (1)$$

۸۱۲- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را، حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1/5 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۸۱۳- درصد درس ریاضی در آزمون کنکور سراسری رشته تجربی چه نوع متغیری است؟

(۴) کیفی ترتیبی

(۳) کیفی اسمی

(۲) کمی گسسته

(۱) کمی پیوسته

۸۱۴- میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می باشد. اگر داده های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آن ها افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

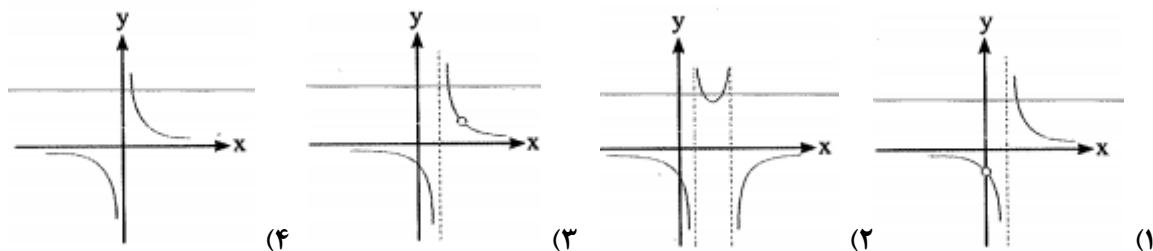
$$9/63 \quad (4)$$

$$9/52 \quad (3)$$

$$9/36 \quad (2)$$

$$9/25 \quad (1)$$

۸۱۵- نمودار تابع $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ کدام است؟



۸۱۶- در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی، خارج می‌شود؟

(۱) $\frac{31}{42}$ (۲) $\frac{37}{42}$ (۳) $\frac{67}{84}$ (۴) $\frac{73}{84}$

۸۱۷- ۶۰ درصد از کارکنان سازمانی مرد و ۴۰ درصد آن‌ها زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آن‌ها، تحصیلات دانشگاهی دارند؟

(۱) $\frac{1}{189}$ (۲) $\frac{1}{192}$ (۳) $\frac{1}{196}$ (۴) $\frac{1}{198}$

۸۱۸- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟

(۱) -۴ (۲) ۴، -۱۲ (۳) -۴، ۱۲ (۴) ۱۲

۸۱۹- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1}$ ، از نقطه $A(0, 4)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸۲۰- از تساوی $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۴، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۸۲۱- اگر $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ و $f(x) = 4x - x^2$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) $\sqrt{4-x^2} - 2$ (۲) $2 + \sqrt{4-x^2}$ (۳) $\sqrt{4+2x-x^2} - 2$ (۴) $2 + \sqrt{4+2x-x^2}$

۸۲۲- اگر نقطه $(\frac{1}{2}, -1)$ محل برخورد تابع $f(x) = ax^3 + bx - \frac{3}{4}$ با معکوسش باشد، حاصل ab کدام است؟

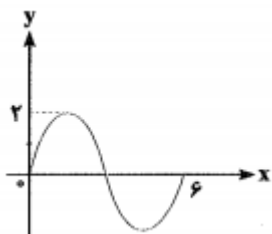
(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۸۲۳- نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

۸۰ (۴) ۷۵ (۳) ۴۵ (۲) ۴۰ (۱)

۸۲۴- در دایره‌ای به شعاع ۳ طول کمان AB برابر π است. در این دایره طول وتر AB کدام گزینه می‌باشد؟

$\frac{3}{2}$ (۴) ۲ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)



۸۲۵- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۱)

$\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$ (۳)

۸۲۶- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)} = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱)

۸۲۷- حد چپ و راست تابع $y = [x] \cot x$ در نقطهٔ $x = 0$ به ترتیب چگونه است

$0, 0$ (۴) $-\infty, +\infty$ (۳) $0, -\infty$ (۲) $0, +\infty$ (۱)

۸۲۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^3+x-10|}{x^2-2x}$ کدام است؟

$6/5$ (۴) $-6/5$ (۳) $-5/5$ (۲) $4/5$ (۱)

۸۲۹- کدام یک از توابع زیر در بازهٔ $[0, 2]$ پیوسته است؟

$y = \left[\frac{x}{2}\right]$ (۴) $y = \sqrt{4x-x^2}$ (۳) $y = \frac{x+2}{2x-1}$ (۲) $y = \tan x$ (۱)

۸۳۰- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطهٔ $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای

آن در نقطهٔ $x = 4$ ، چه قدر کم‌تر است؟

$\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{5}{72}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۱)

۸۳۱- تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & , x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & , x < 1 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ مشتق پذیر است. b کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۸۳۲- مشتق تابع $y = x^2|x-1|$ کدام است؟

$y = 3x^2 - 2x$ (۲) $y = 2x \frac{|x-1|}{x-1}$ (۱)

$$y = \pm(3x^2 - 2x) \quad (۴)$$

$$y = (3x^2 - 2x) \frac{|x-1|}{x-1} \quad (۳)$$

۸۳۳- چه قدر باشد تا تابع $y = \frac{2x-1}{x-m}$ در هر بازه از دامنه تعریفش اکیداً نزولی باشد؟

$$m < 2 \quad (۲)$$

$$m < \frac{1}{2} \quad (۱)$$

(۴) به ازای هیچ مقدار m امکان پذیر نیست.

$$m > \frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$۸۳۴- \text{تعداد اکستریم‌های نسبی تابع } y = \begin{cases} x^2 - 4x & ; x > 0 \\ -3 & ; x = 0 \\ x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

(۱) دو ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی

(۲) یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی

(۳) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی

(۴) سه نقطه مینیمم نسبی

۸۳۵- تابع $y = x|x^2 - 1|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$$۴ \quad (۱) \quad ۳ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۱ \quad (۴)$$

۸۳۶- اگر کم‌ترین و بیشترین فاصله رأس یک بیضی از کانون به ترتیب ۳ و ۱ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

۸۳۷- شعاع دایره‌ای به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (۱) \quad ۳ \quad (۲) \quad 2\sqrt{3} \quad (۳) \quad ۴ \quad (۴)$$

۸۳۸- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، قاعده BC را از هر دو طرف به اندازه ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویه خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است؟

$$۱ \quad (۱) \quad \frac{3}{2} \quad (۲) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۳ \quad (۴)$$

۸۳۹- در مثلث قائم‌الزاویه زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع مثلث رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟



$$2\pi \quad (۱) \quad ۶ \quad (۲)$$

$$۷ \quad (۳) \quad 3\pi \quad (۴)$$

۸۴۰- مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{1}{8}$ مجذور وتر بر آن است. کوچک‌ترین زاویه این مثلث، چند درجه است؟

$$۱۵ \quad (۱) \quad ۱۷/۵ \quad (۲) \quad ۲۲/۵ \quad (۳) \quad ۳۰ \quad (۴)$$

۸۴۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد
 ... (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (1), مجموع جملات در دسته بیستم، کدام است؟

- (۱) ۴۰۱۰ (۲) ۴۰۲۰ (۳) ۴۰۳۰ (۴) ۴۰۴۰

۸۴۲- در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم.
 با کدام احتمال ۱ مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

- (۱) $\frac{30}{91}$ (۲) $\frac{25}{77}$ (۳) $\frac{40}{143}$ (۴) $\frac{50}{143}$

۸۴۳- در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند. اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها
 می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟

- (۱) $\frac{96}{625}$ (۲) $\frac{114}{625}$ (۳) $\frac{122}{625}$ (۴) $\frac{128}{625}$

۸۴۴- به ازای کدام مقدار a ، معادله $x^3 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت
 است؟

- (۱) $a < -4$ (۲) $a > -4$ (۳) $a < 4$ (۴) $a > 4$

۸۴۵- تعداد ریشه‌های معادله $[x] = 3x$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۴۶- معادله دو ضلع یک دوزنقه قائم‌الزاویه به صورت $y = 2x - 3$ و $2y - 4x = 1$ است. معادله خطی که
 وسط دو ساق دوزنقه را به یک‌دیگر متصل می‌کند، کدام است؟

- (۱) $4y + 8x = 5$ (۲) $4y + 5 = 8x$ (۳) $8x + 5 = 4y$ (۴) $4y - 5 = 8x$

۸۴۷- با حذف نقطه $x = 2$ از دامنه تابع $y = x^2 - (m - 1)x + 3$ ، نقطه‌ای از برد این تابع نیز حذف شده
 است. تابع داده شده از کدام نواحی مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) چهارم (۲) سوم و چهارم (۳) سوم (۴) از هر ۴ ناحیه عبور می‌کند.

۸۴۸- اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت، چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض
 آن‌که سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، ماشین سریع‌تر به تنهایی در چند ساعت می‌تواند این کار را
 انجام دهد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۸۴۹- روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر شهر بم و مناطق اطراف آن را لرزاند. مقدار انرژی
 آزاد شده در این زلزله چند Erg بوده است؟ ($\log E = 11/8 + 1/5 M$)

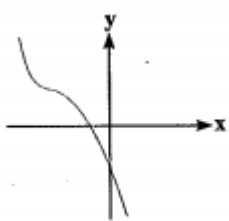
$10^{21/3}$ (۴)

$10^{21/5}$ (۳)

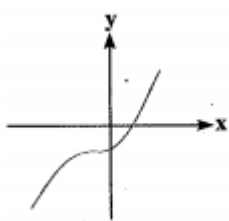
$10^{21/7}$ (۲)

$10^{21/2}$ (۱)

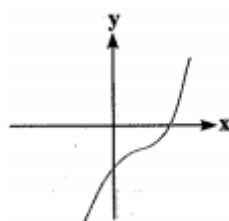
۸۵۰- نمودار تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 10$ کدام است؟



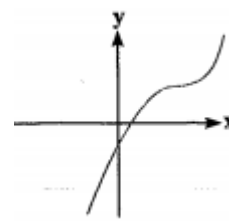
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۸۵۱- میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها $65/44$ می‌باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، کدام است؟

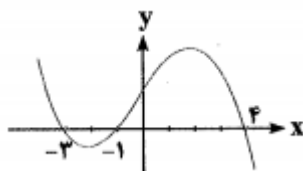
0.25 (۴)

0.2 (۳)

0.15 (۲)

0.12 (۱)

۸۵۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



$[-1,] \cup [0, 6]$ (۱)

$[-3, 1] \cup [0, 2]$ (۲)

$[-5, -3] \cup [-1, 2]$ (۳)

$[-5, -3] \cup [0, 2]$ (۴)

۸۵۳- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ (۴)

$(-2, 0)$ (۳)

$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲)

$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۱)

۸۵۴- تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

$\frac{1}{2}x - 1; -4 < x < 8$ (۴)

$x + 7; x > -4$ (۳)

$\frac{1}{3}x + 2; x > 3$ (۲)

$-x + 7; x > 8$ (۱)

۸۵۵- حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\sin 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$ ، کدام است؟

$\frac{5}{8}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

۸۵۶- اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

۸۵۷- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ (۴)} \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ (۱)}$$

۸۵۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{8} \text{ (۲)} \quad -\frac{1}{6} \text{ (۱)}$$

۸۵۹- تابع $y = (x^2 - 3x + 2)[x^2]$ در کدام یک از نقاط زیر حد ندارد؟

$$\sqrt{2} \text{ (۴)} \quad ۲ \text{ (۳)} \quad ۱ \text{ (۲)} \quad \text{صفر (۱)}$$

۸۶۰- اگر تابع $y = \begin{cases} \frac{-2}{x+a} & ; x > 1 \\ \frac{a}{x-2} & ; x \leq 1 \end{cases}$ در \mathbb{R} پیوسته باشد، a چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

$$۳ \text{ (۴)} \quad ۲ \text{ (۲)} \quad ۱ \text{ (۲)} \quad \text{صفر (۱)}$$

۸۶۱- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو

۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چه قدر کم تر است؟

$$\frac{1}{6} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{24} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{30} \text{ (۱)}$$

۸۶۲- اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2}) - f'_-(\sqrt{2})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$۲ \text{ (۴)} \quad ۱ \text{ (۳)} \quad -۱ \text{ (۲)} \quad -۲ \text{ (۱)}$$

۸۶۳- معادله خط مماس بر منحنی $y = 3^{(1 - \log_3(x^2 - 1))}$ در نقطه $x = \sqrt{2}$ روی آن کدام است؟

$$\sqrt{2}y + x = 4\sqrt{2} \text{ (۴)} \quad 6\sqrt{2}x + 2y = 18 \text{ (۳)} \quad y + 6\sqrt{2}x = 15 \text{ (۲)} \quad y - 6\sqrt{2} = 15 \text{ (۱)}$$

۸۶۴- تابع $y = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x > 0 \\ |x + 1| & ; x \leq 0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$$۴ \text{ (۴)} \quad ۳ \text{ (۳)} \quad ۲ \text{ (۲)} \quad ۱ \text{ (۱)}$$

۸۶۵- m چه قدر باشد تا تابع $y = \frac{2x+m}{x^2+1}$ دارای مینیمم و ماکزیمم نسبی باشد؟

$$m \in \emptyset \text{ (۴)} \quad m \in \mathbb{R} \text{ (۳)} \quad m < 0 \text{ (۲)} \quad m > 0 \text{ (۱)}$$

۸۶۶- حاصل جمع بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \frac{x}{x^2+1}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \quad \text{صفر (۳)} \quad ۲ \text{ (۲)} \quad ۱ \text{ (۱)}$$

۸۶۷- معادله خط وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 = 2x + 4y + 4$ و $(x+1)^2 + y^2 = 4$ کدام است؟

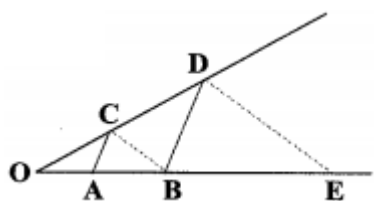
$$3x + 3y + 1 = 0 \text{ (۴)} \quad 4x + 4y + 1 = 0 \text{ (۳)} \quad 2x + 2y + 1 = 0 \text{ (۲)} \quad x + y + 1 = 0 \text{ (۱)}$$

۸۶۸- در مثلث ABC ($\widehat{C} = 24^\circ, \widehat{A} = 90^\circ$)، از رأس C خطی بر CA عمود کرده و بر روی آن، $CD = CB$ را طوری جدا می‌کنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویه \widehat{DBC} چند درجه است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۸

۸۶۹- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، ساق AB را به اندازه $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویه A چند درجه است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶



۸۷۰- در شکل روبه‌رو، دو جفت پاره‌خط موازی اند. $OA = 3$ و $AB = 5$. آن‌گاه اندازه BE کدام است؟

- (۱) $13\frac{1}{3}$ (۲) $12\frac{2}{3}$ (۳) $11\frac{1}{3}$ (۴) $10\frac{2}{3}$

۸۷۱- اگر $x^2 - x < 0$ باشد، کدام یک از نامساوی‌های زیر می‌تواند نادرست باشد؟

(۱) $\sqrt[5]{x^2} > \sqrt[4]{x^3}$ (۲) $\log_2 x < \log_{\frac{1}{3}} x$

(۳) $5^x > 3^x$ (۴) هر ۳ گزینه داده شده صحیح است.

۸۷۲- در یک دنباله هندسی مجموع ۸ جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{5}{32}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۸۷۳- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی یکسان و ۲ کتاب ادبیات یکسان را بین ۷ نفر طوری توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

- (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۱۰ (۳) ۴۲۰ (۴) ۲۱۰

۸۷۴- اگر $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ باشد، مجموعه جواب معادله $(f^{-1}of)(x) = (fof^{-1})(x)$ کدام است؟

- (۱) $[2, +\infty)$ (۲) $[3, +\infty)$ (۳) \mathbb{R} (۴) معادله فاقد جواب می‌باشد.

۸۷۵- دو تاس را با هم می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{7}{18}$ (۴) $\frac{4}{9}$

۸۷۶- در جعبه‌ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

$$\frac{9}{14} \text{ (۴)} \quad \frac{10}{21} \text{ (۳)} \quad \frac{17}{42} \text{ (۲)} \quad \frac{8}{21} \text{ (۱)}$$

۸۷۷- حاصل $[\cos 2] + [\log_{4\sqrt{2}} \sqrt{5}]$ کدام است؟

$$۵ \text{ (۴)} \quad ۴ \text{ (۳)} \quad ۳ \text{ (۲)} \quad ۲ \text{ (۱)}$$

۸۷۸- در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۳۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات کدام است؟

$$۰/۳۷۵ \text{ (۴)} \quad ۰/۳۲۵ \text{ (۳)} \quad ۰/۲۷۵ \text{ (۲)} \quad ۰/۲۲۵ \text{ (۱)}$$

۸۷۹- از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴ کدام است؟

$$۱ \text{ (۴)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

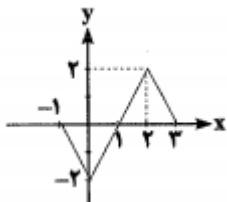
۸۸۰- معادله خط عمود بر نیمساز ربع اول و سوم که فاصله مبدأ مختصات از آن $\sqrt{2}$ باشد، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$y + x = 2\sqrt{2} \text{ (۴)} \quad y - x = 2 \text{ (۳)} \quad y + x = \sqrt{2} \text{ (۲)} \quad y + x = 2 \text{ (۱)}$$

۸۸۱- اگر x و y دو عدد مثبت باشند به طوری که $2x + y = 4$ ، ماکزیمم مقدار xy کدام است؟

$$۴ \text{ (۴)} \quad ۳ \text{ (۳)} \quad ۲ \text{ (۲)} \quad ۱ \text{ (۱)}$$

۸۸۲- اگر تابع $y = f(x)$ متناوب با دوره تناوب ۴ باشد و قسمتی از نمودار آن به صورت زیر باشد، حاصل $f(159)$ کدام است؟



$$۲ \text{ (۱)}$$

$$\text{صفر} \text{ (۲)}$$

$$-۲ \text{ (۳)}$$

$$۱ \text{ (۴)}$$

۸۸۳- تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbb{R} ، چگونه است؟

$$\text{نزولی} \text{ (۱)} \quad \text{صعودی} \text{ (۲)} \quad \text{وارون ناپذیر} \text{ (۳)} \quad \text{یک به یک} \text{ (۴)}$$

۸۸۴- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

$$2x^2 + x + 3 \text{ (۴)} \quad 2x^2 - x + 4 \text{ (۳)} \quad 2x^2 - 2x + 3 \text{ (۲)} \quad 2x^2 + 3x + 1 \text{ (۱)}$$

۸۸۵- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 2 - \frac{3}{2}x$ و $y = |x| - x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{16}{3}$ (۴) ۶

۸۸۶- اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۸۸۷- معادله $\cos 4x = \cos^2 2x$ چند جواب در فاصله $[0, 2\pi]$ دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۶

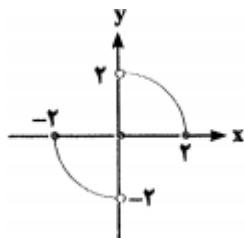
۸۸۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x - |x|}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) وجود ندارد.

۸۸۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آن گاه b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۸۹۰- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت روبه رو باشد، پیوستگی تابع $y = (f \circ f)(x)$ در $x = 0$ چگونه است؟



(۱) فقط از راست پیوسته است.

(۲) فقط از چپ پیوسته است.

(۳) پیوسته است.

(۴) نه پیوستگی راست و نه پیوستگی چپ دارد.

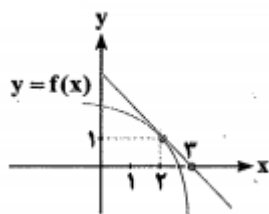
۸۹۱- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{48}$ (۲) $\frac{5}{24}$ (۳) $\frac{7}{24}$ (۴) $\frac{7}{16}$

۸۹۲- اگر $y(x) = \begin{cases} 3x & ; x \geq 1 \\ 5x - 2 & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، مشتق دوم راست و چپ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۵، ۳ (۲) صفر، صفر (۳) صفر، وجود ندارد (۴) وجود ندارد، وجود ندارد

۸۹۳- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد شیب خط قائم بر منحنی $y = f(\sqrt[3]{2x+1})$ در نقطه $x =$



3/5 کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$

- (۲) -۶

(۳) ۶

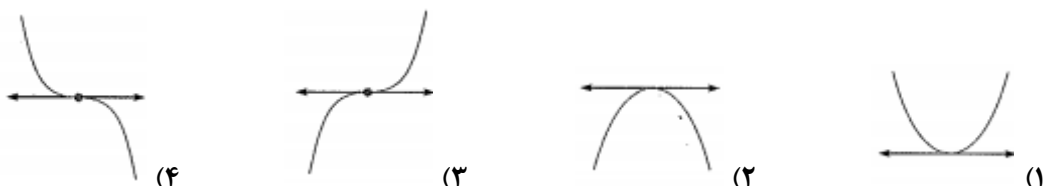
(۴) $-\frac{1}{6}$

۸۹۴- تعداد نقاط بحرانی کدام تابع بیشتر است؟

$$y = x^2 \quad (1) \quad y = x - |x| \quad (2) \quad y = x^3 - x \quad (3) \quad y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

۸۹۵- تمام مقادیر قابل قبول برای m کدام باشد تا نقطه $x = \pi$ در تابع $y = \frac{m}{\cos x}$ به عنوان ماکزیمم نسبی باشد؟

$$m \geq 0 \quad (1) \quad m \leq 0 \quad (2) \quad m > 0 \quad (3) \quad m < 0 \quad (4)$$

۸۹۶- وضعیت تابع $y = \frac{x}{x^2+1}$ در همسایگی نقطه $x = 1$ به کدام صورت است؟

۸۹۷- مربعی با ضلع ۳ واحد در فاصله ۲ واحدی از یک خط راست به گونه‌ای قرار گرفته که دو ضلع آن موازی خط راست می‌باشد. حجم حاصل از دوران این مربع حول خط راست کدام است؟

$$75\pi \quad (1) \quad 63\pi \quad (2) \quad 12\pi \quad (3) \quad 60\pi \quad (4)$$

۸۹۸- دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad \sqrt{5} \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

۸۹۹- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه ضلع سوم، کدام است؟

$$6 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 7/5 \quad (3) \quad 8 \quad (4)$$

۹۰۰- درون مثلثی به اضلاع ۹، ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگری طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

$$1/75 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 1/25 \quad (3) \quad 1/5 \quad (4)$$

۹۰۱- دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۹۰۲- اگر در یک کلاس ۱۹ نفره تعداد دانش‌آموزان عینکی و چپ‌دست $\frac{1}{3}$ برابر تعداد دانش‌آموزان بدون عینک باشند و در این کلاس ۳ دانش‌آموز عینکی راست‌دست باشند، تعداد دانش‌آموزان بدون عینک کدام است؟

۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴)

۹۰۳- حاصل جمع شیب خطوط گذرنده از مبدأ مختصات که با خط $y = x + 3$ زاویه $\frac{\pi}{12}$ می‌سازند، کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱) ۱ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

۹۰۴- سهمی که از صفرهای تابع $y = x^2 - 3x + 2$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه -1 قطع می‌کند، بر کدام خط زیر مماس است؟

$4y = 1$ (۱) $8y = 1$ (۲) $2y = 1$ (۳) $y = 1$ (۴)

۹۰۵- اگر $|x - 1| < 5$ باشد، $\left[\frac{2x+1}{3}\right]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۷ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴)

۹۰۶- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ ، عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

$\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ (۱) $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (۲) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, 2]$ (۳) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$ (۴)

۹۰۷- اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

x (۱) $-x$ (۲) $-x - 1$ (۳) $x + 1$ (۴)

۹۰۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

$-1, -4$ (۱) $-1, 4$ (۲) $1, -4$ (۳) $1, 4$ (۴)

۹۰۹- احتمال قبولی فرد A در یک آزمون 0.84 و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون 0.75 است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

0.92 (۱) 0.94 (۲) 0.96 (۳) 0.98 (۴)

۹۱۰- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

$\frac{41}{120}$ (۱) $\frac{37}{60}$ (۲) $\frac{79}{120}$ (۳) $\frac{31}{60}$ (۴)

۹۱۱- واریانس داده‌های 15, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 19, 20, 21 کدام است؟

۲/۱۶ (۴) ۲/۲۴ (۳) ۳/۱۶ (۲) ۳/۲۴ (۱)

۹۱۲- نقطه $A(1, -2)$ در تابع $y = 1 + f(2x + 1)$ مفروض است. نقطه متناظر A در تابع $y = 2 - f\left(\frac{x}{3}\right)$ کدام است؟

(۱) $(3, 5)$ (۲) $(3, -3)$ (۳) $(9, 5)$ (۴) $(9, -3)$

۹۱۳- اندازه دو قطر از متوازی الاضلاعی ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه 60° درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟

(۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲

۹۱۴- از دو معادله دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x + 2y) = 1 + \log y$ مقدار x کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۹۱۵- از دو معادله $\log(y + x - 1) + \log(2y + 3) = 0$ مقدار xy کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۹۱۶- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $-\frac{3}{8}$

۹۱۷- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $-\frac{3}{8}$

۹۱۸- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x^3 + x^2 + 1}$ باشد، $f\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

۹۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot(x^3 - x)$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) صفر (۴) تعریف نشده است.

۹۲۰- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \\ ax - a + 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هر مقدار a (۴) هیچ مقدار a

۹۲۱- تابع $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

(۱) $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$ (۲) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ (۳) $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ (۴) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$

۹۲۲- اگر به ازای $x < 0$ داشته باشیم $f(2x - x^2) = x^3 - 4x^2 + 1$ ، حاصل $f'(-3)$ کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) $2/75$ (۳) $2/25$ (۴) 2

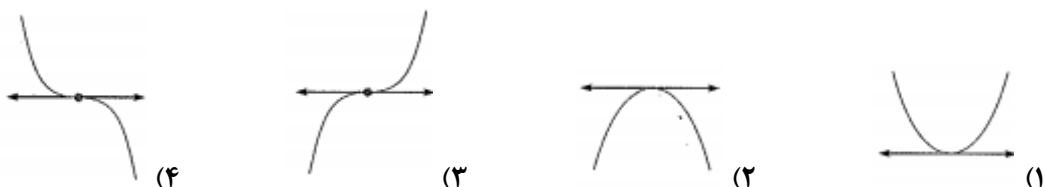
۹۲۳- فاصله خطوط موازی با محور x ها و مماس بر تابع $y = \frac{x}{x^2+2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۹۲۴- تفاضل بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x$ در بازه $[-3, 1]$ کدام است؟

- (۱) 16 (۲) صفر (۳) 20 (۴) 22

۹۲۵- تابع $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2$ در همسایگی $x = 0$ چگونه است؟



۹۲۶- بیضی با کانون‌های $F(1, -2)$ و $F'(5, -2)$ مفروض است. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{2}$ باشد، کدام خط زیر

بر بیضی مورد نظر مماس نیست؟

- (۱) $x = 7$ (۲) $x = -1$ (۳) $y = 2\sqrt{3} - 2$ (۴) $y = 3\sqrt{2} - 2$

۹۲۷- طول مماس رسم شده از نقطه $A(2, 2)$ بر دایره $x^2 + y^2 = 2x$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) $\sqrt{5}$ (۳) 5 (۴) $\sqrt{2}$

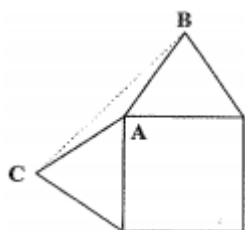
۹۲۸- در چهار ضلعی محدب $ABCD$ رابطه $\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای

داخلی دو زاویه مجاور A و B ، چند درجه است؟

- (۱) 50 (۲) 60 (۳) 70 (۴) 75

۹۲۹- بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع 2 واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته

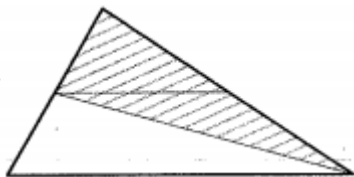
شده است. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟



- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

- (۳) 1 (۴) $\sqrt{3}$

۹۳۰- در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه $\frac{3}{5}$ است. مساحت مثلث سایه زده،



چند برابر مساحت دوزنقه است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{7}{8}$

(۳) $\frac{14}{15}$ (۴) $\frac{15}{16}$

۹۳۱- عدد $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ با کدام یک از اعداد زیر برابر است؟

(۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{7}$ (۴) $\sqrt{8}$

۹۳۲- کدام یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

(۱) $\log(x-2) - \log x$ (۲) $\log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$

(۳) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ (۴) $2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$

۹۳۳- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ‌ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت

انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) -2 (۲) 0.5 (۳) 1 (۴) 1.5

۹۳۴- معکوس تابع $y = x + 2\sqrt{x-4} - 1$ کدام است؟

(۱) $y^{-1}(x) = ((x-2)^2 - 1)^2 + 4$ (۲) $y^{-1}(x) = (\sqrt{x-2} + 1)^2$

(۳) $y^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt{x-2} + 3} + 2$ (۴) $y^{-1}(x) = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + 4$

۹۳۵- با حروف کلمه «ALIREZA» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

(۱) 1420 (۲) 1120 (۳) 1220 (۴) 1320

۹۳۶- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر حاصل ضرب اعداد رو شده فرد باشد، احتمال آن که مجموع اعداد دو تاس

کمتر از ۵ باشد کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۹۳۷- در کیسه A ، ۳ مهره سفید و ۳ مهره قرمز در کیسه B ، ۴ مهره سفید و ۲ مهره قرمز است. اگر یکی از

کیسه‌ها را انتخاب کنیم و ۲ مهره سفید به آن اضافه کنیم و سپس از یکی از کیسه‌ها یک مهره خارج کنیم، احتمال

آن که مهره خروجی قرمز باشد کدام است؟

(۱) $\frac{72}{96}$ (۲) $\frac{56}{96}$ (۳) $\frac{24}{96}$ (۴) $\frac{35}{96}$

۹۳۸- اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a ، برابر ۱۳ باشد، میانه آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۹۳۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

- (۱) $-1 < m < 0$ (۲) $m < 0$ (۳) $2 < m < 8$ (۴) $m > 8$

۹۴۰- به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۴۱- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند، جواب معادله $(fog)(x) = (gof)(x)$ ، کدام است؟

- (۱) -۱، -۷ (۲) ۱، -۷ (۳) -۱، ۷ (۴) ۱، ۷

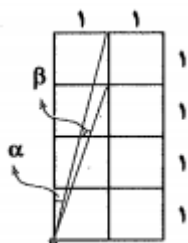
۹۴۲- اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

۹۴۳- مساحت مثلثی با طول اضلاع ۸، ۶ و ۴ واحد، کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{15}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{15}$

۹۴۴- با توجه به شکل زیر، حاصل $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$ کدام است؟ (پاره خط‌ها هر کدام به طول یک می‌باشند).



(۱) $\frac{\sqrt{170}}{17}$

(۲) $-\frac{\sqrt{170}}{17}$

(۳) $-\frac{\sqrt{170}}{10}$

(۴) $\frac{\sqrt{170}}{10}$

۹۴۵- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۹۴۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & |x| < 2 \\ \frac{6}{x} & |x| > 2 \end{cases}$ در چند نقطه فاقد حد می‌باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۴۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 2}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}$ ، کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

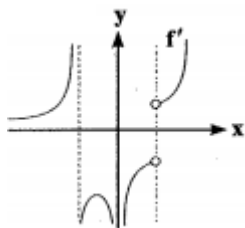
۹۴۸- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & x < 1 \\ x^2 + ax & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

- ۰/۵ (۱) ۱/۲۵ (۲) ۱/۵ (۳) ۲/۵ (۴)

۹۴۹- خط واصل دو نقطه با طول‌های ۱ و -۱ از منحنی $y = x^3 - 3x$ در چند نقطه بر این منحنی مماس است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۵۰- تابع f تابعی در \mathbb{R} پیوسته و نمودار f' به صورت زیر است. در چند نقطه از دامنه تابع f خط مماس وجود ندارد؟



- ۳ (۱)

- ۲ (۲)

- ۱ (۳)

- ۴ (۴) صفر

۹۵۱- اگر برای تابع مشتق‌پذیر f داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4} = 8$ ، مشتق تابع $y = f(x^3 + 6)$ در نقطه $x = -2$ کدام است؟

- ۳۸۴ (۱) -۳۲ (۲) ۱۲ (۳) ۳۸۴ (۴)

۹۵۲- هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت V کیلومتر بر ساعت $320V^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت صرف‌نظر از سرعت قطار برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان است. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر کمترین مقدار ممکن باشد؟

- ۶۰ (۱) ۳۰ (۲) ۵۰ (۳) ۴۰ (۴)

۹۵۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ فقط یک نقطه بحرانی داشته باشد، $2a + b$ کدام است؟

- ۶ (۱) -۷ (۲) -۸ (۳) -۵ (۴)

۹۵۴- تعداد اکستریم‌های نسبی تابع $y = (x - 1)\sqrt{x + 2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) صفر ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۹۵۵- تابع $y = \begin{cases} x^2 - 4x & x < 0 \\ -x + 2 & x \geq 0 \end{cases}$ از لحاظ یکنوایی چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی نه نزولی (۴) هم صعودی هم نزولی

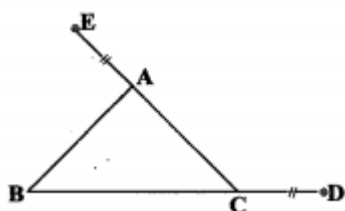
۹۵۶- یک پاره خط به طول 2cm را که با محوری زاویه 30° می سازد حول آن محور دوران می دهیم. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد شکل به دست آمده با صفحه گذرنده از این محور کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۹۵۷- دایره گذرا بر نقطه $(1, -2)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

(۱) $(1, 4)$ (۲) $(1, 5)$ (۳) $(2, 4)$ (۴) $(2, 5)$

۹۵۸- در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، بر روی امتداد دو ضلع BC و CA پاره خطهای $CD = AE$ جدا شده است. زاویه بین امتداد DA با BE چند درجه است؟



(۱) ۴۵

(۲) ۶۰

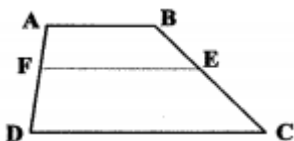
(۳) ۷۵

(۴) ۹۰

۹۵۹- در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگ تر از ضلع AC است. هر یک از میانه های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا D و E امتداد می دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC ، کدام است؟

(۱) کمتر از ۱ (۲) بیشتر از ۱ (۳) مساوی ۱ (۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

۹۶۰- در دوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{5}{2}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{1}{4}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟



(۱) $\frac{11}{20}$ (۲) $\frac{7}{15}$

(۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۹۶۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{R}, x > 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ ، آن گاه مجموعه $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $\mathbb{R} - (2, 5)$ (۲) $\mathbb{R} - [2, 5]$ (۳) $\mathbb{R} - [2, 5]$ (۴) $\mathbb{R} - (2, 5)$

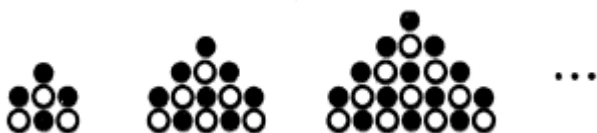
۹۶۲- در شکل n ام از الگوی زیر ۷۸ دایره سفید وجود دارد. در شکل $(2n - 1)$ ام چند دایره سیاه وجود دارد؟

(۱) ۳۱۲

(۲) ۳۲۳

(۳) ۲۷۴

(۴) ۲۶۰



۹۶۳- اگر جملات پنجم، هفتم و دهم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، جمله اول دنباله حسابی کدام است؟

(۱) -۳

(۲) صفر

(۳) ۳

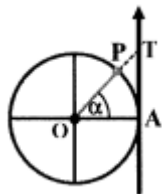
(۴) ۶

۹۶۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، رأس سهمی به معادله $y = x^2 - mx - m - 3$ در ناحیه سوم محورهای مختصات واقع است؟

(۱) $m < 2$ (۲) $m < 0$ (۳) $-2 < m < 2$ (۴) $m < 0 \vee m > 6$

۹۶۵- با توجه به دایره مثلثاتی شکل که $P(3a - 1, a)$ طول PT کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ 

۹۶۶- چندجمله‌ای $2x^3 + ax^2 + x - 2$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. این چندجمله‌ای بر کدام عبارت نیز بخش پذیر است؟

(۱) $2x + 1$ (۲) $2x - 1$ (۳) $x - 3$ (۴) $x - 1$

۹۶۷- اگر دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{3x-4}{ax^2+(a-3)x-(a+6)}$ به صورت $\mathbb{R} - \{\pm\alpha\}$ باشد، مقدار α کدام است؟ ($\alpha > 0$)

(۱) ۲

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) ۳

(۴) $\sqrt{3}$

۹۶۸- قطاری مسیری به طول ۶۰ کیلومتر را با سرعت v کیلومتر بر سرعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند، اگر در بازگشت همان مسیر، از سرعت قطار ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود زمان برگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مجموع زمان رفت و برگشت کدام است؟

۹۷۶- اگر f یک تابعی خطی و $f(x+1) + f(1-x) = 2$ و $f(2) = 3$ باشد، حاصل $(f^{-1} + 2f)(5)$ کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۹۷۷- داروها در بدن انسان پس از انجام متابولیسم روی آنها پس از مدتی دفع می‌شوند. فرض کنید ۲۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 20(0/8)^t$ برحسب میلی‌گرم به دست می‌آید. چه درصدی از این دارو بعد از ۲ ساعت از بین می‌رود؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۷۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۹۷۸- اگر نمودار رسم‌شده مربوط به تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ باشد و مساحت قسمت رنگ‌شده برابر با ۲۰ واحد مربع باشد، مقدار تابع در $x = 32$ کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۱۴

۹۷۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 x}{2 \sin^2 x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۰/۵ (۳) ۱ (۴) -۰/۵

۹۸۰- در تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2-1| & x < 1 \\ x+|x-1| & x \geq 1 \end{cases}$ مقدار m کدام باشد تا f در $x = 1$ پیوسته شود؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) صفر (۴) -۴

۹۸۱- تابع $f(x) = (2x+a)\sqrt{x^2-6x+9}$ در تمام نقاط \mathbb{R} مشتق پذیر است. مقدار a کدام است؟

- (۱) هر مقدار a (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار a

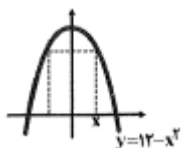
۹۸۲- اگر $f(x) = \sqrt{2x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x}+2$ باشد، شیب خط مماس بر نمودار $f \circ g$ در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

۹۸۳- در تابع با ضابطه $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + a$ مقدار مینیمم نسبی آن $\frac{1}{3}$ می‌باشد. شیب خطی که نقطه ماکزیمم نسبی تابع را به نقطه مینیمم نسبی وصل می‌کند، کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{4}{3} \text{ (۳)} \quad -\frac{2}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

۹۸۴- محیط مستطیلی با بیشترین مساحت کدام باشد که دو رأس آن روی محور طولها و دو رأس دیگرش بالای محور طولها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند؟



۲۰ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۲۸ (۴)

۹۸۵- در چند جایگشت پنج حرفی از حروف کلمه RIGHT، حروف I و T کنار هم قرار دارند؟

$$۲۴ \text{ (۴)} \quad ۴۸ \text{ (۳)} \quad ۷۲ \text{ (۲)} \quad ۳۶ \text{ (۱)}$$

۹۸۶- در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال این که عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، ۰/۸، برای نوع B، ۰/۹، و برای نوع C، ۰/۵ می باشد. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می آوریم. تقریباً با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

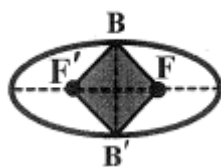
$$۰/۷ \text{ (۴)} \quad ۰/۶ \text{ (۳)} \quad ۰/۵ \text{ (۲)} \quad ۰/۴ \text{ (۱)}$$

۹۸۷- خط $4y - 3x = 4$ نسبت به دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$ چگونه است؟

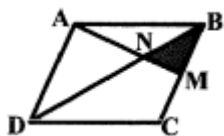
(۱) خارج دایره (۲) مماس بر دایره

(۳) دایره را در دو نقطه قطع می کند. (۴) از مرکز دایره می گذرد.

۹۸۸- نقاط F, F' کانون های بیضی و B, B' دو سر قطر کوچک بیضی اند. خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، و مساحت چهارضلعی $BFB'F'$ برابر با ۱۸ می باشد. طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟


 $3\sqrt{5} \text{ (۱)}$
 $3\sqrt{10} \text{ (۲)}$
 $2\sqrt{5} \text{ (۳)}$
 $2\sqrt{10} \text{ (۴)}$

۹۸۹- در متوازی الاضلاع ABCD نقطه M وسط ضلع BC است و پاره خط AM، قطر BD را در N قطع کرده است. مساحت قسمت رنگی چه کسری از مساحت متوازی الاضلاع است؟



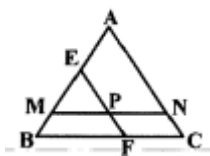
$\frac{1}{10}$ (۱)

$\frac{1}{11}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۴)

۹۹۰- مطابق شکل در مثلث ABC خط EF به موازات AC از وسط MN می‌گذرد و می‌دانیم $AB = MN = 8$ ، $BC = 10$ طول MB کدام است؟



$\frac{1}{6}$ (۱)

$\frac{1}{8}$ (۲)

۱ (۳)

$\frac{1}{75}$ (۴)

۹۹۱- با فرض $A \cap C = \emptyset$ ، حاصل $[(A \cup B)' \cap C]$ کدام است؟

$C - B$ (۱) C (۲) $A' \cap B'$ (۳) گزینه ۱ و ۲ (۴)

۹۹۲- در دنباله $5, 12, 22, 35, 51, \dots$ با جمله عمومی درجه دوم، چندمین جمله دنباله ۷۱۵ می‌باشد؟

۲۰ (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴)

۹۹۳- $x + 1, 2x + 1, 4x - 2$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی‌اند، هم‌چنین $x, 1/5, y, z$ جملات متوالی از یک دنباله هندسی‌اند، حاصل $x + z$ کدام است؟

$\frac{25}{8}$ (۱) $\frac{27}{8}$ (۲) $\frac{17}{4}$ (۳) $\frac{15}{4}$ (۴)

۹۹۴- اگر $\sin x = \sqrt{\frac{2 \tan x}{2 \tan x - a^2}}$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۹۹۵- اگر $f(x) = \sin \pi x - \cos \pi x$ و $g(x) = x^2 - 2$ ، آن‌گاه مجموع مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع $g \circ f$ کدام است؟

-۲ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴)

۹۹۶- حاصل عبارت $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$ برابر با کدام گزینه است؟

۲ (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴)

۹۹۷- اگر $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{12}\right]$ و $\sin 2\theta = \frac{m^2-2}{2}$ باشد، حدود تغییرات m شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۹۸- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است، دامنه تابع $\frac{1}{f}$ کدام است؟



(۱) $R - \{2 \pm 2\sqrt{2}\}$

(۲) $R - \{-2, 2\}$

(۳) $R - \{1 \pm \sqrt{2}\}$

(۴) $R - \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

۹۹۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، ریشه‌های معادله $x^2 - (\alpha^2 + 3\beta)x +$

$(\alpha\beta^2 + 5\beta + 7)^2 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۱، ۲، -۱ (۴) ۳، ۵

۱۰۰۰- با فرض $|2x + 1| < 1$ ، حاصل $[x^3] + [x^2] - [x]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) -۳

۱۰۰۱- حاصل $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8 + \sqrt{12}}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۲) $\frac{1 + \sqrt{6}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}$ (۴) $1 + 2\sqrt{6}$

۱۰۰۲- دایره‌ای که مرکز آن روی خط $y = x + 1$ قرار دارد، محور x ها را در نقاط به طول‌های ۳ و ۱ قطع می‌کند.

شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) ۴ (۴) $\sqrt{17}$

۱۰۰۳- حاصل ضرب ریشه‌های معادله گویای $\frac{x+a}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{3x^2-3+a}{x^2-1}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۰۴- اگر $f = \{(a, 4), (3, b), (-1, -1)\}$ یک تابع همانی و $g(x) = cx + b$ یک تابع ثابت باشد، حاصل

$\frac{f(a)+4g(c)}{5f(b)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{16}{15}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۱۰۰۵- اگر $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x+1}}$ و $g(x) = \frac{ax+1}{x^2+x}$ و دامنه تابع $\frac{f-g}{2g}$ یک همسایگی محذوف و متقارن باشد،

مقدار a کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۰۰۶- نمودار وارون تابع $y = \log_2 x + 3$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱ (۱) اول ۲ (۲) دوم ۳ (۳) سوم ۴ (۴) چهارم

۱۰۰۷- تابع f بر بازه $[-1, 2]$ یک تابع صعودی است. در مورد تابع $f(-x) - f(x) + 1$ چه می‌توان گفت؟

۱ (۱) صعودی ۲ (۲) نزولی ۳ (۳) نه صعودی، نه نزولی ۴ (۴) تابع ثابت

۱۰۰۸- تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ در بازه تماماً مثبت (a, b) نزولی است. معکوس تابع در این بازه کدام است؟

۱ (۱) $\sqrt{-x+1} + 1: x < 0$ ۲ (۲) $\sqrt{x-1} + 1: x > 1$

۳ (۳) $\sqrt{-x+1} + 1: 0 < x < 1$ ۴ (۴) $\sqrt{1-x} - 1: 0 < x < 1$

۱۰۰۹- اگر تمام داده‌های آماری را ۳ برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

۱ (۱) ۱ ۲ (۲) ۳ ۳ (۳) ۶ ۴ (۴) ۹

۱۰۱۰- چند مثلث می‌توان رسم کرد به طوری که رئوس آن روی نقاط شکل زیر باشد؟



۱ (۱) ۴۵

۲ (۲) ۳۵

۳ (۳) ۴۰

۴ (۴) ۵۰

۱۰۱۱- ۴ پسر و ۵ دختر در یک صف قرار دارند. احتمال آن که هیچ دو دختری کنار هم نباشند، کدام است؟

۱ (۱) $\frac{2}{7}$ ۲ (۲) $\frac{1}{21}$ ۳ (۳) $\frac{3}{14}$ ۴ (۴) $\frac{5}{42}$

۱۰۱۲- اگر $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$ ، حاصل حد زیر کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4x + f(-1)}{x - 2}$$

۱ (۱) -۲ ۲ (۲) صفر ۳ (۳) $-\infty$ ۴ (۴) $+\infty$

۱۰۱۳- اگر $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - a$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - \sqrt{9x - 2x}}{3 + |x + 2|}$ کدام است؟

۱ (۱) -۱۰ ۲ (۲) ۱۱ ۳ (۳) ۱۰ ۴ (۴) -۱۱

۱۰۱۴- اگر $(f \circ g)(x) = -3x^2 + \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ باشد، حاصل $f'(\sqrt{5})$ کدام است؟

$$0/25\sqrt{5} \text{ (۴)} \quad -2/75\sqrt{5} \text{ (۳)} \quad 4/5\sqrt{5} \text{ (۲)} \quad -0/5\sqrt{5} \text{ (۱)}$$

۱۰۱۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 5x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1+2h)}{h}$ کدام است؟

$$-15 \text{ (۱)} \quad 15 \text{ (۲)} \quad 17 \text{ (۳)} \quad 20 \text{ (۴)}$$

۱۰۱۶- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^3 - 2t + 10$ در بازه $[0, 2]$ داده شده است، در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط برابر است؟

$$2\sqrt{3} \text{ (۱)} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (۳)} \quad 3\sqrt{2} \text{ (۴)}$$

۱۰۱۷- عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی به معادله $y = \sqrt{3x+1}$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

$$\frac{10}{3} \text{ (۱)} \quad 10 \text{ (۲)} \quad \frac{8}{3} \text{ (۳)} \quad 8 \text{ (۴)}$$

۱۰۱۸- از نقطه $(3, 2)$ مماسی بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$ رسم کرده‌ایم. طول این مماس کدام است؟

$$3 \text{ (۱)} \quad \sqrt{15} \text{ (۲)} \quad 4 \text{ (۳)} \quad \sqrt{17} \text{ (۴)}$$

۱۰۱۹- نقطه A به فاصله ۸ سانتی‌متر از خط L قرار دارد. اگر دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۱۰ سانتی‌متر رسم کنیم تا خط L را در نقاط B و C قطع کند، محیط مثلث ABC کدام است؟

$$30 \text{ (۱)} \quad 32 \text{ (۲)} \quad 34 \text{ (۳)} \quad 36 \text{ (۴)}$$

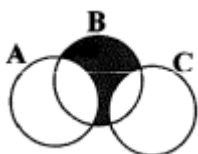
۱۰۲۰- در یک مثلث قائم‌الزاویه طول ارتفاع وارد بر وتر $\sqrt{30}$ و اختلاف اندازه پاره‌های پاره‌های که این ارتفاع بر وتر ایجاد می‌کند، یک واحد می‌باشد. طول وتر این مثلث کدام است؟

$$10 \text{ (۱)} \quad 11 \text{ (۲)} \quad 12 \text{ (۳)} \quad 14 \text{ (۴)}$$

۱۰۲۱- اگر $\sin 2\alpha < 0$ و زاویه خط $2x - 4 = 2ky - kx$ با جهت مثبت محور طول‌ها برابر α باشد، حدود تغییرات k کدام است؟

$$(1, 0) \text{ (۱)} \quad [-1, 0] \text{ (۲)} \quad (-2, 0) \text{ (۳)} \quad [-2, 0] \text{ (۴)}$$

۱۰۲۲- قسمت رنگی نمودار ون شکل مقابل با کدام یک از مجموعه‌ها برابر است



$$(A \cap B) \cap (B \cap C) \text{ (۱)}$$

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \text{ (۲)}$$

$$(B - C) \cup (B - A) \text{ (۳)}$$

$$(B - C) \cap (B - A) \quad (۴)$$

۱۰۲۳- کدام یک عاملی برای عبارت $x^4 + 3x^2 + 4$ است؟

$$x^2 - x - 2 \quad (۱) \quad x^2 + x + 2 \quad (۲) \quad x^2 - 4x + 2 \quad (۳) \quad x^2 + 2 \quad (۴)$$

$$۱۰۲۴- معادله $\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - 12 = 0$ دارای دارای$$

(۱) ریشه مضاعف است. (۲) ریشه حقیقی نیست.

(۳) چهار ریشه حقیقی است. (۴) دو ریشه حقیقی است.

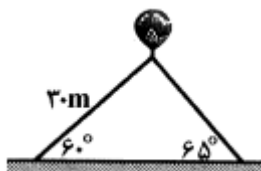
۱۰۲۵- اگر $f(x) = [x] + [-x^2]$ ، آن گاه $f\left(\frac{1}{2}f(-\sqrt{3})\right)$ کدام است؟

$$۳ \quad (۱) \quad -۳ \quad (۲) \quad -۴ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۴)$$

۱۰۲۶- اگر $A = \log 5$ و $B = \log 8$ ، آن گاه $\frac{3A-B}{9}$ برابر کدام است؟

$$\log \sqrt[3]{x} \quad (۱) \quad \log \sqrt{10} \quad (۲) \quad \log \sqrt[3]{2/5} \quad (۳) \quad \log \sqrt{2/5} \quad (۴)$$

۱۰۲۷- در راهپیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طنابها ۳۰ متر است. طول طناب دوم تقریباً کدام است؟ ($\sin 65^\circ \approx 0.9$)



$$۲۸ \quad (۱)$$

$$۲۸/۸ \quad (۲)$$

$$۲۷ \quad (۳)$$

$$۲۷/۸ \quad (۴)$$

۱۰۲۸- اگر $a^2 + a < 0$ ، آن گاه کدام عدد زیر از بقیه بزرگ تر است؟

$$-a^4 \quad (۴) \quad a^3 \quad (۳) \quad a \quad (۲) \quad \sqrt[5]{a} \quad (۱)$$

۱۰۲۹- اگر $|a^2 - \sqrt{a}| = \sqrt{a} - a^2$ ، آن گاه حاصل عبارت $|a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

$$a \quad (۴) \quad \text{صفر} \quad (۳) \quad -\sqrt[3]{a} \quad (۲) \quad \sqrt[3]{a} \quad (۱)$$

۱۰۳۰- اگر تابع یک به یک f محور طولها را در $x = 3$ قطع کند و نمودار تابع $f \circ g$ از مبدأ بگذرد، عرض از مبدأ تابع g کدام است؟

$$۳ \quad (۱) \quad -۳ \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۳) \quad \text{اطلاعات کافی نیست.} \quad (۴)$$

۱۰۳۱- در دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$ مقدار $a_3 - a_2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{15}$ (۲) $\frac{4}{15}$ (۳) $\frac{1}{30}$ (۴) $\frac{2}{15}$

۱۰۳۲- چه تعداد از جملات زیر درست‌اند؟

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع‌آوری داده‌هاست.

ب) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است.

پ) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه استفاده از «علم آمار» است.

ت) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.

ث) اعضای نمونه، اعضای جامعه نیز هستند.

ج) نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه است.

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۰۳۳- اگر $f(x) = 2 \cos^2 x - \cos x$ و $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) 0.5 (۴) -0.5

۱۰۳۴- تابع زیر در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است. a کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos 5x + a \cot 3x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{1 - \tan^2 x}{|\sin(\pi - 4x)|} & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) -۱

۱۰۳۵- در نقطه به طول ۱ چه نوی به متغیر x داده شود تا آهنگ تغییرات آنی تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ در $x = 1$ از

آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر x ، به اندازه $\frac{1}{101}$ بیش‌تر باشد؟

- (۱) 0.01 (۲) 0.02 (۳) 0.03 (۴) 0.04

۱۰۳۶- از بین ۶ دانش‌آموز سال دهم و ۵ دانش‌آموز سال نهم، به چند طریق می‌توان ۸ نفر را انتخاب کرد، به طوری که

تعداد دانش‌آموزان دهم و تعداد دانش‌آموزان نهم انتخاب‌شده با هم برابر نباشند؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۸۶ (۳) ۹۲ (۴) ۹۸

۱۰۳۷- اگر حروف کلمه «جهانگردی» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد دو حرف «ی» و «د» کنار

هم باشند؟

$$\frac{1}{5} \text{ (۴)} \qquad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \qquad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \qquad \frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

۱۰۳۸- دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سبز است.

$$\frac{56}{65} \text{ (۴)} \qquad \frac{28}{65} \text{ (۳)} \qquad \frac{56}{130} \text{ (۲)} \qquad \frac{28}{130} \text{ (۱)}$$

۱۰۳۹- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ می‌باشد، با کدام احتمال مجموع آن‌ها برابر ۴ می‌باشد؟

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)} \qquad \frac{2}{3} \text{ (۳)} \qquad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \qquad \frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

۱۰۴۰- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ روی دایرهٔ مثلثاتی رئوس چه شکلی هستند؟

(۱) چهارضلعی

(۲) مثلث متساوی‌الاضلاع

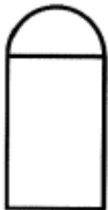
(۳) مثلث متساوی‌الساقین

(۴) پنج‌ضلعی

۱۰۴۱- مشتق تابع $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x}}$ در $x = 4$ ، کدام است؟

$$\frac{7}{16} \text{ (۴)} \qquad \frac{3}{8} \text{ (۳)} \qquad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \qquad \frac{5}{16} \text{ (۱)}$$

۱۰۴۲- در پنجرهٔ شکل مقابل، قطر نیم‌دایره با طول مستطیل برابر است. اگر محیط پنجره برابر ۸ متر باشد، شعاع نیم‌دایره کدام باشد تا پنجره بیش‌ترین نوردهی را داشته باشد؟



$$\frac{2}{1+\pi} \text{ (۲)} \qquad \frac{6}{2+\pi} \text{ (۱)}$$

$$\frac{8}{4+\pi} \text{ (۴)} \qquad \frac{12}{4+\pi} \text{ (۳)}$$

۱۰۴۳- کدام گزینه در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{|x|}$ درست نیست؟

$$f'(-2) + f'(3) < 0 \text{ (۴)} \quad f'(-2) > f'(-3) \text{ (۳)} \quad f'(-2) = -f'(2) \text{ (۲)} \quad f'(-2) < 0 \text{ (۱)}$$

۱۰۴۴- اگر خطوط $x = -\frac{1}{2}$ و $y = \frac{4}{3}$ معادلهٔ دو ضلع از یک مربع باشند، آنگاه قطری از مربع که از نقطهٔ برخورد این دو ضلع می‌گذرد، در چه نقطه‌ای می‌تواند محور عرض‌ها را قطع کند؟

$$\frac{1}{6} \text{ (۴)} \qquad -\frac{1}{6} \text{ (۳)} \qquad -\frac{5}{6} \text{ (۲)} \qquad \frac{5}{6} \text{ (۱)}$$

۱۰۴۵- اضلاع یک مربع روی دو خط با طول از مبدأهای ۲ و -۱ که هر دو با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌سازند، واقع‌اند. مساحت مربع کدام است؟

۰/۵ (۴) ۱/۲۵ (۳) ۲/۲۵ (۲) ۰/۲۵ (۱)

۱۰۴۶- معادله دایره‌ای که از سه نقطه $(1, 2)$ ، $(1, -6)$ و $(-3, -2)$ می‌گذرد، کدام است؟

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$ (۲) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$ (۱)

$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 11$ (۴) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11$ (۳)

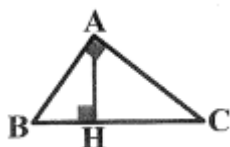
۱۰۴۷- نقطه A روی خط d و نقطه B به فاصله $4cm$ خارج آن قرار دارند. اگر نقاط C و D روی خط d طوری قرار بگیرند که فاصله آن‌ها از نقطه A برابر ۳ و از نقطه B برابر k باشد، k کدام است؟

۵/۴ (۴) ۴ (۳) ۵ (۲) ۵/۵ (۱)

۱۰۴۸- در مثلث ABC داریم، $AB = AC$ ، عمود منصف ضلع AC قاعده BC را در نقطه P قطع کرده است. زاویه APB چند درجه است؟

°۴۲ (۴) °۴۴ (۳) °۴۶ (۲) °۴۸ (۱)

۱۰۴۹- در شکل روبه‌رو، اگر $\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}$ آن‌گاه نسبت طول ضلع بزرگ‌تر زاویه قائمه به طول ضلع کوچک‌تر آن، کدام است؟



$\sqrt{6}$ (۱)

$\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{6}$ (۴)

۱۰۵۰- در شکل مقابل، $MN \parallel BC$ و $PN \parallel AB$ و $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{5}$ مساحت چهارضلعی $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱۶ (۱)

۲۵ (۲)

۳۰ (۳)

۳۲ (۴)

۱۰۵۱- تویی را از ارتفاع 250 متری رها می‌کنیم. اگر این توپ پس از هر بار برخورد با زمین $0/6$ ارتفاع قبلی بالا رود، مسافتی که این توپ پس از برخورد هجدهم بالا می‌رود چند برابر مسافتی است که پس از برخورد پانزدهم بالا می‌رود؟

(۱) ۰/۱۲۶ (۲) ۰/۱۶۲ (۳) ۰/۲۱۶ (۴) ۰/۲۶۱

۱۰۵۲- نصف حاصل عبارت $\left(\frac{11-\sqrt{5}+\sqrt{55}-\sqrt{11}}{\sqrt{10}+\sqrt{22}}\right)^2$ کدام است؟

(۱) $\frac{12-2\sqrt{11}}{5}$ (۲) $\frac{6-\sqrt{11}}{2}$ (۳) $\frac{6-\sqrt{11}}{5}$ (۴) $6 - \sqrt{11}$

۱۰۵۳- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-4x+7}{x^2-3|x|-4}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۰۵۴- اگر α در ربع اول و $2 \sin \alpha - \cos \alpha = 1$ حاصل $4 \cot \alpha - \tan \alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۱۰۵۵- اگر معادله $mx^4 + (m+3)x^2 + m - 2 = 0$ فقط دو ریشه حقیقی ساده داشته باشد، چند مقدار صحیح برای m یافت می‌شود؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۰۵۶- اگر $ab = 18$ و $4 \log_2 \sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{1}{49 \log_6 7}}$ آن‌گاه حاصل $\log(a^2 + b^2)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۵۷- اگر $f(x) = 2 - x^2$ و دامنه تابع g بازه $(-2, 2)$ باشد، آن‌گاه دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۵۸- تعداد نقطه‌ها در شکل دهم از الگوی زیر کدام است؟



(۱) ۱۷۰

(۲) ۱۷۵

(۳) ۱۸۵

(۴) ۱۹۰

۱۰۵۹- اگر به هر داده آماری ۲۵٪ آن را اضافه کنیم، در کدام گزینه تغییری ایجاد نمی‌شود؟

(۱) میانگین (۲) واریانس (۳) میانگین (۴) ضریب تغییرات

۱۰۶۰- جمله عمومی یک دنباله حسابی است. فاصله قدر نسبت دنباله از مقدار جمله بیستم دنباله کدام است؟

۳۴/۵ (۴)

۳۳/۵ (۳)

۳۲/۵ (۲)

۳۱/۵ (۱)

۱۰۶۱- یک آشپز ۱۲ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۴ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند، با این فرض که ۳ نوع از این ادویه‌ها هم‌زمان با هم قابل استفاده نیستند؟

۴۲۸ (۴)

۲۴۳ (۳)

۴۸۶ (۲)

۴۶۸ (۱)

۱۰۶۲- با استفاده از ارقام $\{0, 1, 3, 4, 6\}$ ، اعداد ۵ رقمی بدون ارقام تکراری می‌سازیم. احتمال آن که عدد ساخته‌شده بر ۵ بخش پذیر باشد، کدام است؟

۰/۲ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۲۵ (۲)

۰/۵ (۱)

۱۰۶۳- اگر $f(x) = \frac{7x^n - 2x^3 + 9}{-2x^n + 3x - 4}$ ، آن‌گاه با فرض این که n عددی طبیعی است، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، کدام نمی‌تواند باشد؟

۰/۵ (۴)

-۳/۵ (۳)

-∞ (۲)

+∞ (۱)

۱۰۶۴- تابع زیر در نقطه $x = 1$ پیوسته است. a کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x - \sqrt{3+x}}{x-1} & x > 1 \\ \frac{ax - a + 7}{4} & x \leq 1 \end{cases}$$

۴ هیچ مقدار a ۳ هر مقدار a

۲ فقط ۱

۱ فقط $\frac{7}{4}$

۱۰۶۵- مقدار مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$ به ازای $x = \frac{1}{9}$ کدام است؟

-۲/۳ (۴)

-۳/۲ (۳)

۲/۳ (۲)

۳/۲ (۱)

۱۰۶۶- یک خانواده دارای ۴ فرزند است. اگر دو تا از فرزندان این خانواده دختر باشند، آن‌گاه احتمال آن که فرزندان پسر یک در میان به دنیا آمده باشند، کدام است؟

۱/۳ (۴)

۲/۳ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۲ (۱)

۱۰۶۷- دو ظرف همانند، داریم. در ظرف اول ۳ مهره سبز و دو مهره قرمز، در ظرف دوم ۳ مهره قرمز و یک مهره سبز، سه مهره به تصادف از ظرف A برداشته و در ظرف B می‌گذاریم. حال یک مهره به تصادف از ظرف B خارج می‌کنیم. احتمال آن که مهره خارج‌شده از ظرف B سبز باشد، کدام است؟

۰/۶ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۵ (۱)

۱۰۶۸- در کدام تابع هنگامی که $x_2 > x_1$ است، همواره $f(x_2) > f(x_1)$ می‌باشد؟

$$f(x) = -x|x| \quad (۴) \quad f(x) = x|x| \quad (۳) \quad f(x) = -x^2|x| \quad (۲) \quad f(x) = x^2|x| \quad (۱)$$

۱۰۶۹- اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۰۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، مساحت زمین به تقریب چند متر مربع است؟

$$۶۳۸ \quad (۴) \quad ۶۲۹ \quad (۳) \quad ۶۲۱ \quad (۲) \quad ۶۱۲ \quad (۱)$$

۱۰۷۰- جواب کلی معادله مثلثاتی زیر کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3 + \cos 2x$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

۱۰۷۱- به ازای کدام مقدار از m تساوی $\tan^4 x - 1 = \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{m}{\cos^2 x}$ یک اتحاد است؟

$$۱ \quad (۴) \quad -۱ \quad (۳) \quad -۲ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۱)$$

۱۰۷۲- اگر $f(x) = |x^3 - 4x|\sqrt{x+2}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-h) - f(2)}{|h|}$ کدام است؟

$$۱۶ \quad (۱) \quad -۱۶ \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۳) \quad \text{وجود ندارد.} \quad (۴)$$

۱۰۷۳- عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x}$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

$$۱/۶ \quad (۱) \quad -۱/۶ \quad (۲) \quad ۲/۴ \quad (۳) \quad -۲/۴ \quad (۴)$$

۱۰۷۴- دو نقطه به طول های ۱ و ۲-، نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 - 3x^2 + bx - 7$ هستند. حاصل $a + b$ کدام است؟

$$۱۰ \quad (۱) \quad ۱۱ \quad (۲) \quad ۱۲ \quad (۳) \quad ۱۴ \quad (۴)$$

۱۰۷۵- فاصله دو نقطه روی محور y ها از خط $y + 3x = 5$ برابر $2\sqrt{10}$ است. طول پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند، کدام است؟

$$۳۰ \quad (۱) \quad ۳۵ \quad (۲) \quad ۴۰ \quad (۳) \quad ۴۵ \quad (۴)$$

۱۰۷۶- اختلاف شدت دو زلزله در مقیاس ریشتر برابر 0.6 می باشد. انرژی زلزله قوی تر چند برابر دیگری است؟

$$(\log E = 11/8 + 1/5 M)$$

$$۴ \quad (۱) \quad ۸ \quad (۲) \quad ۱۶ \quad (۳) \quad ۳۲ \quad (۴)$$

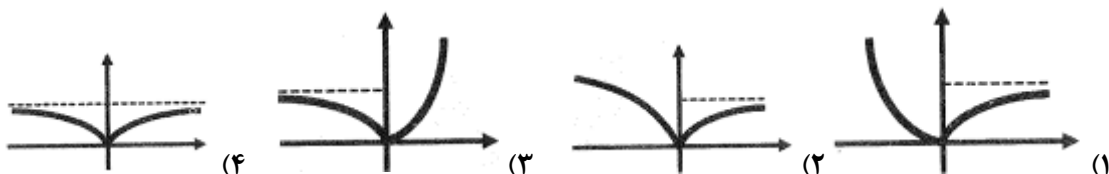
۱۰۷۷- چه تعداد از گزینه های زیر مثال نقض دارند؟

الف) از هر نقطه خارج یک خط فقط یک خط به موازاتش رسم می شود.

۱۰۸۳- به ازای کدام مقدار a نقطه $A = (\frac{1}{2}, 2)$ روی نیمساز زاویه بین دو خط $y - ax = 2$ و $ay - x = 1$ قرار می‌گیرد؟

- (۱) $1/2$ (۲) $1/5$ (۳) $0/5$ (۴) $0/6$

۱۰۸۴- نمودار تابع $f(x) = |1 - e^{-x}|$ کدام است؟ ($e \approx 2/7$)



۱۰۸۵- الگوی زیر مفروض است. در کدامین مرحله تعداد مربع‌های رنگی برابر ۲۰۶ می‌شود؟

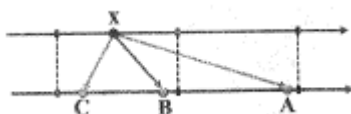
(۱) ۵۳

(۲) ۵۱

(۳) ۵۰

(۴) ۵۲

۱۰۸۶- اگر $x \in (-1, 0)$ آن‌گاه مقادیر A, B و C به ترتیب از چپ به راست کدام می‌تواند باشد؟



(۱) $x^3\sqrt{x}, \sqrt[3]{x-1}, x^4$

(۲) $\sqrt[3]{x}, x^2, \sqrt{-x}$

(۳) $x^3, \sqrt[3]{x}, x^4$

(۴) $\sqrt[3]{x}, x^3, \sqrt{-x}$

۱۰۸۷- در دو دنباله حسابی به صورت‌های $8, 11, 14, \dots$ و $2, 7, 12, \dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک وجود دارد؟

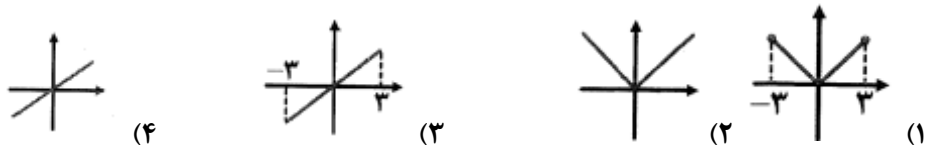
- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴) ۶۱

۱۰۸۸- شخصی با قد یک متر، به پرنده‌ای که بالای یک درخت است نگاه می‌کند. در این حالت زاویه دید او با افق 53° است. اگر او ۱۴ متر به عقب برود زاویه دید او 37° می‌شود. ارتفاع درخت چند متر است؟ ($\sin 37^\circ \approx 0/6$)

$0/6, \sin 16^\circ \approx 0/28$

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۰۸۹- اگر $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ نمودار تابع $y = f \circ f(x)$ کدام است؟



۱۰۹۰- در داده‌های 23, 4, 11, 6, 17, 20, 9, 10, 12, 14, 8, 19, 22, 18, 16 اعداد کم‌تر از چارک اول و بزرگ‌تر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

(۱) $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{7}$

۱۰۹۱- در جعبه A، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در جعبه B، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد. یکی از این جعبه‌ها را به تصادف انتخاب نموده و مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم، احتمال آبی بودن این مهره کدام است؟

(۱) $\frac{14}{70}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{29}{70}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۱۰۹۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

(۱) $-1 < m < 0$ (۲) $m < 0$ (۳) $2 < m < 8$ (۴) $m > 8$

۱۰۹۳- مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} \leq 1$ چند عدد صحیح نامثبت را شامل نمی‌شود؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۹۴- اگر x حاده و $\tan x = \frac{3}{2}$ حاصل عبارت $\sin^2 x + \frac{-2 \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{61}{65}$ (۲) $-\frac{7}{65}$ (۳) $\frac{61}{65}$ (۴) $\frac{7}{65}$

۱۰۹۵- اگر $|\cos x + \cot x| < |\cos x| + |\cot x|$ ، آن‌گاه انتهای کمان x در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟

(۱) اول یا سوم (۲) اول یا چهارم (۳) دوم یا سوم (۴) سوم یا چهارم

۱۰۹۶- حد تابع $f(x) = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{x} - 1}}{\sqrt{x} - x}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۹۷- تابع زیر در نقطه $x = 0$ پیوسته است. a کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax\sqrt{4+x}}{\sin 3x} & x \neq 0 \\ \frac{2}{3} \cos^2 \pi x - 1 & x = 0 \end{cases}$$

(۱) -۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

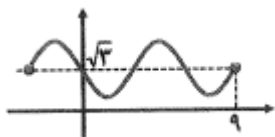
۱۰۹۸- نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = a + \cos\left(bx - \frac{1}{2}\right)\pi$ می‌باشد، حاصل $f(34)$ کدام است؟

(۱) $2 + \sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

(۴) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$



۱۰۹۹- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = 1 + \sqrt{2x}$ در بازه $[0/98, 1/28]$ برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر در کدام یک از نقاط زیر است؟

(۱) $x = \frac{9}{32}$ (۲) $x = \frac{9}{8}$ (۳) $x = \frac{4}{9}$ (۴) $x = \frac{16}{9}$

۱۱۰۰- دو ظرف همانند A و B داریم، در ظرف A ، ۴ مهره سبز، ۱ مهره آبی، ۳ مهره سیاه و در ظرف B ، ۳ مهره آبی، ۵ مهره سبز قرار دارد. ۴ مهره از A و ۳ مهره از B برداشته و در ظرف C می‌گذاریم. حال یک مهره به تصادف از ظرف C خارج می‌کنیم. احتمال آن که مهره خارج شده از ظرف C سبز باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{31}{56}$ (۲) $\frac{29}{56}$ (۳) $\frac{27}{56}$ (۴) $\frac{25}{56}$

۱۱۰۱- طول پاره خط واصل بین نقاط اکسترمم تابع $y = \frac{6x}{x^2+4}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۱۱۰۲- اگر $f(x) = [x] + [3 \cot x]$ ، آن‌گاه $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ برابر کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۱۰۳- مجموع ریشه‌ها در معادله $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} = \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} + 1$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۱۰۴- اگر $g(x) = x^2 + 4x + 3$ و $f(x) = 3x^2 + x - 2$ آن‌گاه مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $gof(x) = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۰۵- مجموع مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع $y = 2x^{\frac{10}{3}} - 20x^{\frac{1}{3}}$ در بازه $[-1, 1]$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۱۸ (۴) ۲۲

۱۱۰۶- مرکز دایره‌ای بر خط به معادله $2y = x$ واقع است و این دایره نیمساز ربع اول را با طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. کدام‌یک از خط‌های زیر بر این دایره مماس نیست؟

- (۱) $x = 1$ (۲) $y = 2$ (۳) $x = 3$ (۴) $y = 1$

۱۱۰۷- چه تعداد از موارد زیر مثال نقض دارد؟

الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیش‌تر است.

پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

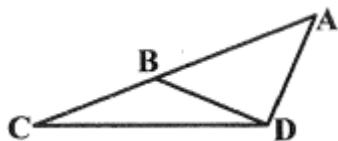
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۰۸- اگر در مثلث ABC ، $\hat{B} = 90 + \hat{C}$ باشد، اندازه زاویه منفرجه بین نیمساز زاویه A و ضلع BC کدام است؟

- (۱) 145° (۲) 140° (۳) 135° (۴) 150°

۱۱۰۹- مطابق شکل، اگر $CB = BD = DA$ و $\angle CBD = 135^\circ$ آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ABD به مساحت

مثلث ACD کدام است؟



(۱) $2 - \sqrt{2}$

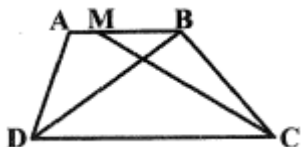
(۲) $2 + \sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2} + 1$

(۴) $\sqrt{2} - 1$

۱۱۱۰- در دوزنقه $ABCD$ اگر $MB = 2AM$ و مساحت مثلث ABD برابر ۲۷ باشد، مساحت مثلث BMC برابر

کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۸

(۳) ۳

۴ (۴)

۱۱۱۱- تعداد ضربان قلب یک ورزشکار، پس از x دقیقه تمرین سنگین بدنی از رابطه $f(x) = -2x^2 + 20x + 72$ به دست می آید. در چند دقیقه از یک تمرین سنگین، تعداد ضربان قلب از ۱۲۰ بیش تر می شود؟

۸ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۱۱۱۲- اگر $A_n = (-n, n)$ باشد، حاصل مجموعه زیر چند عضو صحیح دارد؟

$$(A_1 \cup A_2 \cap \dots \cup A_{10}) - (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10})$$

۲۰ (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۲۲ (۴)

۱۱۱۳- اگر $a = \sqrt[3]{32 - 3a^2b}$ و $b = \sqrt[3]{29 - 3ab^2}$ مقدار $a + b$ چه عددی است؟

۸ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۱۱۱۴- معادله $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + x^2 - 3x + 2 = 0$ چند جواب دارد؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

۱۱۱۵- زلزله ای به بزرگی $3/8$ در مقیاس ریشتر چند ارگ انرژی آزاد می کند؟

۱۷/۵ (۱) ۱۵/۳ (۲) $10^{17/5}$ (۳) $10^{15/3}$ (۴)

۱۱۱۶- حداکثر مقدار انحراف معیار هشت عدد طبیعی یک رقمی کدام است؟

۲ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) ۴

۱۱۱۷- مجموعه $f = \{(-4, a), (4, 2), (1, 16), (1, b^2), (b, 7)\}$ معرف یک تابع است، مقدار ab کدام است؟

۲۸ (۱) -۲۸ (۲) ۱۲ (۳) -۱۲ (۴)

۱۱۱۸- متمم بازه مجموعه جواب نامعادله $\frac{|x|}{\sqrt{x-|x|+4}} > 0$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, -2]$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(-\infty, -2] \cup \{0\}$ (۴) $(-\infty, -2) \cup \{0\}$

۱۱۱۹- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) هر تابع اکیداً یکنوا، همواره یک به یک است.

ب) هر تابعی که صعودی باشد، وارون پذیر است.

پ) هر تابعی که نزولی باشد، وارون پذیر است.

ت) هر تابعی که یک به یک باشد، صعودی اکید است.

۲ (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

۱۱۲۰- اگر $A = \{0, 1, 2, 3, -3\}$ و تابع f به صورت $f = \{(x, 2 + 1) | x \in A\}$ تابع $f^{-1} - 2f$ چند زوج مرتب دارد؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۱۱۲۱- در دنباله حسابی $2, 7, 12, \dots, 502$ ، چهاردهمین جمله از آخر کدام است؟

۳۴۷ (۴) ۴۳۷ (۳) ۳۷۴ (۲) ۴۷۳ (۱)

۱۱۲۲- در تساوی $\frac{\cos^2 120^\circ - \tan 225^\circ}{\cos(-45^\circ)}$ مقدار x برابر کدام گزینه است؟

$-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۱)

۱۱۲۳- با جابه‌جایی تصادفی کارت‌های یکسانی که ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ روی آن‌ها نوشته شده، یک عدد ۵ رقمی زوج ساخته شده است. با کدام احتمال، دو رقم زوج کنار هم‌اند؟

$\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

۱۱۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{2 \tan x + \sqrt{3}}{\tan x - \sqrt{3}}$ کدام است؟

$+\infty$ (۴) $-\infty$ (۳) -1 (۲) 1 (۱)

۱۱۲۵- تابع زیر در نقطه $x = 0$ پیوسته است. a کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\cos 3x - 1|}{2 \sin^2 x} & x \neq 0 \\ \frac{a}{2} + 3\pi x & x = 0 \end{cases}$$

۹ (۴) -9 (۳) a هیچ مقدار a (۲) هر مقدار a (۱)

۱۱۲۶- α و β ریشه‌های حقیقی $2x^2 - mx + 3m + 1 = 0$ هستند. اگر $\alpha \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \beta \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{1}{2}$ آن‌گاه m کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ فقط (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ فقط (۲) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) هیچ مقدار m (۴)

۱۱۲۷- از دو معادله دو مجهولی $2^{2x+y} = 4\sqrt{2} + 2^{x-y}$ و $\log(x + 2y) = 1 + \log x$ مقدار y کدام است؟

$1/0.25$ (۴) $1/1.25$ (۳) $1/4.25$ (۲) $1/2.25$ (۱)

۱۱۲۸- اگر $\cos x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ از اتصال انتهای کمان‌های جواب این معادله، کدام شکل حاصل می‌شود؟

(۱) مستطیل (۲) پاره خط (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

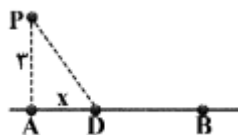
۱۱۲۹- اگر آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^3 - ax^2 - 2$ در بازه $[0, 3]$ ، به اندازه 0.25 واحد از آهنگ لحظه‌ای این تابع در نقطه $x = \frac{1}{2}$ بیشتر تر باشد، کدام a است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $-\frac{7}{2}$

۱۱۳۰- اگر $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۱۳۱- شخصی درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک‌ترین نقطه ساحل یعنی نقطه A معادل 3km است. او می‌خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در 8km نقطه A قرار دارد. با فرض این که سرعت قایق 2km/h سرعت پیاده روی شخص در ساحل 4km/h باشد، اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد، در چه فاصله‌ای از A روی ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟



(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{2}$

۱۱۳۲- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سه سکه دیگر را با هم می‌ریزیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه، رو ظاهر شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{11}{16}$ (۳) $\frac{13}{16}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۱۱۳۳- اگر $1 = \left[\frac{3x+1}{x}\right]$ مقدار $[x^5] + [-x^2]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

۱۱۳۴- اگر $f(x) = \sqrt[4]{x}$ و $g(x) = 2 - \sqrt{x}$ دامنه تابع $(f \circ g)^{-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

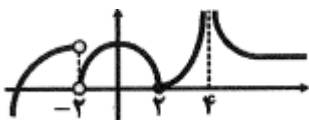
۱۱۳۵- شکل زیر نمودار تابع f است. اگر $f(3) - 3f'(-1) = 4$ مقدار آهنگ لحظه‌ای تغییر f در $x = 3$ کدام است؟



- (۱) -۱ (۲) -۲

- (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۳۶- شکل زیر نمودار تابع f است. تابع چند نقطه بحرانی دارد؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

(۴) بی‌شمار

۱۱۳۷- معادله دایره‌ای که مرکزش $(0, 1)$ و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

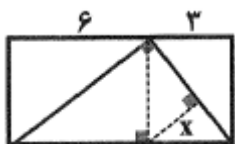
(۱) $x^2 + y^2 - 2y - 23 + 16\sqrt{2} = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 2y - 23 + 8\sqrt{2} = 0$

(۳) $x^2 + y^2 + 2y + 11 + 8\sqrt{2} = 0$ (۴) $x^2 + y^2 + 2y + 23 + 16\sqrt{2} = 0$

۱۱۳۸- در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هر یک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC ، کدام است؟

(۱) کمتر از ۱ (۲) بیشتر از ۱ (۳) مساوی ۱ (۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

۱۱۳۹- در مستطیل $ABCD$ زیر، مقدار x کدام است؟



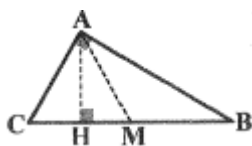
(۱) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\sqrt{6}$

(۴) $\sqrt{3}$

۱۱۴۰- در مثلث ABC زیر $(A = 90^\circ)$ و AM میانه است. اگر $BH = 3CH$ باشد، مساحت مثلث ABH چه کسری از مساحت مثلث ACM است؟



۱ (۱)

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{4}{3}$

۱۱۴۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست‌اند؟

الف) تفاضل دو مجموعه نامتناهی، هموار متناهی است.

ب) هر مجموعه نامتناهی، بی شمار زیرمجموعه نامتناهی دارد.

پ) اگر $B \subseteq A$ و A نامتناهی، آن گاه الزاماً B نیز نامتناهی است.

ت) اگر $B \subseteq A$ و B نامتناهی، آن گاه الزاماً A نیز نامتناهی است.

ث) اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، آن گاه A و B نامتناهی اند.

ج) اگر $A \cap B$ متناهی باشد، آن گاه A و B متناهی اند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۱۴۲- اگر $f(x) = 2ax - 9$ و $g = \{(-3, 2), (-1, 5), (0, 4)\}$ و $f \circ g^{-1}(2) = 3$ باشد، مقدار a کدام است؟

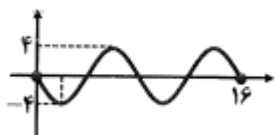
۲ (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)

۱۱۴۳- جمله بیستم از دنباله حسابی $\dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ کدام است؟

۲۲/۵ (۱) $\frac{23}{3}$ (۲) $\frac{41}{3}$ (۳) $\frac{46}{3}$ (۴)

۱۱۴۴- نمودار زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. حاصل $a \times b$ کدام است؟

۲ (۱)



-۲ (۲)

۱ (۳)

-۱ (۴)

۱۱۴۵- مجموع ۴۰ داده آماری ۱۶۸ و مجموع مجزورات این داده ها ۸۰۸ می باشد. اگر از هر داده ۵۰٪ کم کنیم و سپس به هر یک مقدار مد داده ها را اضافه کنیم، انحراف معیار داده های جدید کدام است؟

۰/۸ (۱) ۰/۴ (۲) ۱/۶ (۳) ۳/۲ (۴)

۱۱۴۶- ۶ نفر که در بین آن ها یک خواهر و برادر قرار دارند به تصادف در یک ردیف می ایستند. احتمال آن که فقط یک نفر بین خواهر و برادر قرار گیرند، چه قدر است؟

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{2}{15}$ (۴)

۱۱۴۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{x-3}{2x^2-3x+1}$ در کدام یک از بازه های زیر بالاتر از خط به معادله $y = \frac{1}{2}$ قرار دارد؟

$$(-\infty, -1), (0, +\infty) \quad (2) \quad \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad (4) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right) \quad (3)$$

۱۱۴۸- کدام یک از توابع زیر با هم مساوی نیستند؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}} \quad , \quad g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} \quad (1)$$

$$f(x) = 2 \cot 2x - \cot x \quad , \quad g(x) = \tan(-x) \quad (2)$$

$$f(x) = \log x - \log(1-x) \quad , \quad g(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad (3)$$

$$f(x) = \cot x - \tan x \quad , \quad g(x) = 2 \cot 2x \quad (4)$$

۱۱۴۹- اگر $f(x) = x^2 - 2x + 2$ و $g(x) = \sin 2x$ آن‌گاه تابع $f \circ g$ در بازه $[0, 6]$ با خط $y = 5$ در چند نقطه برخورد دارد؟

$$1 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$

۱۱۵۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\left| \frac{x+2}{x-2} \right| + \frac{x}{x-2} \right)$ کدام است؟

$$1 \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad -\infty \quad (2) \quad +\infty \quad (1)$$

۱۱۵۱- تابع f از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و (-۱) چگونه است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} & |x| > 1 \\ 2 + \cos \pi x & |x| \leq 1 \end{cases}$$

(۱) در ۱ و (-۱) پیوسته (۲) در ۱ پیوسته و در (-۱) ناپیوسته

(۳) در ۱ و (-۱) ناپیوسته (۴) در ۱ ناپیوسته و در (-۱) پیوسته

۱۱۵۲- اگر $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ باشد، آن‌گاه $f'(-1)$ کدام است؟

$$-2\sqrt[3]{3} \quad (4) \quad 2\sqrt[3]{3} \quad (3) \quad -2\sqrt[3]{2} \quad (2) \quad 2\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

۱۱۵۳- در ظرفی ۵ مهره سفید و ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف و هم‌زمان از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل دو مهره غیر هم‌رنگ انتخاب شود، چقدر است؟

$$\frac{109}{120} \quad (4) \quad \frac{11}{120} \quad (3) \quad 0/7 \quad (2) \quad 0/8 \quad (1)$$

۱۱۵۴- سکه سالمی را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم حداقل یک بار «پشت» آمده است، احتمال آن‌که دقیقاً ۲ بار «پشت» آمده باشد، کدام است؟

$$\frac{3}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{5} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{5} \text{ (۱)}$$

۱۱۵۵- مجموعه جواب نامعادله $1 > \left| \frac{1-2x}{x+3} \right|$ شامل چند عدد صحیح نمی باشد؟

$$۴ \text{ (۴)} \quad ۷ \text{ (۳)} \quad ۶ \text{ (۲)} \quad ۵ \text{ (۱)}$$

۱۱۵۶- مساحت لوزی با ضلع ۶ و یک زاویه داخلی برابر با 127° تقریباً برابر کدام است؟ ($\cos 127^\circ \approx 0/6$)

$$۳۲/۸ \text{ (۴)} \quad ۲۸/۸ \text{ (۳)} \quad ۳۲ \text{ (۲)} \quad ۲۸ \text{ (۱)}$$

۱۱۵۷- می خواهیم کنار یک رودخانه یک محوطه باغچه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الساقین در بیاوریم به طوری که باغچه بیش‌ترین مساحت ممکن را داشته باشد. اگر تنها، هزینه ۱۲۰ متر نرده در اختیار داشته باشیم، ماکزیمم مساحت باغچه کدام است؟

$$300\sqrt{2} \text{ (۴)} \quad 400\sqrt{2} \text{ (۳)} \quad 400\sqrt{3} \text{ (۲)} \quad 300\sqrt{3} \text{ (۱)}$$

۱۱۵۸- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) (1 + \tan^2 x)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ (۴)} \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ (۳)} \quad k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ (۲)} \quad k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ (۱)}$$

۱۱۵۹- فاصله دو نقطه از منحنی به معادله $y = \frac{2x+1}{x-1}$ که خطوط مماس بر منحنی در آن دو نقطه موازی خط به معادله $x + 3y = 1$ باشد، کدام است؟

$$۵ \text{ (۴)} \quad 10\sqrt{2} \text{ (۳)} \quad 2\sqrt{10} \text{ (۲)} \quad ۱۰ \text{ (۱)}$$

۱۱۶۰- نمودار تابع f داده شده، دامنه تابع $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(-x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

۱۱۶۱- تابع متناوب f با دوره تناوب ۴ و در بازه $[-1, 3]$ به صورت $f(x) = -2|x| + 3$ مفروض است. مقدار عددی $f(29) + f(35)$ کدام است؟

$$-۲ \text{ (۴)} \quad -۱ \text{ (۳)} \quad ۱ \text{ (۲)} \quad ۲ \text{ (۱)}$$

۱۱۶۲- تابع $f(x) = (k+1)x^4 + x^3 + (k+1)x^2 + 2x$ یک‌به‌یک است. توابع f و f^{-1} چند نقطه مشترک دارند؟

$$۳ \text{ (۴)} \quad ۲ \text{ (۳)} \quad ۱ \text{ (۲)} \quad \text{صفر (۱)}$$

۱۱۶۳- تابع $f(x) = 1 + \sqrt{ax + b}$ با دامنه $[-2, +\infty)$ مفروض است. اگر نمودار این تابع خط به معادله $3y - 9 = 2x$ را در نقطه‌ای روی محور y ها قطع کند، مقدار $f(a + b)$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۱۶۴- اگر $f(x) = \cos \frac{2x}{x^2 - 4}$ ، $g(x) = mx^2 - nx + 8$ و $f \cdot g$ در هر نقطه دارای حد باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۴

۱۱۶۵- برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{8}{\sqrt[3]{2|x|+8}}$ شامل چند عدد حسابی است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) بی‌شمار

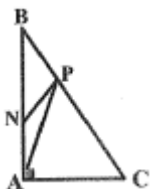
۱۱۶۶- هزینه سوخت یک تراکتور در هر ساعت برای حرکت با سرعت ثابت V کیلومتر بر سرعت، برابر $37V^2$ تومان است. اگر سایر هزینه‌ها برای هر ساعت به طور ثابت برابر ۲۳۶۸ تومان باشد، تراکتور با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۱۱۶۷- اگر معادله یکی از قطرهای مربعی به صورت $2y + 3 = -4x$ و نقطه $(-5, 1)$ یک رأس این مربع باشد، آن‌گاه حاصل ضرب طول و عرض مرکز این مربع کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) ۴

۱۱۶۸- در مثلث قائم‌الزاویه ABC نقاط N و P به ترتیب روی AB و BC چنان انتخاب شده‌اند که $PB = PN = AN$ و زاویه C چند درجه است؟



- (۱) 27°

- (۲) 54°

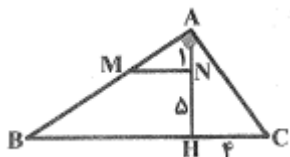
- (۳) $5/26^\circ$

- (۴) 36°

۱۱۶۹- هشت ضلعی منتظمی درون دایره‌ای به مساحت 4π محاط شده است. طول ضلع این هشت ضلعی کدام است؟

- (۱) $\sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$ (۲) $\sqrt{8 - 2\sqrt{2}}$ (۳) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (۴) $\sqrt{2 + \sqrt{2} + 1}$

۱۱۷۰- در مثلث قائم‌الزاویه زیر $MN \parallel BC$ و AH ارتفاع مثلث است. مساحت چهارضلعی $MNHB$ کدام است؟



(۱) ۲۴/۲۵

(۲) ۲۵/۲۵

(۳) ۲۶/۲۵

(۴) ۲۵/۵

۱۱۷۱- در الگوی زیر، تعداد دایره‌های سفید در شکل بیستم کدام است؟

(۱) ۲۱۰



(۲) ۴۰۵

(۳) ۴۲۰

(۴) ۲۴۰

۱۱۷۲- اگر منحنی‌های درجه دوم $y = (2m - 3)(x^2 + x) + m + 2$ نامثبت باشند، آن‌گاه بیشترین مقدار عرض از مبدأ منحنی‌های مذکور کدام است؟

(۴) -۵/۵

(۳) ۵/۵

(۲) -۳/۵

(۱) ۳/۵

۱۱۷۳- مساحت ایجادشده بین نمودار تابع $y = x + |2x|$ و خط $y = x + b$ برابر ۸ واحد مربع است. مقدار b کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۴

(۲) ۴/۵

(۱) ۳/۵

۱۱۷۴- در دو دنباله حسابی به صورت‌های $2, 9, 16, \dots$ و $12, 17, 22, \dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ وجود دارد؟

(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۵

۱۱۷۵- ارقام $1, 2, 3, 4, 5, 6$ را روی کارت‌های یکسان نوشته، به تصادف سه کارت را انتخاب کرده و در یک ردیف قرار می‌دهیم تا عددی سه‌رقمی حاصل شود. با کدام احتمال مجموع رقم صدگان و رقم یکان ۷ می‌باشد؟

(۴) ۰/۷

(۳) ۰/۵

(۲) ۰/۳

(۱) ۰/۲

۱۱۷۶- اگر در بازه (a, b) از اعداد حقیقی مثبت، نامساوی $2^x < x^2$ برقرار باشد، حداکثر مقدار عبارت $\log_{16} 2\sqrt{b-a}$ کدام است؟

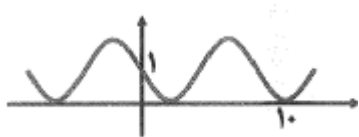
(۴) ۰/۱۲۵

(۳) ۰/۳۷۵

(۲) ۰/۲۱۵

(۱) ۰/۱۲۵

۱۱۷۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \cos \pi \left(bx + \frac{3}{2} \right)$ به صورت زیر است. $a - 4bb$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

-۲ (۳)

صفر (۴)

۱۱۷۸- چه تعداد از متغیرهای زیر کیفی اسمی اند؟

الف) نوع بیماری بیماران یک بیمارستان

ب) سطح تحصیلات

پ) رنگ چشم

ت) شاخص توده بدن

ث) میزان بارندگی برحسب میلی متر

ج) نژاد

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۱۷۹- مجموع مربعات ۱۴ داده آماری ۴۲ و ضریب تغییرات این داده‌ها برابر $\tan 30^\circ$ می‌باشد. اگر از هر داده ۳ واحد کم شود، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

۱۱۸۰- از بین ۵ دانش آموز سال دهم، ۴ دانش آموز سال یازدهم و ۳ دانش آموز سال دوازدهم، تصادفی به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد به طوری که تنها یک دانش آموز سال یازدهم و حداکثر یک دانش آموز سال دهم انتخاب شود؟

۷۴ (۴)

۷۲ (۳)

۷۰ (۲)

۶۸ (۱)

۱۱۸۱- احتمال زدن تیر به هدف توسط علی در یک مسابقه تیراندازی به هدف $\frac{1}{3}$ است. مسابقه زمانی تمام می‌شود که علی برای اولین بار به هدف بزند. احتمال آن که مسابقه حداکثر با ۳ بار تیراندازی به اتمام برسد، کدام است؟

 $\frac{8}{27}$ (۴) $\frac{19}{27}$ (۳) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۱)

۱۱۸۲- عبارت $\frac{x^2+3x+1}{x}$ به ازای $x > 0$ چگونه است؟

(۱) مینیممی برابر ۵ دارد.

(۲) مینیممی برابر ۳ دارد.

(۳) ماکزیممی برابر ۵ دارد.

(۴) ماکزیممی برابر ۳ دارد.

۱۱۸۳- اگر $\sin x - \sin(\pi + x) = \frac{2}{3}$ حاصل $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{7}{9}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $-\frac{7}{8}$

۱۱۸۴- اگر $f = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right), (2, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, 2) \right\}$ و $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x < \sqrt{3} \\ 2x - 3 & x \geq \sqrt{3} \end{cases}$ حاصل $\frac{g(f(\sqrt{3}))}{3-2f\left(g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)}$ کدام است؟

- (۱) $1 - 2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2} - 3$ (۳) $2\sqrt{2} + 3$ (۴) $2\sqrt{2} + 1$

۱۱۸۵- اگر $f = \{(3, 4), (4, 3), (5, 6), (2, 5)\}$ و $g = \{(1, 3), (3, 2), (4, 5)\}$ آن گاه تابع $(f \circ g)$ چند زوج مرتب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۸۶- اگر $f(x) = \frac{2x+3+\sqrt{x^2+2x+1}}{ax^n+6}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۱۱۸۷- تابع f با ضابطه زیر در $x = -1$ پیوسته است. حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \frac{2ax + 2a}{|x + 1|} & x < -1 \\ -3 & x = -1 \\ x^2 - 3bx + 5 & x > -1 \end{cases}$$

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۲ (۴) ۱۶

۱۱۸۸- اگر $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-2}\right)^5$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{4-x}$ کدام است؟

- (۱) -۱۲۰ (۲) -۱۴۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۴۰

۱۱۸۹- معادله خط مماس بر تابع $f(x) = x^3 - 5x^2 - 13x - 4$ در $x = -1$ واقع بر منحنی، وترى با چه طول روی سهمی به معادله $y = 2x^2 - 8x + 1$ جدا می کند؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۱۹۰- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ در بازه $[1, 9]$ چند برابر مقدار شیب خط مماس بر منحنی در نقطه با طول ۴ می باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۱۹۱- از بین همه دانش آموزان سال دوازدهم یک منطقه ۱۵ پسر و ۱۰ دختر در رشته ریاضی و ۴۵ پسر و ۴۰ دختر در رشته تجربی تحصیل می کنند. با توجه به جدول مقابل حاصل $P(T|g')$ کدام است؟

جنس \ رشته	b	g
R ریاضی	۱۵	۱۰
T تجربی	۴۵	۴۰

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{11} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

۱۱۹۲- اگر $x > x^2$ ، آن گاه عبارت $|x^2 + [-x^2]| + x$ برابر کدام یک از عبارات زیر است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

$$x \quad (۱) \quad -x \quad (۲) \quad x - 1 \quad (۳) \quad 1 - x \quad (۴)$$

۱۱۹۳- اگر $f(x) = g(x) + 5\sqrt{g(x)}$ و نمودار تابع g به شکل زیر باشد، مقدار $f^{-1}(24)$ کدام است؟

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$(۲) ۶$$

$$(۳) ۳$$

$$(۴) ۱$$



۱۱۹۴- مجموع جواب های معادله $1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ در $[0, \pi]$ چند برابر $\frac{\pi}{8}$ است؟

$$(۱) ۱۲ \quad (۲) ۷ \quad (۳) ۱۰ \quad (۴) ۹$$

۱۱۹۵- اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = ax - \sqrt{4x^2 + 5x}$ در نقطه به طول ۱ واقع بر آن برابر $\frac{5}{6}$ باشد، آن گاه مجموع شیب های خطوط مجانب تابع کدام است؟

$$(۱) -۴ \quad (۲) ۴ \quad (۳) ۶ \quad (۴) -۶$$

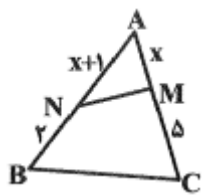
۱۱۹۶- اگر $f'(2) = 1$ باشد، مقدار مشتق عبارت $f\left(\sqrt{\frac{1}{2x}}\right)$ به ازای $x = \frac{1}{8}$ کدام است؟

$$(۱) -۱ \quad (۲) -۲ \quad (۳) -۴ \quad (۴) -۸$$

۱۱۹۷- مستطیلی که دو ضلع آن در یک رأس مشترک اند روی خطوط به معادله $3x - y = 5$ و $x - ay = 4$ واقع اند. اگر نقطه $(-3, 4)$ یک رأس آن باشد، محیط چند برابر $\sqrt{10}$ است؟

$$(۱) ۴/۶ \quad (۲) ۵/۶ \quad (۳) ۴/۲ \quad (۴) ۵/۲$$

۱۱۹۸- در شکل زیر زوایای روبه‌رو از چهارضلعی $MNBC$ مکمل هم‌اند. مساحت این چهارضلعی چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۲۵ (۱)

۵۰ (۲)

۶۵ (۳)

۷۵ (۴)

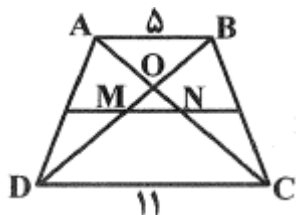
۱۱۹۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $(A = 90^\circ)$ فاصله نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها از دو ضلع ۲ و $2\sqrt{3}$ می‌باشد. طول وتر مثلث کدام است؟

 $8\sqrt{2}$ (۴) $7\sqrt{2}$ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۱۲۰۰- مطابق شکل زیر در دوزنقه $ABCD$ نقاط M و N وسط قطرها هستند. مساحت مثلث OMN چه کسری از مساحت مثلث AOB است؟



۰/۳۶ (۱)

۰/۲۵ (۲)

۰/۳ (۳)

۰/۱۶ (۴)

۱۲۰۱- از ۸۲ نفر مسافر یک هواپیما، ۲۵ نفر تاجرند و ۱۴ نفر برای اولین بار سفر هوایی داشته‌اند. اگر ۹ نفر از این تاجرین برای اولین بار سفر هوایی کرده باشند، چند نفر نه تاجرند و نه برای اولین بار سفر هوایی کرده‌اند؟

۴۵ (۴)

۴۵ (۳)

۳۹ (۲)

۵۲ (۱)

۱۲۰۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، معادله $(x+1)(-x^2+ax+a+3)=0$ ، دو جواب منفی و یک جواب مثبت دارد؟

 $a > 3$ (۴) $-3 < a < 0$ (۳) $0 < a < 3$ (۲) $a > -3$ (۱)

۱۲۰۳- مثلث قائم‌الزاویه، با طول ضلع کوچک یک واحد مفروض است، اگر طول اضلاع آن را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، یک دنباله حسابی تشکیل دهد، آن‌گاه نسبت مساحت به محیط مثلث کدام است؟

۳ (۴)

 $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲)

۲ (۱)

۱۲۰۴- از معادله $\log_2 \frac{16}{x} = 2 + \log_2(x-3)$ ، حاصل $\log_{\sqrt{7}}(3x^2+1)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۲۰۵- فرض کنید $g(x) = 2x^2 - 3x - 2$ و $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)$ باشد. با کدام نوع انتقال، نمودار تابع $g \circ f(x)$ محور طول‌ها را در دو نقطه متمایز با طول‌های نامنفی قطع خواهد کرد؟

(۱) ۳ واحد به سمت راست (۲) ۳ واحد به سمت چپ

(۳) $\frac{3}{2}$ به سمت بالا (۴) $\frac{3}{2}$ به سمت پایین

۱۲۰۶- اگر تابع $f = \{(a, 0), (3, 5), (2a^2 - 12a + 21, 0)\}$ معکوس پذیر باشد، مجموع مقادیر برد معکوس تابع کدام است؟

۱ (۱) ۷/۵ (۲) ۶/۵ (۳) ۶ (۴) ۶

۱۲۰۷- وزنه‌ای به انتهای یک فنر متصل است و به طور پیوسته بالا و پایین می‌رود، t ثانیه بعد از آغاز حرکت، فاصله این وزنه از سطح زمین، d سانتی‌متر است. به طوری که $d = 12/2 + 3/11 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi t\right)$ فاصله بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ای که این وزنه از آن‌ها عبور می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

(۱) ۶/۲۲ (۲) ۱۰/۳ (۳) ۷/۲ (۴) ۱۶/۴

۱۲۰۸- اگر $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$ باشد، حدود تغییرات $\sin^4 x - \cos^4 x$ کدام است؟

(۱) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (۲) $\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (۳) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ (۴) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

۱۲۰۹- ضریب تغییرات داده‌های جدول فراوانی زیر کدام است؟

x_i	۵	۴	۵	۹
f_i	۱	۲	۵	۳

(۱) $0/1\sqrt{7}$

(۲) $0/2\sqrt{7}$

(۳) $0/1\sqrt{5}$

(۴) $0/2\sqrt{5}$

۱۲۱۰- با ارقام 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان نوشت به طوری که فقط یک رقم فرد داشته باشد؟

(۱) ۶۴ (۲) ۴۸ (۳) ۳۶ (۴) ۲۴

۱۲۱۱- اگر $P(B|A') = P(A) = 0/2$ ، آنگاه $P(A' - B')$ کدام است؟

(۱) ۰/۱۶ (۲) ۰/۱۳ (۳) ۰/۲۶ (۴) ۰/۰۴

۱۲۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{\cos x - |x|}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) وجود ندارد.

۱۲۱۳- به ازای کدام مقدار a ، تابع f در $x = -1$ پیوسته است؟ ([] نماد جزء صحیح است).

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 2ax & x \geq -1 \\ [x] + \frac{a}{|x|} & x < -1 \end{cases}$$

- (۱) $a = 1$ (۲) $a = -1$ (۳) هیچ مقدار a (۴) هر مقدار حقیقی a

۱۲۱۴- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{4}$ و $g(x) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ باشند. آن گاه $g'(-1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

۱۲۱۵- در پرتاب دو تاس سالم، اگر دو عدد رو شده متمایز باشند، احتمال این که مجموع اعداد رو شده بیش تر از ۶ نباشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۱۶- کارخانه‌ای دو محصول A و B تولید می‌کند. احتمال سالم بودن محصول A برابر $\frac{9}{10}$ و احتمال سالم بودن محصول B برابر با $\frac{6}{10}$ می‌باشد. اگر محصولی از میان ۱۸ محصول A و ۲۰ محصول B انتخاب شود، تقریباً با چه احتمالی سالم است؟

- (۱) $\frac{85}{100}$ (۲) $\frac{74}{100}$ (۳) $\frac{64}{100}$ (۴) $\frac{54}{100}$

۱۲۱۷- اگر جواب‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ از مربع جواب‌های معادله $x^2 + 6x + 1 = 0$ ، یک واحد بیش تر باشد، b کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) -۳۵ (۳) ۳۶ (۴) -۳۶

۱۲۱۸- اگر $[|x| + 2] = 2$ ، آن گاه حاصل $g(x) = [x] + [-x]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- (۱) فقط صفر (۲) فقط ۱ (۳) ۱ یا ۲ (۴) صفر یا ۱ یا ۲

۱۲۱۹- اگر $f(x) = x^3 - 4|x| + 3$ و $g(x) = [x] + [-x]$ آن گاه بیش ترین مقدار تابع $f \circ g(x)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۲۰- اگر در تابع $f(x) = x^3 + 2ax + 5a$ ، عرض از مبدأ نمودار f^{-1} برابر (-2) باشد، آن گاه مجموع ریشه‌های معادله $(f^{-1} \circ f)(ax) + 7 = 2x^2 + 4x$ برابر کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

۱۲۲۱- نمودار تابع f داده شده، کدام گزینه درست نیست؟

(۱) فقط یک نقطه روی نمودار تابع وجود دارد که در آن مقدار تابع و مشتق تابع برابر صفر است.



(۲) در ۶ نقطه از نمودار، f' تغییر علامت می‌دهد.

(۳) تنها در ۵ نقطه از نقاط معلوم شده، مقدار تابع مخالف صفر، اما مقدار مشتق تابع برابر صفر است.

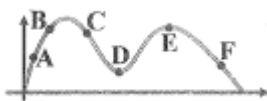
(۴) شیب منحنی در نقطه H از شیب پاره خط GH بیشتر است.

۱۲۲۲- در مورد نقاط روی شکل چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

(ب) شیب منحنی در نقاط F و C منفی است.

(پ) $m_A < m_B$ (ت) $m_E < m_B < m_A$ (ث) $m_F < m_D < m_B$



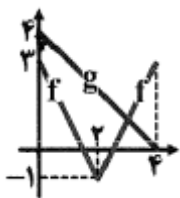
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۲۲۳- با توجه به نمودار توابع f و g ، اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ آن گاه عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع k در $x = 3$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) $\frac{8}{3}$

(۴) -۸

۱۲۲۴- نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $y = x - 3\sqrt[3]{x}$ در کدام ناحیه از محورهای مختصات قرار می‌گیرد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۲۲۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $2 + \sin\left(\frac{3\pi+2x}{2}\right) = \cos 2x$ (کدام است؟) $(k \in \mathbb{Z})$

$2k\pi$ (۴)

$k\pi$ (۳)

$k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۱)

۱۲۲۶- ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $y = |x|\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

$4\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

۱۲۲۷- نقاط $A(0, 5)$ ، $B(2, 2)$ و $C(-1, 0)$ رأس‌های یک مثلث‌اند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

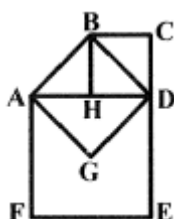
$2\sqrt{10}$ (۴)

$\sqrt{10}$ (۳)

$2\sqrt{13}$ (۲)

$\sqrt{13}$ (۱)

۱۲۲۸- سه مربع مانند شکل زیر، یکدیگر را قطع کرده‌اند. اگر $CE = 21$ باشد، مساحت مثلث ADG کدام است؟



$\frac{24}{5}$ (۱)

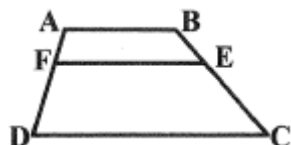
۴۲ (۲)

۵۶ (۳)

۴۹ (۴)

۱۲۲۹- در دوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{5}{2}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{1}{4}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$

کدام است؟



$\frac{11}{20}$ (۱)

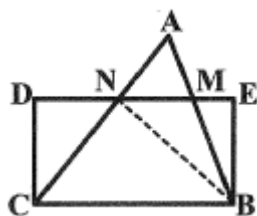
$\frac{7}{15}$ (۲)

$\frac{8}{15}$ (۳)

$\frac{3}{5}$ (۴)

۱۲۳۰- در شکل زیر $BCDE$ یک مستطیل و مساحت دوزنقه $MNCB$ ، ۱۵ برابر مساحت مثلث AMN است.

مساحت مستطیل $BCDE$ چند برابر مساحت مثلث MNB است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۱۲۳۱- مجموعه A دارای ۱۲ عضو و مجموعه B دارای ۹ عضو است و $n(A \cup B) = 18$ ، آن‌گاه مجموعه

$(B \cap A') \cup (A' \cup B)'$ دارای چند عضو است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۱۲۳۲- در کدام مرحله از الگوی زیر، تعداد پاره خطها ۱۹۵ تااست؟

۲۹ (۱)

۳۰ (۲)

۳۱ (۳)

۳۲ (۴)

۱۲۳۳- اگر $x = 4$ یکی از ریشه‌های معادله $\sqrt{5x - x^2} = 2x + a$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ $\frac{9}{5}$ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

جواب دیگر ندارد. (۴)

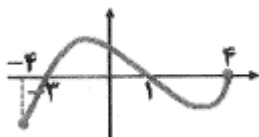
۱۲۳۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{|2-x|} < \frac{1}{|2x-3|}$ کدام بازه نمی تواند باشد؟ $(1, \frac{3}{2})$ (۱) $(1, \frac{5}{3})$ (۲) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ (۳) $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ (۴)۱۲۳۵- نمودار تابع f داده شده است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(-3, 1) (۱)

(-4, 0) U (1, 4) (۲)

(-3, 0) (۳)

(-4, 3) U [0, 1) (۴)

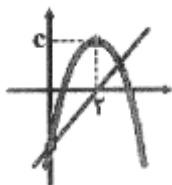
۱۲۳۶- اگر نمایش منحنی $y = ax^2 + 12x + b$ و خط $y = \frac{2}{5}x + k$ به صورت زیر باشد، کدام است c ؟

۱۰ (۱)

۹ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

۱۲۳۷- نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ می باشد.

مساحت مربع کدام است؟

۴۰ (۱)

۴۵ (۲)

۷۵ (۳)

۸۰ (۴)

۱۲۳۸- استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای عرض آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، عرض قسمت مستطیل شکل استادیوم چقدر باشد تا مساحت بخش مستطیلی این استادیوم حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد؟ ($\pi \approx 3$)

- ۴۵۰ (۱) ۳۵۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۲۵۰ (۴)

۱۲۳۹- بیش‌ترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد کدام است؟

- ۵۴ (۱) ۶۳ (۲) ۷۲ (۳) ۸۱ (۴)

۱۲۴۰- در شکل مقابل مقدار نسبت $\frac{y}{x}$ کدام است؟



(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) ۲

(۴) $\sqrt{2}$

۱۲۴۱- چند مقدار صحیح از a تابع $f(x) = 3|2x + a| + 1$ در بازه $[-3, 4]$ یک‌به‌یک نمی‌شود؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴)

۱۲۴۲- دامنه تغییرات داده‌های $3, 7, 1, -2m, 5, m + 7$ سه برابر میانه است. انحراف معیار داده‌های زیر کدام است؟ ($m > 0$)

$m + \frac{1}{3}, 3m + 1, 6m, 9m - 1$

- ۳ $\sqrt{5}$ (۱) ۲ $\sqrt{5}$ (۲) ۳ $\sqrt{3}$ (۳) ۲ $\sqrt{3}$ (۴)

۱۲۴۳- در پرتاب سه تاس سالم، احتمال آن‌که حداقل یک بار عدد دو ظاهر شود، کدام است؟

- $\frac{91}{108}$ (۱) $\frac{45}{108}$ (۲) $\frac{125}{216}$ (۳) $\frac{91}{108}$ (۴)

۱۲۴۴- اگر $\frac{(|x|+2)(x-1)}{-x-1} > 0$ حاصل $[x] + [x^2] - [x^3] - [x^6]$ کدام است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴)

۱۲۴۵- اگر $\tan(\pi - x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ آن‌گاه حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

- $-\frac{1}{9}$ (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $-\frac{2}{9}$ (۴)

۱۲۴۶- با توجه به ضابطه تابع f حاصل ضرب ریشه‌های معادله $f(|x| - 2) = f(|x|)$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 4x^2 & : x \geq 0 \\ 13 + 5x & : x < 0 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{8} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{16} \text{ (۱)}$$

۱۲۴۷- حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 + 9}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$ کدام است؟

$$-\frac{5}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{5}{2} \text{ (۳)} \quad -5 \text{ (۲)} \quad 5 \text{ (۱)}$$

۱۲۴۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 18}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

$$7 \text{ (۴)} \quad -7 \text{ (۳)} \quad 7/2 \text{ (۲)} \quad -7/2 \text{ (۱)}$$

۱۲۴۹- به ازای کدام مقدار a ، تابع f در $x = 1$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{x - 1} & x \neq 1 \\ -x - \frac{4}{a^3} & x = 1 \end{cases}$$

$$\{2\} \text{ (۱)} \quad \{2, -2\} \text{ (۲)} \quad \text{هیچ مقدار } a \text{ (۳)} \quad \text{هر مقدار حقیقی } a \text{ (۴)}$$

۱۲۵۰- اگر $y = 2u^3 - 2u$ و $u = x - \sqrt{x}$ ، حاصل $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

$$14/5 \text{ (۱)} \quad -15/5 \text{ (۲)} \quad 16/5 \text{ (۳)} \quad -17/5 \text{ (۴)}$$

۱۲۵۱- ظرفی شامل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سفید یکسان است. به تصادف یک مهره از جعبه خارج کرده و آن را از لحاظ سفید بودن رنگ آزمایش می‌کنیم و به جعبه برمی‌گردانیم. اگر x تعداد آزمایش‌هایی باشد که در آن برای اولین بار مهره سفید خارج شود، $P(x \leq 2)$ کدام است؟

$$\frac{19}{98} \text{ (۴)} \quad \frac{40}{49} \text{ (۳)} \quad \frac{10}{98} \text{ (۲)} \quad \frac{30}{49} \text{ (۱)}$$

۱۲۵۲- در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A ، B و C به ترتیب ۳۰، ۴۵ و ۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A ، ۲ درصد از محصولات B ، ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟

$$0/978 \text{ (۱)} \quad 0/987 \text{ (۲)} \quad 0/897 \text{ (۳)} \quad 0/798 \text{ (۴)}$$

۱۲۵۳- اگر برای $(x \geq -2)$ ضابطه وارون تابع $y = x^2 + 4x - 1$ به صورت $y = \sqrt{ax + b} + c$ باشد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

$$3 \text{ (۴)} \quad 5 \text{ (۳)} \quad 4 \text{ (۲)} \quad 6 \text{ (۱)}$$

۱۲۵۴- تعداد جواب‌های معادله $\cos 4x = (\sin x + \cos x)^2$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

۱۲۵۵- تابع $f(x) = x[x]$ در بازه $[-2, 2]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) بی شمار

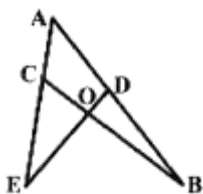
۱۲۵۶- نقاط $A(3, 2)$, $B(2, 1)$ و $C(k, 0)$ رئوس مثلثی با مساحت ۵ می باشد. k کدام است؟

- (۱) -۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۱، -۹ (۴) -۱۱، ۹

۱۲۵۷- دایره به مرکز $(0, -1)$ از خط به معادله $y = 2$ و تری به طول ۴ جدا می کند، دایره از کدام نقطه می گذرد؟

- (۱) $(2, -2)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(2, 2)$ (۴) $(1, -3)$

۱۲۵۸- در شکل زیر، اگر $EOB = 115^\circ$ و $EAB = 25^\circ$ ، آن گاه $\widehat{B} + \widehat{E}$ چند درجه است؟



(۱) ۹۵

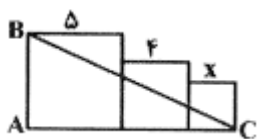
(۲) ۸۵

(۳) ۹۰

(۴) ۱۰۰

۱۲۵۹- در شکل زیر سه مربع در کنار یکدیگرند. اگر M محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه

ABC باشد و $MC = 6/5$ آن گاه مقدار x چقدر است؟



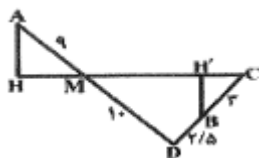
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۲۶۰- با توجه به شکل مقابل، AH چند برابر BH' است؟



(۱) $1/55$

(۲) $1/25$

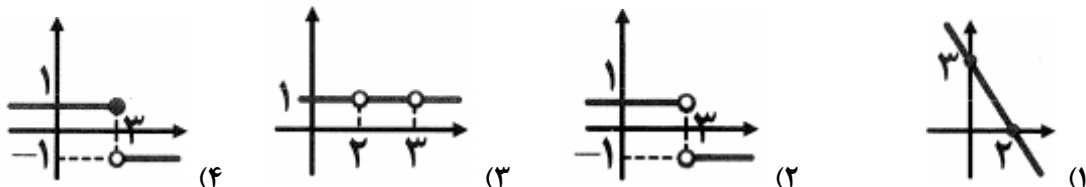
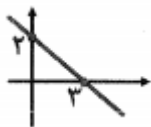
(۳) $1/65$

(۴) $1/35$

۱۲۶۱- اگر $A = [-2, 5]$ و $B = [-5, 3]$ باشد، مجموعه ΔAB شامل کدام بازه است؟

- (1) (3, 5) (2) [3, 5] (3) (-5, 5) (4) [-2, 3]

۱۲۶۲- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن گاه نمودار تابع $y = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ در کدام گزینه آمده است؟



۱۲۶۳- در مثلث ABC با رئوس $A(2, -2)$ ، $B(1, 9)$ و $C(6, 8)$ ، معادله میانه BM ، محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (1) 4 (2) 4/5 (3) 5 (4) 5/5

۱۲۶۴- اگر محور تقارن تابع درجه دوم f خط $x = -2$ باشد، آن گاه معادله محور تقارن تابع $g(x) = f(2x + 1) - 3$ کدام است؟

- (1) $-\frac{5}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{3}{4}$

۱۲۶۵- سه جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ را در نظر بگیرید. اگر عدد ۱۲ را بین جملات دوم و سوم این دنباله قرار دهیم، چهار جمله اول یک دنباله حسابی شکل می‌گیرد. مجموع بیست جمله اول این دنباله حسابی کدام است؟

- (1) ۸۲۰ (2) ۸۴۰ (3) ۸۲۵ (4) ۸۴۵

۱۲۶۶- در ۲۵ داده آماری با واریانس ۹ و ضریب تغییرات ۰/۲، داده‌ها را دو برابر کرده و سپس پانزده واحد از آن‌ها کم می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- (1) ۰/۲۵ (2) ۰/۴ (3) ۰/۵ (4) ۰/۶

۱۲۶۷- یک تاس و دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که تاس عدد فرد و دو سکه یکسان ظاهر شوند، کدام است؟

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $\frac{1}{24}$

۱۲۶۸- A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S هستند به طوری که $A \subseteq B$ ، اگر $P(B) = 0/5$ و $P(A) = 0/25$ ،

آن گاه حاصل $\frac{P(B'|A')}{P(A \cap B)}$ کدام است؟

$$\frac{8}{5} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{8}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{8}{9} \text{ (۱)}$$

۱۲۶۹- اگر $f = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 4)\}$ و نمودار تابع $y = (f \circ g)(x - 2)$ شکل زیر باشد عرض از مبدأ نمودار تابع $y = g^{-1}(x)$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۲۷۰- به ازای کدام مقدار a معادلات $2x^2 = 3 - 5x$ و $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+a}{x+3} = a$ جواب یکسان دارند؟

$$-\frac{5}{7} \text{ (۴)} \quad -2 \text{ (۳)} \quad -1 \text{ (۲)} \quad 0 \text{ (۱)}$$

۱۲۷۱- با فرض $\tan 20^\circ = 0/36$ ، حاصل $\frac{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{31}{16} \text{ (۴)} \quad \frac{8}{17} \text{ (۳)} \quad \frac{8}{15} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{9} \text{ (۱)}$$

۱۲۷۲- اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}$ و $g(x) = \cos x$ آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} f \circ g(x)$ کدام است؟

$$0/5 \text{ (۴)} \quad -0/5 \text{ (۳)} \quad +\infty \text{ (۲)} \quad -\infty \text{ (۱)}$$

۱۲۷۳- به ازای کدام مقدار a تابع f با ضابطه‌ی مقابل در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{1 - \cos 4x} & x \neq 0 \\ a + b \sin \pi x & x = 0 \end{cases}$$

$$4 \text{ (۴)} \quad 8 \text{ (۳)} \quad 0/25 \text{ (۲)} \quad 0/125 \text{ (۱)}$$

۱۲۷۴- آهنگ متوسط تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع از $r = 3$ به $r = 5$ تغییر می‌کند. چند برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت در $r = 2/5$ است؟

$$3/2 \text{ (۴)} \quad 1/6 \text{ (۳)} \quad 3\pi \text{ (۲)} \quad \pi \text{ (۱)}$$

۱۲۷۵- در پرتاب هم‌زمان دو تاس، احتمال آن که فاصله بین دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

۱۲۷۶- با نقاط روی شکل مقابل چند مثلث می توان ساخت به طوری که یکی از رئوس آن مرکز دایره باشد؟



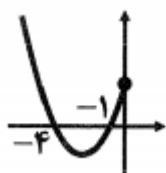
(۱) ۲۸

(۲) ۲۴

(۳) ۸۴

(۴) ۸۰

۱۲۷۷- شکل مقابل نمودار تابع f می باشد. دامنه تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۲۷۸- مشتق دوم تابع با ضابطه $f(x) = (x-4)\sqrt{x}$ در $x = 4$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۱۲۷۹- از دو معادله $\ln(y+x-1) + \ln(2y+3) = 0$ و $\ln(x-4y) = 2 \ln 2$ مقدار $x-y$ کدام

است؟ ($\log_e x = \ln x$)(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$

(۳) -۱

(۴) $\frac{3}{5}$

۱۲۸۰- مجموع جواب های معادله $\tan x + \sqrt{3} \cot x = 1 + \sqrt{3}$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند برابر $\frac{\pi}{6}$ است؟

(۱) ۱۷

(۲) ۱۸

(۳) ۱۹

(۴) ۲۰

۱۲۸۱- تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است، حدود تغییرات a کدام است؟ (۱) $0 \leq$

(۱) $a < 2$ (۲) $-\sqrt{3} \leq a < 2$ (۳) $|a| \leq \sqrt{3}$ (۴) $|a| \leq 2$

۱۲۸۲- برای تابع مشتق پذیر f داریم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = -5$ مشتق f در $x = -2$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{5}{16}$

۱۲۸۳- در چند نقطه روی منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ خطوط مماس موازی محور عرض هاست؟

(۱) ۱

(۲) ۲

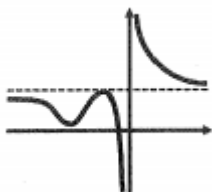
(۳) ۳

(۴) ۴

۱۲۸۴- طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = \frac{x^2+9}{x+a}$ می‌باشد و $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$ مقدار a^2 کدام است؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۲/۲۵ (۳) ۱/۵ (۴) ۳/۵

۱۲۸۵- شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{2x^3+x^2+x+b}{x^3}$ می‌باشد. مقدار b کدام است؟

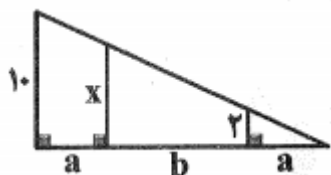


- (۱) ۲
(۲) 1/2
(۳) 1/4
(۴) -1/4

۱۲۸۶- اگر دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 - 3x + a = 0$ مماس داخل باشند، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

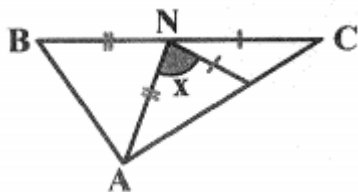
- (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵

۱۲۸۷- در شکل زیر، مقدار x کدام است؟



- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

۱۲۸۸- در شکل زیر، اگر $BAC = 54^\circ$ ، آن گاه اندازه زاویه x کدام است؟

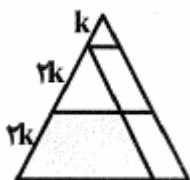


- (۱) ۷۰°
(۲) ۷۲°
(۳) ۷۴°
(۴) ۷۶°

۱۲۸۹- اندازه دو ضلع قائم از مثلث قائم الزاویه‌ای ۳ و $3\sqrt{11}$ می‌باشد. فاصله نقطه تلاقی میانها از نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌های اضلاع در این مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۲۹۰- در شکل روبه‌رو، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت ذوزنقه رنگ‌شده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



۳۲ (۱)

۴۸ (۲)

۵۴ (۳)

۵۸ (۴)

۱۲۹۱- اگر $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4x+3}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < 3 - x < 6\}$ حاصل $A' \cap B$ شامل چند عدد حسابی است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲۹۲- اگر $A = 2\sqrt{2} - 1$ و $B = 2\sqrt{2} + 1$ حاصل $\sqrt{A^2 - B^2}$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

۱۲۹۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+3)x^2 - 2(m-2)x - 6$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

(۱) $m > 2$ (۲) $m < -3$ (۳) هر مقدار m (۴) هیچ مقدار m

۱۲۹۴- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، مجموع جملات در دسته بیستم، کدام است؟

(1), (2, 3), (4, 5, 6), ...

(۱) ۴۰۳۰ (۲) ۴۰۲۰ (۳) ۴۰۱۰ (۴) ۴۰۰۸

۱۲۹۵- نمودار و منحنی $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ و $g(x) = \sqrt{3x-3}$ همدیگر را در نقطه A قطع می‌کنند. فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) ۴ (۲) $\sqrt{17}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۲۹۶- معادله $[x] = x - \frac{1}{3}$ در بازه $[-3, 2]$ ، چند ریشه دارد؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) صفر

۱۲۹۷- اگر تابع $f(x) = (a-5)x^4 + x^3 + (a-3)x^2 + 2x$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه معادله $f = f^{-1}$ چند جواب دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

۱۲۹۸- مقدار k کدام باشد تا معادله $|x^2 - 3k + k| = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز باشد؟

(۱) $-3/5$ (۲) $3/5$ (۳) $-7/4$ (۴) $7/4$

۱۲۹۹- اگر $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ دامنه تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۳۰۰- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x + 2| + |x - 3|$ در آن بازه صعودی است، کدام است؟

(۱) \mathbb{R} (۲) $(-\infty, 3]$ (۳) $[-2, +\infty)$ (۴) $[-2, 3]$

۱۳۰۱- اگر معادله $3^{2-|x|} = k$ دارای دو جواب باشد، آن‌گاه k چند مقدار صحیح می‌تواند به خود بگیرد؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۳۰۲- تابع $f(x) = \sqrt{a - \log_2(b - 2x)}$ فقط برای $-1 \leq x < 3$ بامعنی است. $\log_{3\sqrt{3}} a + b$ کدام است؟

(۱) $3/4$ (۲) $4/3$ (۳) $9/4$ (۴) $4/9$

۱۳۰۳- در یک متوازی‌الاضلاع اندازه دو قطر آن ۱۴ و $6\sqrt{3}$ واحد و زاویه بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۲ (۳) ۲۱ (۴) ۲۸

۱۳۰۴- میانگین شعاع دایره‌هایی ۲۰ واحد با ضریب تغییرات $3/4$ محاسبه شده است. میانگین مساحت این دایره‌ها کدام است؟

(۱) 364π (۲) 436π (۳) 446π (۴) 336π

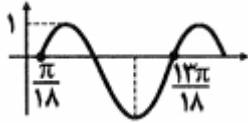
۱۳۰۵- دو تاس را با هم می‌اندازیم، اگر عدد مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۹ باشد، با کدام احتمال تاس اول عدد ۴ را نشان می‌دهد؟

(۱) $2/9$ (۲) $1/6$ (۳) $1/9$ (۴) $4/9$

۱۳۰۶- اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}$ مقدار $g \circ f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $1/2$ (۳) $\sqrt{3}/2$ (۴) $\sqrt{2}/2$

۱۳۰۷- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. حاصل $f(x) = \left(\frac{7\pi}{18}\right)$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) $-1 + \sqrt{3}$

(۳) $-1 + \sqrt{2}$

(۴) -2

۱۳۰۸- اگر حد تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 5x}}{ax + 4}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر ۱ باشد، $f(4)$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{16}$

(۳) $\frac{1}{16}$

(۲) $-\frac{1}{8}$

(۱) $\frac{1}{8}$

۱۳۰۹- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{(2x^2 + x - 1)(1 + \sqrt[3]{x})}{(x+1)^2} & : x \neq -1 \\ 3x|x| + 2a & : x = -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته است. a کدام است؟

(۴) -2

(۳) -1

(۲) 2

(۱) 1

۱۳۱۰- در تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 0 \\ \frac{x}{2} + 4 & x \geq 0 \end{cases}$ حاصل $f(2f(1 - \sqrt{3}))$ کدام است؟

(۴) $-2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۲) -6

(۱) 6

۱۳۱۱- تابع $y = x|x - 2|$ در یک بازه، نزولی و ضابطه معکوس آن در این بازه $y = a + \sqrt{c - x} : x \in (0, b)$ است مقدار abc کدام است؟

(۴) 2

(۳) 1

(۲) -2

(۱) -1

۱۳۱۲- جواب کلی معادله $\cos 4x = 1 - 2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ کدام است؟

(۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{k\pi}{6}$

(۱) $\frac{k\pi}{3}$

۱۳۱۳- اگر $f(x) = x^2[x]$ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(2) - f(1-x)}{x^2 - 1}$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

(۴) 2

(۳) -2

(۲) -4

(۱) صفر

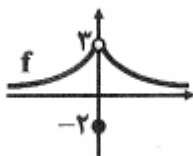
۱۳۱۴- شکل زیر مربوط به نمودار تابع f است. مشتق تابع با ضابطه $g(x) = \frac{x}{2f(x)+x}$ در $x = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۴) $-\frac{1}{6}$



۱۳۱۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 & x > -1 \\ -(x+1)^3 - 1 & x \leq -1 \end{cases}$ دارای نقطه بحرانی است.

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۱۳۱۶- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

- (۱) $a < -2 \vee a > 0$ (۲) $a < 0 \vee a > 2$ (۳) $-2 < a < 0$ (۴) $0 < a < 2$

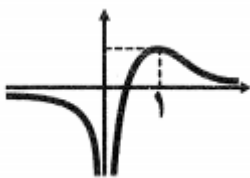
۱۳۱۷- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2+bx-4}{x^2}$ به صورت روبه‌رو باشد، $b - a$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۸



۱۳۱۸- از رأس یک مستطیل عمودی بر قطر آن رسم می‌کنیم. طول پاره خط عمود حاصل ربع طول قطر مستطیل است. زاویه بین نیمساز یک رأس و قطر گذرنده از همان رأس کدام است؟

- (۱) 90° (۲) 30° (۳) 45° (۴) 60°

۱۳۱۹- عکس کدام قضیه شرطی، خود یک قضیه شرطی نیست؟

(۱) در دو مثلث متشابه، اضلاع متناظر متناسب‌اند.

(۲) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای منصف یکدیگرند.

(۳) در مستطیل، طول قطرهای با هم برابرند.

(۴) در مثلثی سه ضلع برابر باشند، سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

۱۳۲۰- در لوزی شکل روبه‌رو M وسط ضلع لوزی است. مساحت قسمت هاشور خورده چه کسری از مساحت لوزی می‌باشد؟



(۱) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{6}$

۱۳۲۱- حدود a کدام باشد تا عدد ۲ در بازه $[2a - 6, 5a - 3]$ باشد؟

- (۱) $1 < a \leq 3$ (۲) $1 < a \leq 4$ (۳) $2 < a \leq 3$ (۴) $2 < a \leq 4$

۱۳۲۲- با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۹۱ می‌باشد؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۱

(۳) ۱۲

(۴) ۱۳

۱۳۲۳- به ازای چه حدودی از m ، نمودار $y = mx^2 - 3x + 4$ همواره بالای نمودار $y = x - 1$ قرار دارد؟

- (۱) $(\frac{2}{5}, +\infty)$ (۲) $(\frac{4}{5}, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \frac{2}{5})$ (۴) $(-\infty, \frac{4}{5})$

۱۳۲۴- اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = x + [x]$ ، آن‌گاه مجموعهٔ جواب معادلهٔ $fog(x) + g(x) = 2$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $[1, 2)$ (۲) $(0, 1]$ (۳) $[0, 1)$ (۴) \emptyset

۱۳۲۵- اگر $f(1-x) = \sqrt{x - |2x - 2|}$ ، دامنهٔ تابع $y = -3f(x) + 4$ کدام است؟

- (۱) $[-1, \frac{2}{3}]$ (۲) $[-1, \frac{1}{3}]$ (۳) $[-1, 0]$ (۴) $[0, 2]$

۱۳۲۶- دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_2 x^2 + x}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 1]$ (۳) $[0, 1)$ (۴) $(-\infty, \frac{4}{5})$

۱۳۲۷- در ساختن یک کلمهٔ ۶ حرفی با حروف کلمهٔ ABADAN احتمال آن که حروف A یک در میان باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{1}$

۱۳۲۸- در اولین ظرف از سه ظرف همانند، ۳ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه و در دومین ظرف ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف سوم فقط مهرهٔ سیاه داریم. با چشم بسته از یکی از ظرف‌ها یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که این مهره سیاه باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{17}{24}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

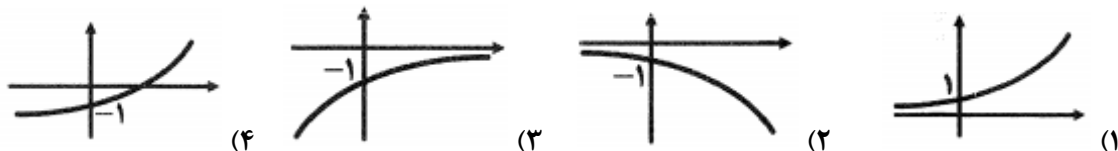
۱۳۲۹- در پرتاب دو تاس با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۹ می‌باشد. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فردند؟

$\frac{5}{18}$ (۴) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{7}{13}$ (۲) $\frac{4}{13}$ (۱)

۱۳۳۰- اگر $f(x) = x^2 - 2[x] + 1$ آن گاه $f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

۷ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

۱۳۳۱- نمودار تابع $y = -\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{3-x}$ کدام است؟



۱۳۳۲- اگر $3^{a+b} = \frac{1}{3^{b-a}}$ و $x \log(x + 2b) = x + 2 - 2 \log x$ باشد، حاصل $x + b$ کدام است؟

۸ (۴) -۹ (۳) ۱۰ (۲) ۹ (۱)

۱۳۳۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3x-4}{x^2-2x}$ کدام است؟

-∞ (۴) +∞ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۱)

۱۳۳۴- اگر تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد، $k - a$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x^2-1} & x > 1 \\ k + [2x] & x < 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

-۱ (۴) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۱)

۱۳۳۵- آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ در $x = 1$ چقدر از آهنگ متوسط تابع در فاصله $[0, 2]$ بیش تر است؟

۵ (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) صفر (۱)

۱۳۳۶- اگر $f^{-1}(3) - f(x) = 2x - 1$ باشد، آن گاه $f(3)$ کدام است؟

-۲ (۴) ۵ (۳) -۷ (۲) ۶ (۱)

۱۳۳۷- به ازای یک مقدار m ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + m + 1 = 0$ معکوس یکدیگرند. فاصله بین نقاط تلاقی منحنی $f(x) = 2x^2 + 4mx + 3$ با محور طول‌ها کدام است؟

$2\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

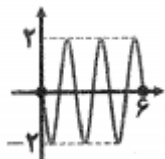
۱۳۳۸- انتهای کمان جواب‌های معادله $2 \sin^2 x = 3(1 + \cos x)$ تشکیل کدام شکل را می‌دهند؟

(۲) مثلث متساوی الاضلاع

(۱) مستطیل

(۴) مثلث متساوی الساقین

(۳) مثلث قائم الزاویه

۱۳۳۹- اگر نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

-۱ (۱)

۲ (۲)

-۳ (۳)

۴ (۴)

۱۳۴۰- جدول زیر مقادیر انحراف از میانگین ۱۲ داده آماری دسته‌بندی شده را مشخص می‌کند. واریانس داده‌ها

کدام است؟

انحراف از میانگین	-۴	-۳	b	۱	۸
فروانی مطلق	۱	۵	a	۳	۱

 $\frac{20}{3}$ (۱) $\frac{40}{3}$ (۲)

۱۰ (۳)

 $\frac{44}{3}$ (۴)۱۳۴۱- خط قائم بر منحنی با ضابطه $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2ax^2 - 1$ در $x = -1$ بر خط مماس بر منحنی در $x = 1$ عمود است. $f'(2)$ برابر با کدام گزینه است؟

۶ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۱۳۴۲- تابع f روی بازه $[a, b]$ تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

(۱) هر نقطه بحرانی، نقطه اکسترمم نسبی است.

(۲) هر نقطه اکسترمم نسبی، نقطه بحرانی است.

(۳) در هر نقطه بحرانی، مشتق تابع صفر است.

(۴) در هر نقطه اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

۱۳۴۳- تابع $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 10x + 2$ از لحاظ یکنوایی چگونه است؟

(۲) همواره صعودی

(۱) همواره نزولی

(۳) ابتدا نزولی، سپس صعودی و بعدش نزولی (۴) ابتدا صعودی، سپس نزولی و بعدش صعودی

۱۳۴۴- تعداد نقاط بحرانی تابع $y = \sqrt[3]{x^2} - x^2$ کدام است؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) بی‌شمار

۱۳۴۵- اگر $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، آن‌گاه نقطه تلاقی مجانب‌های تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $(0, 1)$

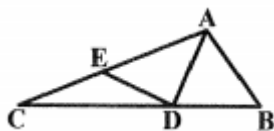
۱۳۴۶- با فرض $f(x) = (x - x^2)(2 + [-x])$ مقدار مشتق چپ تابع در $x = -1$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

۱۳۴۷- اگر $f(3x - 1) = x^3 - x^2 + 4x + 3$ ، مشتق تابع $y = f(\sqrt{-x})$ در $x = -4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{20}$ (۲) $-\frac{3}{20}$ (۳) $-\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۱۳۴۸- در مثلث ADE ، نقطه C روی امتداد AE طوری قرار دارد که $AD = ED = BD = CE$ ، اگر $B = 42^\circ$ ، زاویه EDA چند درجه است؟

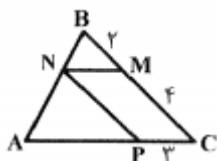


- (۱) 54°
(۲) 55°
(۳) 52°
(۴) 65°

۱۳۴۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($B = 90^\circ$)، از M وسط BC عمود MN را بر AC وارد می‌کنیم، اگر $NC = 3$ و $AN = 4$ ، طول AB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{7}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{5}$

۱۳۵۰- در شکل روبه‌رو $MNPC$ یک متوازی‌الاضلاع است. اندازه AP کدام است؟



- (۱) ۷
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۱

۱۳۵۱- اگر بازه $[-2, 2a + 6]$ شامل ۷ عدد طبیعی باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

$$(1) \left[-1, \frac{1}{2}\right] \quad (2) \left[-2, \frac{1}{2}\right] \quad (3) \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad (4) \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

۱۳۵۲- بین ۳ و ۴۷ چند عدد می توان درج نمود به طوری که با این دو عدد تشکیل دنباله حسابی داده و اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین آن ها ۳۶ باشد؟

$$(1) 8 \quad (2) 9 \quad (3) 10 \quad (4) 11$$

۱۳۵۳- اگر $3 \sin^2 x = 5 + 4 \sin x \cdot \cos x - 10 \cos^2 x$ ، آن گاه حاصل ضرب مقادیر ممکن برای $\tan x$ کدام است؟

$$(1) \frac{2}{5} \quad (2) -\frac{2}{5} \quad (3) \frac{3}{5} \quad (4) -\frac{3}{5}$$

۱۳۵۴- اگر $x = 1$ یک جواب معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{a+2x} = 2$ باشد جواب دیگر معادله کدام است؟

$$(1) \frac{17}{14} \quad (2) \frac{17}{16} \quad (3) \frac{4}{17} \quad (4) \text{ جواب دیگری ندارد.}$$

۱۳۵۵- سهمی $y = x^2 + (m-2)x + 5$ با رأس به مختصات $S(m^2 - 4m + 3, -2)$ فقط از ربع چهارم نمی گذرد. حدود m کدام است؟

$$(1) -2 < m < 3 \quad (2) -1 < m < 3 \quad (3) 1 < m < 3 \quad (4) 2 < m < 3$$

۱۳۵۶- یکی از ریشه های معادله رادیکالی $\sqrt{x-k} + \sqrt{2x+2} - 2\sqrt{x} = 0$ است. جواب دیگر معادله کدام است؟

$$(1) \frac{9}{7} \quad (2) \frac{7}{9} \quad (3) -\frac{9}{7} \quad (4) \text{ ریشه دیگری ندارد.}$$

۱۳۵۷- اگر چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 6$ بر $(x+3)$ و $(x-1)$ بخش پذیر باشد، آن گاه حاصل $b - a$ برابر کدام است؟

$$(1) 8 \quad (2) 9 \quad (3) 10 \quad (4) 11$$

۱۳۵۸- نمودارهای دو تابع $f(x) = 2^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4x}$ در نقطه ای به طول ۱- متقاطع اند. اگر $f(2) = \frac{1}{2}$ مقدار $f^{-1}(64)$ کدام است؟

$$(1) -7 \quad (2) -5 \quad (3) 6 \quad (4) 5$$

۱۳۵۹- اگر f صعودی و g نزولی باشد، آن گاه توابع gof و gog به ترتیب (از راست به چپ) چگونه اند؟

$$(1) \text{ نزولی - نزولی} \quad (2) \text{ صعودی - نزولی} \quad (3) \text{ نزولی - صعودی} \quad (4) \text{ صعودی - صعودی}$$

۱۳۶۰- اگر دامنه تابع $f(x) = -2x^3 + 1$ بازه $[-1, 1]$ باشد، برد آن به صورت $[a, b]$ می باشد. حاصل $b - a$ کدام است؟

۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۳۶۱- اگر دامنه تابع $y = \frac{-4x^2+2x+5}{2x^2-ax+2b}$ برابر $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{x^2 - bx - a}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - (-4, 1)$ (۲) $\mathbb{R} - [-4, 1]$ (۳) $\mathbb{R} - (-1, 4)$ (۴) $\mathbb{R} - [-1, 4]$

۱۳۶۲- تابع $y = 1 + \tan(\pi - x)$ در فاصله تعریف شده است. نمودار وارون تابع از کدام ناحیه مختصاتی نمی‌گذرد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۳۶۳- انحراف معیار ۵۱ داده آماری برابر ۲ می‌باشد. اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است از بین آن‌ها حذف شود، واریانس داده‌های جدید چند درصد افزایش می‌یابد؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۳۶۴- کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌تواند در قفسه کنار هم چید که همواره کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند؟

(۱) ۲۸۰ (۲) ۳۸۰ (۳) ۲۸۸ (۴) ۳۸۸

۱۳۶۵- با فرض $P(A) = P(B) = k$ ، کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) $P(A \cap B) \leq (1 - k)^2$ (۲) $P(A \cap B) \geq 2k - 1$

(۳) $P(A \cap B) < k^2$ (۴) $P(A \cap B) < 2k - 2k^2$

۱۳۶۶- معادله $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۳۶۷- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ یک همسایگی محذوف به فرم $\{x_0\} - (a, b)$ است. حاصل $3x_0 - 3b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۳۶۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{(x+3)|x|} = \frac{3}{5}$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) $-1/8$ (۲) $-2/8$ (۳) $5/9$ (۴) $-5/9$

۱۳۶۹- به ازای کدام مقدار a تابع f در $x = 0$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} + a & x < 0 \\ b + 1 & x = 0 \\ 3b + [-x] & x > 0 \end{cases}$$

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) $-\frac{1}{3}$

۱۳۷۰- مقدار مشتق تابع $y = \left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^2$ در $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

(۱) ۴۹۵ (۲) -۴۹۵ (۳) ۵۹۴ (۴) -۵۹۴

۱۳۷۱- شکل زیر نمودار سهمی با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ را نشان می دهد. ab کدام است؟



(۱) ۶

(۲) -۶

(۳) -۱۸

(۴) ۱۸

۱۳۷۲- اگر $[x^2 + x] = -1$ حاصل $[-x^{20}]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

۱۳۷۳- تابع $f(x) = |x - 2| - |x + 3|$ در بازه‌ای وارون پذیر است ضابطه وارون آن کدام است؟

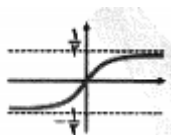
(۱) $y = -\frac{1}{2}(x + 2): |x| \leq 5$ (۲) $y = -\frac{1}{2}(x + 1): |x| \leq 5$

(۳) $y = -\frac{1}{2}(x + 2): |x| \leq 1$ (۴) $y = -\frac{1}{2}(x + 1): |x| \leq 1$

۱۳۷۴- جواب کلی معادله $\tan 2x = \cot\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$ کدام است؟

(۱) $x = \frac{1}{5}\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ (۲) $x = \frac{1}{3}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ (۳) $x = \frac{1}{4}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ (۴) $x = \frac{1}{8}\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

۱۳۷۵- اگر نمودار تابع $y = \frac{x+a}{\sqrt{bx^2+1}}$ به صورت روبه‌رو باشد، $a + b$ کدام است؟



(۱) ۱ (۲) ۳

(۳) ۲ (۴) ۴

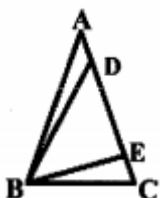
۱۳۷۶- مثلثی با رئوس $A(2, 6)$, $B(2, 4)$, $C(6, 2)$ مفروض است. طول میانه AM کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{13}$

۱۳۷۷- دایره‌ای که مرکز آن به طول ۱ و بر دو خط به معادلات $y = x + 4$ و $y = x + 2$ مماس باشد، خط $y = 2$ را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

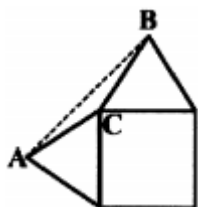
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۳۷۸- در شکل روبه‌رو داریم: $AB = AC$, $BE = DE$ و $\angle EBC = \angle ABD$. اندازه زاویه $\angle ABE$ کدام است؟



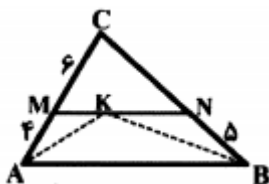
- ۱ (۱) 50°
 ۲ (۲) 60°
 ۳ (۳) 70°
 ۴ (۴) 45°

۱۳۷۹- بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. طول میانه CM کدام است؟ ($\sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1$)



- ۱ (۱) 0.5
 ۲ (۲) 0.25
 ۳ (۳) 0.75
 ۴ (۴) 1

۱۳۸۰- در شکل مقابل $MN \parallel AB$ اگر AK و BK به ترتیب نیمساز زاویه B و A باشند مقدار AB کدام است؟

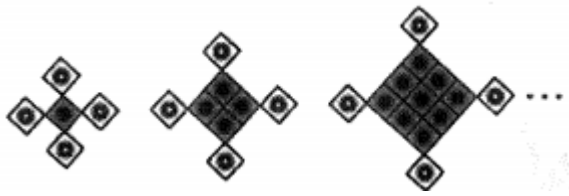


- ۱ (۱) 5
 ۲ (۲) 10
 ۳ (۳) 15
 ۴ (۴) 20

۱۳۸۱- اگر $n(A) = 2k - 3$ و $n(B) = 5$ و $n(A \cap B) = k - 1$. فاصله بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار ممکن برای $n(A \cup B)$ کدام است؟

- ۱ (۱) 8 ۲ (۲) 6 ۳ (۳) 4 ۴ (۴) 2

۱۳۸۲- در الگوی زیر، تعداد مربع‌های رنگی در شکل یازدهم کدام است؟



۱۳۵ (۱)

۱۳۰ (۲)

۱۲۵ (۳)

۱۴۰ (۴)

۱۳۸۳- بین دو عدد $\sqrt{2} - 5$ و $\sqrt{2} + 5$ ، چهار واسطه حسابی می نویسیم. مجذور کوچک ترین عددی که نوشته ایم، کدام است؟

۱۱ (۱) $25 - 10\sqrt{2}$ (۲) $11 - 8\sqrt{3}$ (۳) $11 - 6\sqrt{2}$ (۴)

۱۳۸۴- کدام یک از عبارات زیر عامل $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) - 24$ نیست؟

(۱) $x^2 + 2x - 8$ (۲) $x^2 - 2x + 8$ (۳) $x + 1$ (۴) $x - 3$

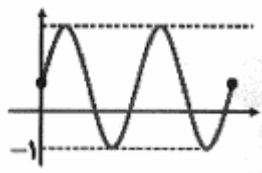
۱۳۸۵- شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ ، در بازه $[0, \frac{4}{3}]$ را نشان می دهد. $a + b$ کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



۱۳۸۶- یک تاس سفید و یک تاس آبی را با هم پرتاب می کنیم با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۵ می باشد؟

(۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۱۳۸۷- دامنه تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{4-\sqrt{x+1}}}{[x]^2-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۱۳۸۸- به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

(۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$ (۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

۱۳۸۹- به ازای چند مقدار صحیح a ، دو تابع $f(x) = x^2 - 2ax + 11$ و $g(x) = |x^2 - 2ax + 11|$ با هم مساوی اند؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) هیچ مقدار صحیح

۱۳۹۰- تابع $y = x^2|x|$ در بازه $(-\infty, a)$ نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۲ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۳۹۱- قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط کدام است؟

۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

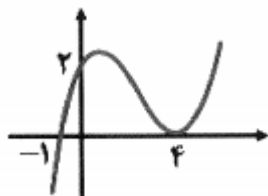
۱۳۹۲- اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) فاقد نقطه مشترک

۱۳۹۳- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟

۲ (۱) -۱/۵ (۲) -۱ (۳) -۰/۵ (۴)

۱۳۹۴- شکل زیر مربوط به نمودار یک تابع درجه سه است. باقیمانده تقسیم f بر $x + 4$ کدام است؟



۱۲ (۱)

۱۶ (۲)

۲۰ (۳)

۲۴ (۴)

۱۳۹۵- میانگین طول ضلع مربع‌هایی ۲۵ واحد، با ضریب تغییرات $0/06$ است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

۶۲۶/۵ (۱) ۶۲۷/۲۵ (۲) ۶۲۷/۷۵ (۳) ۶۲۸/۵ (۴)

۱۳۹۶- اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ ، برابر کدام است؟

۱ (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

۱۳۹۷- در پرتاب دو تاس اگر حاصل ضرب اعداد رو شده بر ۶ بخش‌پذیر باشد، با کدام احتمال دو عدد رو شده متوالی‌اند؟

۳/۵ (۱) ۲/۵ (۲) ۱/۵ (۳) ۴/۵ (۴)

۱۳۹۸- در یک ظرف پنج مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۵ و چهار مهره آبی با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارند. به تصادف یک گوی از هر رنگ خارج نموده و شماره روی آن‌ها را مشاهده می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد ۳ رؤیت می‌شود؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/3$ (۳) $0/35$ (۴) $0/4$

۱۳۹۹- مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال $0/45$ ، اگر رشته تجربی را انتخاب کند به احتمال $0/1$ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال $0/3$ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال این‌که او رشته ریاضی را انتخاب کند $0/1$ ، احتمال این‌که رشته تجربی را انتخاب کند $0/6$ و احتمال این‌که رشته انسانی را انتخاب کند $0/3$ باشد، به چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

- (۱) $0/159$ (۲) $0/195$ (۳) $0/255$ (۴) $0/125$

۱۴۰۰- نمودار تابع $y = x^2$ را دو واحد به سمت x ‌های منفی و سپس حاصل را نسبت به محور y ‌ها قرینه نموده و حاصل را در راستای محور عرض‌ها ۱ واحد به بالا انتقال داده‌ایم. نمودار حاصل خط $y = 10$ را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

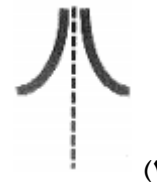
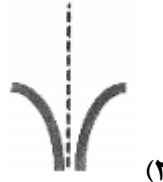
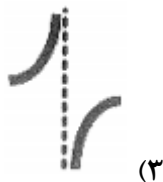
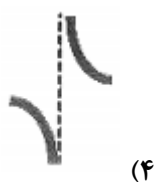
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴۰۱- انرژی آزادشده در یک زلزله $7/5$ ریشتری چند برابر انرژی آزادشده در یک زلزله $5/5$ ریشتری است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

- (۱) 10 (۲) 10^2 (۳) 10^3 (۴) 10^4

۱۴۰۲- نمودار تابع f مفروض است، نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{f(x)}$ در همسایگی $x = 2$ شبیه کدام است؟



۱۴۰۳- تابع f در $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. a کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} & x \neq \frac{3\pi}{4} \\ a & x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۱)

۱۴۰۴- اگر $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ مقدار $\log_{(6+2\sqrt{5})}(x + 1 + \sqrt{5})$ کدام است؟ ($e \simeq 2/718$ عدد نپر)

۳ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۱۴۰۵- به ازای کدام مقدار a مجموع مربعات ریشه‌های معادله $x^2 - (a + 1)x - 2 = 0$ کم‌ترین مقدار ممکن است؟

-۳ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

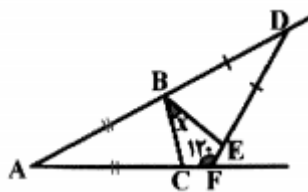
۱۴۰۶- اگر $D_f = (-1, 3)$ و دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟ $g(x) = \frac{3x+1}{x-3}$

$(-2, 1)$ (۴) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \frac{1}{2})$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۱)

۱۴۰۷- جواب کلی معادله $\cos 3x + 2 \cos^2 x = 1$ کدام است؟

$\frac{\pi}{5}(2k + 1)$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{2k\pi}{5} + \pi$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۱)

۱۴۰۸- در شکل مقابل زاویه x چند درجه است؟



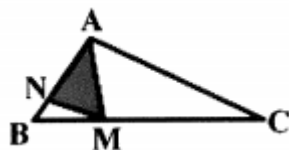
۳۰ (۱)

۶۰ (۲)

۲۵ (۳)

۳۵ (۴)

۱۴۰۹- در شکل زیر N ضلع AB را به نسبت ۳ به ۱ و M ضلع BC را به نسبت ۴ به ۱ تقسیم می‌کند مساحت قسمت رنگی چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



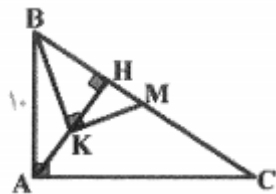
۱۵ (۱)

۳۲ (۲)

۴۸ (۳)

۳۶ (۴)

۱۴۱۰- در شکل مقابل با فرض آن که $BM = MC$ ، طول BK کدام است؟



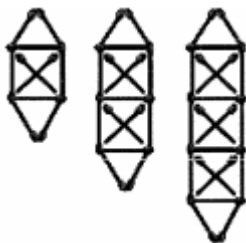
(1) $5\sqrt{2}$

(2) 8

(3) $2\sqrt{5}$

(4) 10

۱۴۱۱- مطابق الگوی مقابل، در کدام مرحله تعداد چوب کبریت‌ها به ۳۳۵ تا خواهد رسید؟



(1) 64

(2) 66

(3) 68

(4) 70

۱۴۱۲- اعداد $a + b - 3, 5, 4a + 3b + 2$ به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی و یک دنباله هندسی‌اند، مقدار $b - a$ کدام است؟

(1) 50 (2) 49 (3) -49 (4) -50

۱۴۱۳- از معادله $\log_2 x + 2 + \log_4 x^2 - 4x + 4 = 1$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{2x^2 - 4}$ در پایه 4 کدام است؟

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) 1

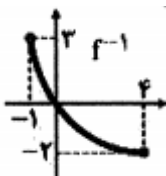
۱۴۱۴- با فرض $f(x) = 2^x$ و $g(x) = \sqrt{-4x^2 + 5x - 1}$ دامنه تابع $g \circ f$ به صورت $[a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

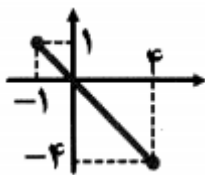
(1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) -2

۱۴۱۵- نمودار تابع $f(x) = a\sqrt{2b - 3x}$ در نقطه $(1, 2)$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a - b$ کدام است؟

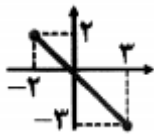
(1) -1/5 (2) -2/5 (3) 2/5 (4) 1/5

۱۴۱۶- نمودار f^{-1} داده شده، نمودار تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ کدام است؟

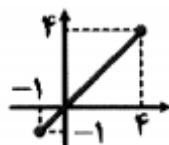




(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۱۴۱۷- به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $27x^2 - mx - 27 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $3x^2 - x - 3 = 0$ است؟

۲۸ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

۱۴۱۸- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 1| - |x + 2|$ در آن وارون‌پذیر می‌شود، کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

۱۴۱۹- در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۴ فاقد نقطه مشترک

۳ (۳)

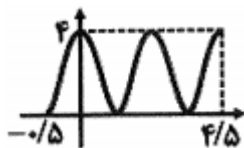
۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۲۰- حاصل عبارت $\sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot (2 \sin^2 \frac{x}{3} - 1)$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

 $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۱)

۱۴۲۱- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos(c\pi x)$ به صورت مقابل است. حاصل $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟



۱/۵ (۱)

۲ (۲)

۲/۵ (۳)

۳ (۴)

۱۴۲۲- ۳۰ داده آماری با میانگین \bar{x} و واریانس ۸ داریم. چند داده برابر با میانگین، باید به داده‌ها اضافه کنیم تا واریانس کل داده‌ها برابر ۶ شود؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۱۴۲۳- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A \Delta B) = P(B) = 2P(A) = 0/8$ و $0 \nmid 5$ آن‌گاه $P(B \cap A')$ کدام است؟

۰/۵۵ (۴)

۰/۴۵ (۳)

۰/۳۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

۱۴۲۴- اگر $\cos x - \sin x = \frac{2}{3}$ حاصل $[\tan x + \cot x]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴۲۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + ax + b} = 2$ حاصل $2a + 4b$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

۱۴۲۶- به ازای کدام مقدار a تابع f در دامنه‌اش پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2x} & 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{6} & x \geq a \end{cases}$$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ هیچ مقدار a

۱۴۲۷- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2x-3}{x-2} \right| > 3$ کدام بازه است؟

- ۱ $\left(\frac{9}{5}, 2\right) \cup (2, 3)$ ۲ $\left(\frac{8}{5}, 2\right) \cup (2, 3)$ ۳ $\left(\frac{9}{5}, 3\right)$ ۴ $\left(\frac{9}{5}, 4\right) - \{2\}$

۱۴۲۸- خانواده‌ای دارای دو فرزند است. با کدام احتمال هر دو فرزند دختر و دارای RH خون یکسان‌اند؟

- ۱ 0.2818 ۲ 0.1288 ۳ 0.1828 ۴ 0.2881

۱۴۲۹- جواب کلی معادله $\tan 3x \tan 2x = -1$ کدام است؟

- ۱ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲ $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۳ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ۴ $x = k\pi$

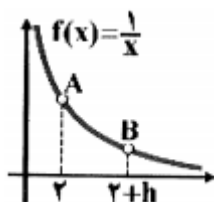
۱۴۳۰- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ مشتق $f(\sqrt{|x|} + 3)$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{12}$ ۳ $-\frac{1}{6}$ ۴ $-\frac{1}{12}$

۱۴۳۱- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & : x \geq -2 \\ x^3 - x & : x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- ۱ -3 ۲ صفر ۳ 1 ۴ 2

۱۴۳۲- شیب خط گذرنده از نقاط A و B وقتی $h \rightarrow 0$ کدام است؟



- ۱ $-\frac{1}{2}$

- ۲ $-\frac{1}{4}$

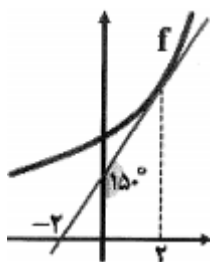
- ۳ $-\frac{1}{16}$

- ۴ $-\frac{1}{8}$

۱۴۳۳- بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1$ در بازه $[-1, 1]$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{7}{12}$ (۳) $-\frac{5}{12}$ (۴) $-\frac{11}{12}$

۱۴۳۴- مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = |x|(x - 3)$ در بازه $[-1, 3]$ کدام است؟



- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) صفر

۱۴۳۵- با توجه به نمودار، حاصل $f(2) \cdot f'(2)$ کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) $10\sqrt{3}$ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

۱۴۳۶- آروین می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال نسبت به موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت $3m/s$ از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود، هم چنین می تواند از درون پارک و تنها با سرعت $2m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x کدام باشد تا او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟



- (۱) $12\sqrt{5}$ (۲) $24\sqrt{5}$ (۳) $24\sqrt{3}$ (۴) $12\sqrt{3}$

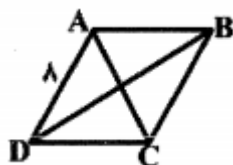
۱۴۳۷- فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{5}$

۱۴۳۸- در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود. ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

- (۱) کوچک‌تر از ۱ (۲) مساوی ۱ (۳) بزرگ‌تر از ۱ (۴) متغیر نسبت به اضلاع

۱۴۳۹- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم: $AC = AD = 8$ و $BD = 12$ طول ضلع AB کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{10}$ (۲) ۲۰ (۳) $2\sqrt{10}$

۱۰ (۴)

۱۴۴۰- نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $۰/۶۴$ است. اگر طول نیمساز از مثلث کوچک‌تر ۶ باشد. طول نیمساز نظیر آن در مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

۸ (۴) ۸/۵ (۳) ۷/۵ (۲) ۶/۵ (۱)

۱۴۴۱- مجموع بیست جمله اول از دنباله $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

۶، ۷ (۴) ۳، ۴ (۳) ۵، ۶ (۲) ۴، ۵ (۱)

۱۴۴۲- زوایای یک پنج‌ضلعی، دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. اگر کوچک‌ترین زاویه آن برابر ۳۸° باشد، اندازه بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟

۱۷۸° (۴) ۱۷۵° (۳) ۱۷۰° (۲) ۱۶۸° (۱)

۱۴۴۳- به ازای کدام مقادیر از a نمودار تابع درجه دوم $f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1$ فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد؟

$(-6, 3)$ (۴) $(2, 4)$ (۳) $(1, 3)$ (۲) $(2, 3)$ (۱)

۱۴۴۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $x(x - 4) = 2$ باشند، ریشه‌های کدام یک از معادلات زیر به صورت $3\alpha + \beta$ می‌باشند؟

$x^2 - 16x + 40 = 0$ (۲) $x^2 - 16x = 40$ (۱)

$x^2 - 16x - 30 = 0$ (۴) $x^2 + 16 + 46 = 0$ (۳)

۱۴۴۵- مجموعه جواب نامعادله $|2x - 1| - |x + 3| \leq x$ کدام است؟

$(-\infty, \frac{1}{2}]$ (۴) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (۳) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۲) $[\frac{1}{2}, +\infty)$ (۱)

۱۴۴۶- شخصی با قد ۱۶۰ سانتی‌متر در فاصله یک متری یک درخت به ارتفاع ۲ متر ایستاده است. این شخص چند سانتی‌متر به تیر نزدیک شود تا سایه‌اش ۲ برابر قدش شود؟

۴۰ (۴) ۱۰ (۳) ۲۰ (۲) ۸۰ (۱)

۱۴۴۷- کدام یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$\log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$ (۲) $\log(x-2) - \log x$ (۱)

$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ (۴) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ (۳)

۱۴۴۸- قرینه نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ‌ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۲- (۲) ۰/۵ (۳) ۱ (۴) ۱/۵

۱۴۴۹- اگر میانگین ۹ عدد، ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a ، برابر ۱۳ باشد، میانه آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۱۴۵۰- دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن که مجموع اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{5}{18}$ (۴) $\frac{7}{18}$

۱۴۵۱- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند، جواب معادله $fog(x) = gof(x)$ کدام است؟

- (۱) -۱، -۷ (۲) ۱، -۷ (۳) -۱، ۷ (۴) ۱، ۷

۱۴۵۲- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & x < 1 \\ x^2 + ax & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۰/۵ (۲) ۱/۲۵ (۳) ۱/۵ (۴) ۲/۵

۱۴۵۳- به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۵۴- ۳ تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که با اعداد رو شده بتوان یک عدد سه‌رقمی با ارقام متوالی ساخت کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{5}{9}$

۱۴۵۵- اگر $\cos 20^\circ = \frac{8}{3}$ حاصل عبارت $\frac{2 \sin 250^\circ - \cos 160^\circ}{\sin 160^\circ + 3 \cos 70^\circ - \sin 110^\circ}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۵۶- ضابطه معکوس تابع با ضابطه $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ کدام است؟

(۱) $y = x^2 - 4x + 5 : x \leq 2$ (۲) $y = x^2 - 4x + 5 : x \geq 2$

(۳) $y = x^2 - 4x + 5 : x \geq 2$ (۴) $y = x^2 + 4x - 5 : x \leq 1$

۱۴۵۷- حاصل قدر مطلق عبارت $x - \left[x + \frac{1}{3}\right]$ به ازای جمیع مقادیر حقیقی x ، کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{7}{10}$

۱۴۵۸- حاصل کدام یک از حدهای زیر نادرست است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x+1}{[x]} = \infty \quad (۴) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{(1-x)^2} = -\infty \quad (۳) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{2}{|3x-2|} = +\infty \quad (۲) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{7x}{1-x^2} = -\infty \quad (۱)$$

۱۴۵۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{|\cos(\frac{\pi}{2}x)|}$ کدام است؟

$$\frac{2}{5\pi} \quad (۴) \quad -\frac{2}{5\pi} \quad (۳) \quad -\frac{5}{2\pi} \quad (۲) \quad \frac{5}{2\pi} \quad (۱)$$

۱۴۶۰- به ازای کدام مقدار a تابع زیر در $x = 0$ حد دارد؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & x < 0 \\ \left[\frac{\sin x}{x} \right] + a & x > 0 \end{cases}$$

$$-1 \quad (۱) \quad 1 \quad (۲) \quad 2 \quad (۳) \quad -2 \quad (۴)$$

۱۴۶۱- از کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سیاه، ۴ مهره سفید، سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم، با کدام احتمال این سه مهره از دو رنگ متفاوت‌اند؟

$$\frac{35}{48} \quad (۱) \quad \frac{11}{19} \quad (۲) \quad \frac{11}{41} \quad (۳) \quad \frac{5}{6} \quad (۴)$$

۱۴۶۲- اگر معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{x-m}{x^2-4} = 1$ ریشه نداشته باشد، آن گاه حاصل جمع مقادیر ممکن برابر m کدام است؟

$$10 \quad (۱) \quad 8 \quad (۲) \quad -2 \quad (۳) \quad 6 \quad (۴)$$

۱۴۶۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$-1, -4 \quad (۱) \quad -1, 4 \quad (۲) \quad 1, -4 \quad (۳) \quad 1, 4 \quad (۴)$$

۱۴۶۴- مجموع جواب‌های معادله $2 \sin^2 x = 2 - \sin 2x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$\frac{5\pi}{2} \quad (۴) \quad \frac{7\pi}{2} \quad (۳) \quad \frac{5\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{7\pi}{4} \quad (۱)$$

۱۴۶۵- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ با بیش‌ترین شیب ممکن محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$-\frac{8}{3} \quad (۴) \quad -\frac{7}{3} \quad (۳) \quad -\frac{5}{3} \quad (۲) \quad -\frac{4}{3} \quad (۱)$$

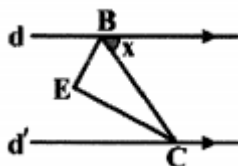
۱۴۶۶- می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در بسته به حجم 16π بسازیم، ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

$$2 \quad (۱) \quad 3 \quad (۲) \quad 4 \quad (۳) \quad 5 \quad (۴)$$

۱۴۶۷- خط به معادله $4x - 3y = a$ بر دایره به معادله $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

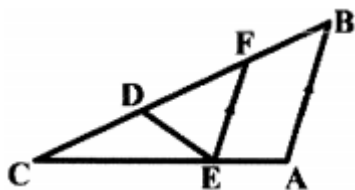
- (۱) -۱۸ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) -۲۰

۱۴۶۸- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و $BC = 2EB$ دو پاره خط BE و CE به ترتیب نیمساز زوایای $d'CB$ و DBC می‌باشند. زاویه x کدام است؟



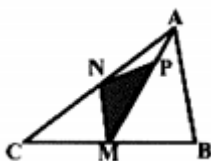
- (۱) 30°
(۲) 45°
(۳) 60°
(۴) 65°

۱۴۶۹- در شکل مقابل $CDE = \hat{A}$ و $EF \parallel AB$ اگر $CD = 4$ ، $AE = 3$ و $CE = 5$ ، طول EF چند برابر طول ED است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{5}{4}$
(۳) $\frac{4}{5}$
(۴) $\frac{2}{3}$

۱۴۷۰- در شکل مقابل، AM میانه و N وسط ضلع AC است و $AMP = 3AM$ ، مساحت قسمت رنگی چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



- (۱) $\frac{1}{8}$
(۲) $\frac{3}{8}$
(۳) $\frac{3}{16}$
(۴) $\frac{3}{5}$

۱۴۷۱- حاصل عبارت $A = 200^2 - 199^2 + 198^2 - 197^2 + \dots - 3^2 + 2^2 - 1^1$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۲۰ (۲) ۱۰۲۰۰ (۳) ۲۰۰۱۰ (۴) ۲۰۱۰۰

۱۴۷۲- مجموع چهار جمله متوالی از یک دنباله حسابی صعودی برابر ۱۰ و مجموع مربعات آن‌ها ۱۵۰ می‌باشد، قدر نسبت دنباله کدام است؟

$$\frac{4}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۳)} \quad 5 \text{ (۲)} \quad \frac{1}{5} \text{ (۱)}$$

۱۴۸۱- مطابق شکل، خط مماس بر منحنی f در نقطه A رسم شده است. اگر $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 12$ طول BC کدام است؟

$$2\sqrt{13} \text{ (۴)} \quad \sqrt{13} \text{ (۳)} \quad 2\sqrt{26} \text{ (۲)} \quad \sqrt{26} \text{ (۱)}$$

۱۴۸۲- اگر $\cos 4x = a$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos x$ کدام است؟

$$\frac{a-1}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{1-a}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{1-a}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{a-1}{4} \text{ (۱)}$$

۱۴۸۳- به ازای چه مقادیری از a معادله $x^2 - 2|x| - a = 0$ چهار ریشه متمایز دارد؟

$$a < -1 \text{ (۴)} \quad a > -1 \text{ (۳)} \quad -1 < a < 0 \text{ (۲)} \quad 0 < a < 1 \text{ (۱)}$$

۱۴۸۴- نمودار دو تابع $f(x) = -3x^2 + ax + b$ و $g(x) = 2bx + a$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۱ روی نیمساز ربع دوم و چهارم قطع می‌کنند. مقدار $f \circ g^{-1}(-7)$ کدام است؟

$$-5 \text{ (۴)} \quad 5 \text{ (۳)} \quad -3 \text{ (۲)} \quad 3 \text{ (۱)}$$

۱۴۸۵- اگر $f(x) = \log_{0/5} x$ و $g(x) = \sqrt{4x^2 + 8x + 11} - 2x$ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

$$-2 \text{ (۴)} \quad -1 \text{ (۳)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 1 \text{ (۱)}$$

۱۴۸۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{a}{x+4} \right)$ در صورت وجود برابر کدام است؟

$$\frac{1}{16} \text{ (۴)} \quad -\frac{3}{16} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{32} \text{ (۲)} \quad -\frac{1}{32} \text{ (۱)}$$

۱۴۸۷- به ازای کدام مقدار a تابع زیر در $x = 2$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & x > 2 \\ \sqrt{x^3 - 8} & x \leq 2 \\ \sqrt{3a} & \end{cases}$$

$$\frac{5}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{4}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

۱۴۸۸- در تابع $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4}$ کدام است؟

$$\frac{1}{12} \text{ (۴)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

۱۴۸۹- مشتق دوم تابع $f(x) = x^4 + 4ax^3 + 6x^2 + 7$ همواره مخالف صفر است. حدود a کدام است؟

$$|a| > 1 \text{ (۴)} \quad |a| < 1 \text{ (۳)} \quad |a| > 2 \text{ (۲)} \quad |a| < 2 \text{ (۱)}$$

۱۴۹۰- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax + 16$ بر محور طول‌ها مماس است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۱۲ (۳) ۹ (۴) -۹

۱۴۹۱- ضابطه وارون تابع با ضابطه $x \geq 3 : y = x^2 - 4x + 7$ کدام است؟

- (۱) $y = \sqrt{x-3} + 2 : x \geq 3$ (۲) $y = \sqrt{x-2} + 3 : x \geq 4$
 (۳) $y = \sqrt{x-2} + 3 : x \geq 3$ (۴) $y = \sqrt{x-3} + 2 : x \geq 4$

۱۴۹۲- تابع $f(x) = \log_2(ax + b)$ فقط به ازای مقادیر $x \in (-4, +\infty)$ با معنی است. اگر تابع f نیمساز ربع

اول را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع کند، آن‌گاه حاصل $f(\sqrt[3]{2} - 4)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۱۴۹۳- جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\frac{2\sin x + \sin 3x}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۴۹۴- تابع با ضابطه $x > 1 : f(x) = \frac{ax-2}{x+a-3}$ اکیداً صعودی است. بازه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $[2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۱۴۹۵- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{2a^2-3bx}{x^2+1}$ است. $f(-\sqrt{3})$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $-\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $-2\sqrt{3}$



۱۴۹۶- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ و $(x+2)^2 + (y-2)^2 = k^2$ متقاطع‌اند. k

در کدام بازه است؟ ($k > 0$)

- (۱) (4, 5) (۲) (4, 6) (۳) (5, 6) (۴) (5, 9)

۱۴۹۷- در یک بیضی فاصله یک کانون تا یک رأس کانونی برابر ۶ و تا یک رأس ناکانونی برابر ۱۵ می‌باشد. طول وتر

کانونی بیضی چند برابر خروج از مرکز آن است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۴۹۸- در یک دوزنقه قائم‌الزاویه قطرها بر هم عمودند. اگر طول دو قاعده دوزنقه ۳ و ۲۷ واحد باشد، طول ارتفاع دوزنقه کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۴۹۹- اندازه مساحت هشت ضلعی منتظم شکل مقابل چند برابر اندازه محیط مستطیل رنگی است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴)

۱۵۰۰- در شکل مقابل $AE = 3NE$ ، $EM = MC$ و $BN = NM$ است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث رنگ شده است؟



- ۱۱ (۱)
۱۲ (۲)
۱۳ (۳)
۱۴ (۴)

۱۵۰۱- دو مجموعه A و B مفروض‌اند. اگر $n(A \cap B) = 4$ ، $n(A \cup B) = 19$ و $2n(A - B) = n(B - A)$ باشد. مجموعه A چند زیرمجموعه زوج عضوی دارد؟

- ۲۶۵ (۱) ۹ (۲) ۲۵۶ (۳) ۱۶ (۴)

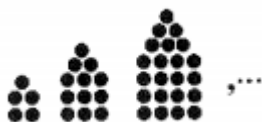
۱۵۰۲- اگر $(1 + \sqrt{3})^6 = 416$ ، جزء صحیح عدد $(1 + \sqrt{3})^6$ کدام است؟

- ۴۱۴ (۱) ۴۱۵ (۲) ۴۱۶ (۳) ۴۱۷ (۴)

۱۵۰۳- اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

- ۱ - 4k (۱) 2 - 5k (۲) 1 - 2k (۳) 1 - k (۴)

۱۵۰۴- در الگوی زیر تعداد نقاط رنگی در شکل یازدهم کدام است؟



- ۲۳۴ (۱)
۲۳۰ (۲)
۲۱۰ (۳)
۲۴۰ (۴)

۱۵۰۵- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x + 1)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



$$[-1, 2] \cup [0, 5] \quad (1)$$

$$[-4, 1] \cup [0, +\infty) \quad (2)$$

$$[-5, -3] \cup [0, 3] \quad (3)$$

$$[-3, 0] \cup [1, 5] \quad (4)$$

۱۵۰۶- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامعادله $|x - 1| + 2x > x^2$ در آن برقرار باشد کدام است؟

$$1 + 2\sqrt{5} \quad (4) \quad 1 + 2\sqrt{3} \quad (3) \quad 1 + \sqrt{5} \quad (2) \quad 1 + \sqrt{3} \quad (1)$$

۱۵۰۷- اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+2}{3x-c}$ منطبق بر نمودار وارون خود باشد، آن‌گاه در معادله درجه دوم

$$6ax^2 - b - 2c = 0$$
 حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \quad (4) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۱۵۰۸- اگر دو تابع $f(x) = \frac{3}{x+2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+4}$ مساوی باشند، مقدار $a + bc$ کدام است؟

$$-27 \quad (4) \quad 27 \quad (3) \quad 21 \quad (2) \quad -21 \quad (1)$$

۱۵۰۹- میانگین و انحراف معیار داده آماری x_1, x_2, \dots, x_n به ترتیب ۷ و ۴ می‌باشد. اگر ضریب تغییرات داده‌های

$$ax_1 + 3, ax_2 + 3, \dots, ax_n + 3$$
 برابر $\frac{1}{5}$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

$$2 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (1)$$

۱۵۱۰- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج

می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

$$\frac{4}{11} \quad (4) \quad \frac{3}{11} \quad (3) \quad \frac{7}{22} \quad (2) \quad \frac{5}{22} \quad (1)$$

۱۵۱۱- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x}}$ و $g(x) = 2^{|x|}$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$R^+ \quad (4) \quad R - \{0\} \quad (3) \quad R \quad (2) \quad \emptyset \quad (1)$$

۱۵۱۲- اگر $f(x-2) = \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-1}-1}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کدام است؟

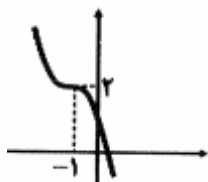
$$3 \quad (4) \quad 6 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۱۵۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2-|x|}{x+2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ چه وضعیتی دارد؟

(۱) فقط از چپ پیوسته است. (۲) فقط از راست پیوسته است.

(۳) پیوسته است. (۴) نه از چپ پیوسته است و نه از راست.

۱۵۱۴- نمودار تابع با ضابطه $y = -(x - 2a)^3 + b$ به صورت زیر است. حاصل ab کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲

۱۵۱۵- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 2 \\ 2x + a & x < 2 \end{cases}$ روی بازه $[-1/44, 2/56]$ برابر $-0/13$ می‌باشد. a کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴/۸

(۲) ۳/۸

(۱) ۲

۱۵۱۶- هر یک از ارقام ۱ تا ۴ را بر روی چهار کارت یکسان نوشته و به تصادف کارت‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم تا عدد چهار رقمی حاصل شود. اگر عدد حاصل فرد باشد، با کدام احتمال از ۲۱۰۰ بزرگ‌تر است؟

(۴) $\frac{5}{6}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{5}{12}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۱۵۱۷- احتمال بهبود بیماری کلیه فرد A پس از عمل پیوند کلیه ۸۴ درصد و احتمال بهبود بیماری فرد B بعد از پیوند کلیه ۷۵ درصد می‌باشد. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند قرار گیرند، با کدام احتمال فقط A یا فقط B بهبود می‌یابد؟

(۴) $0/38$

(۳) $0/36$

(۲) $0/33$

(۱) $0/3$

۱۵۱۸- اگر دو خط به معادلات $ax + by = 4$ و $x - 3y$ نسبت به نیمسازهای ربع‌های اول و سوم متقارن باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۴) ± 1

(۳) ± 4

(۲) ± 2

(۱) ± 3

۱۵۱۹- اگر $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 3$ باشد، آن‌گاه مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

(۴) $0/3$

(۳) $0/4$

(۲) $0/8$

(۱) $0/6$

۱۵۲۰- معادله $\sin^3(\pi - x) - \cos^3(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

۱۵۲۱- اگر $f(x) = \sin x - \cos x$ و $g(x) = \sin x + \cos x$ ، آن‌گاه دوره تناوب تابع $f^2 - g^2$ کدام است؟

(۴) تابع متناوب نیست.

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۲) π

(۱) 2π

۱۵۲۲- اگر $f(x) = \frac{2}{1+\frac{2}{x}}$ حاصل $f'(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۴

۱۵۲۳- در تابع $f(x) = (x^2 - 4)[x]$ ، اختلاف مشتق راست و چپ تابع در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۵۲۴- نمودار تابع $y = \frac{ax^2+bx+2}{x+c}$ به صورت زیر است. حاصل $ab - c$ ، کدام است؟



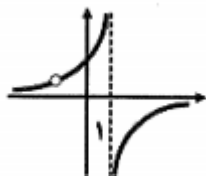
- (۱) $3\sqrt{3}$

- (۲) $3\sqrt{2}$

- (۳) $2\sqrt{3}$

- (۴) $2\sqrt{2}$

۱۵۲۵- نمودار تابع $y = \frac{ax^2+bx}{x^2+cx-2}$ به صورت مقابل است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



- (۱) ۳

- (۲) ۴

- (۳) -۳

- (۴) -۴

۱۵۲۶- اگر دایره به معادله $bx^2 + y^2 + ax + 4y + c = 0$ قائم بر خط $2x + y = 0$ و مماس بر خط $3x +$

$4y = 4$ باشد، حاصل abc کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۵۲۷- در یک بیضی نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک برابر $\frac{4}{3}$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

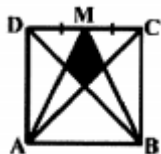
- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

۱۵۲۸- در یک دوزنقه قائم‌الزاویه قطرها بر هم عمودند. اگر طول دو قاعده دوزنقه ۳ و ۲۷ واحد باشد، طول ارتفاع

دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۵۲۹- در مربع $ABCD$ مطابق شکل، M وسط ضلع CD است. مساحت چهارضلعی رنگی چه کسری از مساحت مربع است؟



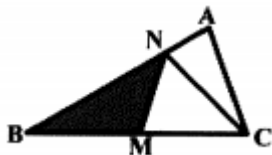
(۱) $\frac{1}{10}$

(۲) $\frac{1}{11}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۴) $\frac{1}{9}$

۱۵۳۰- در مثلث شکل مقابل $AB = 4AN$ و M وسط BC است. مساحت قسمت رنگی چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



(۱) $\frac{1}{357}$

(۲) $\frac{1}{375}$

(۳) $\frac{1}{125}$

(۴) $\frac{1}{6}$

۱۵۳۱- در یک دنباله اعداد $a_1 = 6$ و برای $n \geq 2$ داریم: $a_n + 2^n = (-1)^n a_{n-1}$. حاصل $a_5 + a_3$ کدام است؟

(۴) ۴۸

(۳) ۳۲

(۲) ۲۴

(۱) ۱۶

۱۵۳۲- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ و $g(x) = |x| - x$ و خط $x = 1$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{2}$

(۳) ۳

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) ۲

۱۵۳۳- اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = -\sqrt{4x + 1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط $y = -3$ کدام است؟

(۴) ۶

(۳) $\frac{4}{5}$

(۲) ۴

(۱) ۳

۱۵۳۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر m نمودار تابع درجه دوم $y = mx^2 + (3m - 1)x + m - 3$ محور y طولها را در دو نقطه با طولهای مثبت قطع می‌کند؟

(۴) هر مقدار از m

(۳) هیچ مقدار از m

(۲) $0 < m < \frac{1}{3}$

(۱) $m < 0 \vee m > 3$

۱۵۳۵- در بازه $[a, b]$ نقاط نمودار تابع $y = |x| - x$ بالای خط $2y = 4 - 3x$ قرار ندارند. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{5}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) ۶ (۴) $\frac{17}{3}$

۱۵۳۶- اگر $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sqrt{3}\cos\alpha = 0$ و α زاویه‌ای در ناحیه اول باشد، مقدار $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + 4\sin\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۵۳۷- اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند و $6P(A \cup B) = 12P(A \cap B) = 3$ آن‌گاه حاصل $P[(A - B) \cup (B - A)]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۵۳۸- اگر رأس سهمی با ضابطه $y = ax^2 + 4x - 3$ روی نیمساز ربع اول و سوم واقع باشد، مجموع مربعات ریشه‌های معادله $ax^2 + 4x - 3 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۷ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

۱۵۳۹- اگر $A(-6, 2)$ و $B(2, 6)$ باشد، آن‌گاه عمودمنصف پاره خط AB محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) -۲

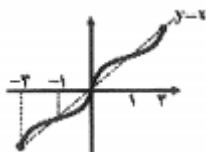
۱۵۴۰- با توجه به نمودار تابع f ، دامنه تابع $y = \frac{x^2}{\sqrt{f^{-1}(x) - x}}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 3)$

- (۲) $(-1, 0) \cup (1, 3)$

- (۳) $(-3, -1) \cup (1, 3)$

- (۴) $(-1, 1)$



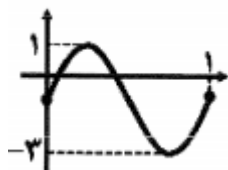
۱۵۴۱- شکل زیر قسمتی از نمودار $y = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\pi x\right) - c$ است. $a + b + c$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴

- (۲) -۲

- (۳) -۵

- (۴) -۳



۱۵۴۲- در ظرفی، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه هم‌اندازه قرار دارند. ۳ مهره به تصادف و به‌طور متوالی از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که فقط رنگ دو مهره اول یکسان باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{7}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۱۵۴۳- هر یک از ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ را در یکی از شش خانه هم‌ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و سه رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۵۴۴- اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9, x_9$ برابر صفر باشد، آن‌گاه انحراف معیار $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9, x_9$ 20 کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۶ (۴) ۳۶

۱۵۴۵- میانگین و انحراف معیار امتیازات فنی کارگر A به ترتیب ۲۴ و ۹ و برای کارگر B به ترتیب ۱۶ و ۵ گزارش شده است. دقت عمل کدام کارگر بیش‌تر است؟

- (۱) یکسان (۲) A (۳) B (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۵۴۶- ظرف A دارای ۳ مهره سفید و ۴ مهره آبی و هر یک از ظرف‌های یکسان B و C دارای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۳ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال یک مهره سیاه و حداکثر یک مهره سفید خارج می‌شود؟

- (۱) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{7}$

۱۵۴۷- حاصل $\cos 85^\circ - \tan 5^\circ \sin 85^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\sin 5^\circ$ (۲) $\cos 5^\circ$ (۳) صفر (۴) ۱

۱۵۴۸- هر گاه $x \rightarrow (2\sqrt[3]{x} - 1) \xrightarrow{g} 2x - 5$ باشد، حاصل عبارت $g^{-1} \circ f^{-1}(8) + g(11)$ کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) -۱۴ (۳) ۱۱ (۴) -۱۱

۱۵۴۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-x}{\cos x}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۵۵۰- اگر تابع $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{bx + 2}$ از نقطه $(-1, 2)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۵۵۱- تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & x < 3 \\ a \log_2(1+x) & x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است. $f(2)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۵۵۲- اگر $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ آن گاه در نقطه‌ای با کدام طول آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع با آهنگ متوسط تغییرات تابع از $x_1 = 4$ تا $x_2 = 9$ برابر است؟

- (۱) ۶/۲۵ (۲) ۵/۲۵ (۳) ۶/۵ (۴) ۵/۵

۱۵۵۳- تابع با ضابطه $f(x) = 2 + x + |x - 3|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه معکوس آن در بازه مذکور کدام است؟

- (۱) $y = \frac{x-5}{2} : x \leq 3$ (۲) $y = \frac{x+5}{2} : x \leq 3$ (۳) $y = \frac{x+1}{2} : x \geq 5$ (۴) $y = \frac{x-1}{2} : x \geq 5$

۱۵۵۴- اجتماع جواب کلی معادله $f(x) = 0$ و $2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \cos(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$ روی دایره مثلثاتی تشکیل یک شش ضلعی منتظم داده‌اند. $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\cos x$ (۲) $\sin x$ (۳) $\sin x + 1$ (۴) $\sin x - 1$

۱۵۵۵- مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $y = \left| \frac{2x+1}{x+2} \right|$ که در آن نقاط، مماس بر منحنی، بالای منحنی واقع‌اند، کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, -\frac{1}{2})$ (۳) $(+2, +\infty)$ (۴) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

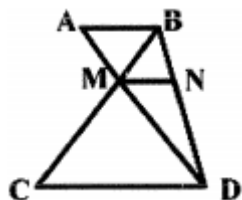
۱۵۵۶- مجموع شعاع‌های دایره‌هایی که از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرد و بر محورهای مختصات مماس می‌شوند، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۵ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

۱۵۵۷- اگر نقاط $(2, 1)$ و $(-2, 1)$ به ترتیب مرکز و یکی از کانون‌های یک بیضی باشند، و بیضی از نقطه $(5, 2)$ بگذرد، آن گاه خروج از مرکز بیضی چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۱۵۵۸- در شکل مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، $MN = 3$ و $CD = 13$ است. طول پاره خط AB کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۳/۵

(۳) ۳/۹

۴/۵ (۴)

۱۵۵۹- طول اضلاع قائم در یک مثلث قائم الزاویه برابر با ریشه‌های معادله $x^2 = 6x - 2$ می‌باشند. طول ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث کدام است؟

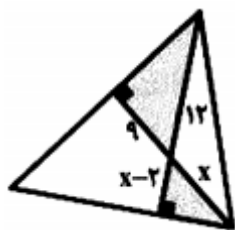
۰/۲۵ $\sqrt{3}$ (۴)

۰/۷۵ $\sqrt{3}$ (۳)

۰/۲۵ $\sqrt{2}$ (۲)

۰/۷۵ $\sqrt{2}$ (۱)

۱۵۶۰- با توجه به شکل زیر نسبت مساحت دو مثلث رنگ شده کدام می‌تواند باشد؟



۲/۲۵ (۱)

۱/۲۵ (۲)

۰/۷۵ (۳)

۱/۵ (۴)

۱- گزینه ۴

شرط سه جمله متوالی دنباله هندسی این بود:

$$B^2 = AC$$

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

به ازای $x = 2$ دنباله ۲، ۴، ۸ نزولی است اما به ازای $x = -2$ دنباله ۲، ۴، ۸ نزولی نیست. پس داریم:

$$8, 4, 2, \dots \quad a_1 = 8, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 r^4 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

نکته: البته می توانیم جمله پنجم را دستی هم پیدا کنیم:

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}$$

۲- گزینه ۱

برای مشخص شدن ماجرا، مجموعه‌ها را با عضوهایشان می نویسیم:

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{8}{x} \mid x \in N \right\} = \left\{ 8, 4, \frac{8}{3}, 2, \frac{8}{5}, \frac{8}{6}, \frac{8}{7}, 1, \frac{8}{9} \right\}$$

خود این مجموعه‌ها که نامتناهی‌اند، پس اجتماع آن‌ها هم نامتناهی خواهد بود. همان‌طور که مشخص است تعداد عضوهای مشترک آن‌ها هم نامتناهی است.

دقت کنید که هر کدام از عضوهای مجموعه B ، ۸ برابر یک عضو از مجموعه A است، پس مجموعه A ، زیرمجموعه مجموعه B است، در نتیجه $A - B$ تهی بوده و متناهی است.

۳- گزینه ۳

از رابطه $\tan^2 x + \cot^2 x = 5$ داریم:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 5 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 5 \sin^2 x \cos^2 x$$

از طرف دیگر:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

پس:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

و از این دو رابطه داریم:

$$5 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{7}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{7}$$

۴- گزینه ۱

با اتحاد مزدوج مخرج را در دو مرحله گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} \times \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1+2+2\sqrt{2}-3} \\ &= \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3} \end{aligned}$$

که به اندازه $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ از ۱ بیشتر است.

۵- گزینه ۴

معادله این سهمی با استفاده از نقاط $(2, 0)$ و $(-1, 0)$ به صورت $y = a(x-2)(x+1)$ نوشته می‌شود. طول رأس سهمی در وسط دو ریشه یعنی $x_S = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$ قرار دارد. پس داریم:

$$عرض\ رأس = y_S = a\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) = a\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \Rightarrow a = -\frac{8}{9}$$

حالا عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها را می‌خواهیم. پس $x = 0$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$y = -\frac{8}{9}(x-2)(x+1) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{8}{9}(-2)(1) = \frac{16}{9}$$

۶- گزینه ۲

برای ۴ واحد انتقال به طرف x های منفی باید x را به $x+4$ تبدیل کنیم، سپس برای انتقال یک واحد به طرف y های مثبت، یک واحد به y اضافه کنیم. پس:

$$y_1 = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2 \xrightarrow{\text{انتقال}} y_2 = \left|\frac{1}{2}(x+4)\right| - 2 + 1$$

حالا باید این‌ها تلافی کنند:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}x\right| - 2 = \left|\frac{1}{2}(x+4)\right| - 1 \xrightarrow{\text{دو طرف را در 2 ضرب کنیم}} |x| - 4 = |x+4| - 2$$

$$\Rightarrow |x| - |x + 4| = 2$$

همه گزینه‌ها بین ۴- و صفر هستند پس قدر مطلق‌ها را با توجه به علامت برمی‌داریم:

$$\begin{matrix} x < 0 \\ \xrightarrow{x+4 > 0} \end{matrix} -x - (x + 4) = 2 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$

می‌توانیم گزینه‌ها را در معادله $|x| - |x + 4| = 2$ امتحان کنیم.

۷- گزینه ۴

باید ۲ تا از ۵ تجربی یا ۳ تا از آن‌ها برداریم. در حالت ۲ تجربی به ۱ داوطلب ریاضی هم نیاز داریم:

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو تجربی}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یک ریاضی}} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{سه تجربی}} = 10 \times 3 + 10 = 40$$

۸- گزینه ۳

تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس را در جدول زیر داریم:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

مجموع‌های مضرب ۴ عبارت‌اند از ۴، ۸ و ۱۲ که به ترتیب ۳، ۵ و ۱ حالت دارند پس از $n(S) = 36$ حالت می‌خواهیم یکی از $n(A) = 1 + 5 + 3 = 9$ حالت رخ دهد و احتمال می‌شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۹- گزینه ۱

مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

در این معادله داریم:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{+(m+3)}{m}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

پس:

$$S^2 - 2P = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = \frac{m^2 + 6m + 9 - 10m}{m^2}$$

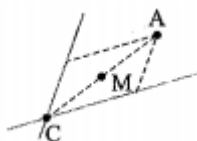
$$= \frac{m^2 - 4m + 9}{m^2} = 6 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 6m^2 = m^2 - 4m + 9$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} m = 1, m = -\frac{9}{5}$$

اما صبر کنید. به ازای $m = 1$ معادله به صورت $x^2 - 4x + 5 = 0$ درمی آید که دلتایش منفی است و ریشه حقیقی ندارد. پس $m = -\frac{9}{5}$ را می پذیریم.

۱۰- گزینه ۳

این دو خط موازی نیستند (شیب آن ها یکی نیست) و نقطه A روی هیچ کدام قرار ندارد پس این شکلی است:



باید نقطه برخورد دو خط یعنی C را پیدا کنیم و جواب نقطه وسط A و C است.

$$\begin{cases} 3y + 4x = 8 \\ 2y - 3x = 11 \end{cases} \xrightarrow{\text{برابر معادله بالا را با 4 برابر یابینی جمع کنیم.}} \begin{cases} 9y + 12x = 24 \\ 8y - 12x = 44 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 17y = 68 \Rightarrow y = 4 \xrightarrow{\text{در اولی}} 12 + 4x = 8 \Rightarrow x = -1$$

پس $C(-1, 4)$ و داریم:

$$M = \frac{A + C}{2} = \left(\frac{-1 + 7}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) = (3, 5)$$

۱۱- گزینه ۱

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{وارون}} x = 2 - \sqrt{y-1} \Rightarrow \sqrt{y-1} = 2 - x \xrightarrow{\text{به توان 2}} y - 1 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 5$$

می دانیم دامنه تابع وارون برابر برد خود تابع است. در $y = 2 - \sqrt{x-1}$ همیشه مقادیر y از ۲ کم تر یا مساوی هستند پس بردش $[-\infty, 2]$ است و باید شرط دامنه وارون $x \leq 2$ باشد. پس $y = x^2 - 4x + 5$ و $x \leq 2$ ضابطه وارون است.

۱۲- گزینه ۴

$3\pi + \theta$ همان $\pi + \theta$ است که در ربع سوم قرار دارد. $\theta + \frac{3\pi}{2}$ در ربع چهارم و $\pi - \theta$ در ربع دوم می افتد. پس:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{+\sin\theta - (-\cos\theta)}{\sin\theta - (-\sin\theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot\theta$$

$$\xrightarrow{\tan\theta=0/2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0/2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(5) = 3$$

۱۳- گزینه ۳

باید مختصات نقاط A و B در ضابطه تابع صدق بکند:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = ab^{\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2}$$

$$(1, 11) \Rightarrow 11 = ab^1 - 1 \Rightarrow ab = 12$$

با کمی دقت $a = 3$ و $b = 4$ داریم:

$$f(-1) = ab^{-1} - 1 = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۱۴- گزینه ۴

به جای ۱ می نویسیم $\log_x x$ و جمع لگاریتم‌ها به لگاریتم حاصل ضرب تبدیل می‌شود:

$$\log_x(x^2 + 4) = \underbrace{\log_x x}_1 + \log_x 5 = \log_x 5x$$

پس:

$$x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 4$$

دقت می‌کنید که x در مبنا قرار دارد و نمی‌تواند ۱ باشد پس $x = 4$ داریم:

$$\log_2 x = \log_2 4 = 2$$

۱۵- گزینه ۲

شکل می‌گوید در $x = -1$ هم صورت و هم مخرج صفر هستند:

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 \xrightarrow{x=-1} -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$x + c \xrightarrow{x=-1} -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

پس داریم:

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + ax + 1}{x + 1} = \frac{(x^3 + 1) + ax(x + 1)}{x + 1}$$

دوباره به شکل نگاه کنیم، منحنی در سمت راست مبدأ بر محور x مماس است. پس باید صورت کسر مربع کامل و به صورت $(x - x_0)^2$ باشد و داریم:

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1 = b$$

۱۶- گزینه ۱

سراغ نقطه مرزی دو دامنه می‌رویم. در $x = \frac{\pi}{4}$ حد چپ از ضابطه بالا و حد راست و مقدار از ضابطه پایین به دست می‌آید:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = a \cos \frac{3\pi}{4} = a \underbrace{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}_{-\cos \frac{\pi}{4}} = a \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \frac{1 - 1}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

با توجه به رابطه $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (1 + \tan^2 x) = 1 + 1 = 2$$

پس داریم:

$$-a \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

۱۷- گزینه ۴

اولین موش با احتمال $\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}} = \frac{5}{8}$ سفید است. از موش دوم خبری نیست و موش سوم (انگار دومی است) باید سیاه باشد که احتمالش می‌شود $x = 1$. پس داریم:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

۱۸- گزینه ۴

میانگین داده‌های حذف شده برابر $30 = \frac{120}{4} = \frac{50+45+15+10}{4}$ است. پس با حذف آن‌ها میانگین عوض نمی‌شود و داریم:

$$\text{حالت اولیه: } \sigma^2 = \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{25} - 30)^2}{35} = 8^2 = 64$$

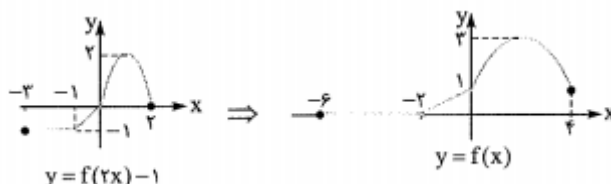
$$\Rightarrow (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{25} - 30)^2 = 25 \times 64 = 1600$$

پس صورت کسر واریانس اولیه برابر ۱۶۰۰ بوده است.

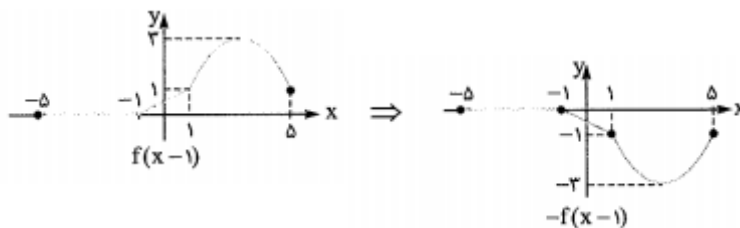
$$\begin{aligned} \text{حالت ثانویه: } \sigma^2 &= \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2}{25 - 4} \\ &= \frac{1600 - (50 - 30)^2 - (45 - 30)^2 - (15 - 30)^2 - (10 - 30)^2}{21} \\ &= \frac{1600 - 400 - 225 - 225 - 400}{21} = \frac{350 \div 7}{21 \div 7} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \end{aligned}$$

۱۹- گزینه ۱

برای رسیدن به نمودار $f(2x) - 1$ ، مقادیر x نصف شده و نمودار یک واحد به پایین رفته است. پس x ها را ۲ برابر می‌کنیم و نمودار را یک واحد به بالا می‌بریم تا به خود $f(x)$ برسیم.



حالا برای رسیدن به $y = -f(x - 1)$ ، باید یک واحد به راست و سپس قرینه نسبت به محور x کنیم:



که به ۱ می‌خورد.

۲۰- گزینه ۲

نمودار شبیه $-\sin x$ است (در شروع به پایین می‌رود) پس $b < 0$ است. در $x = 0$ عرض از مبدأ ۳ است، پس $a = 3$. دوره تناوب تابع از $x = 1$ تا $x = 5$ برابر $T = 4$ است. پس:

$$T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$f(x) = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right) = 3 - \sin\frac{\pi x}{2}$$

و در نتیجه:

$$f\left(\frac{25}{3}\right) = 3 - \sin\frac{25}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \sin\frac{25\pi}{6} = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

۲۱- گزینه ۴

طرف چپ معادله همان $\cos 2x$ است. پس:

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

پس بزرگترین جواب معادله، قبل از π ، یعنی $\pi - \frac{\pi}{12}$ است.

۲۲- گزینه ۲

هم در همسایگی $x = 0$ و هم در همسایگی $x = 1$ مقدار صورت کسر یعنی $x + 1$ مثبت است. پس برای این که حاصل حد $+\infty$ شود، باید مخرج نیز 0^+ باشد. به علامت مخرج نگاه کنید:

$$\frac{\quad}{x^2 - x} \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \end{array}$$

پس حد راست مخرج در $x = 1$ ، همان طور که می‌خواهیم 0^+ است و $a = 1$ مناسب است اما در $a = 0$ حد راست 0^+ نیست. یعنی مجموعه مقادیر a به صورت $\{1\}$ است.

۲۳- گزینه ۴

اول ضابطه تابع را کمی ساده‌تر کنیم:

$$f(x) = \frac{9x^2}{x\sqrt{x}} - \frac{x}{x\sqrt{x}} = 9x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 9\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = \frac{9}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{9x+1}{2x\sqrt{x}}$$

نکته: $x^{-\frac{1}{2}}$ همان $\frac{1}{\sqrt{x}}$ است و $x^{-\frac{3}{2}}$ می‌شود $\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

اگر $f'(a) = 5$ باشد، داریم:

$$f'(a) = \frac{9a+1}{2a\sqrt{a}} = 5 \xrightarrow{\text{کمی جستجو}} a = 1$$

بنابراین:

$$f(a) = f(1) = \frac{9-1}{1} = 8$$

۲۴- گزینه ۲

آهنگ متوسط تغییر از $x = 4$ تا $x = 12$ برابر است با:

$$\frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{25^{-\frac{1}{2}} - 9^{-\frac{1}{2}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3-5}{15}}{8} = -\frac{1}{60}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = 4$ برابر مشتق است:

$$f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(2)(2x + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(40) = -1(2 \times 4 + 1)^{-\frac{3}{2}} = -1(9)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{27}$$

و اختلاف این‌ها می‌شود:

$$-\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{-9 + 20}{540} = \frac{11}{540}$$

۲۵- باید $f' < 0$ و $(f')' > 0$ باشد:

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x = -4x(x^2 - 6x + 9) = -4x(x - 3)^2$$

$$f''(x) = -12x^2 + 48x - 36 = -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x - 1)(x - 3)$$

به تعیین علامت‌ها نگاه کنید:

	۰	۱	۳
f'	+	-	-
f''	-	-	+
		۳	

پس جواب $(1, 3)$ است.

نکته: در تعیین علامت f' دقت کردیم که $x = 3$ ریشه مضاعف است و f' در $x = 3$ تغییر علامت نمی‌دهد.

۲۶- گزینه ۱

باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\begin{aligned} \text{محیط} = 4/5 &\Rightarrow 2h + 2r + \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{9}{2} \Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \Rightarrow 2h = \frac{9}{2} - (2r + \pi r) \\ &\Rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2} \end{aligned}$$

حالا می توانیم مساحت پنجره را با یک متغیر بنویسیم:

$$S = 2rh + \frac{1}{2}(\pi r^2) \Rightarrow S = 2r\left(\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S = -\left(\frac{\pi + 4}{2}\right)r^2 + \frac{9}{2}r$$

می دانیم جایی که مشتق برابر صفر باشد، مساحت، ماکزیمم می شود:

$$S' = -(\pi + 4)r + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow r = \frac{9}{2\pi + 8}$$

۲۷- گزینه ۱

این سه نقطه رئوس یک مثلث قائم الزاویه اند. ببینید:

$$A(0,0) \quad B(2,1) \quad C(1,-2)$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

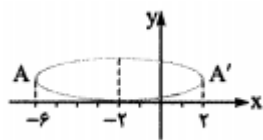
$$BC = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

پس: $BC^2 = AC^2 + AB^2$ و مثلث ABC در رأس A قائمه است (BC وتر مثلث است) شعاع دایره برابر نصف وتر است.

$$r = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

۲۸- گزینه ۲

مرکز بیضی در وسط A و A' است:



$$O = \frac{A + A'}{2} = \left(\frac{-6 + 2}{2}, 1\right) = (-2, 1)$$

طول نصف قطر بزرگ برابر نصف AA' است:

$$OA = a = \frac{AA'}{2} = 4$$

چون بیضی بر محور x ها مماس است:

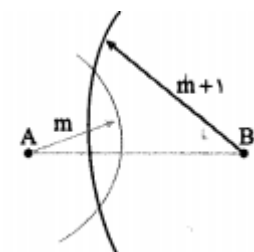
$$b = 1$$

پس داریم:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1^2}{4^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

۲۹- گزینه ۲

شکل را ببینید:



کمان به مرکز A و شعاع m و کمان به مرکز B و شعاع $m + 1$ ، یکدیگر را در دو نقطه قطع می کنند پس $m + 1$ از طول AB بیشتر است:

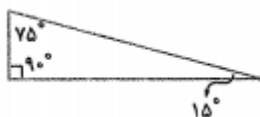
$$2m + 1 > 6 \Rightarrow m > \frac{5}{2}$$

۳۰- گزینه ۱

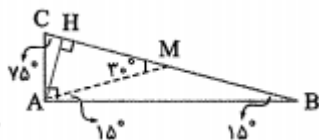
زاویه ها را x ، $5x$ و $6x$ در نظر می گیریم. پس داریم:

$$x + 5x + 6x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

پس مثلث قائم الزاویه است:



کوچک ترین ارتفاع یعنی ارتفاع وارد بر وتر. اگر میانه وارد بر وتر را رسم کنیم، داریم:



در مثلث AHM زاویه M برابر 30° است، پس:

$$AH = \frac{1}{2} AM$$

در مثلث اصلی میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس:

$$AM = \frac{1}{2} BC$$

بنابراین: $AH = \frac{1}{4} BC$ یعنی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است.

۳۱- گزینه ۴

شرط سه جمله متوالی دنباله هندسی $b^2 = ac$ بود. پس:

$$x^2 = (12 + x)(8 - x) = 96 - 12x + 8x - x^2 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x - 48$$

$$= (x + 8)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ یا } -8$$

برای $x = 6$ دنباله ۱۸، ۶ و ۲ نزولی است اما برای $x = -8$ دنباله نزولی نداریم. قدر نسبت دنباله $\frac{1}{3}$ است و داریم:

$$a_n: \underbrace{18, 6, 2}_{\times \frac{1}{3}}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}$$

پس:

$$a_3 + a_5 = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}$$

۳۲- گزینه ۳

در شکل اول، 1×3 مربع به همراه ۲ مربع گوشه داریم.

در شکل دوم، 2×4 مربع به همراه ۲ مربع گوشه داریم.

شکل سوم، 3×5 مربع به علاوه دوتا گوشه‌ای دارد.

پس در شکل n ام به تعداد $n(n + 2) + 2$ مربع داریم.

$$a_n = n^2 + 2n + 2$$

$$a_{20} - a_{19} = 20^2 + 2 \times 20 + 2 - (19^2 + 2 \times 19 + 2) = 20^2 - 19^2 + 2 \times 20 - 2 \times 19$$

$$= (20 + 19)(20 - 19) + 2 = 39 \times 1 + 2 = 41$$

۳۳- گزینه ۳

$x + \frac{\pi}{2}$ در ربع دوم است.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$x - \frac{\pi}{2}$ در ربع چهارم است.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

پس داریم:

$$\cos x (-\cos x) = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

و در نتیجه:

$$\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1}{\frac{2}{5}} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

۳۴- گزینه ۱

سعی می‌کنیم x و y را با توان کسری نشان دهیم:

$$x = \frac{a}{\sqrt{-a}} = -\frac{-a}{\sqrt{-a}} = -(-a)^{1-\frac{1}{2}} = -(-a)^{\frac{1}{2}}$$

 $-a$ عددی بین $+$ و $+$ است و هر چه به توان بیشتری برسد کم‌تر می‌شود، پس:

$$(-a)^{\frac{1}{2}} > (-a^1) > (-a)^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{x(-1)} \underbrace{-\sqrt{-a}}_x < a < \underbrace{-a\sqrt{-a}}_y$$

۳۵- گزینه ۲

عرض رأس سهمی باید ۶ باشد طول رأس هم در وسط دو ریشه است:

$$x_S = \frac{-1+5}{2} = 2$$

معادله سهمی $y = a(x+1)(x-5)$ است و داریم:

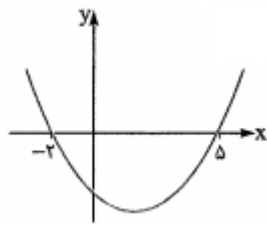
$$y_S = a(2+1)(2-5) = 6 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

پس:

$$\xrightarrow{x=0} y = -\frac{2}{3}(0+1)(0-5) = \frac{10}{3}$$

یعنی عرض نقطه تلاقی با محور y برابر $\frac{10}{3}$ است.

۳۶- گزینه ۳

با توجه به تجزیه $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$ ، این نمودار محور x را در طول‌های -2 و 5 قطع می‌کند:پس برای این که طول نقاط تلاقی با محور x ها، غیرمنفی شود باید آن را حداقل ۲ واحد به راست ببریم.

۳۷- گزینه ۴

اول ۳ تا مدرسه انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{3} = 10$$

سپس از هر مدرسه یکی از ۴ دانش‌آموز را برمی‌داریم:

$$\binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 64$$

جواب می‌شود:

$$10 \times 64 = 640$$

۳۸- گزینه ۲

تعداد کل انتخاب‌های ۳ تا از مهره‌ها برابر است با:

$$n(S) = \binom{4+3+2}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

می‌خواهیم حداقل ۱ مهره آبی خارج شود یعنی ۱ یا ۲ یا ۳ مهره آبی می‌خواهیم و فقط صفر مهره آبی قبول نیست:

$$n(A') = \underbrace{\binom{4}{0}}_{\text{هیچ آبی}} \times \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{سه مهره از سفید و قرمز}} = 1 \times 10 = 10$$

بنابراین:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

۳۹- گزینه ۱

معادله نیمساز ناحیه اول $x > 0$ و $y = x$ است. اگر این تابع را با $y = x$ تلاقی بدهیم، داریم:

$$\xrightarrow{y_1=y_2} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + (m+6) = 0$$

و این معادله باید ریشه مضاعف مثبت بدهد. پس:

$$-\frac{b}{2a} > 0, \Delta = 0$$

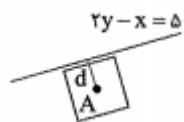
$$۱) \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = m^2 - 4(2)(m+6) = m^2 - 8m - 48 = (m-12)(m+4) = 0$$

$$۲) -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2(2)} > 0 \Rightarrow m < 0$$

پس داریم:

$$m = -4$$

۴۰- گزینه ۴



فاصله وسط قطر مربع از ضلع آن برابر نصف ضلع است.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, -1) \\ 2y - x - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

پس طول ضلع مربع می شود $2d = \frac{20}{\sqrt{5}}$ و مساحت مربع برابر است با:

$$S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

فاصله $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۴۱- گزینه ۱

به ازای $x = 1$ داریم $y = 1$. پس در تابع وارون هم باید $(1, 1)$ صدق کند و این یعنی گزینه های ۲ و ۴ نیستند.به ازای $x = -1$ هم داریم $y = -1$ ، پس $(-1, -1)$ نیز در وارون صدق می کند که ۳ را رد می کند و جواب می شود ۱.

اما راه حل:

وارون هر ضابطه را پیدا می کنیم:

$$y = \sqrt{x}, x \geq 0 \xrightarrow{\text{وارون}} x = \sqrt{y} \xrightarrow{\text{به توان 2}} y = x^2$$

$$y = -\sqrt{-x}, x < 0 \xrightarrow{\text{وارون}} x = -\sqrt{-y} \Rightarrow -x = \sqrt{-y} \Rightarrow x^2 = -y \Rightarrow y = -x^2$$

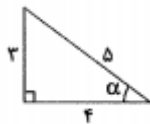
پس برای $x \geq 0$ و $x < 0$ باید به ترتیب $y = x^2$ و $y = -x^2$ شود که $y = x|x|$ این طور است.

۴۲- گزینه ۱

اول عبارت $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$ را ساده می کنیم.پس در ربع دوم است و $\frac{\pi}{2} + \alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha$ در ربع اول قرار دارد. پس:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha + \cos \alpha$$

حالا از روی $\tan \alpha$ ، مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را حساب می‌کنیم:



$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5} \leftarrow \text{در ربع سوم است.}$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5} \leftarrow \text{در ربع سوم است.}$$

پس جواب می‌شود:

$$-\sin \alpha + \cos \alpha = -\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

۴۳- گزینه ۴

از معادله $y_1 = y_2$ داریم:

$$2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$$

اگر $\sqrt{2}^x$ را t بگیریم، داریم:

$$\sqrt{2}^x = t \Rightarrow 2^x = t^2$$

$$t^2 = \sqrt{2}t + 4 \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 2\sqrt{2})(t + \sqrt{2}) = 0 \xrightarrow{t > 0} t = \sqrt{2}^x = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

با قرار دادن $x = 3$ در هر ضابطه‌ها داریم:

$$y = 8$$

پس نقطه تلاقی دو منحنی $B(3, 8)$ است و فاصله آن از $A(0, 4)$ می‌شود:

$$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

۴۴- گزینه ۳

به جای ۲ می‌نویسیم $x^2 \log_x$ و تفاضل دو لگاریتم را به شکل لگاریتم تقسیم درمی‌آوریم. پس:

$$\begin{aligned} \log_x(3x+8) &= \log_x x^2 - \log_x(x-6) = \log_x \frac{x^2}{x-6} \xrightarrow{\log_x \text{ را می‌زنیم.}} (3x+8) \\ &= \frac{x^2}{(x-6)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3x^2 - 18x + 8x - 48 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 48 \\ &= 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 5x - 24 = (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ یا } -3 \end{aligned}$$

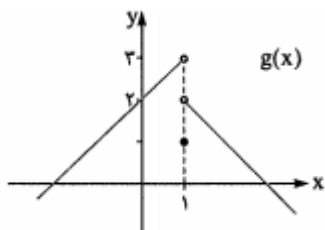
پس:

$$\log_4 x = \log_4 8 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

۴۵- گزینه ۲

(۱) با توجه به نمودار و تابع $g(x) = f(-x) + 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x) + 1 - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) + 1 \\ &= 1 + 1 - (2 + 1) = -1 \end{aligned}$$



(۲) نمودار $g(x)$ را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار $g(x)$ ، ابتدا نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس آن را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2 - 3 = -1$$

۴۶- گزینه ۲

باید تابعی را انتخاب کنیم که در $x = 0$ از راست پیوسته نیست اما در $(0, 1)$ پیوسته است و در $x = 1$ پیوستگی چپ دارد.

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ در $x = 1$ از راست پیوسته‌اند:

$$۱) y = -[x] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = f(0) = 0$$

$$۳) y = [\sqrt{x}] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = f(0) = 0$$

$$۴) y = -[x^2] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = f(0) = 0$$

۲ در $x = 0$ از راست پیوسته نیست و در $x = 1$ پیوستگی چپ دارد:

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0^+} [-x] = -1, f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] = f(1) = -1$$

پس جواب ۲ می‌شود.

۴۷- گزینه ۳

میانگین داده‌های اضافه شده نیز ۲۵ است:

$$\frac{20 + 28 + 27}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

پس با افزودن این داده‌ها میانگین عوض نمی‌شود. به صورت کسر واریانس در حالت اول و دوم دقت کنید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2}{18} = 3^2 = 9 \Rightarrow \text{صورت کسر} = 18 \times 9 = 162$$

این صورت کسر اول است که برابر 162 بود.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 + 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2}{21} + \frac{(20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 - (28 - 25)^2}{21}$$

$$= \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} = \frac{189 + 11}{21} = 9 + \frac{11}{21} \approx 9/52$$

۴۸- گزینه ۲

سؤال می گوید $f(g(x)) = f(2x - 1) = \frac{x}{x-3}$ برای رسیدن به $f(3)$ باید x را طوری انتخاب کنیم که $2x - 1 = 3$ بشود ۳. پس $x = 2$ قرار می دهیم و داریم:

$$\xrightarrow{x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

۴۹- گزینه ۱

در $f\left(\frac{x}{2}\right)$ مقادیر x دو برابر شده اند. پس وقتی دامنه $f\left(\frac{x}{2}\right)$ بین ۲- تا ۴ است دامنه خود بین ۱- و ۲ است. یعنی $D_{f(x)} = [-1, 2]$

برای $f(2x + 1)$ باید از x ها یک واحد کم کرده و سپس آن ها را نصف کنیم.

$$[-1, 2] \xrightarrow{\text{یک واحد کم کنیم}} [-2, 1] \xrightarrow{\text{نصف کنیم}} \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

پس:

$$D_{f(2x+1)} = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

۵۰- گزینه ۳

بیشترین مقدار تابع $y = 2$ است پس $a = 2$.

دوره تناوب تابع $T = 6$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 6$$

و در نتیجه $b = \frac{1}{3}$ بنابراین:

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۵۱- گزینه ۴

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ همان $\sin x$ است (چون کمان در ربع چهارم است و کسینوس مثبت می شود و به خاطر وجود $\frac{3\pi}{2}$

باید نسبت را عوض کرد.) پس داریم:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\xrightarrow{\text{جواب کلی معادله سینوسی}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

نکته: دقت کنید که $x = k\pi$ سینوس را صفر می‌کند (مخرج صفر می‌شود) و قبول نیست.

۵۲- گزینه ۲

زیر رادیکال مخرج $(x-2)^2$ است. پس داریم:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \xrightarrow[x \rightarrow 2^+]{x > 2} x-2$$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} = \frac{2 - \sqrt[3]{8}}{2-2} = \frac{0}{0}$$

این حد را با قاعده هوییتال یا گویا کردن، رفع ابهام می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} &\times \frac{2^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2}}{2^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2}} = \frac{2^3 - (\sqrt[3]{x+6})^3}{(x-2)(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} \\ &= \frac{8 - (x+6)}{(x-2)(4 + 4 + 4)} = \frac{2-x}{(x-2)(12)} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

جواب پیرانتز بزرگ به ازای $x=2$

۵۳- گزینه ۱

آهنگ متوسط از ۴ تا ۶/۲۵ برابر است با:

$$\frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{0/5}{2/25}$$

آهنگ لحظه‌ای در $x = 4$ برابر است با:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

و اختلاف این‌ها می‌شود:

$$\frac{0/5}{2/25} - \frac{1}{4} = \frac{2 - 2/25}{4 \times 2/25} = \frac{-0/25}{9} = -\frac{1}{36}$$

صورت سؤال گفته چه قدر کم تر است، پس جواب می‌شود:

$$\frac{1}{36}$$

۵۴- گزینه ۳

شیب خط $x - 3y = 2$ برابر $\frac{1}{3}$ است، پس شیب خط مماس باید ۳- باشد (بر هم عمودند). پس مشتق تابع را مساوی ۳- می‌گذاریم:

$$y' = 3x^2 + 6x = -3 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

پس نقطهٔ تماس در $x = -1$ بوده. عرض آن می‌شود:

$$y(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$$

و معادلهٔ مماس با نقطهٔ $A(-1, 3)$ و شیب ۳- به صورت $y = -3x$ نوشته می‌شود که از $B(2, -6)$ می‌گذرد.

۵۵- گزینه ۱

باید مشتق تابع، تغییر علامت دهد:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + a) - 1(x^2 - 2x)}{(x + a)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2ax - 2a - x^2 + 2x}{(x + a)^2} \\ = \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2}$$

این مشتق ریشه دارد و تغییر علامت می‌دهد، پس دلتای صورتش مثبت است:

$$x^2 + 2ax - 2a = 0 \Rightarrow \Delta = (2a)^2 - 4(1)(-2a) = 4a^2 + 8a > 0 \Rightarrow 4a(a + 2) > 0$$

خارج دو ریشه مثبت است.

$$\longrightarrow a > 0 \text{ یا } a < -2$$

۵۶- گزینه ۳

فاصلهٔ نقطهٔ (x, y) از $(1, 4)$ برابر است با:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

با توجه به معادلهٔ نمودار، به جای y می‌توانیم $\sqrt{2x}$ قرار دهیم:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (\sqrt{2x} - 4)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 2x - 2(4)\sqrt{2x} + 16} = \sqrt{x^2 + 17 - 8\sqrt{2x}}$$

مشتق این تابع را مساوی صفر می‌گذاریم تا به مینیمم آن برسیم:

$$f'(x) = \frac{2x - 8 \frac{2}{2\sqrt{2x}}}{2\sqrt{x^2 + 17 - 8\sqrt{2x}}} = \frac{2x - \frac{8}{\sqrt{2x}}}{2\sqrt{x^2 + 17 - 8\sqrt{2x}}} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{8}{\sqrt{2x}} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{8}{\sqrt{2x}}$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{2x} = 8 \xrightarrow{\text{توان}^2} 8x^3 = 8^2 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

و به ازای $x = 2$ حداقل فاصله می شود $\sqrt{5}$.

۵۷- گزینه ۲

مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را پیدا می کنیم:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(+\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(1)} = 2$$

فاصله مرکزها برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} O(1, -2) \\ O'(-2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow d = OO' = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

برای حالت مماس خارج باید $OO' = r + r'$ باشد، پس:

$$5 = 2 + r' \Rightarrow r' = 3$$

۵۸- گزینه ۲

فاصله کانونی $FF' = 2c$ و طول قطر کوچک $BB' = 2b$ است، پس داریم:

$$FF' = BB' \Rightarrow 2b = 2c \Rightarrow b = c$$

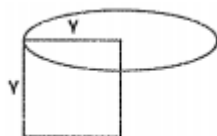
با توجه به رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ داریم:

$$a^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c$$

خروج از مرکز برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = e = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۹- گزینه ۲



بزرگترین مساحت در بین مستطیل‌ها مربوط به مربع است. پس داریم:

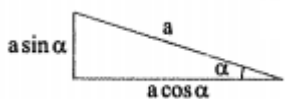
$$4x = 28 \Rightarrow x = 7$$

از دوران این مربع حول ضلع آن، استوانه‌ای به شعاع قاعده ۷ و ارتفاع ۷ ایجاد می‌شود که حجم آن برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi(7)^2 \times 7 = 343\pi$$

۶۰- گزینه ۱

مساحت مثلث قائم الزاویه برابر است با:



$$S = \frac{1}{2}(a \sin \alpha)(a \cos \alpha) = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}a^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\alpha$$

سؤال می گوید این مساحت $\frac{1}{8}a^2$ است، پس:

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

و در نتیجه:

$$2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

۶۱- گزینه ۳

در دسته اول مجموع جملات ۱ است.

در دسته دوم مجموع کل جملات $3 + 5 = 8$ است.در دسته سوم مجموع جملات $7 + 9 + 11 = 27$ است.

با همین الگو در دسته n ام جمع جملات n^3 است. پس جمع جملات در دسته سی ام، 30^3 است. در این دسته ۳۰ تا عدد فرد متوالی وجود دارد:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{29} + a_{30} = 30^3$$

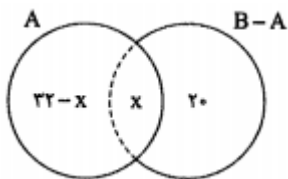
می دانیم:

$$a_1 + a_{30} = a_2 + a_{29} = \dots = a_{15} + a_{16}$$

پس جمع کل این ۳۰ جمله، ۱۵ برابر جمع جملات اول و آخر است:

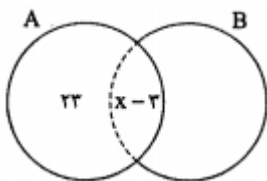
$$15(a_1 + a_{30}) = 30^3 \Rightarrow a_1 + a_{30} = \frac{30^3}{15} = \frac{30}{15} \times 30^2 = 2 \times 900 = 1800$$

۶۲- گزینه ۲



A دارای ۲۲ و $B - A$ دارای ۲۰ عضو است. با برداشتن ۷ عضو از A از اشتراک آن ها ۳ عضو کم شده است.

در حالت اول نمودار ون این بوده و در حالت دوم:

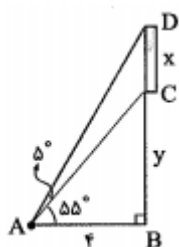


پس داریم:

$$32(23 + x - 3) = 7 \Rightarrow 12 - x = 7 \Rightarrow x = 5$$

یعنی اشتراک دو مجموعه در ابتدا ۵ عضوی بوده است.

۶۳- گزینه ۱



در دو مثلث قائم‌الزاویه تانژانت زاویه‌های 55° و 60° را می‌نویسیم:

$$\tan 55^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{4}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{x + y}{4}$$

پس:

$$\tan 60^\circ - \tan 55^\circ = \frac{x}{4}$$

$$1/\sqrt{3} - 1/43 = \frac{x}{4} \Rightarrow 0/3 = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4 \times 0/3 = 1/2$$

۶۴- گزینه ۳

$$A = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} + 3^0} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3})^3 + 1^3} = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{3 + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{4}$$

پس داریم:

$$(4A - 1)^3 = \left((\sqrt[3]{3} + 1) - 1 \right)^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3$$

۶۵- گزینه ۱

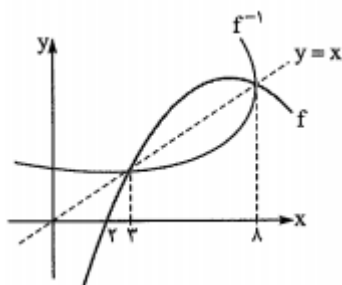
عبارت در ریشه‌مخرج یعنی در $x = t = 3$ تعریف نشده است، پس $t = 3$ در ریشه $|x - \alpha|$ یعنی در $x = \alpha$ عبارت صفر می‌شود و تغییر علامت نمی‌دهد، پس با توجه به جدول، $\alpha = 2$ هم‌چنین در ریشه‌عبارت درجه سوم، یعنی $x = \beta$ عبارت صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد، پس طبق جدول باید $\beta = 1$ باشد.

بنابراین:

$$\alpha x^2 + \beta x + t = 2x^2 + 1x + 3$$

اما دلتای این عبارت منفی است و ریشه حقیقی ندارد.

۶۶- گزینه ۴



نمودار f^{-1} را با قرینه کردن f نسبت به محور $y = x$ به دست می آوریم:

شرط دامنه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ این است که $x - f^{-1}(x) \geq 0$ باشد، یعنی:

$$x \geq f^{-1}(x)$$

با توجه به شکل در فاصله $[3, 8]$ نمودار $y = x$ بالاتر یا روی $f^{-1}(x)$ قرار دارد.

پس:

$$D = [3, 8]$$

۶۷- گزینه ۳

تعداد کل حالتها برابر است با:

$$n(S) = \binom{5+3+2}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با:

$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{سفید و سیاه}} \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{سیاه}} + \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{قرمز و سیاه}} \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{قرمز}} + \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{سفید و قرمز}} \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{سفید}} = 6 + 10 + 15 = 31$$

و احتمال می‌شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{31}{45}$$

۶۸- گزینه ۴

اگر ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ را α و β بنامیم، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = +\frac{3}{2}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

ریشه‌های معادله جدید باید $1 - \frac{1}{\alpha}$ و $1 - \frac{1}{\beta}$ باشند.

جمع آنها برابر است با:

$$S_{\text{جدید}} = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{\beta + \alpha}{\beta\alpha} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -3 - 2 = -5$$

خوش شانسى آوردیم! فقط در ۴ جمع ریشه‌ها ۵- است.

نکته: محاسبه حاصل ضرب ریشه‌های جدید را هم می‌بینیم:

$$P_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \times \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1$$

$$= -2 + 3 + 1 = 2$$

۶۹- گزینه ۲

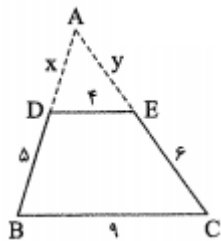
مختصات نقطه A روی خط $y = x - 1$ باید به صورت $(a, a - 1)$ باشد. فاصله آن از خط $4y - 3x - 2 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(a - 1) - 3(a) - 2|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{|a - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|a - 6|}{5} = 2 \Rightarrow |a - 6| = 10$$

$$\Rightarrow a - 6 = \pm 10 \xrightarrow{a > 0} a = 16 \Rightarrow y_A = a - 1 = 15$$

۷۰- گزینه ۴

طبق تعمیم قضیه تالس چون $DE \parallel BC$ است، داریم:



$$\frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 4 \\ \frac{y}{y+6} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{y}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{24}{5} = 4/8 \end{cases}$$

پس محیط مثلث ADE برابر است با:

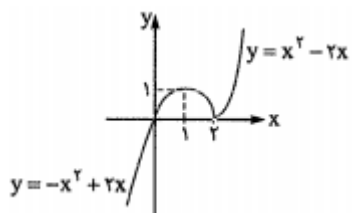
$$AD + AE + DE = x + y + 4 = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$

۷۱- گزینه ۳

اول نمودار $y = x|x - 2|$ را رسم کنیم:

$$y = x|x - 2| = \begin{cases} x(x - 2) & x - 2 \geq 0 \\ x(-x + 2) & x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$

رأس سهمی $y = -x^2 + 2x$ در $S(1, 1)$ قرار دارد. چه طوری؟



پس تابع در $(1, 2)$ نزولی است و برد آن در این بازه به صورت $(0, 1)$ است. بنابراین دامنه وارون باید $(0, 1)$ باشد. (۳ یا ۴ درست‌اند)

نقطه $(0, 2)$ باید در ضابطه وارون صدق کند (در خود تابع $(2, 0)$ داریم) که فقط به ۳ می‌خورد.

اما راه حل:

$$y = -x^2 + 2x \xrightarrow{\text{وارون}} x = -y^2 + 2y \Rightarrow -x = y^2 - 2y \Rightarrow 1 - x = y^2 - 2y + 1$$

$$= (y - 1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{1-x} = |y - 1| \xrightarrow{1 < y < 2} y - 1 = \sqrt{1-x} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{1-x}$$

۷۲- گزینه ۱

تمام کمان‌ها را به 15° می‌رسانیم:

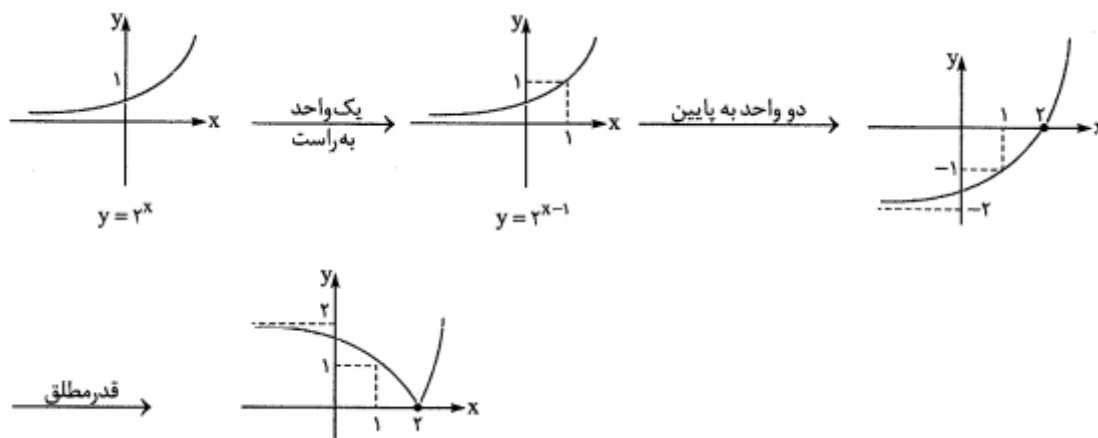
$$\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\overset{\text{چهارم}}{\cos(270^\circ + 15^\circ)} - \overset{\text{سوم}}{\sin(270^\circ - 15^\circ)}}{\underset{\text{دوم}}{\sin(\underbrace{540^\circ}_{3 \times 180^\circ} - 15^\circ)} - \underset{\text{دوم}}{\sin(90^\circ + 15^\circ)}} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ \div \cos 15^\circ \tan 15^\circ + 1}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ \div \cos 15^\circ \tan 15^\circ - 1} = \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{1/28}{-0/72}$$

$$= \frac{128 \div 8}{-72 \div 8} = \frac{16}{9}$$

۷۳- گزینه ۴

نمودار $y = |2^{x-1} - 2|$ را در مراحل زیر می‌کشیم:



پس با خط‌های $y = 2$ و بالاتر از آن و نیز با خط $y = 0$ فقط در یک نقطه تلاقی دارد. پس محدوده k به صورت $[2, +\infty) \cup \{0\}$ است.

۷۴- گزینه ۱

سعی می‌کنیم $\sqrt[3]{1/6}$ را به ۵ ربط بدهیم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log \left(\frac{16}{10} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3} (\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1)$$

می‌دانیم $\log 2 + \log 5 = 1$ پس $\log 2 = 1 - \log 5$ یعنی داریم: $\log 2 = 1 - 3k$ و با جای‌گذاری آن در عبارت قبلی داریم:

$$\frac{1}{3} (4(1 - 3k) - 1) = \frac{1}{3} (4 - 12k - 1) = \frac{1}{3} (3 - 12k) = 1 - 4k$$

۷۵- گزینه ۲

سراغ نقطه مرزی یعنی $x = 6$ می‌رویم. حد چپ و مقدار از ضابطه بالا برابر $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}$ هستند و حد راست از

ضابطه پایین برابر $a + \cos^2 \frac{\pi(6)}{36}$ یعنی $a + \frac{3}{4}$ است. پس برای پیوستگی باید داشته باشیم:

$$a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$$

۷۶- گزینه ۲

ماه تولد هر نفر ۱۲ حالت دارد، پس:

$$n(S) = 12 \times 12 \times 12 \times 12$$

تعداد حالاتی که ماه تولد هیچ دو نفری مثل هم نباشد برابر است با:

$$n(A') = 12 \times 11 \times 10 \times 9$$

پس:

$$P(A) = 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12 \times 12 \times 12 \times 12} = 1 - \frac{11 \times 10 \times 9}{12 \times 12 \times 12} = 1 - \frac{11 \times 10}{12 \times 4 \times 4} = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

نکته: دقت می‌کنید که شمارش مستقیم حالت‌ها سخت است. باید روز تولد ۲ یا ۳ یا ۴ نفر مثل هم باشد که حالت‌های زیادی دارد!

۷۷- گزینه ۲

در داده‌های اولیه $\sigma^2 = 9$ و $CV = 0/3$ است. پس:

$$\frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{\bar{x}} = \frac{3}{10} \Rightarrow \bar{x} = 10$$

یعنی میانگین آن‌ها ۱۰ بوده. حالا تمام داده‌ها را ۳ برابر کرده و ۵ تا کم می‌کنیم پس میانگین $3 \times 10 - 5 = 25$ می‌شود و انحراف معیار فقط ۳ برابر می‌شود:

$$\sigma = 3 \times 3 = 9$$

ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{9}{25} = 0/36$$

۷۸- گزینه ۴

در تابع $f \circ g$ باید زنجیر زیر ساخته شود:

$$x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow y$$

اما $x = -1$ وارد g نمی‌شود (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند) پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ که -1 را دارند، نمی‌توانند جواب باشند و فقط ۴ می‌تواند درست باشد.

اما راه حل:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \mid x^2 + 2x > 0, \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

$$= \{x \mid x^2 + 2x > 0, x^2 + 2x \leq 2^3\}$$

جواب نامعادله $x^2 + 2x > 0$ به صورت $x < -2$ یا $x > 0$ (بیرون ریشه‌ها) است.

جواب نامعادله $x^2 + 2x \leq 8$ هم به صورت $-4 \leq x \leq 2$ است. (بین دو ریشه) و اشتراک این‌ها می‌شود $(0, 2] \cup [-4, -2)$ که در ۴ آمده است.

۷۹- گزینه ۱

عبارت را ساده کنیم:

$$1 - \tan^4 x = \frac{1}{2 - 2 \sin^2 x} \Rightarrow (1 + \tan^2 x)(1 - \tan^2 x) = \frac{1}{2(1 - \sin^2 x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} (1 - \tan^2 x) = \frac{1}{2 \cos^2 x} \Rightarrow 1 - \tan^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

نکته: با استفاده از روابط 2α ثابت می‌شود که:

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

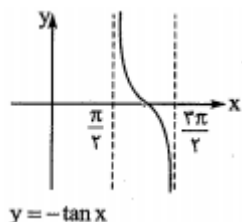
$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

حالا مقدار $\cos 2x$ برابر است با:

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

۸۰- گزینه ۲

ضابطه را ساده تر کنیم:



$$\cos 2x - 1 = -2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = -\tan x$$

نمودار $\tan x$ در فاصله $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی است، پس $-\tan x$ در این فاصله اکیداً نزولی است.

۸۱- گزینه ۱

اگر عدد ۱ را به طرف چپ بیاوریم و فرمول $2 \cos^2 x - 1$ را بنویسیم خوب می شود:

$$\underline{2 \cos^2 x - 1} + \underline{2 \sin x \cos x} = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

پس داریم:

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

و در نتیجه:

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۸۲- گزینه ۱

برای حد تابع در $-\infty$ به جمله های پرتوان صورت و مخرج دقت می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x}$$

این حد برابر ۱- شده است پس اولاً $n = 1$ بوده (صورت و مخرج هم درجه اند) و ثانیاً $a = -5$ پس:

$$f(x) = \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$$

حد این تابع در $x = 3$ به $\frac{0}{0}$ می‌رسد. از هوییتال لذت می‌بریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{8x + 15}{2\sqrt{4x^2 + 15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{2\sqrt{4 \times 9 + 15 \times 3}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{2 \times 9}} = \frac{-5}{3 - \frac{13}{6}} = \frac{-5}{\frac{5}{6}} = -6$$

نکته: اگر نخواهیم هوییتال بز نیم باید مخرج را گویا کرد:

$$\frac{(-5x + 15)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{9x^2 - (4x^2 + 15x)}$$

سپس با حذف $(x - 3)$ از صورت و مخرج به جواب می‌رسیم.

۸۳- گزینه ۱

شیب مماس بر منحنی در ابتدای بازه برابر است با:

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

آهنگ متوسط تغییر تابع در $[1, 1/21]$ نیز برابر است با:

$$\frac{f(1/21) - f(1)}{1/21 - 1} = \frac{\sqrt{0/21} - \sqrt{1}}{0/21} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{10}{21}$$

پس اختلافشان می‌شود:

$$\frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{21 - 20}{42} = \frac{1}{42}$$

۸۴- گزینه ۲

اول قدر مطلقها را باز کنیم:

$$f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x| = \begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}x & x \geq 0 \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{5}x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 4x + |x| = \begin{cases} 5x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

پس ضابطه $f \circ g$ به صورت زیر است:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \frac{3}{5}(5x) & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases} = 3$$

پس مشتق $f \circ g$ می‌شود $y' = 3$.

نکته: اگر ضابطه‌ها مساوی نمی‌شدند، $f \circ g$ در $x = 0$ مشتق نداشت.

۸۵- گزینه ۳

باید در این تابع‌ها همواره $y' \geq 0$ باشد. مشتق را ببینید.

$$f'(x) = 3x^2 - 2(m+2)x + 3 \geq 0$$

پس باید دلتای این عبارت منفی یا صفر باشد:

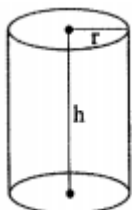
$$\Delta = (-2(m+2))^2 - 4(3)(3) \leq 0 \Rightarrow 4(m+2)^2 - 4(9) \leq 0 \xrightarrow{\div 4} (m+2)^2 \leq 9 \xrightarrow{\text{چندر}} |m+2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq m+2 \leq 3$$

سؤال از ما بازه طول نقاط اکسترمم تابع $f'(x)$ را می‌خواهد، یعنی باید ریشه‌های مشتق تابع $f'(x)$ را بیابیم. پس از تابع $f'(x)$ مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f''(x) = 6x - 2(m+2) = 0 \Rightarrow 6x = 2(m+2) \Rightarrow x = \frac{m+2}{3}$$

خب در بالا به دست آوردیم که $m+2$ بین ۳- و ۲+ است پس $\frac{m+2}{3}$ بین ۱- و ۱+ قرار دارد.

۸۶- گزینه ۳



تابع $V = \pi r^2 h$ باید ماکزیمم شود. سؤال گفته: $r + h = 6$ ، پس به جای h ، $6 - r$ را قرار می‌دهیم:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (6 - r) = \pi(6r^2 - r^3)$$

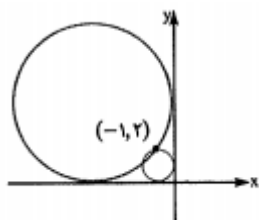
از تابع بر حسب r مشتق می‌گیریم و مقادیر اکسترمم مطلق را پیدا می‌کنیم:

$$V' = \pi(12r - 3r^2) = 0 \Rightarrow 3r(4 - r) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ یا } 4$$

r	۰	۴	۶
V	۰	۳۲π	۰

پس حجم ماکزیمم برابر 32π است.

۸۷- گزینه ۲



چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ عبور می‌کند، پس بر هر دو محور در ربع دوم مماس است، پس مرکزی $O(-r, r)$ خواهد بود.

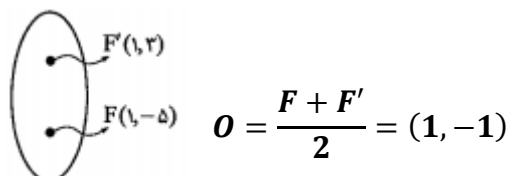
پس معادله دایره $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ است و مقادیر r را با قرار دادن نقطه $(-1, 2)$ به دست می‌آوریم:

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 + r^2 - 4r + 4 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} r = 1 \text{ یا } 5$$

پس قطر دایره بزرگ تر می شود:

$$2r = 10$$

۸۸- گزینه ۱



مرکز بیضی در وسط دو کانون است:

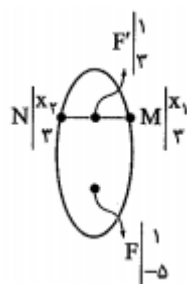
هم چنین:

$$c = \frac{FF'}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

از طرفی $b = 3$ و طبق فیثاغورس داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

حالا می خواهیم خط $y = 3$ بیضی را قطع کند. این خط افقی است و از کانون F' می گذرد.



طبق تعریف بیضی داریم:

$$MF + MF' = 2a$$

$$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + 0} + \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 8^2} = 5 \times 2 = 10$$

$$\sqrt{(x_1 - 1)^2} + \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 64} = 10$$

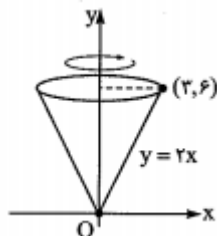
حالا اگر $(x_1 - 1)$ را t بگیریم، از معادله $|t| + \sqrt{t^2 + 64} = 10$ داریم:

$$\sqrt{t^2 + 64} = 10 - |t| \Rightarrow t^2 + 64 = t^2 - 20|t| + 100 \Rightarrow 20|t| = 36 \Rightarrow |x - 1| = 1/8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2/8 = \frac{14}{5} \\ x = -0/8 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

۸۹- گزینه ۲

با توجه به شکل مخروطی با شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ داریم که حجم آن می شود:



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (3)^2 (6) = 18\pi$$

۹۰- گزینه ۱

«یا» یعنی اجتماع.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{\text{مستقل}} P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{60}{100} + \frac{25}{100} - \frac{60}{100} \frac{25}{100} = \frac{60 + 25 - 15}{100} = \frac{70}{100} = 0.7$$

۹۱- گزینه ۱

در دسته بیستم ۲۰ عدد متوالی داریم. در دسته‌های اول تا نوزدهم کلاً ۱۹۰ $1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19(20)}{2}$ عدد نوشته شده است. پس دسته ۲۰ام از ۱۹۱ تا ۲۱۰ است و مجموع جملات اول و آخرش می‌شود:

$$191 + 210 = 401$$

۹۲- گزینه ۴

A ، B و $A \cup B$ دارای ۲۸، ۳۲ و ۵۲ عضو هستند، پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$52 = 28 + 32 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$

سؤال می‌گوید اگر از هر یک از دو مجموعه ۷ عضو برداریم. از اشتراک سه تا کم می‌شود پس ۴ عضو غیر مشترک از هر مجموعه برداشته‌ایم. بنابراین از اجتماع به تعداد $4 + 4 + 3 = 11$ تا کم می‌شود و داریم:

$$n(A \cup B) = 52 - 11 = 41$$

۹۳- گزینه ۲

به توان دو می‌رسانیم:

$$(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$$

پس داریم:

$$= 5 + 4\sqrt{3} + 2 = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$$

اگر از دو طرف جذر بگیریم، داریم:

$$2^x + 2^{-x} = 2 + \sqrt{3}$$

۹۴- گزینه ۳

اختلاف ریشه‌های سهمی $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است، پس:

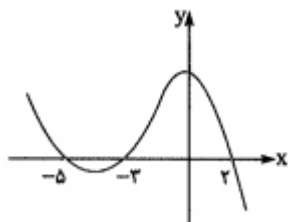
$$3 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|1|} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow \Delta = 9$$

عرض رأس سهمی برابر است با:

$$y_S = \frac{-\Delta_{\Delta=9}}{4a} \xrightarrow{a=1} y_S = -\frac{9}{4}$$

۹۵- گزینه ۴

$f(x-2)$ همان نمودار f است که ۲ واحد به راست رفته، پس نمودار خود $f(x)$ این بوده:



شرط دامنه $\sqrt{xf(x)}$ این است که $xf(x) \geq 0$ باشد.

پس باید x و $f(x)$ هم علامت باشند:

$$x \geq 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$x < 0, f(x) < 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq -3$$

پس دامنه تابع به صورت $[-5, -3] \cup [0, 2]$ است.

۹۶- گزینه ۳

$$n(S) = \text{تعداد کل حالات انتخاب 4 تا از 14 مهره} = \binom{14}{4} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2} = 13 \times 11 \times 7$$

می‌خواهیم یک قرمز و حداقل ۲ سفید خارج شود. پس دو حالت داریم:

$$n(A) = \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یک قرمز}} \times \underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{دو سفید}} \times \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک سیاه}} + \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یک قرمز}} \times \underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{سه سفید}}$$

نکته: دقت می‌کنید که در حالت یک قرمز و دو سفید، برای تکمیل ۴ تا مهره، به یک مهره سیاه هم نیاز است.

$$= 2 \times 21 \times 5 + 2 \times 35 = 210 + 70 = 280$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{280}{7 \times 13 \times 11} = \frac{40}{143}$$

۹۷- گزینه ۱

با کمی دقت $x = 1$ ریشه عبارت $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4$ است، پس عبارت بر $x - 1$ بخش پذیر است. با تقسیم یا دسته‌بندی، عبارت به صورت $(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$ تجزیه می‌شود. چون سه ریشه حقیقی متمایز می‌خواهیم باید در پرانتز درجه دوم $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد:

$$\left. \begin{aligned} \Delta = a^2 - 4(1)(4) > 0 &\Rightarrow a^2 - 16 > 0 \\ S = -\frac{a}{1} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a < -4$$

$$P = \frac{4}{1} > 0$$

اما دقت کنید که به ازای $a = -5$ ، ریشه‌های پیرانتز درجه دوم $x_2 = 1$ و $x_3 = 4$ هستند و با توجه به ریشه پیرانتز اول یعنی $x_1 = 1$ ، سه ریشه متمایز نداریم. پس $a = -5$ قبول نیست. یعنی جواب کامل $a \neq -5$ و $a < -4$ است.

۹۸- گزینه ۳

در ۱۱ کیلو رنگ با غلظت ۴۰ درصد، ۴/۴ کیلو رنگ و ۶/۶ کیلو حلال داریم.

در چهار کیلو رنگ با غلظت ۷۰ درصد هم ۲/۸ کیلو رنگ و ۱/۲ کیلو حلال داریم.

از ترکیب این‌ها محلول جدید $4/4 + 2/8 = 7/2$ کیلو رنگ و $6/6 + 1/2 = 7/8$ کیلو حلال دارد و برای رسیدن به غلظت ۵۰ درصد باید ۰/۶ کیلوگرم از حلال را کم کرد تا مقدار رنگ و حلال یکسان شود.

۹۹- گزینه ۱

طبق قضیه تالس داریم:

$$AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

$$CD \parallel DE \Rightarrow \frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE}$$

در هر دو تناسب مشترک است پس:

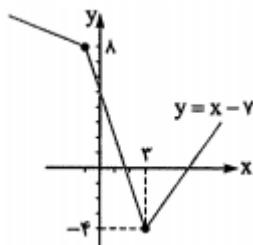
$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{5+3}{x} \Rightarrow x = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

۱۰۰- گزینه ۳

اول نمودار $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ را رسم کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} (2x - 6) - (x + 1) = x - 7 & x \geq 3 \\ -(2x - 6) - (x + 1) = -3x + 5 & -1 \leq x < 3 \\ -(2x - 6) + (x + 1) = -x + 7 & x < -1 \end{cases}$$

البته با دقت به نقاط شکستگی در $(3, -4)$ و $(-1, 8)$ نیز می‌توانیم نمودار را بکشیم:



پس تابع در $(3, +\infty)$ با ضابطه $y = x - 7$ و برد $(-4, +\infty)$ صعودی است. ضابطه وارون آن $x = y + 7$ یا $y = x + 7$ است و دامنه وارون هم $x > -4$ خواهد بود که در ۳ آمده است.

۱۰۱- گزینه ۳

همه کمان‌ها را به 20° می‌رسانیم.

$$\frac{\sin(270^\circ - 20^\circ) + \sin(720^\circ - 20^\circ)}{\cos(540^\circ + 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ)}$$

نکته: دقت کنید که $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ و $2 \times 360^\circ = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$

پس داریم:

$$= \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ \div \cos 20^\circ - 1 - \tan 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ \div \cos 20^\circ - 1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

۱۰۲- گزینه ۳

$f(2) = 6$ و $f(12) = 10$ است، پس داریم:

$$f(2) = 6 \Rightarrow 6 = a + \log_2(b(2) - 4) \Rightarrow 6 - a = \log_2(2b - 4) \Rightarrow 2b - 4 = 2^{6-a}$$

$$f(12) = 10 \Rightarrow 10 = a + \log_2(12b - 4) \Rightarrow 10 - a = \log_2(12b - 4) \Rightarrow 2^{10-a} = 12b - 4$$

2^{10-a} به صورت $2^{6-a} \times 2^4$ می‌نویسیم و به جای 2^{6-a} هم $2b - 4$ را قرار می‌دهیم:

$$2^{10-a} = 12b - 4 \Rightarrow 2^{6-a} \times 2^4 = 12b - 4 \Rightarrow (2b - 4) \times 16 = 12b - 4 \Rightarrow 32b - 64 = 12b - 4 \Rightarrow 20b = 60 \Rightarrow b = 3$$

حالا a را پیدا می‌کنیم:

$$2b - 4 = 2^{6-a} \Rightarrow 6 - 4 = 2^{6-a} \Rightarrow 2^1 = 2^{6-a} \Rightarrow 6 - a = 1 \Rightarrow a = 5$$

۱۰۳- گزینه ۲

ضریب ۲ در پشت لگاریتم را در توان می‌گذاریم و جمع لگاریتم‌ها را به صورت لگاریتم حاصل ضرب می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 &= \log(6 - 2\sqrt{5}) \underbrace{(1 + 2\sqrt{5} + 5)}_{(1+\sqrt{5})^2} \\ &= \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - 4 \times 5) = \log 16 = \log 2^4 \\ &= \underbrace{4 \log 2}_k = 4k \end{aligned}$$

۱۰۴- گزینه ۴

می‌دانیم $[x]$ در نقاط صحیح، ناپیوسته است. در $x = -1$ فقط پیوستگی راست می‌خواهیم که دارد؛ در $x = 0$ و در $x = 1$ عامل صفرشونده پشت براکت داریم، اما تابع $[x](x-1)x$ در $x = 2$ قطعاً ناپیوسته است و این اولین نقطه ناپیوستگی می‌شود. سؤال می‌گوید در $(-1, k)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته باشد که همین $x = 2$ است. پس عدد صحیح دیگری (مثلاً ۳) در بازه نیست، پس $k_{max} = 3$.

۱۰۵- گزینه ۲

(۱) در هر پرتاب احتمال زوج بودن تاس $\frac{1}{2}$ است.

پس در دو تاس سالم شانس هر دو زوج می‌شود: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

حالا آن قدر پرتاب می‌کنیم تا به «هر دو زوج» برسیم.

یا بار اول می‌آید: $\frac{1}{4}$

یا بار اول نمی‌آید و بار دوم می‌آید: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$

یا بار اول و دوم نمی‌آید و بار سوم می‌آید: $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$

احتمال مطلوب می‌شود:

$$P = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{16 + 12 + 9}{64} = \frac{37}{64}$$

(۲) در حداکثر سه پرتاب به نتیجه رسیده‌ایم یعنی ۴ پرتاب یا بیشتر لازم نشده پس در سه تاس اول هر سه «باخت» نبوده است:

$$P = 1 - \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

۱۰۶- گزینه ۱

واریانس ۱۲ داده ۱۰ است یعنی:

$$\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{12} = 10$$

پس جمع $(x_i - \bar{x})^2$ ها برابر ۱۲۰ است.

اگر n داده مساوی با میانگین به آن‌ها اضافه شود میانگین عوض نمی‌شود و $\sum (x_i - \bar{x})^2$ نیز تغییر نمی‌کند (چون تفاضل این داده‌ها از میانگین، صفر است) اما مخرج از ۱۲ به $12 + n$ می‌رسد. پس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{120}{12 + n}$$

سؤال می‌گوید واریانس ۲۰ درصد کم شده یعنی از ۱۰ به ۸ رسیده:

$$\frac{120}{12 + n} = 8 \Rightarrow 12 + n = 15 \Rightarrow n = 3$$

یعنی باید ۳ داده مساوی با میانگین افزود.

۱۰۷- گزینه ۲

انحراف معیار صفر است، یعنی تمام داده‌ها مساوی‌اند.

$$a = b - 1 = c + 2 = 8 \Rightarrow a = 8, b = 9, c = 6$$

پس بیشترین بین این ۳ عدد برابر است با:

$$a = 9$$

۱۰۸- گزینه ۱

برای ساختن $f \circ g$ باید زنجیر زیر ساخته شود:

$$x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow y$$

اگر $x = 0$ وارد شود مقدار g می‌شود ۱ که در f می‌تواند برود. پس $x = 0$ در جواب هست و گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست‌اند. (صفر را ندارند).

حالا بین گزینه‌های ۲ و ۴ عدد $-\frac{1}{2}$ را امتحان می‌کنیم. $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ می‌شود ۲ که مخرج f را صفر می‌کند. پس $-\frac{1}{2}$ قبول نیست و ۴ جواب نیست و باید ۱ را بزنیم.

اما راه عادی:

D_g برابر \mathbb{R} است، دامنه f هم بین دو ریشه مخرج یعنی $(-1, 2)$ است، پس باید داشته باشیم:

$$-1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$$

این همواره برقرار است.

از $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$ نتیجه می‌شود $2^{-2x} < 2^1$ پس $x > -\frac{1}{2}$ یعنی جواب $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ است.

۱۰۹- گزینه ۳

از رابطه $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$ داریم:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot 2\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \cot x = 1$$

پس $\cot x = -\frac{1}{2}$ و در نتیجه:

$$\tan x = -2$$

حالا مقدار $\tan 2x$ برابر است با:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

این رابطه را اثبات می کنیم:

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

۱۱۰- گزینه ۱

$$\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \xrightarrow{\text{جواب کلی کسینوس}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{4} = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

دقت می کنید که به ازای $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ مقدار $\cos x$ می شود صفر اما صورت سؤال گفته $\cos x \neq 0$ پس این جواب را نمی پذیریم و جواب کلی همان اولی است.

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۱۱۱- گزینه ۲

در نقطه A مقدار $\tan x$ به $-\sqrt{3}$ می رسد. جواب های معادله $\tan x = -\sqrt{3}$ به صورت $k\pi - \frac{\pi}{3}$ هستند و طول نقطه A ، دومین جواب منفی معادله است که به ازای $k = -1$ به دست می آید.

$$x_A = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$$

۱۱۲- گزینه ۲

(۱) جمله های پرتوان صورت و مخرج در $+\infty$ عبارت اند از:

$$\frac{2x + \sqrt{x^2}}{ax^n} = \frac{2x + |x|}{ax^n} = \frac{3x}{ax^n}$$

نسبت این‌ها باید $-\frac{1}{2}$ شود، پس $a = -6$ و $n = 1$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0}$$

اگر هوپیتال بزیم جواب به راحتی به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-6} = \frac{2 + \frac{-5}{2(2)}}{-6} = \frac{\frac{3}{4}}{-6} = -\frac{1}{8}$$

(۲) اگر بخواهید گویا کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x)^2 - (x^2 - 3x)}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 3x}{-6(x+1) \underbrace{(-2-2)}_{\text{باوج زتنارپ}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)} \left(\frac{1}{-4} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

۱۱۳- گزینه ۲

حد راست تابع در $x = 1$ ، ∞ شده است، پس $x = 1$ ریشهٔ مخرج است، یعنی:

$$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

حالا به محاسبهٔ حد نگاه کنید:

$$\xrightarrow{b=-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a}{x - 1} = \frac{1 + a}{0^+} = -\infty$$

این یعنی $1 + a$ منفی است، پس $1 + a < 0$ و داریم:

$$a < -1$$

۱۱۴- گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع در $[1, 1/44]$ برابر است با:

$$\frac{f(1/44) - f(1)}{1/44 - 1} = \frac{\frac{1/44 - 1}{\sqrt{1/44}} - 0}{0/44} = \frac{1}{\sqrt{1/44}} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

شیب خط مماس بر تابع در ابتدای بازه برابر است با:

$$m = f'(1)$$

نکته: می‌توانیم برای محاسبه $f'(1)$ در تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ فقط از عامل صفرشونده در صورت مشتق بگیریم:

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

البته مشتق معمولی هم به راحتی جواب می‌دهد:

$$f'(x) = \frac{1\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow f'(1) = 1$$

و اختلاف این‌ها می‌شود:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

۱۱۵- گزینه ۴

در همسایگی راست $x = \sqrt{2}$ درون براکت مقادیر بیشتر از ۴ دارد. پس حالت جزء صحیح می‌شود ۴ و ضابطه تابع به صورت $f(x) = x^3 - 4x$ است.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} f'_+(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

۱۱۶- گزینه ۳

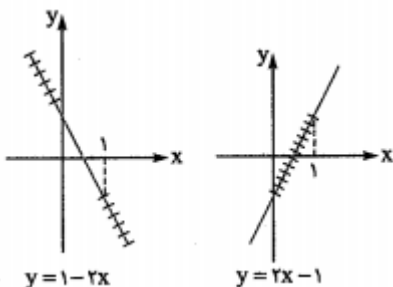
برای حالت‌های مثبت و منفی، قدر مطلق را باز می‌کنیم:

$$f(x) = |x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & x^2 - x > 0 \\ x - x^2 & x^2 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \text{ یا } x < 0 \\ x - x^2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

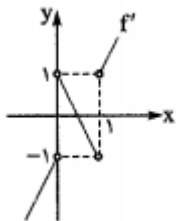
پس مشتق آن به صورت زیر است:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 1 \text{ یا } x < 0 \\ 1 - 2x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

نمودارها را ببینید:



پس داریم:



۱۱۷- گزینه ۳

ماکزیمم و مینیمم در نقاطی هستند که مشتق صفر می شود. پس صورت سؤال می گوید مشتق این تابع دو ریشه منفی دارد.

$$f'(x) = 2x^2 - 2(m-1)x + 8 = 0$$

باید $\Delta > 0$, $S < 0$ و $P > 0$ باشد:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{8}{2} > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{+2(m-1)}{2} = m-1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2(m-1))^2 - 4(2)(8) = 4(m-1)^2 - 64 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 16 \xrightarrow{m-1 < 0} m-1 < -4 \Rightarrow m < -3$$

پس از اشتراک این سه شرط، بازه مقادیر m به صورت $(-\infty, -3)$ است.

۱۱۸- گزینه ۴

مختصات هر نقطه روی منحنی $y = x^2 + \frac{4}{9}$ به صورت $(a, a^2 + \frac{4}{9})$ است که فاصله آن از خط $3y - 4x + 12 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|3(a^2 + \frac{4}{9}) - 4a + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3a^2 - 4a + \frac{4}{3} + 12|}{5}$$

دلتای عبارت داخلی قدر مطلق، منفی است و عبارت همواره مثبت است. پس قدر مطلق را برمی داریم و باید $d =$

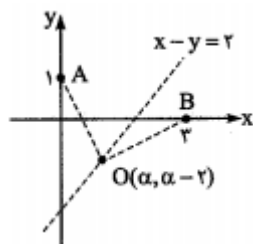
$$\frac{3a^2 - 4a + \frac{40}{3}}{5} \text{ را مینیمم کنیم:}$$

$$d' = \frac{6a - 4}{5} = 0 \Rightarrow 6a = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$d_{\min} = \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{40}{3}}{5} = \frac{3\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{3} + \frac{40}{3}}{5} = \frac{\frac{36}{3} - \frac{8}{3} + \frac{40}{3}}{5} = \frac{12}{5} = 2/4$$

۱۱۹- گزینه ۳

(۱) معادله قطر دایره $y = x - 2$ است، پس مختصات مرکز آن به صورت $(\alpha, \alpha - 2)$ است و باید مرکز از $(3, 0)$ و $(0, 1)$ به یک فاصله باشد:



$$OA = OB$$

$$\sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\alpha - 2 - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2 - 0)^2} \xrightarrow{\text{به توان 2}} \alpha^2 + (\alpha - 3)^2 \\ &= (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

پس $O(1, -1)$ و داریم:

$$r = OA = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

(۲) عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد.

$$A(0, 1), B(3, 0)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{3 - 0} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m' = 3$$

$$\text{نقطه وسط} = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

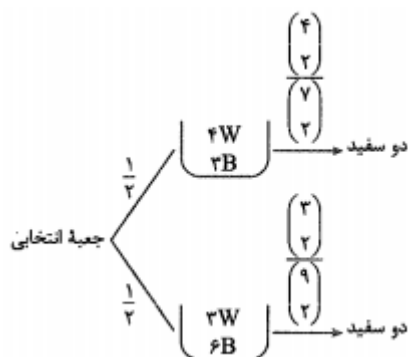
معادله عمودمنصف را به دست آوریم:

$$y - \frac{1}{2} = 3 \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = 3x - 4$$

پس معادله عمودمنصف $y = 3x - 4$ است و از تلاقی آن با $y = x - 2$ مرکز به صورت $O(1, -1)$ به دست می‌آید و سپس:

$$r = OA = OB = \sqrt{5}$$

۱۲۰- گزینه ۱



$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{7} + \frac{1}{24} = \frac{31}{168}$$

۱۲۱- گزینه ۴

عبارت $a_n = 2a_{n-1} + 1$ یعنی هر جمله از دو برابر قبلی یک واحد بیشتر است.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \times 2 + 1 & 3 \times 2 + 1 & 7 \times 2 + 1 & 15 \times 2 + 1 & 31 \times 2 + 1 & 63 \times 2 + 1 & 127 \times 2 + 1 & \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \\ 1, & 3, & 7, & 15, & 31, & 63, & 127, & 255 \end{array}$$

پس جمله هشتم ۲۵۵ است.

نکته: جمله عمومی این دنباله $a_n = 2^n - 1$ است.

۱۲۲- گزینه ۴

اگر فوتبال، A و والیبال، B باشد، داریم:

$$n(U) = 100$$

$$n(A) = 40$$

$$n(B') = 56 \Rightarrow n(B) = 100 - 56 = 44$$

$$n(A \cap B) = 11$$

پس تعداد اعضای اجتماع برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 40 + 44 - 11 = 73$$

و $100 - 73 = 27$ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

۱۲۳- گزینه ۴

با استفاده از اتحاد زیر داریم:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\frac{1}{2^3\sqrt{2}} \times \frac{2^2 + 2^3\sqrt{2} + \sqrt[3]{2^2}}{2^2 + 2^3\sqrt{2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{4 + 2^3\sqrt{2} + \sqrt[3]{4}}{2^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{4 + \sqrt[3]{2^3 \times 2} + \sqrt[3]{4}}{8 - 2} = \frac{4 + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}}{6}$$

پس اگر مخرج ۶ باشد صورت کسر $(4 + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4})$ است.

۱۲۴- گزینه ۱

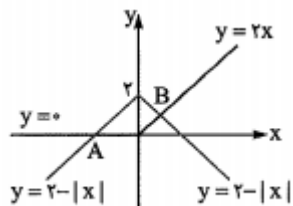
دو طرف را در $|2x - 3|$ ضرب می‌کنیم و چون $|2x - 3|$ مثبت است جهت عوض نمی‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1 &\xrightarrow{\times |2x-3|} |2-x| > |2x-3| \xrightarrow{\text{به توان دو}} 4 - 4x + x^2 > 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 0 \\ &> 3x^2 - 8x + 5 \Rightarrow 0 > (x-1)(3x-5) \xrightarrow{\text{بین دو ریشه منفی است.}} 1 < x < \frac{5}{3} \end{aligned}$$

اما دقت کنید که در $x = \frac{3}{2}$ مخرج صفر است پس جواب درست $\left(1, \frac{5}{3}\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ است که به صورت بازه $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ نوشته می‌شود.

واضح است که $\frac{3}{2}$ جزء جواب نیست، پس ۲ و ۴ نادرست هستند. $x = 1/4$ نامساوی را برقرار می‌کند؛ پس گزینه درست شامل $1/4$ است (۳ نیست).

۱۲۵- گزینه ۳



نمودارها را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. برای $y = 2 - |x|$ ، نمودار $y = |x|$ را نسبت به محور x آینه کرده و دو واحد به بالا می‌بریم. برای $x + |x|$ هم داریم:

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

نقطه A محل برخورد $y = 2 - |x|$ و $y = 0$ در x های منفی است. پس:

$$2 - (-x) = 0 \Rightarrow x_A = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$$

نقطه B محل برخورد $y = 2x$ و $y = 2 - |x|$ در x های مثبت است:

$$2 - (x) = 2x \Rightarrow x_B = \frac{2}{3}$$

پس مساحت مثلث در ناحیه دوم برابر $\frac{2 \times 2}{2}$ و مساحت مثلث در ناحیه اول $\frac{2 \times \frac{2}{3}}{2}$ است و سطح کل می‌شود:

$$\frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

۱۲۶- گزینه ۲

تعداد کل حالت‌ها برابر تعداد انتخاب‌های ۳ تا از ۵ کارت است:

$$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

می‌خواهیم عدد سه‌رقمی مضرب ۳ ایجاد شود پس باید جمع ۳ رقم انتخابی به ۳ بخورد.

مجموع ۶ باشد: ۱، ۲، ۳

مجموع ۹ باشد: ۱، ۳، ۵ یا ۲، ۳، ۴

مجموع ۱۲ باشد: ۳، ۴، ۵

پس تعداد حالت‌های مورد نظر $n(A) = 4$ است و احتمال می‌شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

۱۲۷- گزینه ۴

رشته تجربی متغیر کیفی اسمی است.

تعداد شرکت کنندگان کمی و گسسته است.

ساعت شروع آزمون کمی و پیوسته است.

پس متغیر کیفی ترتیبی نداشتیم.

۱۲۸- گزینه ۳

(۱) در معادله اولیه داریم:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{5}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$$

حالا جمع و ضرب ریشه‌های جدید را حساب کنیم:

$$S_{\text{جدید}} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

اما با توجه به معادله جدید در معادله صورت سؤال باید $S = \frac{k}{4}$ باشد، پس $k = 29$ (۲) ریشه‌های معادله اولیه $\alpha = -1$ و $\beta = \frac{2}{5}$ هستند پس ریشه‌های جدید $\frac{1}{\alpha^2} = 1$ و $\frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4}$ هستند و می‌توانگفت در معادله جدید $x = 1$ می‌خورد، پس $k = 29$. هم‌چنین جمع ریشه‌های جدید می‌شود $1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$ ، پس

$$k = 29$$

۱۲۹- گزینه ۲

اول معادله خطی که از $(5, 0)$ و $(3, 0)$ می‌گذرد را پیدا کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -\frac{3}{5}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + 3$$

نکته: طول از مبدأ و عرض از مبدأ این خط ۵ و ۳ هستند پس معادله‌اش $1 = \frac{x}{5} + \frac{y}{3}$ است.

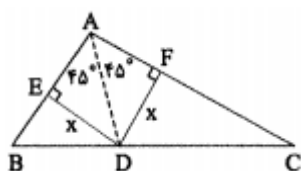
حالا باید خطی از نقطه $(0, -1)$ بر این خط عمود کرد. شیب این عمود، عکس و قرینه شیب این خط است:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{5}{3}$$

پس معادله اش $y - (-1) = \frac{5}{3}(x - 0)$ است و داریم:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}x + 3 \\ y = \frac{5}{3}x - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} -\frac{3}{5}x + 3 = \frac{5}{3}x - 1 \Rightarrow \frac{5}{3}x + \frac{3}{5}x = 4 \Rightarrow \frac{34}{15}x = 4 \Rightarrow x = \frac{60}{34} = \frac{30}{17}$$

۱۳۰- گزینه ۴



(۱) نقطه D روی نیمساز زاویه A است پس از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است و DE و DF با هم مساوی اند. زاویه A هم قائمه است یعنی در چهار ضلعی $AEDF$ سه زاویه قائمه داریم و بنابراین $AEDF$ مربع است (زاویه‌ها قائمه‌اند و دو ضلع DE و DF مساوی‌اند).

حالا مساحت دو مثلث ADB و ADC را جمع می‌کنیم:

$$S_{ADC} + S_{ADB} = \frac{AB \cdot x}{2} + \frac{AC \cdot x}{2} = \frac{3x}{2} + \frac{7x}{2} = \frac{10x}{2}$$

اما مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{3 \times 7}{2} = \frac{21}{2}$$

پس:

$$\frac{10x}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow x = 2/1$$

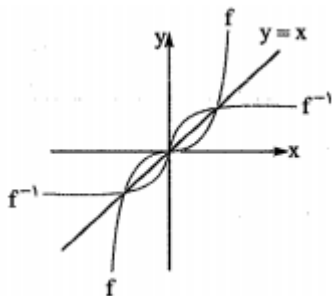
و AD یعنی قطر مربع برابر است با:

$$AD = x\sqrt{2} = 2/1\sqrt{2}$$

(۲) در مثلث قائم‌الزاویه طول نیمساز زاویه قائمه A برابر است با:

$$AD = \frac{\sqrt{2}AB \cdot AC}{AB + AC} = \sqrt{2} \frac{7 \times 3}{7 + 3} = 2/1\sqrt{2}$$

۱۳۱- گزینه ۳

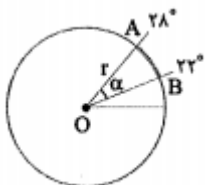


نمودار خود $f(x)$ را با استفاده از تعریف قدر مطلق می کشیم:

$$x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار f^{-1} ، با قرینه کردن نمودار f نسبت به $y = x$ به دست می آید.

۱۳۲- گزینه ۱



زاویه مرکزی O برابر $28^\circ - 22^\circ = 6^\circ$ است. 6° بر حسب رادیان برابر است با:

$$6^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{30}$$

پس طول کمان برابر است با:

$$AB = r\alpha = 6400 \times \frac{\pi}{30} \xrightarrow{\pi=3} 6400 \times \frac{3}{30} = 640$$

یادآوری: در رابطه $L = r\alpha$ باید α بر حسب رادیان باشد.

۱۳۳- گزینه ۴

در طرف چپ تفاضل لگاریتم‌ها را به صورت لگاریتم تقسیم می نویسیم:

$$\log_3 \frac{(2x^2 + 1)}{(x + 2)} = 1$$

طبق تعریف لگاریتم داریم:

$$\frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 3^1 = 3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^2 + 1 = 3x + 6 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{b=a+c} x_1 = -1, x_2 = +\frac{5}{2}$$

جواب $x_1 = -1$ قبول نیست چون $\log_8(2x - 1)$ تعریف نمی شود. برای جواب $x_2 = \frac{5}{2}$ داریم:

$$\log_8(2x - 1) = \log_8 4 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

۱۳۴- گزینه ۴

در $x = -1$ خط چین می بینیم که نشان می دهد در این نقطه عبارت جلوی لگاریتم صفر شده، پس:

$$a(-1) + b = 0 \Rightarrow a = b$$

تابع از $(0, 0)$ هم می گذرد پس:

$$f(0) = 1 - \log_2(0 + b) = 0 \Rightarrow \log_2 b = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 1 - \log_2(2x + 2)$ است و $f^{-1}(-4)$ از ما می پرسد x چه قدر باشد تا حاصل $f(x)$ بشود -4 :

$$1 - \log_2(2x + 2) = (-4) \Rightarrow \log_2(2x + 2) = 5 \Rightarrow 2x + 2 = 2^5 = 32 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

یعنی:

$$f^{-1}(-4) = 15$$

۱۳۵- گزینه ۲

وقتی x با مقادیر کم تر از ۱ (مثلاً ۰/۹) به ۱ نزدیک می شود $x^2 - x$ به 0^+ میل می کند:

x	0	1
$x - x^2$	$-$	$+$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(t)$$

و با توجه به شکل حد راست f در صفر برابر با ۲ است.

۱۳۶- گزینه ۱

باید حد تابع در $x = 0$ با مقدار آن برابر باشد، پس:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$$

در صورت گویا می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \times \frac{\cos x + \sqrt{\cos x}}{\cos x + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos x})}$$

حالا در صورت از $\cos x$ فاکتور می گیریم و در مخرج به جای $\sin^2 x$ عبارت $1 - \cos^2 x$ را قرار می دهیم:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) \cos x}{(1 - \cos^2 x)(\cos x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\cos x + \sqrt{\cos x})}$$

حالا بعد از حذف عامل $1 - \cos x$ ، به جای x ، صفر می گذاریم:

$$= \frac{(-1)(1)}{(1+1)(1+1)} = -\frac{1}{4}$$

۱۳۷- گزینه ۴

(۱) لااقل یعنی احتمال $A \cup B$ را می‌خواهیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{\text{از هم مستقل اند.}} P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= 0/9 + 0/8 - 0/9 \times 0/8 = 0/9 + 0/8 - 0/72 = 0/9 + 0/08 = 0/98$$

(۲) حالتی که هیچ کدام موفق نشوند را نمی‌خواهیم:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A') \times P(B') = 1 - \underbrace{0/1}_A \times \underbrace{0/2}_B = 1 - 0/02$$

$$= 0/98$$

۱۳۸- گزینه ۲

میانگین اعداد ۱۰، ۹ و ۱۷ نیز برابر ۱۲ است:

$$\frac{17 + 9 + 10}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

پس با حذف آن‌ها میانگین ۱۰ داده باقی‌مانده ۱۲ خواهد بود. در واریانس برای ۱۳ داده داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 12)^2 + (x_2 - 12)^2 + \dots + (x_{13} - 12)^2}{13} = 20$$

پس حاصل جمع $(x_1 - 12)^2 + \dots + (x_{13} - 12)^2$ برابر است با:

$$13 \times 20 = 260$$

واریانس جدید پس از حذف ۳ داده، به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 12)^2 + \dots + (x_{10} - 12)^2}{10} = \frac{\overbrace{260}^{\text{جمع بلیق}} - (17 - 12)^2 - (9 - 12)^2 - (10 - 12)^2}{10}$$

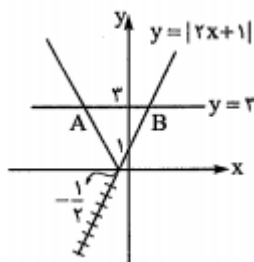
$$= \frac{260 - 25 - 9 - 4}{10} = \frac{260 - 38}{10} = \frac{222}{10} = 22/2$$

۱۳۹- گزینه ۳

اول gof را تشکیل دهیم:

$$gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$



پس باید $y = |2x + 1|$ را رسم و مساحت ناحیه محدود به آن و خط $y = 3$ را حساب کنیم. رسم $y = |2x + 1|$ از روی نمودار $y = 2x + 1$ انجام می‌شود (باید قسمت زیر محور x را به بالا بیاوریم).

طول نقطه‌های A و B از تلاقی $y = 3$ و $y = |2x + 1|$ به دست می‌آیند:

$$|2x + 1| = 3 \Rightarrow 2x + 1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ x_B = 1 \end{cases}$$

پس $AB = 3$ و داریم:

$$\text{مساحت مثلث} = S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۱۴۰- گزینه ۱

در عبارت $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ به خاطر وجود کمان $\frac{3\pi}{2}$ نسبت عوض می‌شود:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) \xrightarrow[\cos < 0]{\text{ربع سوم}} -\sin 2\alpha$$

حالا رابطه $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \cos \alpha &= \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان 2}} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow -\sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin 2\alpha = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

پس جواب می‌شود $-\frac{3}{4}$.

۱۴۱- گزینه ۱

اگر به جای $\sin^2 x$ عبارت $1 - \cos^2 x$ را قرار دهیم کل معادله بر حسب کسینوس می‌شود:

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

حالا $\cos x = t$ قرار می‌دهیم:

$$-2t^2 + 3t + 2 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه 2}} t = 2, t = -\frac{1}{2}$$

$\cos x$ نمی‌تواند ۲ باشد و تنها جواب، $\cos x = -\frac{1}{2}$ است:

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\text{جواب کلی کسینوس}} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

۱۴۲- گزینه ۲

برای محاسبه حد f در $+\infty$ ، جمله‌های دارای بیشترین توان را برمی‌داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \frac{a + 2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

نکته: دقت می کنید که در $+\infty$ ، مقادیر x مثبت اند و $\sqrt{4x^2} = |2x| = 2x$

پس: $f(x) = \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ و حد آن در -1 برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3(-1) + \sqrt{4 + 5}}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

می توانیم از گویا کردن صورت و حذف عامل ابهام یا استفاده از قاعده هوییتال، به حاصل حد برسیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - (4x^2 + 5)}{(2x + 2)(3x - \sqrt{4x^2 + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 5}{(2x + 2)(3x - \sqrt{4x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5(x + 1)(x - 1)}{2(x + 1)(-6)} = \frac{5(-1 - 1)}{2(-6)} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

جواب این در $x = -1$ می شود -6

این هم هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 + \frac{-8}{2(3)}}{2} = \frac{3 - \frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

۱۴۳- گزینه ۱

ضابطه $f(x)$ را به صورت $\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{2}}$ می نویسیم. حد صورت سؤال هم تعریف $f'(2)$ است. پس اول مشتق f را به دست می آوریم و سپس در آن $x = 2$ می گذاریم:

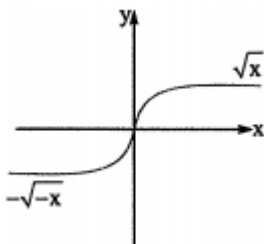
$$f'(x) = \frac{3}{2} \times \underbrace{\frac{-3-4}{(2x-3)^2}}_{\text{مشتق پایه}} \times \underbrace{\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{2}-1}}_{\text{یک توان کم تر}} \xrightarrow{x=2} f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{-7}{1^2} \times \left(\frac{4}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = -21$$

توان

مشتق $\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است.

۱۴۴- گزینه ۴

نمودار را ببینید:



نکته: $-\sqrt{-x}$ - قرینه \sqrt{x} نسبت به مبدأ است.

می‌دانیم \sqrt{x} در $x = 0$ مماس عمودی دارد، پس با توجه به شکل تابع f پیوسته و دارای مماس قائم است و مشتق ندارد اما این نقطه، گوشه نیست.

۱۴۵- گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع را در این بازه پیدا کنیم:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \xrightarrow{[-4,3]} x = -3$$

حالا مقادیر تابع در نقطه بحرانی و سر و ته بازه را محاسبه می‌کنیم:

x	-۳	-۴	۳
y	$-9 - 9 + 45 = 27$	$-\frac{64}{3} - 16 + 60 = 44 - \frac{64}{3} = 22\frac{2}{3}$	$9 - 9 - 45 = -45$

پس $y_{min} = -45$ و $y_{max} = 27$

۱۴۶- گزینه ۳

علامت مشتق تابع را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - 3x^2(x^2 + 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 - 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^3 - 3x + 2}{(x^3 + 1)^2} x$$

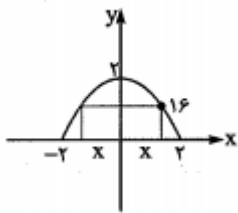
در اطراف $x = 0$ قسمت کسری مثبت است و علامت مشتق به x بستگی دارد:

x	•
f'	↘ • ↗

پس تابع قبل از صفر نزولی و پس از آن صعودی است و در $x = 0$ مماس افقی دارد که به شکل ۱ می‌خورد.

در اطراف $x = 0$ جمله‌های کم‌توان مهم‌ترند، پس در حضور x^2 از x^3 صرف‌نظر می‌شود، یعنی نمودار f شبیه $\frac{x^2+1}{1}$ است.

۱۴۷- گزینه ۲



می‌دانیم معادله نیم‌دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ به صورت $y = \sqrt{2^2 - x^2}$ است. پس مختصات نقطه M روی نمودار به صورت $(x, \sqrt{4 - x^2})$ است و با توجه به شکل محیط مستطیل می‌شود:

$$f(x) = 4x + 2y_M = 4x + 2\sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$$

برای رسیدن به حداکثر f باید نقاط بحرانی آن را پیدا کرد:

$$f'(x) = 4 + 2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

نکته: از f به صورت حاصل جمع مشتق گرفتیم.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = 4 &\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2\sqrt{4 - x^2} = x \xrightarrow{\text{به توان 2}} 4(4 - x^2) = x^2 \Rightarrow 5x^2 \\ &= 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{16}{5}} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2} x = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

به مقادیر f نگاه کنید:

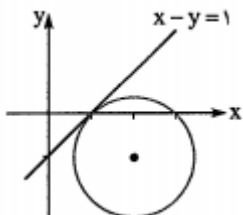
$$f(0) = 4, f(2) = 8$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) &= 4\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) + 2\sqrt{4 - \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{16}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} + 2\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{4 \times 5}{\sqrt{5}} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

۱۴۸- گزینه ۱

فاصله مرکز دایره از مماس، برابر شعاع دایره است.

$$O(2, -1)$$



$$\text{مماس: } x - y - 1 = 0$$

$$r = \frac{|2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{فاصله } A(x_0, y_0) \text{ از خط } ax + by + c = 0 \text{ برابر } AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ است.}$$

پس معادله دایره به صورت زیر است:

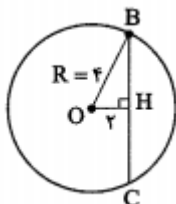
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \xrightarrow{\substack{O(2, -1) \\ r = \sqrt{2}}} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}^2$$

و برای برخورد با محور x داریم:

$$\xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } 1$$

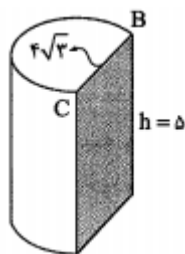
۱۴۹- گزینه ۳

در نمای بالا می بینیم:



بر طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$BH = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \Rightarrow BC = 2BH = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

مقطع حاصل مستطیلی به ابعاد ۵ و $4\sqrt{3}$ است که مساحتش می شود $20\sqrt{3}$.

۱۵۰- گزینه ۲

فضای نمونه‌ای به زن و مرد تفکیک شده و احتمال داشتن دفترچه در هر گروه معلوم است و در کل معلوم نیست. این‌ها علامت احتمال شاخه‌ای است:



$$P = \frac{54}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{46}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{54 \times 60 + 46 \times 75}{100 \times 100} = \frac{3240 + 3450}{10000} = \frac{6690}{10000} = 0.669$$

۱۵۱- گزینه ۴

(۱) بهترین راه، نوشتن جملات است. نگاه کنید:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2a_1 - 2 = 2(3) - 2 = 4$$

$$a_3 = 2a_2 - 2 = 2(4) - 2 = 6$$

$$a_4 = 2a_3 - 2 = 2(6) - 2 = 10$$

$$a_5 = 2a_4 - 2 = 2(10) - 2 = 18$$

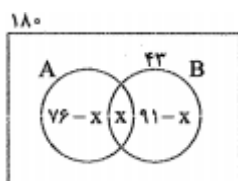
$$a_6 = 2a_5 - 2 = 2(18) - 2 = 34$$

$$\left. \begin{aligned} a_7 &= 2a_6 - 2 = 2(34) - 2 = 66 \\ a_8 &= 2a_7 - 2 = 2(66) - 2 = 130 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

(۲) الگویابی می‌کنیم:

$$a_2 - a_1 = 2^0, a_3 - a_2 = 2^1, a_4 - a_3 = 2^2, \dots, a_n - a_{n-1} = 2^{n-2} \xrightarrow{n=8} a_8 - a_7 = 2^6$$

۱۵۲- گزینه ۴



نمودار ون را رسم می‌کنیم: $n(A) = 76$ و $n(B) = 91$ و $n(U) = 180$ است اشتراک دو مجموعه را x می‌نامیم و از این که ۴۳ نفر بیرون دو مجموعه A و B هستند، می‌فهمیم که اجتماع A و B دارای $180 - 43 = 137$ عضو است، در نتیجه داریم:

$$n(A \cup B) = 137 \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 137 \Rightarrow 76 + 91 - x = 137 \Rightarrow x = 30$$

افرادی که دقیقاً یک خرید کرده‌اند، اعضای مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ هستند که در نمودار ون با $91 - x$ و $76 - x$ نشان داده‌ایم که برابرند با:

$$76 - x + 91 - x = 167 - \underbrace{2x}_{60} = 107$$

۱۵۳- گزینه ۲

نکته: در شش ضلعی منتظمی به ضلع a ، داریم:

$$(1) \text{ قطر کوچک: } AC = a\sqrt{3}$$

$$(2) \text{ قطر بزرگ: } AD = 2a$$

$$(3) \text{ مساحت: } S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

با دانستن روابط بالا، حل تست خیلی ساده می‌شود، ابتدا a را پیدا می‌کنیم:

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

اندازه قطر کوچک، $\sqrt{3}$ برابر ضلع است:

$$\text{قطر کوچک} = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

۱۵۴- گزینه ۲

برای گویا کردن کسر، صورت و مخرج را در $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ (یعنی مزدوج مخرج) ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{3 - \sqrt{8}}} \times \frac{\sqrt{3 + \sqrt{8}}}{\sqrt{3 + \sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{8}}}{\underbrace{\sqrt{3^2 - 8}}_1} = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$$

می‌بینید که عبارت به دست آمده در گزینه‌ها نیست، باید ساده‌تر شود. $3 + \sqrt{8}$ را به صورت کامل می‌نویسیم:

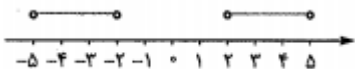
$$3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = (1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$$

پس $3 + \sqrt{8}$ مربع کامل است و به راحتی از زیر رادیکال بیرون می‌آید:

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$$

۱۵۵- گزینه ۱

اعدادی که قدر مطلق آن‌ها بین ۲ و ۵ باشد یا خودشان بین ۲ و ۵ هستند یا قرینه آن‌ها بین ۲ و ۵ است.



پس دو حالت داریم:

$$۱) 2 < x - 1 < 5 \Rightarrow 3 < x < 6 \Rightarrow [x] = 3, 4, 5$$

$$۲) -5 < x - 1 < -2 \Rightarrow -4 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2, -3, -4$$

پس $[x]$ ، ۶ حالت دارد.

۱۵۶- گزینه ۳

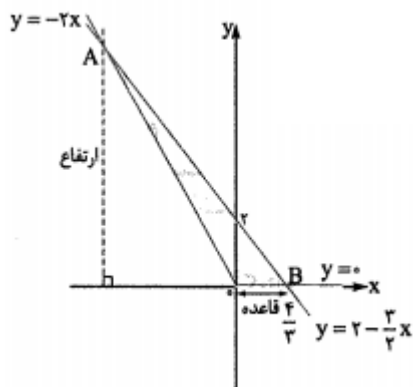
برای رسم $y = |x| - x$ ، ابتدا ضابطه تابع را به دو ضابطه خطی تبدیل می‌کنیم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم $y = 2 - \frac{3}{2}x$ هم نقطه‌گذاری می‌کنیم:

x	•	$\frac{4}{3}$
y	۲	•

حالا هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



می‌خواهیم مساحت مثلث AOB را حساب کنیم، قاعده مثلث که $\frac{4}{3}$ است، ارتفاع مثلث عرض نقطه A یعنی محل برخورد دو خط $y = -2x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ است، پس داریم:

$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \Rightarrow -\frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

خب! هم ارتفاع را داریم و هم قاعده را، مساحت را می‌یابیم:

$$S = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{8 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{16}{3}$$

۱۵۷- گزینه ۲

در پرتاب دو تاس همواره $6 \times 6 = 36$ حالت وجود دارد. حالت‌های مطلوب را هم می‌نویسیم:

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

و در آخر احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۱۵۸- گزینه ۳

احتمال پیشامد A برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$. پس باید $n(A)$ و $n(S)$ را پیدا کنیم.

$n(S)$: در جعبه ۹ مهره وجود دارد که ۳ تا از آن‌ها را می‌خواهیم، پس $n(S)$ برابر است با:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3} = 7 \times 4 \times 3$$

$n(A)$: پیشامد مطلوب این است که از ۳ مهره خارج شده یکی سفید و ۲ تای دیگر از ۵ مهره غیرسفید باشند، پس $n(A)$ برابر است با:

$$n(A) = \binom{4}{1} \binom{5}{2} = 40$$

در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{7 \times 4 \times 3} = \frac{10}{21}$$

۱۵۹- گزینه ۳

باید a ، b و c را پیدا کنیم. جست‌وجو را شروع می‌کنیم:محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها، c را به ما می‌دهد، پس $c = -3$ است.نقطه $(-2, -4)$ رأس سهمی $f(x) = ax^2 + bx - 3$ است، پس داریم:

$$f(-2) = -4 \Rightarrow -4 = 4a - 2b - 3 \Rightarrow 4a - 2b = -1$$

$$x_{\text{رأس سهمی}} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$$

که با جای‌گذاری $b = 4a$ در رابطه $4a - 2b = -1$ داریم:

$$4a - 2(4a) = -1 \Rightarrow -4a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 1$$

پس α و β ریشه‌های معادله $\frac{1}{4}x^2 + x - 3$ هستند که می‌شود این معادله را در ۴ ضرب کنیم تا معادله بهتری داشته باشیم:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

در این معادله داریم:

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{12}{1} = -12$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$$

حالا $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \underbrace{\alpha\beta}_{-12} \underbrace{(\alpha + \beta)}_{-4} = 48$$

۱۶۰- گزینه ۴

برای محاسبه فاصله نقطه از خط، ابتدا معادله خط را به صورت $ax + by + c = 0$ تبدیل می‌کنیم:

$$x + \frac{3}{4}y = k \Rightarrow 4x + 3y = 4k \Rightarrow 3x + 3y - 4k = 0$$

حالا فاصله نقطه $(1, 2)$ از این خط باید برابر ۱ شود، در نتیجه داریم:

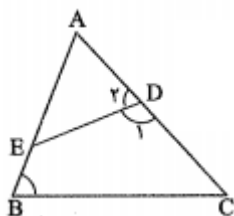
$$\frac{|4(1) + 3(2) - 4k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 \Rightarrow \frac{|10 - 4k|}{5} = 1 \Rightarrow |10 - 4k| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 - 4k = 5 \Rightarrow 4k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{4} \\ 10 - 4k = -5 \Rightarrow -4k = -15 \Rightarrow k = \frac{15}{4} \end{cases}$$

مجموع این دو مقدار برابر است با:

$$\frac{5}{4} + \frac{15}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

۱۶۱- گزینه ۲



طبق فرض مسئله $\widehat{D}_1 + \widehat{B} = 180^\circ$ است، از طرفی $\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ$ پس:

$$\widehat{D}_2 = \widehat{B}$$

مثلث ABC و ADE بنا بر حالت «دو زاویه برابر»، متشابه‌اند:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A} \text{ (مشترک)} \\ \widehat{D}_2 = \widehat{B} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

در نتیجه نسبت مساحت این مثلث برابر با $\left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{36}{100}$ است. پس $\frac{36}{100}$ مثلث بزرگ‌تر را ADE برداشته، در نتیجه $\frac{64}{100}$ هم به چهارضلعی می‌رسد.

۱۶۲- گزینه ۲

ابتدا سمت چپ تساوی را به یک لگاریتم تبدیل می‌کنیم:

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \Rightarrow \log\left(\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}\right) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow \log(x + 2) = \log(2x - 5) \Rightarrow x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

حالا $\log_4 \sqrt[3]{x+1}$ را بیابیم:

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_4 \sqrt[3]{8} = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

۱۶۳- گزینه ۲

چون صورت کسر به ازای $x = 2$ صفر می‌شود، ولی حاصل حد یک عدد حقیقی غیرصفر است، پس مخرج کسر هم باید به ازای $x = 2$ صفر شود، پس:

$$2a + b = 0$$

حالا که فهمیدیم با یک حد $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ مواجه ایم، از قاعده هویپیتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3(2)-2}}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با قرار دادن $a = \frac{1}{2}$ در تساوی $2a + b$ مقدار b برابر -1 می شود.

۱۶۴- گزینه ۳

برای پیوستگی باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع با هم برابر باشند، پس باید حد راست و حد چپ در $x = 2$ برابر $f(2)$ یعنی ۵ باشند:

$$\text{حد چپ} = 5 \Rightarrow (2)^2 + 2b - 1 = 5 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\text{حد راست} = 5 \Rightarrow 2a + b = 5 \Rightarrow a = 2$$

۱۶۵- گزینه ۲

نکته: در n داده آماری، تعداد داده های هر قسمت شکل زیر، $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ است.



چون $\lfloor \frac{23}{4} \rfloor = 5$ است، پس ۵ داده قبل از چارک اول و ۵ داده بعد از چارک سوم قرار دارد و ۱۳ داده به جز آن ها وجود دارد، میانگین وزن دار می گیریم:

میانگین	۳۳	۲۱/۶	۲۵
تعداد	۵	۵	۱۳

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{33 \times 5 + 21/6 \times 5 + 25 \times 13}{5 + 5 + 13} = 26$$

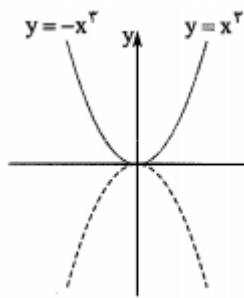
۱۶۶- گزینه ۴

وقتی داده ها را ۲ برابر کنیم، میانگین داده ها ۲ و انحراف معیار داده ۲ برابر می شود و اگر به تمام داده ها ۳ واحد اضافه کنیم، میانگین برابر ۲۷ می شود، ولی انحراف معیار تغییری نمی کند، در نتیجه داریم:

$$\text{ضریب تغییرات اولیه} = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sigma}{12}$$

$$\text{ضریب تغییرات جدید} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{X}_{\text{جدید}}} = \frac{2\sigma}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ضریب تغییرات جدید}}{\text{ضریب تغییرات اولیه}} = \frac{\frac{2\sigma}{27}}{\frac{\sigma}{12}} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$



$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

همان طور که می بینید، تابع غیریکنوا است، یک به یک نیست، پس وارون پذیر هم نیست.

۱۶۷- گزینه ۳

تابع را رسم می کنیم:

۱۶۸- گزینه ۳

ابتدا $f \circ g(x)$ را کمی ساده تر می نویسیم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 8x^2 + 6x + 5$$

با فرض $t = 2x + 1$ داریم:

$$t = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{t - 1}{2}$$

حالا به جای همه x ها، $\frac{t-1}{2}$ قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} f(t) &= 8 \left(\frac{t-1}{2} \right)^2 + 6 \left(\frac{t-1}{2} \right) + 5 = 2(t-1)^2 + 3t - 3 + 5 = 2t^2 - 4t + 2 + 3t + 2 \\ &= 2t^2 - t + 4 \end{aligned}$$

پس $f(x) = 2x^2 - x + 4$ است.

۱۶۹- گزینه ۱

اولاً که $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ برابر است با:

$$-\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

حالا فرض تست را به کمک اتحادهای زیر، ساده تر می کنیم:

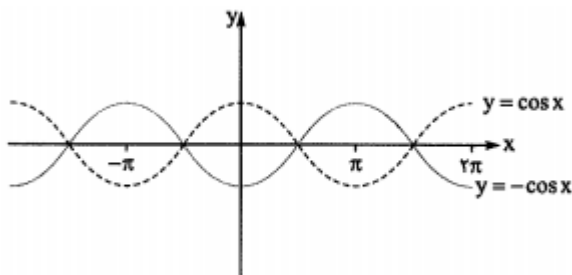
$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

پس $\cot \frac{\alpha}{2} = -2$ برابر است.

۱۷۰- گزینه ۳

ابتدا نمودار $y = -\cos x$ را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید در مضارب فرد π ، تابع بیشترین مقدار را دارد، پس برای این‌که تابع $y = -4 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x \right)$ دارای بیشترین مقدار شود، ورودی تابع باید به صورت $(2k+1)\pi$ (مضارب فرد π) باشند:

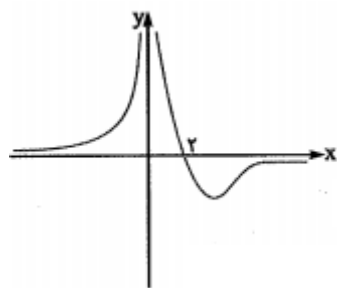
$$\frac{\pi}{4} - 3\pi x = (2k+1)\pi \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \pi} \frac{1}{4} - 3x = 2k+1 \Rightarrow 3x = -2k - \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{-8k-3}{12}$$

از طرفی x باید متعلق به بازه $[-1, 1]$ باشد، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{-8k-3}{12} \leq 1 &\Rightarrow -12 \leq -8k-3 \leq 12 \Rightarrow -12 \leq 8k+3 \leq 12 \Rightarrow -15 \leq 8k \leq 9 \\ &\Rightarrow -\frac{15}{8} \leq k \leq \frac{9}{8} \end{aligned}$$

اعداد صحیح این بازه ۱، ۰ و -۱ هستند، پس برای k ، ۳ مقدار وجود دارد.

۱۷۱- گزینه ۳



از روی شکل می‌فهمیم که وقتی $x \rightarrow 0$ حد تابع بی‌نهایت می‌شود پس در $x = 0$ مخرج کسر صفر است:

$$x^2 + b \stackrel{x=0}{=} 0 \Rightarrow b = 0$$

از طرفی تابع باید از نقطه $(2, 0)$ عبور کند، در نتیجه داریم:

$$f(2) = 0 \Rightarrow \frac{a(2) + 2}{(2)^2 + 0} = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

پس $a - b$ برابر ۱- است.

۱۷۲- گزینه ۳

ابتدا تابع را بدون قدر مطلق، چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + (x-1) & x \geq 1 \\ x\sqrt{x} + (1-x) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + x - 1 & x \geq 1 \\ x^{\frac{3}{2}} - x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

حالا از ضابطه‌ها جداگانه مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 & x \geq 1 \\ \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 & x < 1 \end{cases}$$

برای $f'_+(1)$ عدد یک را در ضابطه بالا و برای $f'_-(1)$ عدد یک را در ضابطه پایینی قرار می‌دهیم:

$$f'_+(1) = \frac{3}{2}(1)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \text{ و } f'_-(1) = \frac{3}{2}(1)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}$$

در نتیجه داریم:

$$f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{2} = 4$$

۱۷۳- گزینه ۲

پس $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم و مشتق می‌گیریم:

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1 + (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$$

$$(f(g(x)))' = \left(1 - \frac{3}{x}\right)' = \frac{3}{x^2}$$

۱۷۴- وقتی $x \rightarrow 2$ ، مخرج کسر صفر می‌شود پس باید حد تابع بی‌نهایت می‌شد ولی یک شده است، پس صورتتابع هم صفر است و حالت مبهم $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ رخ داده است، در نتیجه داریم:

$$f(3) = 2$$

و برای رفع ابهام از هویبتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 2}{x^2 - 4} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x+1)}{2x} = \frac{f'(3)}{4} = 1 \Rightarrow f'(3) = 4$$

شیب خط مماس بر تابع $y = f^2(x)$ همان مشتق تابع در $x = 3$ است:

$$(f^2(x))'_{x=3} = 2f'(3)f(3) = 2 \times 4 \times 2 = 16$$

۱۷۵- گزینه ۲

ابتدا مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقاط بحرانی را پیدا کنیم:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

از این دو مقدار نقطه $x = -1$ که در بازه $[-2, 2]$ قرار دارد، قابل قبول است.

برای به دست آوردن بیشترین مقدار باید $f(-2)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ را با هم مقایسه کنیم. هر کدام که بیشتر بود، ماکزیمم مطلق تابع است:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10$$

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 9(2) + 5 = -17$$

پس بیشترین مقدار تابع برابر ۱۰ است.

۱۷۶- گزینه ۴

مختصات نقاط اکسترمم نسبی در تابع صدق می‌کنند:

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b - 1 = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

از طرفی در اکسترمم‌های نسبی، مشتق تابع برابر صفر می‌شود:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b \Rightarrow f'(1) = 4 + 3a + b = 0 \Rightarrow 3a + b = -4$$

حالا دو معادله و دو مجهول داریم، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 5$$

۱۷۷- گزینه ۳

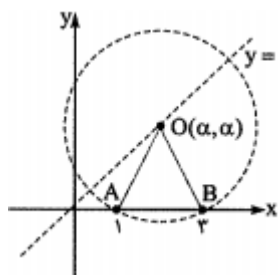
برای پیدا کردن بیشترین اکسیژن تولیدشده، باید ببینیم که مشتق تابع در کجاها برابر صفر می‌شود:

$$\begin{aligned} P(x) = \frac{100x}{x^2 + x + 4} &\Rightarrow P'(x) = 100 \left(\frac{(x^2 + x + 4) - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 4)^2} \right) \Rightarrow P'(x) \\ &= 100 \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + x + 4)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

شدت نور، نمی‌تواند منفی باشد، پس $x = 2$ قابل قبول است.

$$P(2) = \frac{100(2)}{2^2 + 2 + 4}$$

۱۷۸- گزینه ۳



مرکز دایره نقطه‌ای به فرم (α, α) است. دایره از نقاط $(1, 0)$ و $(3, 0)$ عبور می‌کند. مطابق شکل OA و OB هر دو شعاع دایره هستند، پس با هم برابرند:

$$\begin{aligned} OA = OB &\Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 0)^2} \\ &\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \\ &= \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

پس مرکز دایره $(2, 2)$ است، حالا با محاسبه طول پاره‌خط OA شعاع دایره را پیدا می‌کنیم:

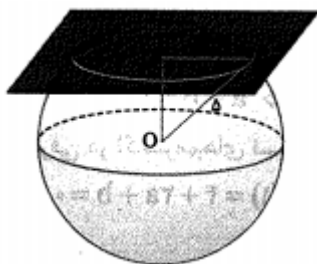
$$OA = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

۱۷۹- گزینه ۳

مقطع ایجادشده، دایره به مرکز O' است. مساحت این دایره برابر 5π است، شعاع را به دست می‌آوریم:

$$S = \pi r^2 = 5\pi \Rightarrow r^2 = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

مثلث $OO'A$ را نگاه کنید:

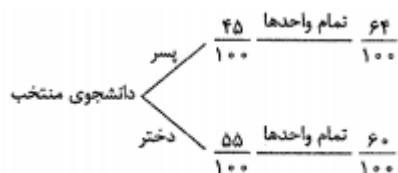


OO' فاصله مرکز دایره از صفحه، OA شعاع کره و $O'A$ شعاع دایره سطح مقطع است و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$OA^2 = O'A^2 + OO'^2 \Rightarrow 25 = 5 + OO'^2 \Rightarrow OO'^2 = 20 \Rightarrow OO' = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۸۰- گزینه ۲

نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



$$P = \frac{45}{100} \times \frac{64}{100} + \frac{55}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{2880 + 3300}{10000} = \frac{61}{100}$$

۱۸۱- گزینه ۲

جملات متوالی را به شکل $t, tr, \frac{t}{r}$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$\left(\frac{t}{r}\right) \times (t) \times (tr) = 216 \Rightarrow t^3 = 216 \Rightarrow t = 6$$

پس جملات به صورت $\frac{6}{r}, 6, 6r$ هستند، حالا با استفاده از فرض دیگر تست، قدر نسبت (r) را پیدا می‌کنیم:

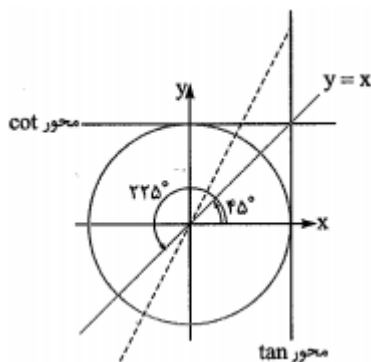
$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{r}\right) + (t) + (tr) = 19 &\Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \xrightarrow{\text{ضربدر } r} 6 + 6r + 6r^2 = 19r \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 \\ = 0 &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4(6)(6)}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} \end{aligned}$$

$$r = \frac{3}{2} \text{ یا } \frac{2}{3}$$

چون قدر نسبت‌ها معکوس هم هستند و سؤال تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین را می‌خواهد، فرقی ندارد که کدام عدد را انتخاب کنیم، مثلاً $\frac{3}{2}$ را قدر نسبت می‌گیریم و جای r می‌گذاریم:

$$\frac{6}{r}, 6, 6r \Rightarrow \frac{6}{\frac{3}{2}}, 6, 6 \times \left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 4, 6, 9 \Rightarrow \text{تفاضل} = 9 - 4 = 5$$

۱۸۲- گزینه ۱



به شکل مقابل خوب نگاه کنید! با توجه به این شکل، روی خط $y = x$ که زاویه 45° را نشان می‌دهد، $\tan x$ و $\cot x$ با هم برابرند، در بالای این خط $\tan x > \cot x$ و در پایین خط نیز $\cot x > \tan x$ است (البته فقط در ربع اول)، پس اولین قسمت ماجرا مشخص شده و باید زوایای 90° تا 45° قسمتی از جواب‌ها باشند. از طرفی در ربع سوم نیز از زاویه 225° که عبور کنیم، باز هم $\tan x$ از $\cot x$ بیشتر می‌شود، پس زاویه‌های بین 225° و 270° هم قسمت دیگر پاسخ هستند.

۱۸۳- گزینه ۲

با استفاده از Δ ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

ریشه بزرگ‌تر $-2 + \sqrt{3}$ و ریشه کوچک‌تر $-2 - \sqrt{3}$ است که نسبت آن‌ها به این صورت خواهد بود:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-2 + \sqrt{3}}{-2 - \sqrt{3}} \times \frac{-2 + \sqrt{3}}{-2 + \sqrt{3}} = \frac{(-2 + \sqrt{3})^2}{4 - 3} = 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$$

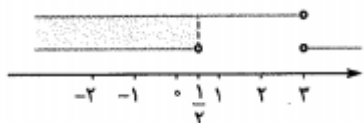
۱۸۴- گزینه ۱

(۱) نامعادله مضاعف را به دو نامعادله معمولی تبدیل می‌کنیم:

$$۱) \frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{(3x+1)-3(x-3)}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{10}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$۲) \frac{3x+1}{x-3} > -1 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3x+1+x-3}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \cup x > 3$$

حالا بین دو مجموعه جواب به دست آمده، اشتراک می‌گیریم:



$$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

(۲)

$$-2 < \frac{3x+1}{x-3} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{3x+1-x+3}{x-3} < 2 \Rightarrow \left| \frac{2x+4}{x-3} \right| < 2 \Rightarrow |2x+4|$$

$$< |2x-6| \xrightarrow{\text{به توان 2}} (2x+4)^2 < (2x-6)^2 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16$$

$$< 4x^2 - 24x + 36 \Rightarrow 40x < 20 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

(۳) از عددگذاری استفاده کنید و به جای x ، عدد یک را قرار می‌دهیم:

$$-1 < \frac{3(1)+1}{1-3} < 3 \Rightarrow -1 < -2 < 3$$

می‌بینید که $x = 1$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌هایی که عدد «۱» دارند همگی غلط‌اند و فقط ۱ می‌ماند.

۱۸۵- گزینه ۴

باید $xf(x)$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس دنبال نقاطی از تابع f هستیم که در آن‌ها طول و عرض نقاط هم‌علامت باشند که ضرب آن‌ها مثبت باشد، با توجه به شکل تابع f ، در نقاط بازه $[-3, 0]$ هم x و هم y نقاط منفی یا صفرند پس ضربشان بزرگ‌تر یا مساوی صفر خواهد بود و همین‌طور در بازه $[1, 2]$ نیز هم x و هم y نقاط مثبت و یا صفرند و ضرب آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی صفر می‌شود. پس دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با:

$$[-3, 0] \cup [1, 2]$$

۱۸۶- گزینه ۳

ارقام فرد «۱»، «۳»، «۵»، «۷» و «۹» هستند، برای پیدا کردن اعداد بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ نباید در بزرگ‌ترین جایگاه «۱» را قرار دهیم، پس در جایگاه اول «۳»، «۵»، «۷» و «۹» قبول هستند و برای جایگاه‌های دیگر همه ارقام قابل قبول‌اند، فقط دقت کنید که رقمی که استفاده شده نباید دیگر استفاده شود:

$$\frac{\text{حالت 4}}{\text{اول}} \times \frac{\text{حالت 4}}{\text{دوم}} \times \frac{\text{حالت 3}}{\text{سوم}} \times \frac{\text{حالت 2}}{\text{چهارم}} = 96$$

۱۸۷- گزینه ۲

احتمال پیشامد A برابر است با: $\frac{n(A)}{n(S)}$ ، پس باید $n(A)$ و $n(S)$ را جداگانه حساب کنیم.

$n(S)$: در مجموع ۱۲ مهره داریم که ۳ تایی آن‌ها را می‌خواهیم، پس داریم:

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{10 \times 11 \times 12}{3!} = \frac{10 \times 11 \times 12}{6} = 10 \times 11 \times 2$$

$n(A)$: باید از هر رنگ یکی انتخاب شود تا رنگ مهره‌ها متفاوت باشد:

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 5 \times 4 \times 3$$

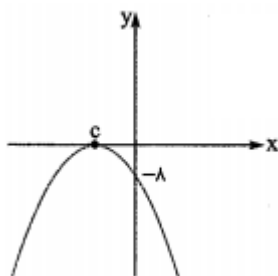
حالا احتمال را به دست می‌آوریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5 \times 4 \times 3}{10 \times 11 \times 2} = \frac{3}{11}$$

۱۸۸- گزینه ۱

تابع از نقطه $(0, -8)$ عبور می‌کند، پس داریم:

$$f(0) = -8 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + b = -8 \Rightarrow b = -8$$



پس فعلاً ضابطه تابع به صورت $y = ax^2 - 8x - 8$ است. از طرفی سهمی بر محور x مماس است، پس باید $\Delta = 0$ باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-8)^2 - 4(-8)(a) = 0 \Rightarrow 64 + 32a = 0 \Rightarrow 32a = -64 \Rightarrow a = -2$$

c همان ریشه مضاعف این تابع درجه دوم است پس برابر است با:

$$c = \frac{+8}{2(-2)} = -2$$

در نتیجه a و c مساوی‌اند، پس تفاضلشان برابر صفر است.

نکته: ریشه مضاعف معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

۱۸۹- گزینه ۲

همه نقاط روی خط $y = x - 1$ به صورت $(\alpha, \alpha - 1)$ هستند، فاصله نقطه $(\alpha, \alpha - 1)$ از خط $2x - 3y - 5 = 0$ برابر است با:

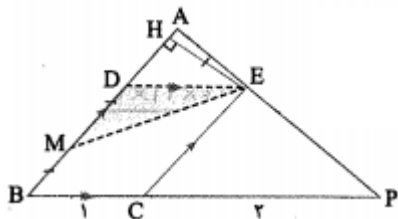
$$\text{فاصله نقطه از خط} = \frac{|2(\alpha) - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|-\alpha - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |\alpha + 2| = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2 = 13 \Rightarrow \alpha = 11 \\ \alpha + 2 = -13 \Rightarrow \alpha = -15 \end{cases}$$

که مجموع این دو مقدار برابر ۴- است.

۱۹۰- گزینه ۲

برای ساده تر شدن مسئله، با توجه به $PC = \frac{2}{3}PB$ فرض می کنیم که $PC = 2$ و $PB = 3$ باشد، پس $BC = 1$ خواهد بود. در متوازی الاضلاع دو ضلع مقابل مساوی اند، پس $DE = 1$ است. طبق قضیه تالس در مثلث ABP داریم:



$$DE \parallel BP \Rightarrow \frac{DE}{BP} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}AB$$

و چون M وسط DB است، پس:

$$MD = BM = AD$$

بعد از همه این کارها حالا به بحث مساحت مثلث ها می رسیم؛ مثلث های ADE و DME را خوب نگاه کنید! ارتفاع هر دو مثلث EH و قاعده های دو مثلث یعنی AD و DM با هم برابرند، پس مساحت این دو مثلث مساوی است، از طرفی مثلث های ABP و ADE متشابه اند و نسبت تشابه آن ها $\frac{1}{3}$ است، پس نسبت مساحت هایشان برابر $\frac{1}{9}$ می شود. در نتیجه مساحت مثلث سایه زده، $\frac{1}{9}$ بزرگ ترین مثلث است.

۱۹۱- گزینه ۴

چون ضابطه ها خطی اند، پس هر دو ضابطه یک به یک اند. حالا برویم سراغ بردها:

برد $y = 3x + 1$ برای x های بیشتر یا مساوی ۱، از ۴ به بعد است:

$$y = 3x + 1 \xrightarrow{x \geq 1} y \geq 4$$

برد $x + a$ هم برابر است با:

$$y = x + a \xrightarrow{x < 1} y < 1 + a$$

برای یک به یک بودن، باید بردها اشتراک نداشته باشند، پس داریم:

$$1 + a \leq 4 \Rightarrow a \leq 3$$

قبول دارید که $f(0)$ همان a است!

۱۹۲- گزینه ۳

باید تک تک عبارتها را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α بنویسیم:

$$\sin(\alpha - 3\pi) = -\sin(3\pi - \alpha) = -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin \alpha} = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

حالا فرض تست را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{-2\sin \alpha + \sin \alpha}{-\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

۱۹۳- گزینه ۳

هر دو معادله را باید ساده‌تر بنویسیم:

$$1) 2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 1 \Rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 7$$

$$2) \log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 + \log x \Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y = 9x$$

حالا یک دو معادله و دو مجهول خیلی راحت داریم:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ y = 9x \end{cases} \Rightarrow 3x + 2(9x) = 7 \Rightarrow 21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

پس y برابر است با:

$$y = 9\left(\frac{1}{3}\right) = 3$$

۱۹۴- گزینه ۲

وقتی دو تابع در $x = -1$ متقاطع‌اند، یعنی مقدار هر دو تابع به ازای $x = -1$ برابر است، در نتیجه:

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{a(-1)+b} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \Rightarrow 3^{-a+b} = 9 = 3^2 \Rightarrow -a + b = 2 \quad (I)$$

از طرفی تست می‌گوید که $f(2) = \frac{1}{3}$ است:

$$f(2) = 3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a + b = -1$$

حالا ۲ معادله و ۲ مجهول:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{عبارت پایین - عبارت بالا}} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{\text{جای گذاری در تساوی (I)}} b = 1$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 3^{-x+1}$ است. برای به دست آوردن $f^{-1}(27)$ باید ضابطه تابع را برابر ۲۷ قرار داده و x را بیابیم:

$$3^{-x+1} = 27 \Rightarrow 3^{-x+1} = 3^3 \Rightarrow -x + 1 = 3 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

۱۹۵- گزینه ۱

ابتدا مخرج مشترک می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)}$$

حالا به یک حد مبهم $\left(\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} \right)$ رسیده ایم، پس چاره ای نداریم جز این که با تجزیه صورت و مخرج از شر عامل ابهام خلاص شویم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 + x - 6)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x+3)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)}{x} = -\frac{5}{2}$$

۱۹۶- گزینه ۴

برای پیوستگی تابع در $x = 0$ باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد، پس حد می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = 1 + \sqrt{1-0} = 2$$

۱۹۷- گزینه ۳

باید از فرمول احتمال شرط استفاده کنیم:

$$P(\text{بارداری طبیعی} | \text{زایمان طبیعی}) = \frac{P(\text{بارداری و زایمان طبیعی})}{P(\text{بارداری طبیعی})} = \frac{0/4}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15}$$

۱۹۸- گزینه ۳

اگر دقت کنید هر یک از داده های گروه اول یک واحد بیشتر از داده های گروه دوم هستند، پس انحراف معیار (σ) هر دو گروه با هم مساوی است، پس برای مقایسه ضریب تغییرها به میانگین این دو گروه احتیاج داریم:

$$A: 2, 2, 5, 3, 3, 3 \Rightarrow \text{میانگین } A = \frac{2 + 2 + 5 + 3 + 3 + 3}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$B: 1, 1, 4, 2, 2, 2 \Rightarrow \text{میانگین } B = \frac{1 + 1 + 4 + 2 + 2 + 2}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{A \text{ ضریب تغییر}}{B \text{ ضریب تغییر}} = \frac{\frac{\sigma_A}{\bar{X}_A}}{\frac{\sigma_B}{\bar{X}_B}} = \frac{\bar{X}_B}{\bar{X}_A} = \frac{2}{3}$$

۱۹۹- گزینه ۳

ابتدا ضابطه $gof(x)$ را بیابیم:

$$\begin{aligned} gof(x) = g(f(x)) &= \frac{2f(x) - 1}{2 - f(x)} = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - 1}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{\frac{4x-2-x-1}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{3x-3}{3} \\ &= x - 1 \end{aligned}$$

پس صحبت درباره تابع $y = x - 1$ است؛ مشخص است که این تابع، خطی و وارون پذیر و اکیداً صعودی است ولی متناوب نیست.

۲۰۰- گزینه ۲

زوج مرتب $(6, 3)$ عضو تابع f است پس $f(6) = 3$ و $f^{-1}(3) = 6$ خواهد بود که با توجه به فرض $f^{-1}(g(2a))$ نتیجه می گیریم که $g(2a) = 3$ ، پس:

$$g(2a) = 3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3 \Rightarrow 2a = 6a - 3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۲۰۱- گزینه ۲

یک نکته یاد بگیرید:

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha = \frac{2}{\tan 2\alpha}$$

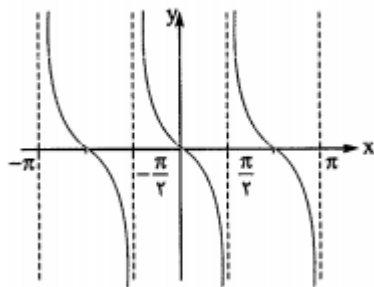
با دانستن این نکته حل این تست خیلی ساده می شود:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -\left(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}\right) = -2 \cot x = \frac{-2}{\tan x} = \frac{-2}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$$

۲۰۲- گزینه ۴

ضابطه تابع را می شود ساده تر کرد، یعنی می توانیم به جای $\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ عبارت $\cot(2x)$ را قرار دهیم. در این صورت ضابطه تابع به صورت $y = \cot 2x$ درمی آید.

نمودار $\cot 2x$ به صورت مقابل است:



برای رسم این تابع، ابتدا $y = \cot x$ را رسم می‌کنیم، سپس تمام x ها را تقسیم بر ۲ می‌کنیم.

همان‌طور که می‌بینید تابع کتانژانت در بین خطوط نقطه‌چین اکیداً نزولی است ولی در بازه‌هایی که شامل این نقطه‌چین‌ها باشند غیریکنوا است. مثلاً در بازه $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اکیداً نزولی است ولی در بازه $(-\pi, 0)$ غیریکنوا است. بنابراین کم‌ترین مقدار α ، $-\frac{\pi}{2}$ است.

۲۰۳- گزینه ۳

وقتی که x به بی‌نهایت میل می‌کند، کلاً یک قانون وجود دارد؛ «قانون پرتوان». همیشه از زیر رادیکال‌ها شروع می‌کنیم: زیر رادیکال صورت، $5x$ در مقابل $9x^2$ حذف می‌شود و از مخرج هم $3x$ از عبارت زیر رادیکال خط می‌خورد و تابع این شکلی می‌شود:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{9x^2 + 5x}}{x - \sqrt{4x^2 + 3x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{9x^2}}{x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + |3x|}{x - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3x}{x + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{3x} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

تذکر: دقت کنید که چون $x \rightarrow -\infty$ پس x های مسئله منفی‌اند و $|3x| = -3x$ و $|2x| = -2x$ است.

۲۰۴- گزینه ۱

ابتدا مطلوب تست را ساده‌تر می‌کنیم:

$$ff'' + (f')^2 = ff'' + (f')(f') = (ff')'$$

پس چیزی که تست می‌خواهد مشتق تابع ff' است. برای این کار ابتدا f' را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

حالا باید f و f' را در هم ضرب کنیم و در آخر از حاصل ضربشان مشتق بگیریم:

$$y = f(x) \times f'(x) = \sqrt{2x+3} \times \frac{1}{\sqrt{2x+3}} = 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 0$$

۲۰۵- نکته: تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ مشتق‌ناپذیر است.

پس تابع $f(x) = |(x-1)x^3|$ در $x = 1$ مشتق ناپذیر است. یعنی به دنبال $f'_+(1)$ هستیم. اگر $x > 1$ باشد، عبارت $x^3(x-1)$ مثبت است و خودش از داخل قدر مطلق بیرون می‌آید. بعد از آن، کافی است مشتق بگیریم و $x = 1$ را جای گذاری کنیم:

$$f(x) = x^3(x-1) = x^4 - x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'_+(1) = 4(1) - 3(1) = 1$$

۲۰۶- گزینه ۳

چون صحبت از اکستریم‌های نسبی است، پس به مشتق احتیاج خواهیم داشت. همین اول کار مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{ax^3}{3} - x^2 - 3x + b \Rightarrow f'(x) = ax^2 - 2x - 3$$

نقطه‌ای اکستریم نسبی f است که اولاً در تابع صدق کند و ثانیاً مشتق تابع در آن جا صفر باشد:

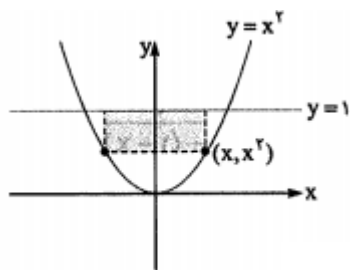
$$۱) f'(1) = 0 \Rightarrow a(1)^2 - 2(1) - 3 = 0 \Rightarrow a - 5 = -3 \Rightarrow a = 5$$

$$۲) f(1) = -3 \Rightarrow \frac{a(1)^3}{3} - (1)^2 - 3(1) + b - 3 \xrightarrow{a=5} \frac{5}{3} - 4 + b = -3 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

پس داریم:

$$a + b = 5 + \frac{-2}{3} = \frac{13}{3}$$

۲۰۷- گزینه ۲



همان طور که در شکل می‌بینید، اضلاع مستطیل $2x$ و $1 - x^2$ هستند. ابتدا مساحت مستطیل را بر حسب x می‌نویسیم:

$$S = 2x(1 - x^2) = -2x^3 + 2x$$

برای تعیین ماکزیمم مطلق، باید نقاط بحرانی و دامنه x را داشته باشیم. برای این که اضلاع مستطیل مثبت باشند، x باید در بازه $(0, 1)$ باشد. برای پیدا کردن نقطه بحرانی تابع، مشتق S را برابر صفر قرار می‌دهیم:

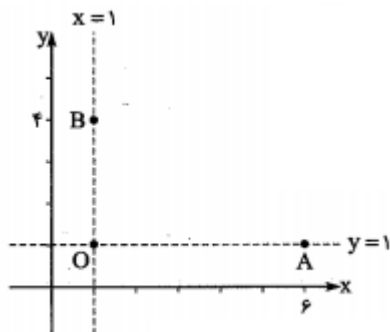
$$S' = -6x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

از بین این دو مقدار، $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ که در بازه $(0, 1)$ قرار دارد، قابل قبول است، پس ماکزیمم مطلق در $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ رخ

می‌دهد:

$$S_{max} = S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

۲۰۸- گزینه ۲



با توجه به شکل محور کانونی بیضی $y = 1$ و محور غیر کانونی آن $x = 1$ است، پس مرکز بیضی نقطه $(1, 1)$ است و داریم:

$$a = OA = 5$$

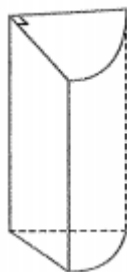
$$b = OB = 3$$

می دانیم که در بیضی $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ پس داریم:

$$c = \sqrt{25 - 9} = 4 \xrightarrow{\text{فاصله کانونی}} 2c = 8$$

۲۰۹- گزینه ۳

شکل حاصل از ۵ قسمت تشکیل شده است:



(۱) ربع سطح جانبی استوانه؛ مساحت این قسمت برابر $\frac{1}{4}$ سطح جانبی استوانه است:

$$S_1 = \frac{1}{4}S_{\text{جانبی استوانه}} = \frac{1}{4}(2\pi r h) = \frac{1}{4}(2\pi(14) \times 10) = 70\pi \approx 210$$

(۲) ربع دایره بالایی؛ مساحت این قسمت، $\frac{1}{4}$ مساحت دایره است:

$$S_2 = \frac{1}{4}S_{\text{دایره}} = \frac{1}{4}(\pi r^2) = \frac{1}{4}(\pi \times (14)^2) = 49\pi \approx 147$$

(۳) ربع دایره پایینی؛ مساحت این قسمت هم ۱۴۷ است.

۴ و ۵) ۲ تا مستطیل 10×14 هم در کناره‌ها داریم:

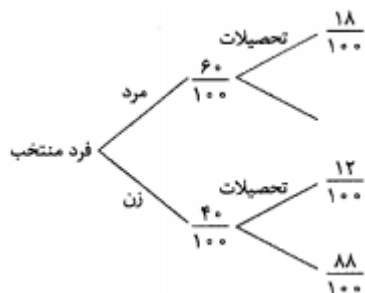
$$S_{\text{مستطیل‌ها}} = 2(10 \times 14) = 280$$

پس مساحت قسمت جداشده برابر است با:

$$280 + 210 + 147 + 147 = 784$$

۲۱۰- گزینه ۲

نمودار درختی را نگاه کنید:



پس $\frac{18}{100}$ از $\frac{60}{100}$ به اضافه $\frac{12}{100}$ از $\frac{40}{100}$ این جامعه تحصیلات دانشگاهی دارند که برابر است با:

$$\frac{18}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{12}{100} \times \frac{40}{100} = 15/6$$

۲۱۱- گزینه ۱

طبق صورت سؤال داریم:

$$۱) t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 17 \Rightarrow t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d + t_1 + 3d = 4t_1 + 6d = 17$$

$$۲) t_7 = 11 \Rightarrow t_1 + 6d = 11$$

از حل این دو معادله با هم داریم:

$$\begin{cases} 4t_1 + 6d = 17 \\ t_1 + 6d = 11 \end{cases} \rightarrow 3t_1 = 6 \Rightarrow t_1 = 2 \Rightarrow 2 + 6d = 11 \Rightarrow d = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

پس جملات دوم و پنجم عبارت‌اند از:

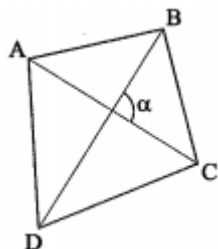
$$t_2 = t_1 + d = 2 + \frac{3}{2} = 3/5$$

$$t_5 = t_1 + 4d = 2 + 4\left(\frac{3}{2}\right) = 8$$

واسطه حسابی آن‌ها می‌شود:

$$B = \frac{A + C}{2} \Rightarrow B = \frac{8 + 3/5}{2} = \frac{11/5}{2} = 5/75$$

۲۱۲- گزینه ۴



نکته: مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه دو قطر در سینوس زاویه بین دو قطر:

$$S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$$

پس مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(12) \times (8\sqrt{3}) \times \sin 60^\circ = 6 \times 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$$

۲۱۳- گزینه ۳

از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$x^3 - \frac{1}{8x^3} = x^3 - \left(\frac{1}{2x}\right)^3 = \underbrace{\left(x - \frac{1}{2x}\right)}_{(1)} \underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}\right)}_{(2)}$$

پرانتزهای (۱) و (۲) را جداگانه بر حسب A می‌یابیم:

$$(1) : 2x - \frac{1}{x} = A \xrightarrow{\text{تقسیم بر 2}} x - \frac{1}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$(2) : 2x - \frac{1}{8} = A \xrightarrow{\text{به توان دو}} 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 = A^2 \Rightarrow 4x^2 + \frac{1}{x^2} = A^2 + 4 \xrightarrow{\text{تقسیم بر 4}} x^2 + \frac{1}{4x^2} = \frac{A^2 + 4}{4}$$

پس $x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}$ برابر است با:

$$\frac{A^2 + 4}{4} + \frac{1}{2} = \frac{A^2 + 6}{4}$$

در نتیجه حاصل ضرب پرانتزهای (۱) و (۲) در هم می‌شود:

$$\frac{A}{2} \left(\frac{A^2 + 6}{4} \right) = A \left(\frac{A^2 + 6}{8} \right)$$

۲۱۴- گزینه ۴

عبارت زیر را دیکال با فرجه زوج، باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} 4 - 9x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{4}{9} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, x \neq 0$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$$

۲۱۵- گزینه ۳

باید به جای x ‌های تابع g ، $f(x)$ را قرار دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{1 - 3f(x)}{f(x) + 2} = \frac{1 - 3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{2 + \left(\frac{2x+3}{2-x}\right)} = \frac{2-x-6x-9}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = \frac{-7(x+1)}{2-x}$$

$$= -x - 1$$

۲۱۶- گزینه ۱

از جایگاه صدگان شروع می‌کنیم، برای پر کردن صدگان به‌جز صفر ۹ حالت داریم، برای نوشتن دهگان از صفر می‌توانیم استفاده کنیم ولی از رقمی که در صدگان نوشته‌ایم دیگر نمی‌شود استفاده کرد. پس باز هم ۹ حالت داریم. به همین ترتیب برای یکان هم ۹ حالت وجود دارد. پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$9 \times 9 \times 9 = 729$$

۹	۹	۹
---	---	---

یکان دهگان صدگان

۲۱۷- گزینه ۳

$n(S)$ که برابر با $\binom{2+3+5}{3}$ است، برای محاسبه احتمال باید $\frac{n(A)}{n(S)}$ را بیابیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\overbrace{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}^{2 \text{ تا سفید}} + \overbrace{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}^{2 \text{ تا سیاه}} + \overbrace{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}^{2 \text{ تا قرمز}}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \times 5 + 3 \times 7 + 1 \times 8}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{79}{120}$$

۲۱۸- گزینه ۱

α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1$ هستند، پس جمع و ضرب آن‌ها برابر است با:

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

حالا می‌توانیم حاصل $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ را پیدا کنیم:

$$\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{4}} \left(\sqrt{\frac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{3}} \right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3+1}) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

۲۱۹- گزینه ۱

برای حل معادله باید یکی از رادیکال‌ها را به سمت راست برده و طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - \sqrt{3x+3} = 1 &\Rightarrow \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{3x+3} \xrightarrow{\text{توان 2}} x+2 = 1 + (3x+3) + 2\sqrt{3x+3} \\ &\Rightarrow \sqrt{3x+3} = -x-1 \xrightarrow{\text{توان 2}} 3x+3 = x^2+1+2x \Rightarrow x^2-x-2=0 \\ &\Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \end{aligned}$$

$$x = -1, x = 2$$

حالا به مهم ترین قسمت معادلات رادیکالی رسیدیم! یعنی چک کردن جواب‌ها! جواب‌ها را در معادله اصلی قرار می‌دهیم، نگاه کنید:

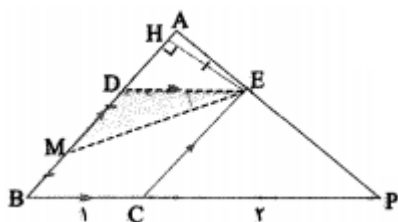
$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{2+2} - \sqrt{3(2)+3} = 1 \Rightarrow 2 - 3 = 1 \quad \times$$

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{-1+2} - \sqrt{3(-1)+3} = 1 \Rightarrow 1 - 0 = 1 \quad \checkmark$$

پس معادله فقط یک جواب منفی دارد.

۲۲۰- گزینه ۴

برای ساده تر شدن کار، قاعده کوچک را ۳ و قاعده بزرگ را ۵ در نظر می‌گیریم.



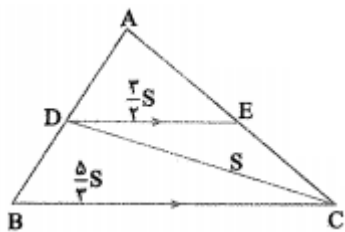
مثلث‌های DEC و DBC را روی شکل پیدا کنید.

ارتفاع‌های این دو مثلث برابرند، پس نسبت مساحت برابر با نسبت قاعده‌ها یعنی ۳ به ۵ است. پس اگر مساحت مثلث DEC را S بنامیم، مساحت مثلث DBC برابر $\frac{5}{3}S$ است. از طرفی در مثلث ABC ، طبق قضیه تالس داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$$

مثلاً $AE = 3$ و $AC = 5$ است، پس EC خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{3}{2}S$$



حالا مساحت شکل را بر حسب S می‌نویسیم:

$$\frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{\text{دورنقه}}} = \frac{\frac{3}{2}S + S}{\frac{5}{3}S + S} = \frac{\frac{5}{2}S}{\frac{8}{3}S} = \frac{15}{16}$$

۲۲۱- گزینه ۲

باید وارون f را پیدا کنیم:

$$y = \frac{x+4}{x-2} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض کنید.}} x = \frac{y+4}{y-2} \Rightarrow xy - 2x = y + 4 \Rightarrow xy - y = 2x + 4 \Rightarrow y(x-1) = 2x + 4 \Rightarrow y = \frac{2x+4}{x-1}$$

حالا محل برخورد دو تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{x-1} = \frac{x+4}{x-2} &\Rightarrow (2x+4)(x-2) = (x+4)(x-1) \Rightarrow 2x^2 - 4x + 4x - 8 \\ &= x^2 - x + 4x - 4 \Rightarrow 2x^2 - 8 = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 4 \end{aligned}$$

۲۲۲- معادله‌ها را به معادله‌های ساده‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$۱) \log_{10}(x+2y) = \underbrace{1}_{\log_{10} 10} + \log_{10} y = \log_{10} 10 + \log_{10} y \Rightarrow \log(x+2y) = \log 10y$$

$$\Rightarrow x+2y = 10y \Rightarrow x = 8y$$

$$۲) 3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} = 3^{x-y+2} \Rightarrow 2x+y = x-y+2$$

$$\Rightarrow 2x+y = x-y+2 \Rightarrow x+2y = 2$$

پس به جای x ، $8y$ را قرار می‌دهیم:

$$x+2y = 2 \Rightarrow 8y+2y = 2 \Rightarrow 10y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

۲۲۳- گزینه ۳

دو مجهول داریم، پس باید دو معادله پیدا کنیم:

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot \underbrace{b^0}_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow a \cdot b^{-1} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-1} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^{-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow b^{-1} = 4^{-2} \Rightarrow b = 4$$

پس در تابع $f(x) = \frac{3}{2}(4)^x$ به دنبال $f\left(\frac{3}{2}\right)$ هستیم، یعنی باید x را $\frac{3}{2}$ قرار دهیم:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times (4)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 2^3 = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

۲۲۴- گزینه ۲

مخرج مشترک می‌گیریم و به یک حد مبهم می‌رسیم و سپس رفع ابهام می‌کنیم، نگاه کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-x(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sim x^2+x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{-(-1-2)}{(-1-1)} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

۲۲۵- گزینه ۳

باید حد چپ و حد راست با هم برابر باشند:

$$x = 1 \text{ در حد چپ در } a - a + 2 = 2$$

$$x = 1 \text{ در حد راست در } : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

پس حد چپ و حد راست بدون توجه به مقدار a برابرند، پس به ازای هر مقدار a تابع $f(x)$ در $x = 1$ پیوسته است.

۲۲۶- گزینه ۳

(۱) چون این دو پیشامد مستقل از هم هستند، پس احتمال اشتراک آن‌ها برابر با حاصل ضرب احتمال‌های آن‌ها است، یعنی داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/84 \times 0/75 = 0/63$$

احتمال لااقل یکی از A یا B یعنی اجتماع دو پیشامد:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/75 + 0/84 - 0/63 = 0/96$$

(۲) احتمال این که لااقل یکی از آنان قبول شوند، متمم حالتی است که هیچ کدام قبول نشوند:

$$P(\text{هیچ کدام قبول نشوند}) = P(A \text{ قبول نشود}) \times P(B \text{ قبول نشود}) = \frac{16}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{4}{100}$$

پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100}$$

۲۲۷- گزینه ۲

نکته: اگر دو جامعه با میانگین یکسان، تشکیل یک جامعه جدید بدهند، واریانس جامعه جدید، میانگین وزن دار واریانس‌های دو جامعه اول است.

خب واریانس جامعه اول $12/6$ با ضریب 12 و واریانس جامعه دوم $7/2$ با ضریب 24 است، پس میانگین وزن دار آن‌ها برابر است با:

$$\text{میانگین وزن دار} = \frac{12 \times 12/6 + 24 \times 7/2}{24 + 12} = 9$$

پس واریانس جامعه جدید برابر 9 و در نتیجه انحراف معیارش برابر 3 است.

۲۲۸- گزینه ۲

(۱) f^{-1} و g^{-1} را می‌یابیم:

$$f^{-1} = \{(2, 5), (3, 7), (4, 1), (6, 3), (1, 9)\}$$

$$y = \sqrt{5x+9} \xrightarrow{g^{-1}} x = \sqrt{5y+9} \Rightarrow x^2 = 5y+9 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x^2-9}{5}$$

اول ببینیم که $g^{-1}(x)$ چه زمانی برابر ۸ می‌شود:

$$g^{-1}(x) = 8 \Rightarrow \frac{x^2 - 9}{5} = 8 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7 \text{ یا } -7$$

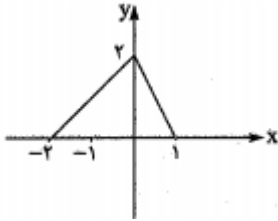
در هیچ‌یک از زوج مرتب‌های f^{-1} ، ۷ نداریم، پس فقط با فرض $g^{-1}(7) = 8$ پیش می‌رویم:

$$g^{-1}(7) = 8 \Rightarrow f^{-1}(a) = 7 \Rightarrow a = 3$$

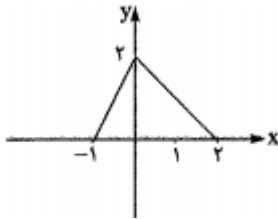
(۲) برعکس حرکت کنید: وقتی $g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8$ است، در ضابطه $g(x)$ ، x را برابر ۸ بگذارید، $g(8) = \sqrt{49} = 7$ پس $f^{-1}(a) = 7$ ، حالا در خود تابع f ، دنبال $f(7)$ بگردید که برابر ۳ است.

۲۲۹- گزینه ۲

ابتدا $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم، برای این کار نمودار را یک واحد به سمت چپ ببریم:

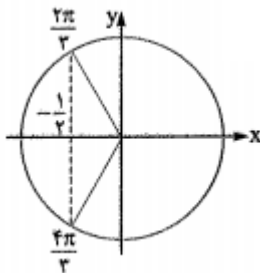


حالا $f(-x+1)$ را رسم می‌کنیم، برای این کار نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



این تابع در بازه $[-1, 0]$ اکیداً صعودی است و در بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی است.

۲۳۰- گزینه ۴



پس معادله این شکلی می‌شود:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

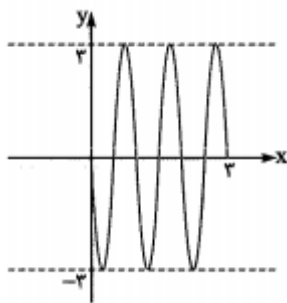
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

مجموع جواب برابر است با:

$$0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

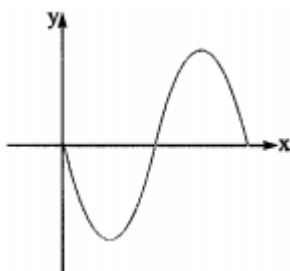
۲۳۱- گزینه ۱



همان طور که می بینید، سه تا تناوب کامل نمودار سینوس در بازه $[0, 3]$ رخ داده است. پس دوره تناوب این تابع برابر یک است.

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرفی چون حداکثر و حداقل نمودار به جای ۱ و -۱ برابر ۳ و -۳ شده اند، پس $a = \pm 3$ است.



پس a, b یا ۶ است یا -۶. برای تشخیص این که کدام یک از این ها جواب است، به نمودار نگاه می کنیم، چون نمودار به صورت $-\sin x$ شروع شده است، پس a و b غیر هم علامت اند، پس حاصل ضرب آن ها منفی است.

۲۳۲- گزینه ۱

در بی نهایت فقط هم ارزی پرتوان به دردمان می خورد:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{ax^2 + 2}}{x + \sqrt{4x^2 + 7x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{ax^2}}{x + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - \sqrt{a}|x|}{x + |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{a}x}{x - 2x} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{a}}{-1} = -2 \Rightarrow -1 + \sqrt{a} = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9 \end{aligned}$$

حالا به جای a باید ۹ را قرار دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x}{x - 9} = \frac{2(9)}{0^+} = +\infty$$

۲۳۳- گزینه ۴

۱) می دانیم حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ برابر $f'(x)$ است. پس باید از این جور حدها در فرض تست درست کنیم، برای این کار $f(x)$ را در صورت عبارت اضافه و کم می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = 2f'(x) \end{aligned}$$

پس $2f'(x)$ برابر $2\sqrt{x}$ است، در نتیجه داریم:

$$2f'(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(4) = \sqrt{4} = 2$$

۲) چون $\frac{0}{0}$ است، از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \stackrel{Hop}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) + f'(x-h)}{1} = f'(x+0) + f'(x-0) = 2f'(x)$$

بقیة راه حل هم که همان است.

۲۳۴- گزینه ۴

برای داشتن $f'(1)$ هم به پیوستگی احتیاج است. هم باید مشتق چپ و مشتق راست برابر باشند:

از مشت چپ و راست شروع می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} (2x+6)^{\frac{2}{3}} & x > 1 \\ ax+b & x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \times 2 \times (2x+6)^{-\frac{1}{3}} & x > 1 \xrightarrow{x=1} a \\ a & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \times 2 \times (2+6)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \times 2^{-1} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

حالا حد چپ و راست باید برابر شوند:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & x > 1 \\ \frac{2}{3}x + b & x \leq 1 \end{cases} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} \sqrt[3]{(2(1)+6)^2} = (8)^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 4 \\ \frac{2}{3}(1) + b = \frac{2}{3} + b \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} + b = 4 \Rightarrow b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

۲۳۵- گزینه ۴

از این که $f(1) = -3$ است، b را پیدا می‌کنیم:

$$f(1) = -3 \Rightarrow -(1)^3 + b(1)^2 + 9(1) - 14 = -3 \Rightarrow b = 3$$

برای پیدا کردن ماکزیمم نسبی، مشتق می‌گیریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 14 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3(x-3)(x+1)$$

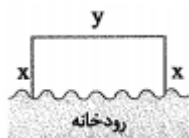
حالا جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x	-1	3	
f'	-	+	-
	↘	↗	↘
	min نسبی	max نسبی	

پس طول نقطه ماکزیمم نسبی برابر ۳ است و برای به دست آوردن مقدار تابع باید $x = 3$ را در تابع f جای‌گذاری کنیم:

$$f(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 + 9(3) - 14 = -27 + 27 + 27 - 14 = 13$$

۲۳۶- گزینه ۲



(۱) با توجه به شکل طناب به دو تا پاره خط به طول x و یک پاره خط به طول y تبدیل می شود، در نتیجه داریم:

$$2x + y = 88 \Rightarrow y = 88 - 2x$$

پس تابع مساحت مستطیل، می شود:

$$S = xy = x(88 - 2x) = -2x^2 + 88x$$

نقطه ماکزیمم جایی رخ می دهد که مشتق برابر صفر باشد:

$$S' = -4x + 88 = 0 \Rightarrow x = 22 \Rightarrow y = 44$$

پس برای داشتن بیشترین مساحت، طول و عرض مستطیل، ۴۴ و ۲۲ انتخاب می شوند:

$$S_{max} = xy = 22 \times 44 = 968$$

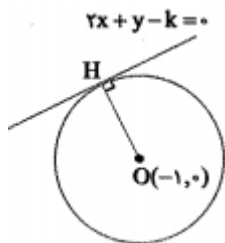
(۲)

نکته: اگر مجموع دو عدد ثابت باشد، حاصل ضرب آن ها زمانی که برابر باشند، حداکثر می شود.

$2x + y = 88$ است، پس برای داشتن بیشترین حاصل ضرب باید داشته باشیم:

$$2x = y = \frac{88}{2} = 44 \Rightarrow x = 22, y = 44 \Rightarrow S_{max} = 22 \times 44 = 968$$

۲۳۷- گزینه ۲



(۱) وقتی خطی بر دایره ای مماس باشد، فاصله مرکز دایره از خط برابر شعاع می شود.

برای به دست آوردن مرکز و شعاع دایره، ضابطه دایره را استاندارد می کنیم:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 5 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 5$$

پس مرکز، $O(-1, 0)$ و شعاع، $\sqrt{5}$ است. در نتیجه داریم:

$$R = OH \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{|2(-1) + (0) - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{|-2 - k|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |k + 2| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k + 2 = 5 \Rightarrow k = 3 \\ k + 2 = -5 \Rightarrow k = -7 \end{cases}$$

(۲) $y = 2x - k$ را در معادله دایره قرار می دهیم، باید دلتای عبارت درجه دوم به دست آمده، صفر باشد:

$$x^2 + 2x + (2x - k)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 5x^2 + (2 - 4k)x + k^3 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\Rightarrow (2 - 4k)^2 - 4(5)(k^2 - 4) = 0 \Rightarrow 4 + 16k^2 - 16k - 20k^2 + 80 = 0 \\ &\Rightarrow -4k^2 - 16k + 84 = 0 \Rightarrow k^2 + 4k - 21 = 0 \Rightarrow (k + 7)(k - 3) = 0 \\ &\Rightarrow k = -7 \text{ یا } 3\end{aligned}$$

۲۳۸- گزینه ۳

نکته: خروج از مرکز بیضی بر حسب a و b برابر است با:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

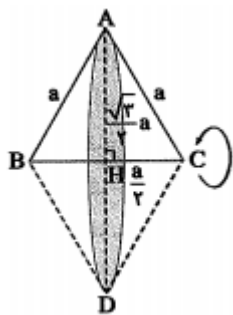
قطر بزرگ دو برابر قطر کوچک است، پس داریم:

$$\frac{2a}{2b} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه خروج از مرکز برابر است با:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۳۹- گزینه ۱



مطابق شکل مثلث را نسبت به ضلع BC دوران می‌دهیم، اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، متوجه می‌شویم که شکل حاصل از دوران دوتا مخروط قائم به شعاع قاعده $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ و ارتفاع $CH = \frac{a}{2}$ است، پس حجم حاصل برابر است با:

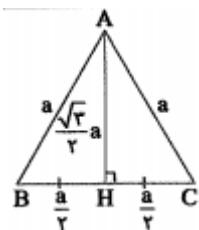
$$\begin{aligned}v &= 2v_{\text{مخروط}} = 2 \left(\frac{1}{3} \pi (\text{شعاع})^2 (\text{ارتفاع}) \right) = 2 \left(\frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 \left(\frac{a}{2} \right) \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \times \frac{3a^2}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \pi a^3\end{aligned}$$

یادآوری: (۱) در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع ضلع مقابل را نصف می‌کند.

(۲) اندازه ارتفاع برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

۲۴۰- گزینه ۴

اطلاعات تست را در شکل زیر می‌بینید:





از ظرف سوم یک مهره برمی‌داریم، ۲ حالت وجود دارد، این‌که مهره در ابتدا در ظرف اول بوده و یا در ظرف دوم با توجه به دو حالت موجود، نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(\text{سفید}) = \frac{6}{24} \times \frac{7}{12} + \frac{3}{18} \times \frac{5}{12} = \frac{31}{144}$$

۲۴۱- گزینه ۴

فرض کنیم دنباله حسابی a, b, c است، پس دنباله هندسی $a, b-1, c$ است و قدر نسبت آن باید ۲ باشد:

$$\underbrace{a, b-1, c}_{\times 2} \Rightarrow \begin{cases} b-1 = 2a \Rightarrow b = 2a+1 \\ c = 4a \end{cases}$$

حالا از شرط دنباله حسابی داریم:

$$2b = a + c \Rightarrow 4a + 2 = a + 4a \Rightarrow a = 2$$

پس دنباله هندسی ... 2, 4, 8 است و سه جمله سوم آن عبارت‌اند از:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \underbrace{128, 256, 512}_{3 \text{ تایی سوم}}$$

و در نتیجه:

$$128 + 256 + 512 = 896$$

۲۴۲- گزینه ۲

تنها قسمت باز بازه‌ها در سمت چپ تساوی، b است. پس b باید ۳ باشد، حالا تساوی را با این فرض یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$\left[\frac{12}{a+5}, 3 \right) \cap [(3)^2 - 8, 12 - a] = \left[\frac{12}{a+5}, 3 \right) \cap [1, 12 - a] = [1, 3)$$

$12 - a$ اگر از ۳ کم تر بود، به عنوان انتهای بازه در اشتراک بازه‌ها انتخاب می‌شد، پس $12 - a$ بزرگ تر یا مساوی ۳ است، در نتیجه:

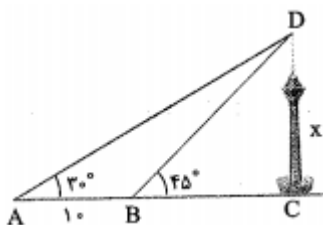
$$12 - a \geq 3 \Rightarrow a \leq 9$$

به همان ترتیب مقدار $\frac{12}{a+5}$ هم از یک کم تر یا مساوی است:

$$\frac{12}{a+5} \leq 1 \Rightarrow \frac{12}{a+5} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{12 - a - 5}{a+5} \leq 0 \Rightarrow \frac{7 - a}{a+5} \leq 0 \Rightarrow a \leq -5 \cup a \geq 7$$

اشتراک دو بازه به دست آمده برابر است با $7 \leq a \leq 9$ و $a < -5$. در این بازه‌ها سه عدد طبیعی ۷، ۸ و ۹ وجود دارند.

۲۴۳- گزینه ۴



ابتدا از مثلث قائم‌الزاویه BDC شروع می‌کنیم:

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{x}{BC} \Rightarrow BC = x$$

پس به سراغ مثلث ADC می‌رویم:

$$\begin{aligned} \tan 30^\circ = \frac{x}{AC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{x}{10+x} \Rightarrow x\sqrt{3} = 10+x \Rightarrow x\sqrt{3} - x = 10 \Rightarrow x(\sqrt{3} - 1) = 10 \\ \Rightarrow x &= \frac{10}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{10(\sqrt{3} + 1)}{2} = 5(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

۲۴۴- گزینه ۱

عبارت‌های زیر رادیکال را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$4 + 2\sqrt{3} = 3 + 1 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2(\sqrt{3})(1) = (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$5 - 2\sqrt{6} = 2 + 3 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

پس می‌شود این عبارت‌ها را به راحتی از رادیکال بیرون آورد:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{3} + 1) \\ &= -\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

۲۴۵- گزینه ۲

جدول تعیین علامت عبارت $\frac{f(x)}{x^2-4}$ را رسم می‌کنیم:

		-2	-1	2	3	
$x^2 - 4$	+	-	-	+	+	
$f(x)$	-	-	+	+	-	
عبارت	-	تن	+	تن	+	-

$$\Rightarrow (-2, -1] \cup (2, 3]$$

۲۴۶- گزینه ۴

با فرض $t = 2x - 3$ ، داریم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

با جای‌گذاری در ضابطه f ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(t) &= 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13 \\ &= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 \Rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

۲۴۷- گزینه ۱

در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد که در ۹ تا از این حالت‌ها، مجموع مضرب ۴ می‌شود، این حالت‌ها:

$$\{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (5, 3), (3, 5), (4, 4), (6, 6)\}$$

پس احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۲۴۸- گزینه ۳

۲۴۹- گزینه ۴

برای این که معادله درجه دوم دارای ۲ ریشه حقیقی منفی باشد، سه تا شرط لازم است:

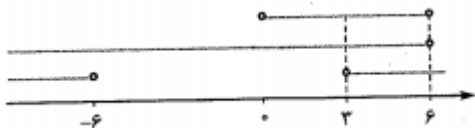
$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4(-3)(m-6) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 12(m-6) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0 \Rightarrow m < -6 \cup m > 3$$

$$۲) \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6$$

$$۳) \text{جمع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6$$

حالا باید بین این سه بازه اشتراک بگیریم:



همان طور که در نمودار بالا می بینید، قسمت مشترک هر سه بازه، بازه $(3, 6)$ است.

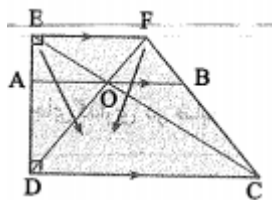
۲۵۰- گزینه ۴

قرینه یک تابع نسبت به خط $y = x$ ، یعنی همان وارون تابع که از عوض کردن جای x و y به دست می آید. پس معادله خط d به صورت $3x - 2y = 4$ است. فاصله نقطه $(0, 0)$ از خط $3x - 2y - 4$ را می خواهیم:

$$\text{فاصله نقطه از خط} = \frac{|3(0) - 2(0) - 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

۲۵۱- گزینه ۲

دوتا قضیه تالس می نویسیم در مثلث های EDC و FDC :



$$\begin{cases} \Delta EDC: OA \parallel DC \Rightarrow \frac{OA}{DC} = \frac{EA}{ED} \\ \Delta FDC: OB \parallel DC \Rightarrow \frac{OB}{DC} = \frac{FB}{FC} \end{cases}$$

در دوزنقه $EFCD$ ، نسبت های $\frac{EA}{ED}$ و $\frac{FB}{FC}$ با هم برابرند، پس داریم:

$$\frac{OA}{DC} = \frac{OB}{DC} \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

۲۵۲- گزینه ۴

قبل از هر عملیاتی بین دو تابع ابتدا باید دامنه مشترکشان را به دست بیاوریم:

$$\begin{aligned} D_f: x - 2 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 2 \\ D_g: x - 2 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f \cap D_g = [2, +\infty) \end{aligned}$$

حالا ضابطه $f \times g$ را پیدا می کنیم:

$$y = (f \times g)(x) = (3 + \sqrt{x-2})(3 - \sqrt{x-2}) = 9 - (x-2) = -x + 11$$

برد تابع $y = -x + 11$ را با دامنه $[2, +\infty)$ را می خواهیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow -x \leq -2 \Rightarrow \underbrace{-x + 11}_y \leq 9 \Rightarrow y \leq 9$$

۲۵۳- گزینه ۱

نمودار محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- قطع می کند، یعنی از $(-1, 0)$ عبور می کند و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه ای به عرض ۱- قطع می کند، یعنی از نقطه $(1, -1)$ عبور می کند. در نتیجه داریم:

$$(-1, 0) \in f \Rightarrow 0 = \log_{\frac{1}{2}}(a(-1) + b) \Rightarrow -a + b = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$(1, -1) \in f \Rightarrow -1 = \log_{\frac{1}{2}}(a(1) + b) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = a + b \Rightarrow a + b = 2$$

از جمع کردن طرفین این تساوی‌ها، $b = \frac{3}{2}$ به دست می‌آید.

۲۵۴- گزینه ۳

اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله برابر E در واحد ارگ است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow E = 10^{11/8+1/5M}$$

تست می‌گویید که انرژی زلزله یک واحد اضافه شود، E چند برابر می‌شود؟ از رابطه زلزله استفاده می‌کنیم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{11/8+1/5(M+1)}}{10^{11/8+1/5M}} = 10^{(11/8+1/5(M+1))-(11/8+1/5M)} = 10^{1/5} = 10\sqrt[5]{10}$$

۲۵۵- گزینه ۴

باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم:

$$\text{حد راست : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{a + [x]} = \frac{1}{a + [1^+]} = \frac{1}{a + 1}$$

$$\text{حد چپ : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{a + [x]} = \frac{1}{a + [1^-]} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{ضربدر } 6a(a+1)} 6(a+1) - 6a = a(a+1) \Rightarrow 6a + 6 - 6a = a^2 + a \\ \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } -3$$

مقدار کم‌تر a ، -3 است.

۲۵۶- گزینه ۲

باید حد چپ و حد راست و مقدار برابر باشند:

$$\begin{cases} \text{حد چپ} = a(3) = a^{3-3} = 3a + 1 \\ \text{مقدار} = \text{حد راست} = a \log_2(1+3) = a \log_2 4 = 2a \end{cases}$$

حالا از ضابطه بالایی، $f(2)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(2) = -1(2) + 2^{2-3} = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1/5$$

۲۵۷- گزینه ۱

همیشه پیشامدها را نام گذاری کنید، این شکلی:

$\left\{ \begin{array}{l} A: \text{پیشامد قهرمان شدن} \\ B: \text{پیشامد برد اصلی ترین رقیب} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{6}, P(A|B) = \frac{1}{2}$$

ابتدا $P(A \cap B)$ را پیدا می کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{6}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

حالا احتمال وقوع حداقل یکی از دو پیشامد که همان $P(A \cup B)$ را حساب می کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{4 + 2 - 1}{12} = \frac{5}{12}$$

۲۵۸- گزینه ۴

ابتدا واریانس ضلع مربع ها را پیدا می کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{6}{100} = \frac{\sigma_{\text{ضلع}}}{25} \Rightarrow \sigma_{\text{ضلعها}} = \frac{6}{100} \times 25 = \frac{3}{2}$$

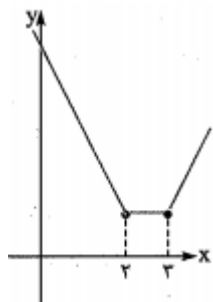
محیط هر مربع، ۴ برابر طول ضلع مربع است، پس انحراف معیار محیطها هم ۴ برابر انحراف معیار ضلعها است، در نتیجه داریم:

$$\sigma_{\text{محیط}} = 4\sigma_{\text{ضلع}} = 4 \left(\frac{3}{2} \right) = 6$$

$$\sigma_{\text{محیط}}^2 = 6^2 = 36$$

۲۵۹- گزینه ۱

ابتدا تابع $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ را رسم می کنیم تا ببینیم در کدام بازه اکیداً نزولی است.



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x \geq 3 \\ 1 & 2 < x < 3 \\ -2x + 5 & x \leq 2 \end{cases}$$

همان طور که از شکل مشخص است، تابع در $x \leq 2$ اکیداً نزولی است، در این بازه ضابطه تابع به صورت $y = -2x + 5$ است.

حالا برای یافتن نقاط برخورد، ضابطه دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - x - 10 = -2x + 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-15)}}{4} = \frac{-1 \pm 11}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{4}, x_2 = -3$$

از این دو جواب فقط $x = -3$ قابل قبول است.

۲۶۰- گزینه ۳

محل برخورد تابع با محور y ها، نقطه $(0, 6)$ است، پس داریم:

$$f(0) = 6 \Rightarrow (a - 0)^3 - a = 6 \Rightarrow a^3 - a = 6 \Rightarrow a^3 - a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2) \underbrace{(a^2 + 2a + 3)}_{\Delta < 0} = 0 \Rightarrow a = 2$$

ریشه ندارد.

مشتق تابع در $x = \frac{2}{3}$ برابر صفر می‌شود:

$$f(x) = (2 - bx)^3 - 2 \Rightarrow f'(x) = -3b(2 - bx)^2$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow -3b \left(2 - b \left(\frac{2}{3}\right)\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(2 - \frac{2b}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2b}{3} = 2 \Rightarrow b = 3$$

پس $a + b$ برابر ۵ است.

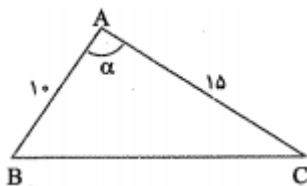
۲۶۱- گزینه ۴

باید سعی کنیم معادله را به صورت $\tan a = \tan b$ در بیاوریم:

$$\tan x \tan 3x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\tan 3x} = \cot 3x \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow x$$

$$= k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۲۶۲- گزینه ۲



مساحت مثلث روبه‌رو برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} 10 \times 15 \times \sin \alpha = 45 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

اگر دو ضلع AB و AC ثابت بمانند و زاویه α دو برابر شود، برای پیدا کردن مساحت جدید به $\sin 2\alpha$ احتیاج

داریم، با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است.}} \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

خب! فرمول مساحت را یک بار دیگر بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2} (10) \times (15) \times \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \times 10 \times 15 \times \frac{24}{25} = 72$$

۲۶۳- گزینه ۲

اول حد $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 2x}$ را می‌گیریم:

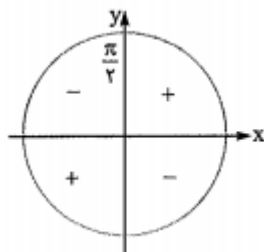
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\underbrace{x}_{\frac{2}{2}} \underbrace{(x-2)}_{0^-}} = -\infty$$

حالا برویم سراغ آن یکی حد:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{9\pi}{2}\right)^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$$

۲π کم می‌کنیم.

دقت کنید که علامت تانژانت در مربع‌های مختلف به صورت مقابل است:



۲۶۴- گزینه ۱

مشتق تابع $f(x)$ در $x = -1$ را می‌خواهیم. عبارت $(x^2 - x - 2)$ به ازای $x = -1$ صفر می‌شود، پس کافی است که از عبارتی مشتق بگیریم که عامل صفرشونده است:

$$f'(x) = (2x - 1)\sqrt[3]{x^2 - 7x} \Rightarrow f'(-1) = (-2 - 1)\sqrt[3]{1}$$

۲۶۵- گزینه ۳

به مشتق‌پذیری تابع در $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = -1$ مشکوکیم، پس یکی یکی بررسی می‌کنیم:

$x = 1$: در این نقطه تابع باید هم پیوسته باشد هم مشتق چپ و راست برابر باشند:

$$\text{حد راست: } (1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{حد چپ: } 1 + \sqrt[3]{1+1} = 1 + \sqrt[3]{2}$$

تابع پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر هم نیست.

$x = -1$: برای مشتق‌گیری در $x = -1$ فقط ضابطه پایینی را می‌خواهیم و چون با x منفی سروکار داریم، به جای $|x|$ ، $-x$ را قرار می‌دهیم و مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$f(x) = -x^2 + \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f'(x) = -2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

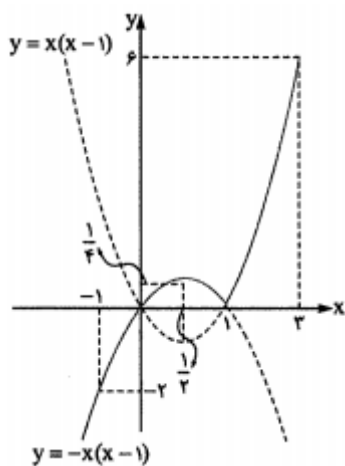
واضح است که نمی‌توانیم x را -1 قرار دهیم، پس $f'(-1)$ موجود نیست.

$x = 0$: چون ریشه قدر مطلق است، ممکن است تابع مشتق‌ناپذیر باشد، پس مشتق چپ و راست را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow{\text{مشتق راست}} = 0 & x \geq 0 \\ \text{در } x=0 & \\ \xrightarrow{\text{مشتق چپ}} = 0 & x < 0 \\ \text{در } x=0 & \end{cases}$$

پس تابع در صفر مشتق‌پذیر است.

۲۶۶- گزینه ۲



با برداشتن قدر مطلق، تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 1 \\ -x(x-1) & x < 1 \end{cases}$$

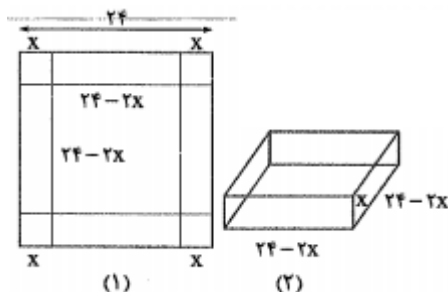
با توجه به شکل، مشخص است که $f(-1)$ مینیمم مطلق تابع و $f(3)$ ماکزیمم مطلق تابع است.

$$f(-1) = -1|-1-1| = -2 \xrightarrow{\text{مجموع}} 6 + (-2) = 4$$

$$f(3) = 3|3-1| = 6$$

۲۶۷- گزینه ۴

مطابق شکل (۲)، ابعاد مکعب مستطیل ایجادشده x ، $24 - 2x$ و $24 - 2x$ هستند. پس حجم مکعب برابر است با:



$$V = (24 - 2x)(24 - 2x)x = (24 - 2x)^2 x$$

زمانی حجم به بیشترین مقدارش می‌رسد که مشتق حجم برابر صفر باشد:

$$V' = 2 \times -2 \times (24 - 2x)x + (24 - 2x)^2 = 0 \Rightarrow (24 - 2x)(-4x + 24 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow (24 - 2x)(24 - 6x) = 0 \Rightarrow x = 12 \text{ یا } x = 4$$

اگر x برابر ۱۲ شود، $24 - 2x$ برابر صفر می‌شود و این ممکن نیست، پس x نمی‌تواند ۱۲ باشد، پس حجم زمانی ماکزیمم می‌شود که $x = 4$ باشد.

۲۶۸- گزینه ۴

نقاط روی دایره را به صورت (x, y) در نظر می‌گیریم و با استفاده از فرض تست، معادله دایره را پیدا می‌کنیم:

$$A(3, 6) \text{ فاصله از } O(0, 0) = 2 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$= 2\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \xrightarrow{\text{به توان 2}} (x-3)^2 + (y-6)^2$$

$$= 4((x-0)^2 + (y-0)^2) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2$$

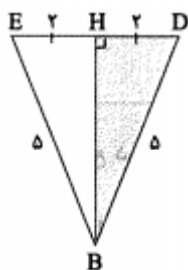
$$3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15$$

$$= 0 \xrightarrow{\text{استاندارد}} (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 20 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2$$

$$= 20 \Rightarrow R^2 = 20 \Rightarrow R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

پس قطر برابر $4\sqrt{5}$ است.

۲۶۹- گزینه ۲



این مقطع مثلث متساوی‌الساقین EBD است که $ED = 4$ و طول ساق‌های BE و BD برابر قطر وجه مستطیل یعنی ۵ است؛ برای به دست آوردن مساحت ابتدا ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می‌کنیم که چون مثلث متساوی‌الساقین است ضلع ED را نصف می‌کند و داریم:

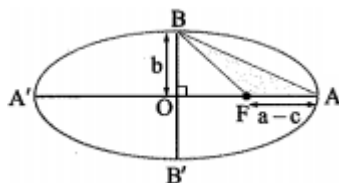
$$BH^2 = BD^2 - HD^2 \Rightarrow BH^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow BH = \sqrt{21}$$

پس مساحت می‌شود:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$$

۲۷۰- گزینه ۲

قبل از هر کاری، مقدار پارامترهای a ، b و c را بیابیم:



$$AA' = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$BB' = 2b \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

همان‌طور که در شکل می‌بینید، قاعده مثلث برابر $a - c$ و ارتفاع مثلث b است،

پس مساحت برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(a - c) \times b = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3}) \times 2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

۲۷۱- گزینه ۲

در مرحله n ام یک مربع $n \times n$ وجود دارد و $n - 1$ ردیف دایره‌هایی که یکی یکی کم می‌شوند. مثلاً در (شکل ۴) یک مربع 4×4 و ۳ ردیف دایره دیده می‌شود که در آن ۱، ۲ و ۳ دایره وجود دارد. پس دایره‌های شکل (۴) برابر است با:

$$4 \times 4 + (1 + 2 + 3)$$

به همین ترتیب تعداد دایره‌های موجود در شکل n ام از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_n = (n \times n) + (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) = n^2 + \frac{n(n - 1)}{2}$$

حالا باید ببینیم که به ازای کدام n ، مقدار a_n برابر ۱۴۵ می‌شود:

$$n^2 + \frac{n(n - 1)}{2} = 145 \xrightarrow{\text{ضرب در 2}} 2n^2 + n^2 - n = 290 \Rightarrow 3n^2 - n = 290 \Rightarrow n(3n - 1) = 290 \Rightarrow n(3n - 1) = 10 \times 29 \Rightarrow n = 10$$

نکته: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

۲۷۲- گزینه ۱

سه‌ها را به صورت $x + 2d, x + d, x, x - d$ و $x - 2d$ می‌نویسیم، مجموع سه‌ها برابر ۱۰۰ است، پس داریم:

$$(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 100 \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20$$

پس فعلاً سه‌ها به شکل $20 + 2d, 20 + d, 20, 20 - d$ و $20 - 2d$ هستند. از طرفی طبق اطلاعات دیگر تست داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\text{مجموع سه سهم بزرگتر}) &= \frac{1}{3}((20 - 2d) + (20 - d)) \\ &= \frac{1}{3}(20 + 20 + d + 20 + 2d) \Rightarrow 40 - 3d = \frac{1}{3}(60 + 3d) \Rightarrow 40 - 3d \\ &= 20 + d \Rightarrow 4d = 20 \Rightarrow d = 5 \end{aligned}$$

پس بزرگ‌ترین سهم برابر است با:

$$x + 2d = 20 + 2(5) = 30$$

۲۷۳- گزینه ۳

$\tan \theta$ همان شیب خط است، پس شیب خط را با استاندارد کردن معادله خط می‌یابیم:

$$3y + 4x - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب} = \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

از این که تانژانت θ ، منفی شده است نتیجه می‌گیریم که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ است. پس $\cos \theta < 0$ و $\sin \theta > 0$ خواهد بود. حالا $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را می‌یابیم:

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{25}{9} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}$$

در نتیجه داریم:

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1/4$$

۲۷۴- گزینه ۲

ابتدا عبارت $x = 5 + \sqrt{17}$ را کمی ساده‌تر و بهتر می‌کنیم:

$$x = 5 + \sqrt{17} \Rightarrow x - 5 = \sqrt{17} \xrightarrow{\text{به توان 2}} (x - 5)^2 = 17 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 17 \Rightarrow x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 8 = 10x$$

عبارت $\frac{x-1}{16} + \frac{1}{2x}$ را هم ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{16} + \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - x + 8}{16x} = \frac{\overbrace{(x^2 + 8)}^{10x} - x}{16x} = \frac{9x}{16x} = \frac{9}{16}$$

که جذرش برابر $\frac{3}{4}$ یا همان 0.75 است.

۲۷۵- گزینه ۱

مقدار a^x همواره مثبت است. پس در عبارت درجه دوم تست، ضریب 2^x مثبت است در نتیجه سهمی باید رو به بالا باشد، علامت‌های حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم برابر است با:

$$2^m x^2 - mx - 3^m = 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-3^m}{2^m} = -\left(\frac{3}{2}\right)^m$$

پس ضرب ریشه‌ها منفی است، یعنی یک ریشه مثبت و ریشه دیگر منفی است.

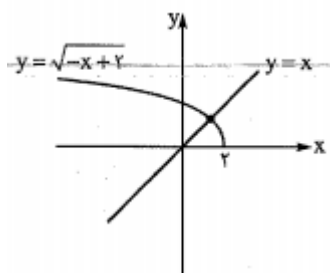
۲۷۶- گزینه ۳

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{واحد به طرف راست}} y = \sqrt{-(x-2)}$$

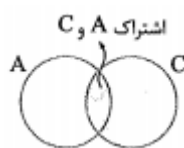
محل برخورد این تابع با $y = x$ را می‌خواهیم:

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x+2} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-x+2} = x \Rightarrow x^2 = -x+2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -2$$

با توجه به این که در تابع $y = \sqrt{-x+2}$ ، y هیچ‌گاه منفی نمی‌شود پس این تابع از ربع سوم عبور نمی‌کند، پس فقط $x = 1$ قابل قبول است. نمودارها را هم ببینید:



۲۷۷- گزینه ۲



پیشامدهای A و C رخ دهند، یعنی قسمت مشترک A و C مطلوب است. اما از اشتراک A و C ناحیه‌ای که در B باشد، قبول نیست. پس ۲ درست است.

۲۷۸- گزینه ۲

در این معادله، $x^4 - (m+2)x^2 + (m+5) = 0$ ، اگر $x^2 = A$ قرار بدهیم، داریم:

$$A^2 - (m+2)A + (m+5) = 0$$

قرار است معادله ۴ تا جواب حقیقی برای x بدهد، پس A باید دو جواب مثبت داشته باشد. شرط دو جواب مثبت این‌ها بودند:

$$\Delta > 0, S > 0, P > 0$$

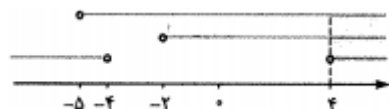
$$۱) \Delta = (m+2)^2 - 4(1)(m+5) = m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 = m^2 - 16 > 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m+4) > 0 \Rightarrow m < -4 \cup m > 4$$

$$۲) S = -\frac{-(m+2)}{1} = m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$۳) P = \frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m > -5$$

اشتراک این سه شرط، $m > 4$ است، نگاه کنید:



۲۷۹- گزینه ۲

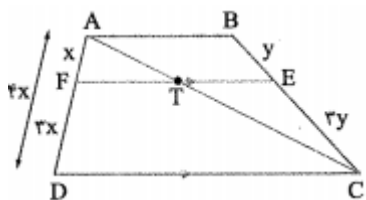
زمان حرکت در حالت اول $t = \frac{d}{v} = \frac{100}{v}$ و در حالت دوم $t' = \frac{100}{v+15}$ است و سؤال گفته $t - t' = 20$ ، فقط دقت کنید که واحد سرعتها کیلومتر بر ساعت است و باید ۲۰ دقیقه را به صورت $\frac{1}{3}$ ساعت بنویسیم:

$$\frac{100}{v} - \frac{100}{v+15} = \frac{1 \times 3v(v+15)}{3} \rightarrow 300(v+15) - 300v = v(v+15) \Rightarrow 4500 = v^2 + 15v$$

$$\Rightarrow v^2 + 15v - 4500 = 0 \Rightarrow (v-60)(v+25) = 0 \Rightarrow v = 60 \frac{km}{h}$$

۲۸۰- گزینه ۱

چون $AF = \frac{1}{4}AD$ است، طبق قضیه تالس در ذوزنقه، BE هم یک چهارم BC است، پس می توانیم پاره خطها را مشابه شکل مقابل نام گذاری کنیم:



قطر AC را رسم می کنیم، ۲ تا مثلث به وجود می آید که می شود در هر کدام از آنها، قضیه تالس را نوشت:

$$\Delta ADC: FT \parallel DC \Rightarrow \frac{FT}{DC} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow \frac{FT}{DC} = \frac{1}{4} \Rightarrow FT = \frac{1}{4}DC$$

$$\Delta ABC: TE \parallel AB \Rightarrow TE = \frac{EC}{BC} = \frac{TE}{AB} \Rightarrow \frac{TE}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow TE = \frac{3}{4}AB$$

از طرفی $AB = \frac{2}{5}DC$ است، پس:

$$TE = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{5} \right) DC = \frac{3}{10}DC$$

مجموع پاره خطهای TE و TF برابر FE است:

$$FE = TF + TE = \frac{1}{4}DC + \frac{3}{10}DC = \frac{11}{20}DC \Rightarrow \frac{FE}{DC} = \frac{11}{20}$$

۲۸۱- گزینه ۴

دو تابع با هم برابرند، اگر:

(۱) دامنه برابر داشته باشند.

(۲) ضابطه های یکسان داشته باشند.

ابتدا دامنه تابع اصلی و دامنه تک تک گزینه ها را به دست می آوریم:

$$y = \log \frac{x-2}{x} \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow x < 0 \cup x > 2$$

$$۱) y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow x > 2$$

$$۲) y = \log \frac{x^2-4}{x^2+2x} \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2+2x} > 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} > 0 \xrightarrow{x \neq -2} \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow (x < 0 \cup x > 2) - \{-2\}$$

$$۳) y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$۴) 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow x < 0 \cup x > 2$$

تنها گزینه‌ای که با تابع صورت سؤال دامنه یکسان دارند، ۴ است.

تذکر: دقت کنید که در ۲، قبل از این که $(x+2)$ را از صورت و مخرج ساده کنید، چون $(x+2)$ در مخرج است، معلوم است که x نباید -2 باشد، که مخرج صفر نشود.

۲۸۲- گزینه ۳

یادتان هست که $a^{\log_a b} = b$ ، پس قبول دارید که: $10^{\log_{10}(x+1)} = x+1$ حالا سؤال گفته $10^{\log(x+1)}$ می‌شود ۳، پس داریم:

$$x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

۲۸۳- گزینه ۳

برای از بین بردن رادیکال‌ها، اول صورت و مخرج را در $2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}$ ضرب می‌کنیم، این عبارت مزدوج مخرج است و در مخرج برای از بین بردن رادیکال به کارمان می‌آید ولی در صورت کاری با آن نداریم و مقدارش به ازای $x = -1$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} \times \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4(2x^2 + 5x + 3)}{4 - (2 + \sqrt{3-x})} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{3-x}} \end{aligned}$$

حالا صورت و مخرج را در $2 + \sqrt{3-x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{3-x}} \times \frac{2 + \sqrt{3-x}}{2 + \sqrt{3-x}} &= 16 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{4 - (3-x)} = 16 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)} \\ &= 16 \lim_{x \rightarrow -1} (2x+3) = 16(2(-1)+3) = 16 \end{aligned}$$

۲۸۴- گزینه ۴

تابع f فقط در $x = 2$ پیوسته نیست، پس مخرج کسر فقط در $x = 2$ صفر می‌شود، پس مخرج کسر به صورت $(x - 2)^2$ است، در نتیجه مخرج این شکلی است:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

یعنی ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$ است و در نتیجه داریم:

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1-2)^2} = \frac{-1}{9}$$

۲۸۵- گزینه ۳

$$A = 4 \text{ پیشامد عدد بزرگتر از } = \{5, 6\} \\ B = \text{پیشامد عدد زوج} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{6\}$$

این دو پیشامد اشتراک دارند، پس سازگارند. حالا مستقل بودن را بررسی کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{6}} = \frac{P(A)}{\frac{1}{3}} \times \frac{P(B)}{\frac{1}{2}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

پس A و B مستقل‌اند.

۲۸۶- گزینه ۳

میانگین باید ۱۳ باشد، پس میانگین می‌گیریم و برابر ۱۳ قرار می‌دهیم:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \Rightarrow 13 = \frac{a + 7 + 10 + 14 + 11 + 16 + 18 + 9 + 20}{9} \Rightarrow 13 = \frac{a + 105}{9}$$

$$\Rightarrow 105 + a = 117 \Rightarrow a = 12$$

برای به دست آوردن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20

داده وسط یعنی ۱۲، میانه است.

۲۸۷- گزینه ۲

باید ببینیم ضریب تغییرات کدام کارگر کم‌تر است.

اول میانگین‌ها را حساب کنیم:

$$\bar{X}_A = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد}} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\bar{X}_B = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد}} = 16$$

پس میانگین برای هر دو نفر یکسان است. حالا انحراف معیارها را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sqrt{\frac{(15-16)^2 + (14-16)^2 + (15-16)^2 + (16-16)^2 + (17-16)^2 + (19-16)^2}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{1+4+1+0+1+9}{6}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_B = \sqrt{\frac{0^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2}{6}} = \sqrt{\frac{14}{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

پس انحراف معیار B کم‌تر است در نتیجه ضریب تغییراتش کم‌تر است یعنی دقت عمل بیشتری دارد.

۲۸۸- گزینه ۴

$$[x-2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x-2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

در این بازه، $|x-3| = x-3$ و $|x-4| = 4-x$ است، ضابطه تابع f را بدون قدر مطلق می‌نویسیم:

$$f(x) = |x-3| - |x-4| = (x-3) - (4-x) = 2x-7$$

حالا نقاط برخورد f و g را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x-7 \\ g(x) = 2x^2+x-17 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+x-17 = 2x-7 \Rightarrow 2x^2-x-10 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(2)(-10)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{4} = 2/5, x_2 = \frac{-8}{4} = -2$$

هیچ‌یک از جواب‌ها در بازه $[3, 4)$ قرار ندارند.

۲۸۹- گزینه ۱

ضابطه توابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+3) = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 4 = \frac{2x-1+4(x+2)}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

حالا این دو ضابطه را برابر هم قرار می دهیم تا نقاط برخورد را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{2x+7}{x+6} &= \frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow (2x+7)(x+2) = (6x+7)(x+6) \Rightarrow 2x^2 + 11x + 14 \\ &\Rightarrow 6x^2 + 43x + 42 \Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \\ &\Rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, -7 \end{aligned}$$

۲۹۰- گزینه ۲

وقتی یک کسر برابر صفر باشد، حتماً صورت کسر صفر شده است، در نتیجه:

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \checkmark \\ 3x = 2k\pi + (\pi - (-2x)) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \times \end{cases}$$

اگر $x = (2k+1)\pi$ باشد، $\cos x$ برابر -۱ می شود و مخرج کسر برابر صفر خواهد شد پس جواب های به این شکل قابل قبول نیستند.

۲۹۱- گزینه ۲

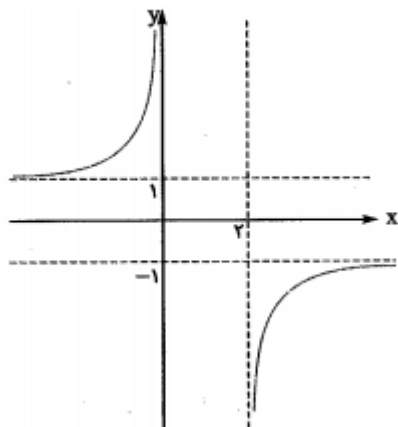
می خواهیم از رابطه $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{-\cos 2x \cdot 1} \Rightarrow y \\ &= -\cos 2x \end{aligned}$$

دوره تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است.

۲۹۲- گزینه ۳

گزینه ها را یکی یکی بررسی می کنیم:



(۱) وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، تابع به خط $y = -1$ نزدیک می شود، پس حد تابع برابر -۱ می شود.

(۲) وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، حد تابع برابر $-\infty$ است، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

(۳) حد تابع در $+\infty$ برابر -۱ است. اما تابع از مقادیر کم تر از -۱، مثلاً -۱/۱ و -۱/۲ به -۱ نزدیک می شود، جزء صحیح این اعداد برابر -۲ است نه -۱.

(۴) شبیه ۲ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

۲۹۳- گزینه ۲

چون شیب خط مماس برابر ۵ است، پس خط مماس در جایی از تابع رسم شده است که مشتق برابر ۵ بوده است.

$$y' = 4x - 3 = 5 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

مقدار تابع در $x = 2$ برابر است با:

$$y(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8$$

پس خط مماس در نقطه $(2, 8)$ رسم شده است. یعنی این نقطه در خط مماس صدق می‌کند:

$$y = 5x + a \xrightarrow{(2,8)} 8 = 5(2) + a \Rightarrow 8 = 10 + a \Rightarrow a = -2$$

۲۹۴- گزینه ۳

با یک تابع مرکب سروکار داریم، پس باید از رابطه $(f(u))' = u' \times f'(u)$ استفاده کنیم:

$$(f(xf(x)))' = (xf(x))' \times f'(xf(x)) = ((1)f(x) + (x)f'(x)) \times f'(xf(x))$$

به جای x ، عدد یک را قرار می‌دهیم تا عبارت ساده‌تر شود:

$$(f(xf(x)))'_{x=1} = (f(1) + f'(1)) \times f'(1f(1))$$

$f(1)$ که برابر ۲ است، پس می‌ماند $f'(1)$ و $f'(2)$ ، باید مشتق f را بگیریم و اعداد ۱ و ۲ را جای‌گذاری کنیم:

$$f(x) = x\sqrt{x} + 1 = x^{\frac{3}{2}} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} = \frac{3}{2}, f'(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

حالا این‌ها را هم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(f(1) + f'(1)) \times f'(2) = \left(2 + \frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{21\sqrt{2}}{4}$$

۲۹۵- گزینه ۲

اول ببینیم کجا مشتق صفر است. مشتق تابع $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$ است. اگر مشتق را مساوی صفر

قرار دهیم، از ضابطه بالا $x = 1$ و $x = -1$ به دست می‌آیند که فقط $x = 1$ قبول است. از ضابطه پایین هم $x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید که با شرط $x < 0$ تطبیق ندارد.

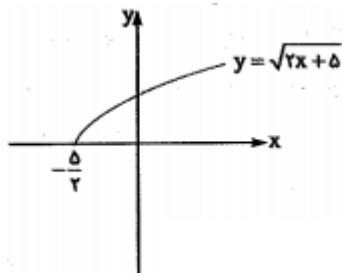
پس می‌رویم سراغ این که کجا مشتق وجود ندارد. مرز دامنه‌ها یعنی $x = 0$ را چک می‌کنیم. اول پیوستگی و سپس مشتق‌پذیری را کنترل کنیم. چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$ پس تابع پیوسته است. حالا مشتق

چپ و راست را مقایسه می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x > 0 \\ x^2 - x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

مشتق راست $3(0)^2 - 3 = -3$ و مشتق چپ $2(0) - 1 = -1$ است، پس تابع در $x = 0$ مشتق پذیر نیست، در نتیجه بحرانی است. پس $x = 0$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع f اند.

۲۹۶- گزینه ۳



فاصله مبدأ از هر نقطه (x, y) برابر است با:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

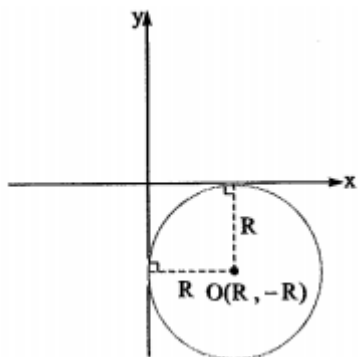
در تابع سؤال y برابر $\sqrt{2x+5}$ است، پس داریم:

$$d = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2x+5})^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 5} = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$$

مشخص است که کمترین مقدار عبارت زیر رادیکال در $x = -1$ رخ می‌دهد. عرض تابع در $x = -1$ برابر است با:

$$y = \sqrt{2(-1) + 5} = \sqrt{3}$$

۲۹۷- گزینه ۲



نقطه $(1, -2)$ در ربع چهارم است، پس دایره باید در ربع چهارم باشد. مطابق شکل، مرکز دایره $(R, -R)$ و شعاعش R است.

پس معادله‌اش را می‌نویسیم:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

این دایره از $(1, -2)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند:

$$(1 - R)^2 + (-2 + R)^2 = R^2 \Rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \\ \Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow R = 1, 5$$

۲۹۸- گزینه ۱

نکته: دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ شعاع و مرکز از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

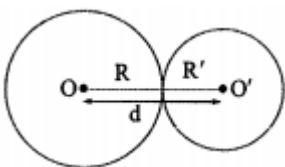
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 \Rightarrow O(1, -3), R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 + 32} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow O'(-4, 2), R' = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 16 - 48} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R + R' = 5\sqrt{2}$$

برای تعیین وضعیت دو دایره، به طول خط‌المركزین هم احتیاج داریم:

$$OO' = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

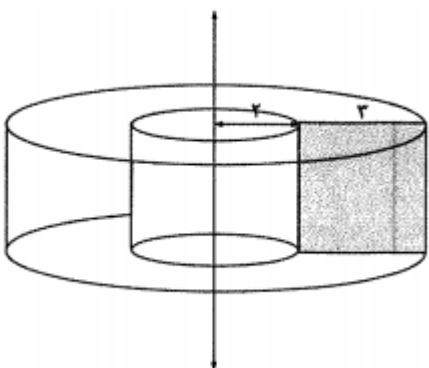
خط‌المركزین دایره‌ها برابر $R + R'$ است، پس این دو دایره، مماس خارج است.



$$d = R + R'$$

۲۹۹- گزینه ۴

طبق شکل زیر حجم حاصل از دوران، یک استوانه به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۳ است که یک استوانه با شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ از آن درآورده شده است. پس برای محاسبه حجم، باید حجم استوانه کوچک را از حجم استوانه بزرگ کم کنیم:



$$V = \pi(5^2)(3) - \pi(2^2)(3) = \pi(75 - 12) = 63\pi$$

۳۰۰- گزینه ۴

وقتی A و B افزایش از S هستند و احتمال A دو برابر B است. احتمال‌های آن‌ها به ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ خواهد بود. اول $P(C)$ را با استفاده از قانون احتمال کل حساب می‌کنیم:

$$P(C) = \frac{2}{3}(0/2) + \frac{1}{3}(0/3) = \frac{7}{30}$$

با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Rightarrow P(A \cap C) = P(A|C) \times P(C)$$

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap C) = P(C|A) \times P(A)$$

در نتیجه:

$$P(A|C) \times P(C) = P(C|A) \times P(A) \Rightarrow P(A|C) \times \frac{7}{30} = \frac{2}{10} \times \frac{2}{3} \Rightarrow P(A|C) = \frac{4}{7}$$

۳۰۱- گزینه ۴

اگر این ۳ جمله، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند پس:

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ x^2 = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

به جای x مقادیر پیدا شده را جای گذاری می کنیم:

$$x^2 + 4, 2x, x^2 - 2 \xrightarrow{x=-2} 8, -4, 2 \Rightarrow \text{دنباله نه صعودی و نه نزولی است.}$$

$$x^2 + 4, 2x, x^2 - 2 \xrightarrow{x=2} 8, 4, 2 \Rightarrow \text{دنباله نزولی است.}$$

مجموع این ۳ جمله ۱۴ است.

۳۰۲- گزینه ۲

مثلث را نام گذاری می کنیم.

در مثلث BCD داریم:



$$\tan \alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

در مثلث ABC می توان نوشت:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{AC}{BC} = \frac{2x + x}{\sqrt{3}x} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$$

۳۰۳- گزینه ۲

مخرج کسر را گویا می کنیم:

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{5} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2})}{5 - (3 + 2 + 2\sqrt{6})}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2})}{-2\sqrt{6}} = -\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

حال مجموع این مقدار با $\sqrt{5}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{5} = (-\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}) + \sqrt{5} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

۳۰۴- گزینه ۲

نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم و طرفین وسطین می‌کنیم.

$$\left| \frac{x-1}{ax+2} \right| < 1 \Rightarrow \frac{|x-1|}{|ax+2|} < 1 \Rightarrow |x-1| < |ax+2|$$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$x^2 - 2x + 1 < a^2x^2 + 2ax + 4 \Rightarrow (a^2 - 1)x^2 + (2a + 2)x + 3 > 0$$

جواب این نامعادله به صورت یک بازه در آمده است پس باید $a^2 - 1 = 0$ باشد.

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\begin{cases} a = 1 \Rightarrow 4x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{4} \\ a = -1 \Rightarrow 3 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \text{ با شرایط مسأله مطابقت نیست} \end{cases}$$

در نتیجه $a = 1$ و $b = -\frac{3}{4}$ هستند.

$$a + b = \frac{1}{4}$$

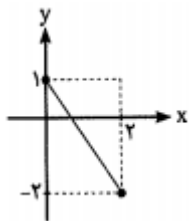
۳۰۵- گزینه ۳

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر a و c مختلف‌العلامت باشند $\Delta = b^2 - 4ac$ مثبت و معادله دارای ۲ ریشه است.

فقط در گزینه «۳»، a و c مختلف‌العلامت هستند و معادله دارای ۲ ریشه است.

۳۰۶- گزینه ۳

نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



دو نقطه از این تابع نزولی $(0, 1)$ و $(2, -2)$ است.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 1 = a(0) + b \Rightarrow b = 1 \\ -2 = a(2) + b \Rightarrow -2 = a(2) + 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

ضابطه تابع $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$ است. مقدار تابع در $x = 1$ برابر است با:

$$f(1) = -\frac{3}{2}(1) + 1 = -\frac{1}{2}$$

۳۰۷- گزینه ۴

ابتدا تعداد طعم‌هایی که با ۲ یا ۳ ادویه می‌توان ساخت را محاسبه می‌کنیم.

$$\overbrace{\binom{3}{2} \times \binom{7}{1}}^{\text{ادویه‌ای دیگر و 2 ادویه از 3 تا}} = 3 \times 7 = 21 \quad \overbrace{\binom{3}{3}}^{\text{3 ادویه}} = 1$$

در مجموع ۲۲ نوع طعم نباید درست شوند. حال این تعداد را از کل تعداد طعم‌هایی که تهیه می‌شوند کم می‌کنیم.

تعداد کل هاطعم

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

$$\text{جواب سؤال} = 120 - 22 = 98$$

۳۰۸- گزینه ۱

۴ سفید ۵ سیاه	۶ سفید ۳ سیاه	۶ سفید ۳ سیاه
A	B	C

$$\frac{1}{3} \times \left(\underbrace{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}_{\text{ظرف A}} + \underbrace{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}_{\text{ظرف B}} + \underbrace{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}_{\text{ظرف C}} \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{6 \times 10}{126} + \frac{15 \times 3}{126} + \frac{15 \times 3}{126} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{150}{126} = \frac{25}{63}$$

۳۰۹- گزینه ۲

برای این که خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ بر هم منطبق شوند باید:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

در مورد دو خط $mx + y + (1 - m) = 0$ و $3x + (m - 2)y + 2m - 4 = 0$ نیز می توان گفت:

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{1-m}{2m-4}$$

برای حل این معادله آن را تفکیک می کنیم:

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} \Rightarrow m^2 - 2m = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 3$$

به ازای $m = 3$ حاصل کسر سوم با دو کسر اول برابر نیست ولی به ازای $m = -1$ داریم:

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{1-m}{2m-4} \xrightarrow{m=-1} \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6}$$

پس به ازای $m = -1$ دو خط بر هم منطبق اند.

۳۱۰- گزینه ۱

اگر ریشه های معادله را α و β بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P &= 6 \xrightarrow[S=\frac{m+3}{m}]{P=\frac{5}{m}} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} \\ &= 6 \xrightarrow{\times m^2} 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-9}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

حالا باید ببینیم از مقادیر $m = 1$ و $m = \frac{-9}{5}$ کدام یک دلتای معادله اصلی را نامنفی می کنند (تا بگوییم ریشه ها حقیقی اند).

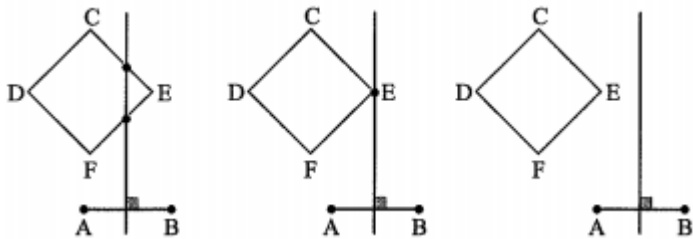
$$m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 20 < 0 \quad \times$$

$$m = \frac{-9}{5} \Rightarrow \Delta > 0 \quad \checkmark$$

با توجه به گزینه ها، وقتی $m = 1$ رد می شود، بدون امتحان کرد $m = \frac{-9}{5}$ را قبول می کنیم.

۳۱۱- گزینه ۲

عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم و حالت های زیر را در نظر می گیریم.



همان طور که می بینید حداکثر ۲ نقطه بر روی مربع وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد.

۳۱۲- گزینه ۱

در مثلث ACD با توجه به این که $EQ \parallel DC$ است داریم:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EQ}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EQ}{6} \Rightarrow EQ = 3$$

از طرفی در مثلث ABD با توجه به این که $EP \parallel AB$ است، داریم:

$$\frac{DE}{DA} = \frac{EP}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EP}{3} \Rightarrow EP = \frac{3}{2}$$

در نتیجه طول پاره خط PQ را می یابیم:

$$PQ = EQ - EP = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

۳۱۳- گزینه ۲

مختصات نقاط A و B در تابع صدق می کنند:

$$f(x) = a(b)^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{b} \\ B(1, 11): a(b)^1 - 1 = 11 \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{b} (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{b} = \frac{12}{b} \Rightarrow b\sqrt{b} = 8 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{(*)} a = 3$$

پس تابع f به صورت $f(x) = 3(4)^x - 1$ است. بنابراین $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = 3(4)^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۳۱۴- گزینه ۳

مساحت قطاع را محاسبه می کنیم.

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(2)^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

مساحت مثلث AOB را محاسبه می‌کنیم.

$$S' = \frac{1}{2}(r)(r) \sin \theta = \frac{1}{2}(2)(2) \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

مساحت قسمت رنگ‌شده:

$$S - S' = \frac{\pi}{3} - 1$$

۳۱۵- گزینه ۴

$$\begin{aligned} \log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5 &\xrightarrow{1=\log_x x} \log_x(x^2 + 4) = \log_x x + \log_x 5 \Rightarrow \log_x(x^2 + 4) \\ &= \log_x 5x \Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow \log_2 4 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

پس:

$$\log_2 4 = 2$$

۳۱۶- گزینه ۲

چون حاصل $\frac{0}{0}$ است، با استفاده از قاعده هوییتال حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2x^2 + 5x + 2} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{4x + 5} = \frac{12}{-8 + 5} = \frac{12}{-3} = -4$$

۳۱۷- گزینه ۱

نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ برای تابع، یک نقطه درونی بوده و شرط پیوستگی تابع در این نقطه به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

با توجه به ضابطه تابع، حد راست و مقدار از ضابطه پایینی و حد چپ از ضابطه بالایی به دست می‌آید:

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ در حد راست و مقدار تابع در } = a \cos \frac{3\pi}{4} = -a \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{برابری دو مقدار}} -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

۳۱۸- گزینه ۱

دو فرزند وسط هم جنس هستند بنابراین فضای نمونه‌ای به صورت زیر است.

اگر بخواهیم تابع $y = f(x)$ را a واحد به طرف x های منفی و b واحد به طرف y های مثبت انتقال دهیم به تابع $y = f(x+a) + b$ می‌رسیم. در این تست $y = f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ ، $a = 4$ و $b = 1$ می‌باشد. در نتیجه تابع انتقال یافته به صورت $y = \left|\frac{1}{2}(x+4)\right| - 2 + 1$ یا $y = \left|\frac{1}{2}x + 2\right| - 1$ می‌باشد. حالا باید معادله $\left|\frac{1}{2}x + 2\right| - 1 = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ را حل کنیم. برای حل این معادله از روش تعیین علامت استفاده می‌کنیم. اما روش ساده‌تر این است که ببینیم عدد موجود در کدام گزینه در این معادله صدق می‌کند. با امتحان گزینه‌ها به جواب $x = -3$ می‌رسیم:

$$\left|\frac{1}{2}x + 2\right| - 1 = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2 \xrightarrow{x=-3} \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \checkmark$$

عدد سایر گزینه‌ها ما را به تناقض می‌رساند. (امتحان کنید!)

۳۲۱- گزینه ۳

برای یافتن دامنه $(g \circ f)(x)$ به نکته زیر دقت کنید:

$$(g \circ f)(x) = g \left(\underbrace{f \left(\begin{array}{c} \text{ورودی } x \text{ از دامنه } f(x) \\ \vec{x} \end{array} \right)}_{\text{ورودی } g(x) \text{ از برد تابع } f(x)} \right)$$

با توجه به این که دامنه (ورودی) تابع $g(x)$ از روی نمودار برابر $[-1, 2]$ است قسمتی از تابع $f(x)$ قابل قبول است که برد آن $[-1, 2]$ باشد، مشخص است برد تابع $f(x)$ در بازه $\{0\} - [-4, 2]$ برابر $[-1, 2]$ است.

۳۲۲- گزینه ۲

ابتدا با توجه به نمودار داده شده، مقادیر مجهول a و b را می‌یابیم. از نمودار پیداست که:

اولاً: تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد، لذا:

$$3 = a + 0 \Rightarrow a = 3$$

ثانیاً: دوره تناوب تابع برابر است با ۴. لذا:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = (5 - 1) = 4 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به جهت حرکت نمودار تابع، بلافاصله در سمت راست محور y ها، حرکت تابع به سمت پایین است.

(در تابع $y = \sin x$ نمودار، بلافاصله در سمت راست محور y ها به سمت بالا حرکت می‌کند.) پس $b = \frac{-1}{2}$ را

می‌پذیریم. در نتیجه:

$$y = a + \sin(b\pi x) \Rightarrow y = 3 + \sin\left(-\frac{\pi x}{2}\right) \xrightarrow{x=\frac{25}{3}} y = 3 + \sin\left(\frac{-25\pi}{6}\right) = 3 - \frac{1}{2} = 2/5$$

نکته: دوره تناوب تابع‌هایی به فرم $y = \sin(kx)$ برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|k|}$$

برای محاسبه $\sin\left(\frac{-25\pi}{6}\right)$ این‌گونه عمل کردیم:

$$\sin\left(\frac{-25\pi}{6}\right) = -\sin\frac{25\pi}{6} = -\sin\left(\frac{24+1}{6}\pi\right) = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$$

۳۲۳- گزینه ۲

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x \cos x &= \cos^2 x - \sin x \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \sin 2x \\ &= \cos 2x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} + \left(2x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right\} \right. \\ - \left(2x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \right. \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{9\pi}{8}$ است.

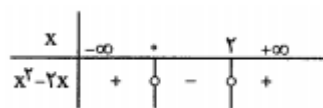
۳۲۴- گزینه ۳

با توجه به آن که حاصل حد برابر $-\infty$ است و صورت آن مخالف صفر است بنابراین مخرج کسر $\frac{b}{x^2-ax}$ وقتی $x \rightarrow 2^+$ میل می‌کند باید برابر صفر باشد، پس:

$$x^2 - ax = 0 \xrightarrow{x=2} 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

با تعیین علامت عبارت $x^2 - 2x$ داریم:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2$$



عبارت $x^2 - 2x$ وقتی $x > 2$ باشد، مثبت است بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{b}{x^2 - 2x} = \frac{b}{0^+} = -\infty \Rightarrow b < 0$$

۳۲۵- گزینه ۲

ابتدا همه عبارت‌ها به جز y را به سمت دیگر تساوی می‌بریم تا تابعی بر حسب y داشته باشیم.

$$y - \sqrt{2x+5} - \frac{16}{3x} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2x+5} + \frac{16}{3x}$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 2$ برابر مشتق تابع y در این نقطه است، بنابراین:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} - \frac{16}{3x^2} \xrightarrow{\text{شیب در نقطه } x=2} m = \frac{2}{2 \times 3} - \frac{16}{3 \times 4} = -1$$

با قرار دادن $x = 2$ در تابع y یک نقطه از تابع را می‌یابیم و با داشتن شیب آن نقطه معادله خط را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x = 2 \Rightarrow y &= \sqrt{2(2)+5} + \frac{16}{3(2)} = \frac{17}{3} \Rightarrow A\left(2, \frac{17}{3}\right) \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - \frac{17}{3} = -1(x-2) \Rightarrow y \\ &= -x + \frac{23}{3} \end{aligned}$$

با ضرب طرفین تساوی در عدد ۳ داریم:

$$3y = -3x + 23 \Rightarrow 3y + 3x = 23$$

۳۲۶- گزینه ۳

ضابطه داده شده همان $f(x) = |x|$ است. این تابع در $x = 0$ مشتق ندارد.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار گزینه ۳ صحیح است.

۳۲۷- گزینه ۲

ابتدا دقت کنید که:

$$f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

پس آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[4, 12]$ (از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$) برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2(12)+1}} - \frac{1}{\sqrt{2(4)+1}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{3-5}{8 \times 15} = -\frac{1}{60}$$

آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = 4$ برابر $f'(4)$ است، در نتیجه:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{(\sqrt{2x+1})^2}$$

$$f'(4) = \frac{-\frac{1}{3}}{9} = -\frac{1}{27}$$

پس تفاضل آهنگ لحظه‌ای از متوسط برابر است با:

$$-\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{-9 + 20}{540} = \frac{11}{540}$$

پس آهنگ متوسط به اندازه $\frac{11}{540}$ از آهنگ لحظه‌ای بیش تر است.

۳۲۸- گزینه ۲

نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها صفر است را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 18x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{نقطه بحرانی}) \\ x = 3 & \notin [-1, 2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = -13, f(-1) = 2 + 9 - 13 = -2 \\ f(2) = -16 + 36 - 13 = 7 \end{cases} \Rightarrow M = 7, m = -13$$

$$M + m = 7 - 13 = -6$$

۳۲۹- گزینه ۱

معادله دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می‌گیریم. چون دایره از سه نقطه $A(0, 0)$ ، $B(2, 1)$ و $C(1, -2)$ می‌گذرد، مختصات آن‌ها در معادله دایره صدق می‌کند:

$$A(0, 0): 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\begin{cases} B(2, 1): 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \xrightarrow{c=0} 2a + b = -5 \\ C(1, -2): 1 + a - 2b + c = 0 \xrightarrow{c=0} a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -3, b = 1$$

پس معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$ است. در نتیجه شعاع برابر است با:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

۳۳۰- گزینه ۴

پیشامد بالای ۱۸ بودن معدل دانش‌آموزان را A در نظر می‌گیریم:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{50}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{40}{100} = \frac{25 + 20}{100} = 0/45$$

۳۳۱- گزینه ۳

در دسته اول یک جمله، در دسته دوم، ۲ جمله و... وجود دارد. اگر پرانتزها را برداریم:

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

برای یافتن شماره اولین و آخرین جمله دسته سی ام تعداد جملات را می شماریم:

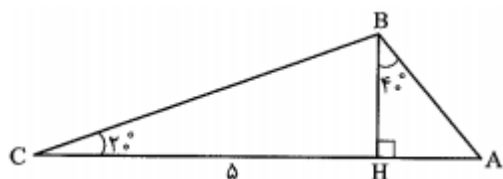
$$\text{شماره آخرین جمله دسته سی ام} = 1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{30(30+1)}{2} = 465$$

$$\text{شماره اولین جمله دسته سی ام} = (\text{شماره آخرین جمله دسته بیست و نهم}) + 1 = \frac{29(29+1)}{2} + 1 = 436$$

در واقع ما باید ۴۶۵ امین و ۴۳۶ امین اعداد فرد طبیعی (شروع از ۱) را بیابیم و با هم جمع کنیم. جمله n ام اعداد فرد $a_n = 2n - 1$ است.

$$a_{465} + a_{436} = 2(465) - 1 + 2(436) - 1 = 1800$$

۳۳۲- گزینه ۱



با توجه به این که $\cos 40 = \sin 50 = 0/76$ و $\tan 20 = \cot 70 = 0/36$ در مثلث BCH داریم:

$$\tan 20 = \frac{BH}{CH} \Rightarrow 0/36 = \frac{BH}{5} \Rightarrow BH = 1/8$$

هم چنین در مثلث ABH می توان نوشت:

$$\cos 40 = \frac{BH}{AB} \Rightarrow 0/76 = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BH}{0/76} = \frac{1/8}{0/76} = 2/3$$

۳۳۳- گزینه ۴

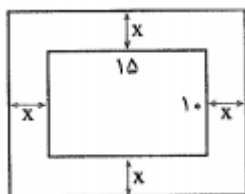
$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}) = (x+3) - (x+1) = 2$$

با توجه به این که $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 4$ است، پس:

$$4 \times (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}) = 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۳۳۴- گزینه ۲

ابعاد قاب عکس $15 + 2x$ و $10 + 2x$ است. با توجه به این که مساحت این قاب ۳۰۰ سانتی متر است، پس:



$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \rightarrow 150 + 20x + 30x + 4x^2 = 300$$

$$4x^2 + 50x - 150 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 25x - 75 = 0$$

$$\Delta = 625 + 600 = 1225 \rightarrow x = \frac{-25 \pm 35}{4} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-60}{4}, \frac{10}{4}$$

فقط $x = \frac{10}{4} = 2/5$ قابل قبول است چون طول نمی تواند منفی باشد پس طول قاب عکس $15 + 2x = 15 + 2(2/5) = 20$ است.

۳۳۵- گزینه ۱

عرض ماکزیمم تابع درجه دوم را می یابیم:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(3^2 - 4(-2)(3))}{4(-2)} = \frac{33}{8}$$

۳۳۶- گزینه ۳

برای این که دو مهره هم رنگ نباشند باید یکی از حالت های زیر رخ دهد:

هر دو غیر هم رنگ = یا یکی قرمز و یکی سفید یا یکی سیاه و یکی سفید یا یکی قرمز و یکی سیاه

$$\Rightarrow P = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} + \frac{15}{45} + \frac{10}{45} = \frac{31}{45}$$

دقت کنید که فضای نمونه ای برابر تعداد حالت انتخاب دو مهره از ده مهره است یعنی: $\binom{10}{2}$

۳۳۷- گزینه ۴

ریشه های این معادله را α و β در نظر می گیریم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس ریشه های معادله خواسته شده به صورت زیر است:

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1 \right\}$$

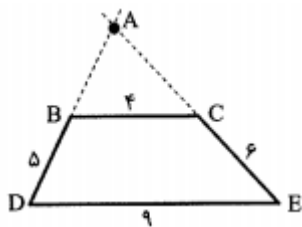
$$S' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$P' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - (-3) + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$$

حال با کمک رابطه $x^2 - S'x + P' = 0$ معادله مورد نظر را می یابیم:

$$\begin{cases} S' = -5 \\ P' = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

۳۳۸- گزینه ۴



در ذوزنقه $BCED$, $DE \parallel BC$. پس در مثل ADE طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{AB}{AB+5} = \frac{AC}{AC+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow AB = 4, AC = 4/8$$

محیط مثلث ABC : $AB + AC + BC = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$

۳۳۹- گزینه ۱

مثلث AHB و مثلث ABC به دلیل مشترک بودن زاویه B متشابه هستند.

$$\frac{AC}{AH} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH} \rightarrow AB^2 = BC \times BH$$

اگر BH را x در نظر بگیریم:

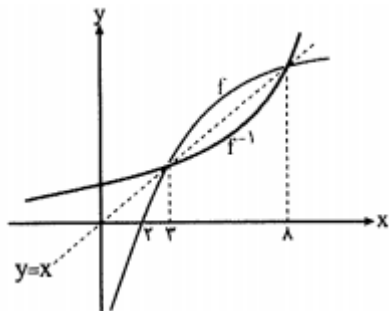
$$5^2 = (x+4)x \Rightarrow x^2 + 4x = 25 \xrightarrow{+4} x^2 + 4x + 4 = 29 \Rightarrow (x+2)^2 = 29 \Rightarrow x+2 = \sqrt{29} \\ \Rightarrow x = \sqrt{29} - 2$$

۳۴۰- گزینه ۴

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد تا تعریف شده باشد. بنابراین:

$$\sqrt{x - f^{-1}(x)} : x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

پس باید به دنبال فاصله‌ای باشیم که نمودار خط $y = x$ بالاتر یا مساوی نمودار منحنی $y = f^{-1}(x)$ قرار می‌گیرد. از طرفی با توجه به نمودار f ، نمودار f^{-1} به صورت زیر خواهد بود. (نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.)



با توجه به نمودار، در فاصله $[3, 8]$ نمودار f^{-1} پایین یا مساوی خط $y = x$ قرار می‌گیرد. بنابراین دامنه تابع داده‌شده برابر فاصله $[3, 8]$ است.

۳۴۱- گزینه ۲

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

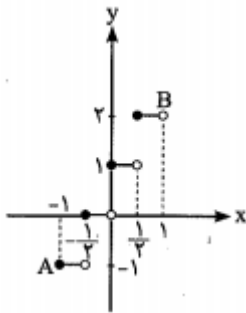
$$-1 \leq x < \frac{-1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow f(x) = [2x] + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow f(x) = [2x] + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow f(x) = [2x] + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow f(x) = [2x] + 1 = 1 + 1 = 2$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



مختصات $A(-1, -1)$ و $B(0.5, 2)$ است. فاصله دو نقطه A و B را می‌یابیم.

$$AB = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{13}$$

۳۴۲- گزینه ۱

اول نسبت‌ها را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\cos(285^\circ) = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(255^\circ) = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin(525^\circ) = \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(105^\circ) = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

با توجه به این که مقدار $\tan 15^\circ$ را داریم، صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{کسر} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} \xrightarrow{\tan 15^\circ = 0/28} \frac{0/28 + 1}{0/28 + 1} = \frac{1/28}{-0/72} = \frac{-16}{9}$$

۳۴۳- گزینه ۳

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 90 - 40(3)^{-0/02t} \Rightarrow 70 = 90 - 40(3)^{-0/02t} \Rightarrow 20 = 40(3)^{-0/02t} \Rightarrow (3)^{-0/02t} \\
 &= \frac{1}{2} \Rightarrow 0/02 t = \log_3 \frac{1}{2} \Rightarrow -0/02 t = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log 3} = \frac{-\log 2}{\log 3} \Rightarrow 0/02 t = \frac{\log 2}{\log 3} \\
 &\Rightarrow 0/02 t = \frac{0/3}{0/5} \Rightarrow t = 30
 \end{aligned}$$

۳۴۴- گزینه ۳

صورت کسر را با کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 + \sin x + \sin^2 x \\
 &= 1 + 1 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

۳۴۵- گزینه ۲

چون تابع روی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ پیوسته است پس باید در نقاط مرزی ضابطه هم پیوسته باشد. نقطه $x = 6$ نقطه مرزی ضابطه است که حد راست و حد چپ تابع را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

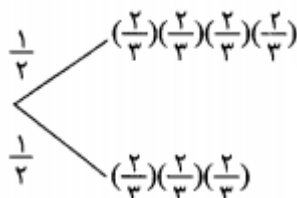
$$\begin{aligned}
 \text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} \left(a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} \right) = a + \cos^2 \frac{6\pi}{36} = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\
 &= a + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

برای پیوستگی در نقاط بزرگ‌تر از ۱ باید:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = f(6)$$

$$\frac{1}{2} = a + \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$$

۳۴۶- گزینه ۳

در پرتاب تاس، احتمال رو شدن عددی زوج $\frac{1}{2}$ و احتمال رو شدن عددی فرد $\frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{81} + \frac{4}{27} = \frac{8+12}{81} = \frac{20}{81}$$

۳۴۷- گزینه ۱

داده‌ها را از کم به زیاد مرتب می‌کنیم:

1, 4, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 17, 19, 20

میانه داده‌ها، میانگین ۲ داده ششم و هفتم است.

$$\text{میانه یا چارک دوم} = \frac{9 + 10}{2} = 9/5$$

در داده‌های نیمه کمتر از میانه، چارک اول میانه ۶ داده اول یعنی ۴/۵ است. در داده‌های نیمه بیشتر از میانه، چارک سوم میانه ۶ داده دوم یعنی ۱۴/۵ است. داده‌های بین ۴/۵ و ۱۴/۵ عبارتند از:

5, 7, 9, 10, 11, 12

میانگین این داده‌ها ۹ است.

$$\sigma^2 = \frac{(5-9)^2 + (7-9)^2 + (9-9)^2 + (10-9)^2 + (11-9)^2 + (12-9)^2}{6} = \frac{34}{6} \approx 5/6$$

۳۴۸- گزینه ۴

ابتدا دامنه تابع‌های f و g را می‌یابیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_2(x^2 + 2x) \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حال دامنه تابع $f \circ g$ را می‌یابیم.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0\} \cap \{x \mid \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

$$\log_2 x^2 + 2x \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

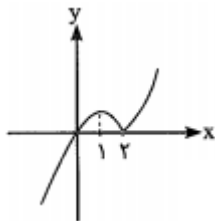
$$D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

۳۴۹- گزینه ۳

ضابطه تابع را بدون قدر مطلق می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در بازه $(1, 2)$ نزولی است، حال ضابطه وارون را در این بازه می‌یابیم.

$$y = -x^2 + 2x \Rightarrow y - 1 = -(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow x = \sqrt{1 - y} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x} + 1$$

با توجه به برد تابع وقتی $1 < x < 2$ است می‌توان گفت:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x} + 1 \quad 0 < x < 1$$

۳۵۰- گزینه ۲

طرفین معادله $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ را ۲ برابر می‌کنیم.

$$2\alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\beta \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right) \Rightarrow \sin 2\alpha = \cos 2\beta$$

از طرفی می‌دانیم $\cos 2\beta = \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}$ است.

$$\sin 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} = 0/6$$

۳۵۱- گزینه ۱

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = -2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin(-2x) \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right) \Rightarrow \cos 2x$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x & \text{غ ق ق} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۳۵۲- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n - 3}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{-x^2} = -3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ n = 2 \end{cases}$$

حال حد تابع را در $x = 1$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^n - 2}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{-(x+2)(x-1)} = \frac{6}{-3} = -2$$

۳۵۳- گزینه ۲

ابتدا در همسایگی چپ (-۱) تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(-x)(-2)}{-(x+1)} + \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(2x-1)} = \frac{-2x}{x+1} + \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2}{0^-} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x+1}{2x-1} = -\infty - 1 = -\infty$$

۳۵۴- گزینه ۲

تابع $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم. فقط ابتدا باید توابع f و g را با حذف قدر مطلق بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}x & , x \geq 0 \\ \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}x & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x & , x \geq 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 4x + x & , x \geq 0 \\ 4x - x & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 5x & , x \geq 0 \\ 3x & , x < 0 \end{cases}$$

پس ضابطه $f \circ g$ برابر است با:

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{3}{5}(5x) & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

۳۵۵- گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 1 \\ \Delta x = 0/21 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(1 + 0/21) - f(1)}{1 + 0/21 - 1} = \frac{f(1/21) - f(1)}{0/21} \\ &= \frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{0/21} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{1}{2/1} \end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ در آهنگ لحظه‌ای در } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x = 1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2/1} = \frac{2/1 - 2}{2 \times 2/1} = \frac{0/1}{4/2} = \frac{1}{42}$$

۳۵۶- گزینه ۳

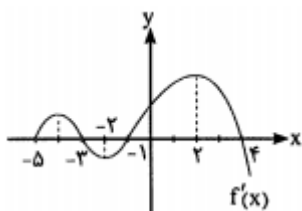
از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2(m+2)x + 3$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 2(m+2)x + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 4(m+2)^2 - 36 < 0 \Rightarrow (m+2)^2 < 9 \Rightarrow -3 < m+2 < 3 \Rightarrow -5 < m < 1$$

گزینه ۲ - ۳۵۷

با توجه به شکل، بازه‌ای که $f' > 0$ باشد جواب سؤال است. وسیع‌ترین بازه‌ای که $f' > 0$ باشد بازه $(-1, 4)$ است که طول بازه $4 - (-1) = 5$ می‌باشد.



گزینه ۳ - ۳۵۸

طرفین رابطه داده‌شده را بر a^2 تقسیم می‌کنیم:

$$3 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 10\frac{b}{a} \xrightarrow{b=A} 3A^2 - 10A + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

چون $b < a$ است پس فقط $A = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. یعنی $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ می‌باشد. حال خروج از مرکز:

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

گزینه ۳ - ۳۵۹

مرکز دایره و نقطه‌های برخوردش با محور x ها را حساب می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \Rightarrow w(2, 2) \text{ مرکز دایره}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, 4 \xrightarrow{x>0} x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$$

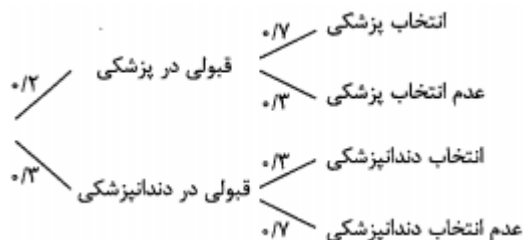
حال معادله دایره‌ای را می‌نویسیم که دو سر قطر آن A و W باشد:

$$O = \frac{W + A}{2} = (3, 1)$$

$$r = \frac{1}{2}|AW| = \frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$$

گزینه ۲ - ۳۶۰



$$P = 0/2 \times 0/7 + 0/3 \times 0/3 = 0/14 + 0/09 = 0/23$$

۳۶۱- گزینه ۴

ابتدا چند جمله از این دنباله را می نویسیم:

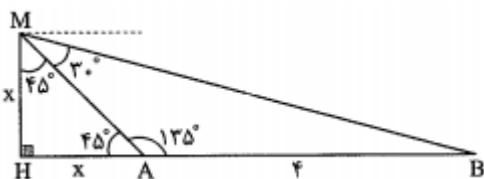
$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 = 2^1 - 1 \\ a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1 \\ a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 = 2^3 - 1 \\ \vdots \end{cases}$$

با همین روند متوجه می شویم که جمله عمومی دنباله را می توان به صورت $a_n = 2^n - 1$ در نظر گرفت، پس:

$$a_8 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

۳۶۲- گزینه ۲

از نقطه M بر امتداد AB عمود می کنیم. طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

در نتیجه $M\hat{A}H = A\hat{M}H = 45^\circ$ و $M\hat{A}B = 135^\circ$ و $A\hat{M}H = 45^\circ$ بنابراین $AH = MH = x$ برای محاسبه x کفایت طول MB را حساب کنیم تا با قضیه فیثاغورس مقدار x به دست آید. با استفاده از رابطه محاسبه مساحت مثلث MAB داریم:

$$\Delta MAB: S = \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot \sin A\hat{M}B = \frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin M\hat{A}B \Rightarrow MB \cdot \sin A\hat{M}B = AB \cdot \sin M\hat{A}B$$

$$MB \cdot \sin 30^\circ = 4 \times \sin 135^\circ \Rightarrow MB \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MB = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \Delta MHB: MH^2 + HB^2 &= MB^2 \Rightarrow x^2 + (4+x)^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 16 + 8x = 32 \\ &\Rightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

۳۶۳- گزینه ۱

عبارت مورد نظر را تا حد امکان ساده می‌کنیم $((\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta)$ و $((\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta)$ مزدوج یکدیگرند، پس داریم:

$$A = (\alpha^2 - \beta^2) \left((\alpha + \beta^2) + \alpha\beta \right) \left((\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta \right) = (\alpha^2 - \beta^2) \left((\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 \right)$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2) = \alpha^6 - \beta^6$$

حال مقادیر α و β را جای‌گذاری می‌کنیم. با توجه به این که $6 + \sqrt{11} = \left(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2$ و $6 - \sqrt{11} = \left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2$ داریم:

$$A = \alpha^6 - \beta^6 = \left(\sqrt[12]{6 + \sqrt{11}} \right)^6 - \left(\sqrt[12]{6 - \sqrt{11}} \right)^6 = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) - \left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

۳۶۴- گزینه ۲

ابتدا به کمک ویژگی $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ نامعادله را کمی ساده کرده و سپس با به توان ۲ رساندن طرفین، حل را ادامه می‌دهیم:

$$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \rightarrow \frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1 \xrightarrow[\substack{\text{طرفین وسطین می‌کنیم} \\ x \neq \frac{3}{2}}]{\text{طرفین به توان 2}} |2-x| > |2x-3| \xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} (2-x)^2 > (2x-3)^2$$

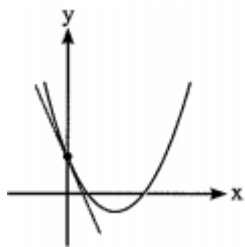
$$> (2x-3)^2 \Rightarrow 4 + x^2 - 4x > 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \Rightarrow \Delta$$

$$= 4 \xrightarrow{\text{بعد از تعیین علامت}} 1 < x < \frac{5}{3}$$

توجه: در نامعادله داده شده، $x = \frac{3}{2}$ ریشهٔ مخرج است، پس دامنهٔ نامعادله به صورت $\mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ می‌باشد. با توجه به مجموعه جواب به دست آمده، $x = \frac{3}{2}$ در بازه $\left(1, \frac{5}{3} \right)$ قرار دارد که احتمالاً طراح محترم به این مطلب توجه نکرده‌اند، پس جواب کلی این نامعادله به صورت $\left(1, \frac{5}{3} \right) - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ می‌باشد که در بین گزینه‌ها نیست و ما همان جواب بازه $\left(1, \frac{5}{3} \right)$ را انتخاب کرده‌ایم.

۳۶۵- گزینه ۴

نمودار یک سهمی مانند $y = ax^2 + bx + c$ فقط از ناحیه سوم عبور نکند مطابق شکل روبه‌رو است:



(۱) دهانه سهمی رو به بالاست پس $a > 0$:

$$k - 1 > 0 \Rightarrow k > 1 \quad (1)$$

(۲) شیب خط مماس در نقطه تقاطع سهمی با محور y ها منفی است:

پس $b < 0$:

$$-k < 0 \Rightarrow k > 0 \quad (2)$$

(۳) سهمی ۲ ریشه دارد پس $\Delta > 0$:

$$(-k)^2 - 4(k-2)(3-k) > 0 \Rightarrow 5k^2 - 20k + 24 > 0$$

$$\xrightarrow{\Delta < 0, a > 0} \text{عبارت همواره مثبت است} \Rightarrow k \in \mathbb{R} \quad (3)$$

(۴) عرض نقطه تقاطع سهمی با محور y ها مثبت یا صفر است. پس $c \geq 0$. یعنی:

$$-k + 3 \geq 0 \Rightarrow k \leq 3 \quad (4)$$

با اشتراک از چهار بازه ایجادشده می توان گفت:

$$2 < k \leq 3$$

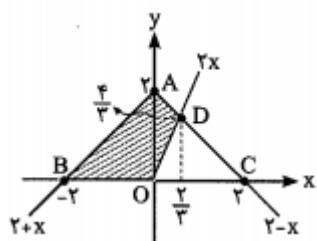
۳۶۶- گزینه ۳

ابتدا ضابطه توابع را کمی ساده می کنیم:

$$y_1 = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y_2 = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & ; x \geq 0 \\ 2 + x & ; x < 0 \end{cases}$$

حال نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم.



برای پیدا کردن مختصات نقطه D کافی است معادله زیر را حل کنیم:

$$2 - x = 2x \Rightarrow 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{در تابع 2}} y = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

مساحت ناحیه خواسته شده، مساحت قسمت هاشورزده در شکل است که داریم:

$$S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ODC} = \frac{2 \times 4}{2} - \frac{2 \times \frac{4}{3}}{2} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

۳۶۷- گزینه ۲

تشکیل یک گروه علمی ۴ نفره با شرایط مسأله به سه حالت زیر تقسیم می شود:

(۱) انتخاب ۲ نفر از ۴ معلم ریاضی و ۲ نفر از ۵ معلم غیر ریاضی:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$$

(۲) انتخاب ۳ نفر از ۴ معلم ریاضی و ۱ نفر از ۵ معلم غیر ریاضی:

$$\binom{4}{3} \binom{5}{1} = 4 \times 5 = 20$$

(۳) انتخاب ۴ نفر از ۴ نفر ریاضی و ۰ نفر از ۵ معلم غیر ریاضی:

$$\binom{4}{4} \binom{5}{0} = 1 \times 1 = 1$$

بنابراین پاسخ مسأله برابر است با:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} \binom{5}{0} = 81$$

۳۶۸- گزینه ۲

$$n(S) = \binom{5}{3} \times 3! = 10 \times 3!$$

انتخاب 3 رقم از 5 رقم جابه جایی 3 رقم

پیشامد مطلوب، مضرب ۳ بودن یک عدد سه رقمی است و می دانیم که هر گاه مجموع ارقام عددی مضرب ۳ باشد، آن عدد مضرب ۳ خواهد بود، پس پیشامد مطلوب شامل اعداد زیر می باشد:

$$A = \{123, 234, 135, 345\} \rightarrow n(A) = 4 \times 3! \Rightarrow P(A) = \frac{4 \times 3!}{10 \times 3!} = 0/4$$

توجه: در این مسأله به دلیل این که طراح سؤال گفته اند که کارت ها را کنار هم می چینیم، لذا سه کارت را به 3! حالت می توانیم کنار هم قرار دهیم.

۳۶۹- گزینه ۲

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow (x+1) + (x-2) + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 9$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} = 10 - 2x \xrightarrow{\div 2} \sqrt{x^2 - x - 2} = 5 - x \xrightarrow{\text{به توان 2}} x^2 - x - 2 = 25 + x^2 - 10x$$

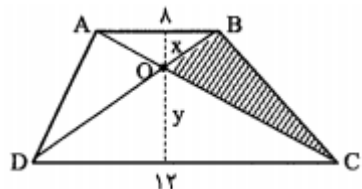
$$\Rightarrow 9x = 27 \Rightarrow x = 3$$

 $x = 3$ را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \xrightarrow{x=3} \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$$

بنابراین معادله یک ریشه مثبت دارد.

۳۷۰- گزینه ۳



توجه: در هر ذوزنقه اگر دو قطر آن را رسم کنیم، چهار مثلث ایجاد می‌شود به طوری که مساحت مثلث‌های مجاور به دو ساق با هم برابر بوده و واسطه هندسی بین مساحت مثلث‌های مجاور به دو قاعده است، یعنی:

$$S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC} = \sqrt{S_{\triangle OAC} \times S_{\triangle ODC}} \quad (1)$$

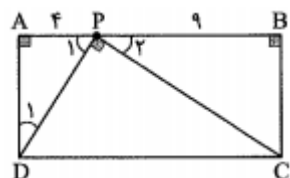
با توجه به شکل، مثلث‌های OAB و ODC متشابه‌اند، پس:

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle OAB} = \frac{4 \times 8}{2} = 16 \\ S_{\triangle ODC} = \frac{6 \times 12}{2} = 36 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} S_{\triangle OBC} = \sqrt{16 \times 36} = 4 \times 6 = 24$$

۳۷۱- گزینه ۲

مثلث‌های APD و BPC متشابه‌اند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{P}_1 + \hat{D}_1 = 90 \\ \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 90 \\ \hat{A} = \hat{B} = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{P}_2 \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle BPC$$

حال با نوشتن نسبت تشابه دو مثلث داریم:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC} \xrightarrow{AD=BC} BC^2 = AP \times PB \Rightarrow BC^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow BC = AD = 6$$

می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر با نسبت تشابه دو مثلث است، لذا خواهیم داشت:

$$\text{نسبت محیط‌ها} = \frac{AP}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۳۷۲- گزینه ۴

هر یک از ضوابط تابعی یک‌به‌یک است و در ضمن داریم:

$$R_{\frac{2x-1}{3}} = [3, +\infty), R_{\sqrt{x+4}} = [0, 3)$$

در نتیجه بردهای دو ضابطه اشتراک ندارند و تابع f یک‌به‌یک است. اکنون وارون هر یک از ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{2x-1}{3} &\Rightarrow 3y+1 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2} \\ y = \sqrt{x+4} &\Rightarrow y^2 = x+4 \Rightarrow y^2-4 = x \Rightarrow x = y^2-4 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2} & x \geq 0 \\ x^2-4 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

۳۷۳- گزینه ۱

مساحت قطاع در دایره‌ای به شعاع r و زاویه θ و کمانی به طول L با تناسب زیر در ارتباط هستند:



$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{L}{2\pi r}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{L}{2\pi r} \Rightarrow S = \frac{L \times r}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

۳۷۴- گزینه ۴

$$\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{2x^2+1}{x+2}\right) = \log_3 3 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3$$

$$\Rightarrow 2x^2+1 = 3x+6 \Rightarrow 2x^2-3x-5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$\log_8(2x-1) = \log_8\left(2 \times \frac{5}{2} - 1\right) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$$

۳۷۵- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = 2 \times 3 = 6$$

گزینه ۱ - ۳۷۶

برای پیوسته بودن تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ ، باید مقدار حد تابع در این نقطه با مقدار $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ برابر باشد. حد تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos^2 x} \times \frac{\sin x + \sqrt{\sin x}}{\sin x + \sqrt{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - \sin x}{(\cos^2 x)(\sin x + \sqrt{\sin x})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin^2 x)(\sin x + \sqrt{\sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)(\sin x + \sqrt{\sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{(1 + \sin x)(\sin x + \sqrt{\sin x})} = \frac{-1}{2 \times 2} = \frac{-1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

گزینه ۴ - ۳۷۷

روش اول: اولاً روشن است که پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند. چرا که احتمال موفقیت آمیز بودن عمل جراحی دو شخص، لزوماً ارتباطی به هم ندارند! از طرفی مفهوم موفقیت آمیز بودن عمل، لاقطل برای یکی از این دو نفر به این معناست که یا عمل A موفقیت آمیز باشد یا B و یا هر دو. لذا $P(A \cup B)$ مقصود مسأله خواهد بود. به این ترتیب داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/9 + 0/8 - 0/9 \times 0/8 = 0/98$$

توجه: برای دو پیشامد مستقل داریم: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

روش دوم:

$$P(\text{لاقل یکی موفقیت آمیز باشد}) = 1 - P(\text{هر دو ناموفق باشد}) = 1 - (1 - 0/9)(1 - 0/8)$$

$$= 1 - (0/1)(0/2) = 0/98$$

گزینه ۳ - ۳۷۸

اگر اضلاع مربع‌ها را x_1, x_2, \dots, x_n در نظر بگیریم، داریم:

$$cv = 0/2 \Rightarrow \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0/2 \Rightarrow \sigma = 0/2 \bar{x} = 0/2 \times 15 = 3$$

حال به محاسبه میانگین مساحت مربع‌ها می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_n - 15)^2}{n} = 9 \\ &= \frac{(x_1^2 - 30x_1 + 15^2) + \dots + (x_n^2 - 30x_n + 15^2)}{n} = 9 \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 30(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n \times 15^2}{n} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 30 \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + 15^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 30(15) + 15^2 = 9$$

میانگین مساحت‌ها:

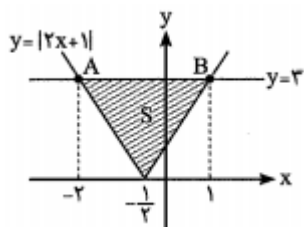
$$\Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = 234$$

۳۷۹- گزینه ۳

ابتدا ضابطه gof را تشکیل می‌دهیم و سپس آن را ساده می‌کنیم:

$$y = gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$

اکنون با رسم نمودار تابع مرکب $y = |2x + 1|$ و بررسی موقعیت آن با خط افقی $y = 3$ ، مساحت محصور بین دو نمودار را محاسبه می‌کنیم.



نقاط تلاقی A و B را می‌توان از حل معادله $|2x + 1| = 3$ به راحتی به دست آورد.

$$|2x + 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \\ 2x + 1 = -3 \end{cases} \text{ یا } \Rightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ x_A = -2 \end{cases}$$

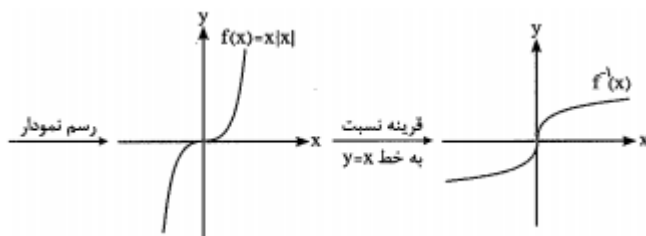
با توجه به نمودار حاصل می‌بینیم که مساحت مورد نظر یک مثلث با طول قاعده $AB = 3$ و ارتفاع $h = 3$ می‌باشد، لذا:

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} = 4/5$$

۳۸۰- گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $f(x) = x|x|$ را با تعیین علامت و حالت‌بندی قدر مطلق رسم کرده و سپس قرینه نمودار حاصل را نسبت به خط $y = x$ می‌یابیم تا نمودار تابع معکوس به دست آید.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & ; x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



۳۸۱- گزینه ۱

آنچه خواسته مسئله است همان $(-\sin 2\alpha)$ می‌باشد.

$$\cos\left(\underbrace{\frac{3\pi}{2} - 2\alpha}_{\text{ناحیه سوم}}\right) = -\sin 2\alpha$$

در ادامه با مجذور کردن طرفین عبارت داده شده، مقدار $\sin 2\alpha$ و جواب مسئله مشخص می‌شود.

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} &\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{جواب مسئله} = -\sin 2\alpha = \frac{-3}{4}$$

۳۸۲- گزینه ۱

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 &\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0 \\ &\Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\cos x=A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \Rightarrow A = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = 2, -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \Rightarrow \cos x = 2 \in [-1, 1] \text{ ✗} \\ A = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۳۸۳- گزینه ۲

ابتدا با محاسبه حد تابع در $+\infty$ مقدار a را یافته و در ادامه، حد تابع f را وقتی $x \rightarrow -1$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \frac{a + 2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 + \frac{-8}{6}}{2} = \frac{5}{6}$$

۳۸۴- گزینه ۱

با توجه به تعریف مشتق، $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ همان $f'(2)$ می‌باشد، پس کافی است تابع داده‌شده را ساده نموده و پس از محاسبه مشتق، به جای x ها عدد ۲ را جایگزین نماییم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-3}} \right)^3 = \left(\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{2}}} \right)^3 = \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}} = u^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(x) = u^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} u'$$

به کمک رابطه زیر مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$u = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow u' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} u' \Rightarrow f' = \frac{3}{2} \left(\frac{-3 - 4}{(2x - 3)^2} \right) \left(\frac{x + 2}{2x - 3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{-7}{(4 - 3)^2} \times \left(\frac{2 + 2}{4 - 3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times (-7) \times (2) = -21$$

۳۸۵- گزینه ۴

خط مماس بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است پس شیب آن -۱ است.

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{4}{3} = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{3}$$

$$2x + 1 = 9 \Rightarrow x = 4$$

۳۸۶- گزینه ۲

مرحله اول: محاسبه طول و عرض نقاط بحرانی در بازه $[-4, 3]$:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \checkmark \Rightarrow f(-3) = 27 \\ x = 5 \in [-4, 3] \end{cases}$$

مرحله دوم: یافتن مقادیر تابع در دو سر بازه $[-4, 3]$:

$$\begin{cases} f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 - (-4)^2 - 15(-4) = \frac{-64}{3} - 16 + 60 = \frac{68}{3} \\ f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 15(3) = -45 \end{cases}$$

پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع به ترتیب برابر ۲۷ و ۴۵- است.

۳۸۷- گزینه ۳

مشتق تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = a \frac{1(2+x^2) - 2x(x)}{(2+x^2)^2} = a \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad (\text{نقاط بحرانی})$$

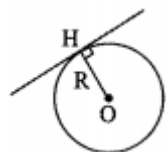
x	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$f(x)$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{a\sqrt{2}}{4}$	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	$\frac{a}{3}$

$$\max f(x) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{4} = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 24$$

$$\Rightarrow \min f(x) = \frac{-a\sqrt{2}}{4} = -6\sqrt{2}$$

۳۸۸- گزینه ۱

با توجه به شکل زیر، فاصله مرکز دایره از خط، برابر شعاع دایره است، بنابراین:



$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ O(2, -1) \end{cases} \Rightarrow R = \frac{|2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$\begin{cases} O(2, -1) \\ R = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

برای یافتن طول نقاط تقاطع دایره با محور x ها، y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(x - 2)^2 + (0 + 1)^2 = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow x - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۳۸۹- گزینه ۲

فاصله هر کانون از دورترین و نزدیکترین رأس به ترتیب $a + c$ و $a - c$ است، پس:

$$a + c = 3(a - c) \Rightarrow a + c = 3a - 3c \Rightarrow 4c = 2a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

خروج از مرکز بیضی: $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

۳۹۰- گزینه ۱

$$P(A) = \frac{40}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{12 + 24}{1000} = 0/036$$

۳۹۱- گزینه ۴

فرض کنید

$$B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 5, 6, \dots\}, A = \{1, 2\}$$

آن‌گاه مجموعه $A' - B = \{3, 4\}$ به دست می‌آید که مجموعه‌ای متناهی است.

۳۹۲- گزینه ۱

مثلث را رسم می‌کنیم.



زاویه A برابر $180^\circ - (20^\circ + 40^\circ) = 120^\circ$ است.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(5) \sin 120 = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(5) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{15}{2} = 7/5$$

۳۹۳- گزینه ۳

اگر جملات اول و سوم را با هم و دوم و چهارم را نیز با هم در نظر بگیریم، داریم:

$$(4x^2 + 2x) + (6\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}) = 2x(2x + 1) + 3\sqrt{x}(2x + 1) = (2x + 3\sqrt{x})(2x + 1)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، دو عامل $(2x + 3\sqrt{x})$ و $(2x + 1)$ وجود دارد.

۳۹۴- گزینه ۱

روش اول:

$$\begin{aligned}
 -1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3 &\xrightarrow{-1} -2 < \frac{3x+1}{x-3} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{3x+1-x+3}{x-3} < 2 \Rightarrow -2 \\
 &< \frac{2x+4}{x-3} < 2 \Rightarrow \left| \frac{2(x+2)}{x-3} \right| < 2 \xrightarrow{+2} \left| \frac{x+2}{x-3} \right| < 1 \Rightarrow |x+2| \\
 &< |x-3| \xrightarrow{\text{توان}^2} x^2 + 4x + 9 < x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 10x < 5 \Rightarrow x < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

روش دوم:

با توجه به گزینه‌ها، $x = 2$ را در نامعادله بررسی می‌کنیم:

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3 \xrightarrow{x=2} -1 < \frac{7}{-1} < 3 \Rightarrow \underbrace{-1 < -7 < 3}_{\text{غ ق ق}}$$

پس $x = 2$ جزء جواب‌های مسأله نباید باشد، لذا فقط گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۹۵- گزینه ۲

تابع $f(x)$ تابع خطی است.

$$\begin{aligned}
 f(x) = ax + b &\Rightarrow \begin{cases} f(0) = a(0) + b = 2 \\ f(-1) = a(-1) + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -3x + 2 \Rightarrow f(2) \\
 &= -6 + 2 = -4
 \end{aligned}$$

۳۹۶- گزینه ۲

برای آن که رنگ مهره‌ها متفاوت باشد کافی است از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم، پس:

$$n(S) = \binom{5+4+3}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

$$n(A) = \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

۳۹۷- گزینه ۳

مختصات نقطه وسط و شیب خط گذرنده از ۲ نقطه A و B را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \end{cases}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{-3 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

شیب خط عمودمنصف، عکس و قرینه شیب خط AB است و از نقطه M می‌گذرد پس:

$$y - y_M = m'(x - x_M) \Rightarrow y - 4 = 2(x + 1)$$

برای یافتن مختصات محل برخورد این خط با محور طول‌ها، عرض آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$0 - 4 = 2(x + 1) \Rightarrow x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

۳۹۸- گزینه ۴

مثلث‌های ABC و ACD به حالت دو ضلع و زاویه بین متشابه‌اند، زیرا:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADC} = \widehat{ACB} = \alpha \\ \frac{AD}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض}} \Delta ABC \sim \Delta ACD$$

حال با توجه به نسبت تشابه داریم:

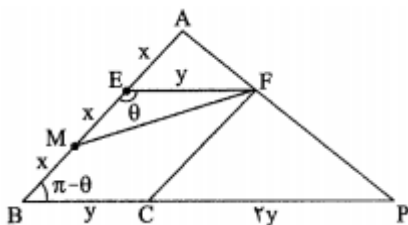
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{5}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

۳۹۹- گزینه ۲

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{PC}{PB} = \frac{2}{3} = \frac{2y}{3y} \Rightarrow \begin{cases} PC = 2y \\ BC = y \end{cases}$$

حال با توجه به قضیه تالس شکل زیر را داریم:



$$EF \parallel BP \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BP} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{x}{3x} \Rightarrow \begin{cases} AE = x \\ AB = 3x \end{cases}$$

با توجه به شکل داریم:

$$EB = 2x \Rightarrow EM = MB = x$$

حال با توجه به قضیه سینوس‌ها، نسبت مساحت دو مثلث را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{EFM}}{S_{ABP}} = \frac{\frac{1}{2} EF \times EM \times \sin \theta}{\frac{1}{2} AB \times BP \times \sin(\pi - \theta)} \xrightarrow{\sin(\pi - \theta) = \sin \theta} = \frac{EF \times EM}{AB \times BP} = \frac{y \times x}{3x \times 3y} = \frac{1}{9}$$

۴۰۰- گزینه ۲

از ویژگی‌های تابع وارون می‌دانیم که:

$$f^{-1}(u) = a \Leftrightarrow u = f(a)$$

لذا داریم:

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow g(2a) = f(6) \quad (1)$$

از روی تابع f داریم: $f(6) = 3$ و همچنین:

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow g(2a) = \frac{2a}{2a-1} \stackrel{(1)}{\rightarrow} \frac{2a}{2a-1} = 3 \Rightarrow 2a = 6a - 3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۴۰۱- گزینه ۲

دامنه تابع $f + g$ ، اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g است.

$$\begin{aligned} f(x) = x - 2 &\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{x} &\Rightarrow D_g: x \geq 0 \end{aligned} \xrightarrow{D_f \cap D_g} x \geq 0$$

حال ضابطه تابع $f + g$ را پیدا می‌کنیم.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - 2 + \sqrt{x} = x + \sqrt{x} - 2$$

این تابع اکیداً صعودی است و از نقطه $(0, -2)$ با دامنه $x \geq 0$ عبور می‌کند.

۴۰۲- گزینه ۴

زاویا دو به دو متمم هم هستند.

$$\begin{cases} \frac{\pi}{24} + \frac{11\pi}{24} = \frac{12\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{24} + \frac{7\pi}{24} = \frac{12\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} \cos \frac{11\pi}{24} = \sin \frac{\pi}{24} \\ \cos \frac{7\pi}{24} = \sin \frac{5\pi}{24} \end{cases}$$

پس کل عبارت به صورت زیر می‌شود:

$$\cos^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{5\pi}{24} + \sin^2 \frac{5\pi}{24} + \sin^2 \frac{\pi}{24}$$

از آن جا که $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ است، پس داریم:

$$\left(\cos^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{\pi}{24} \right) + \left(\cos^2 \frac{5\pi}{24} + \sin^2 \frac{5\pi}{24} \right) = 2$$

۴۰۳- گزینه ۳

$$2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1$$

$$2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 1 \Rightarrow 2^{3x+2y-7} = 2^0 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \quad (1)$$

از طرفی:

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 = \log x \Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y$$

$$= 9x \xrightarrow{(1)} 3x + 2(9x) = 0 \Rightarrow 21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 9x = 9 \times \frac{1}{3}$$

$$= 3$$

۴۰۴- گزینه ۲

ابتدا ضابطه تابع را به صورت $f(x) = [-x] + m[x] + 2m$ می‌نویسیم. می‌دانیم برای آن که f در $x = 1$ دارای حد باشد، باید حدود راست و چپ در این نقطه موجود و با هم برابر باشند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x] + m[x] + 2m = -2 + m + 2m = 3m - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] + m[x] + 2m = -1 + 0 + 2m = 2m - 1 \end{array} \right.$$

پس:

$$3m - 2 = 2m - 1 \Rightarrow m = 1$$

۴۰۵- گزینه ۴

شرط پیوستگی تابع در $x = 0$ آن است که $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-0})}{x} = 2 \Rightarrow f(0) = a = 2 \end{aligned}$$

۴۰۶- گزینه ۴

سرقت مسلحانه در حومه شهر را پیشامد A و سرقت مسلحانه در طول شب را پیشامد B فرض می‌کنیم. بنابراین طبق فرض مسأله داریم:

$$\left. \begin{array}{l} P(B') = 0/3, P(A') = 0/85 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 0/15 \\ P(A \cap B') = P(A - B) = 0/05 \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0/05 \Rightarrow P(A \cap B) = 0/1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0/1}{0/15} = \frac{2}{3}$$

۴۰۷- گزینه ۳

میانگین داده‌ها را می‌یابیم. دقت کنید تعداد کل داده‌ها، ۵۰ عدد است.

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{6 + \dots + 6}^{\text{تا 7}} + \overbrace{8 + \dots + 8}^{\text{تا 9}} + \overbrace{10 + \dots + 10}^{\text{تا 17}} + \overbrace{12 + \dots + 12}^{\text{تا 11}} + \overbrace{14 + \dots + 14}^{\text{تا 6}}}{50} \Rightarrow \bar{x} = 10$$

حالا واریانس داده‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \text{صورت واریانس} &= \overbrace{(10 - 6)^2 + \dots + (10 - 6)^2}^{\text{تا 7}} + \overbrace{(10 - 8)^2 + \dots + (10 - 8)^2}^{\text{تا 9}} \\ &+ \overbrace{(12 - 10)^2 + \dots + (12 - 10)^2}^{\text{تا 11}} + \overbrace{(14 - 10)^2 + \dots + (14 - 10)^2}^{\text{تا 6}} \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{288}{50} = 5/76 \Rightarrow \sigma = 2/4 \Rightarrow cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2/4}{10} = 0/24$$

۴۰۸- گزینه ۳

با توجه به ویژگی‌های تابع وارون می‌دانیم که، $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ ، لذا با انتخاب عددی مناسب داریم:

$$f(-4) = -\sqrt{-(-4)} = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = -4 \Rightarrow 3 \text{ یا } 1 \text{ گزینه } (1)$$

$$f(1) = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 1 \Rightarrow 3 \text{ یا } 2 \text{ گزینه } (2)$$

پس با اشتراک از (۱) و (۲) گزینه ۳ صحیح است.

۴۰۹- گزینه ۴

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{2x-1}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}} = \frac{4x-2+2x+2}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{6x}{3} = 2x$$

۴۱۰- گزینه ۲

از فرمول‌های نصف کمان داریم:

$$\cot \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} = 2 \cot \alpha \Rightarrow \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x = -2 \times \frac{1}{\tan x} = -2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

۴۱۱- گزینه ۳

یادآوری:

۱- از فرمول‌های 2α می‌دانیم که:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 x = \cos^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha - 2$$

با جای گذاری در معادله داریم:

$$2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۴۱۲- گزینه ۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - x^2 - x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 + x - 6)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x+3)}{x(x-2)} \\ &= \frac{-(2+3)}{2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

۴۱۳- گزینه ۴

به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{x(x^2 + 4x - 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x^2 + 4x - 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{1}{(0-1)(1+1+1)} \\ = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

۴۱۴- گزینه ۳

$$\begin{aligned} f(x) = (\sqrt[3]{x^2} + 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(\sqrt[3]{x^2} + 1)^2 \times \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(-8) \\ = 3(\sqrt[3]{64} + 1)^2 \times \frac{2}{3\sqrt[3]{-8}} = 3(4+1)^2 \times \frac{2}{3 \times (-2)} = -25 \end{aligned}$$

۴۱۵- گزینه ۱

تابع را ساده‌سازی می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم.

$$y = \frac{x\sqrt{x} + \frac{1}{x}}{2} \Rightarrow y = \frac{x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^2}}{2} \xrightarrow{x=1} y' = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2} = \frac{1}{4}$$

حال با داشتن شیب خط مماس، معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{x\sqrt{x} + \frac{1}{x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - x = 3$$

۴۱۶- گزینه ۱

مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم. چون تابع اکیداً صعودی است، مشتق آن باید مثبت باشد:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 64 - 12m < 0 \\ a = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow m > \frac{64}{12} \Rightarrow m > \frac{16}{3}$$

۴۱۷- گزینه ۲

نقطه $(1, -2)$ در تابع صدق می‌کند و مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است.

$$f(1) = -2 \Rightarrow 1 - a + b = -2 \Rightarrow -a + b = -3 \quad (1)$$

$$f'(x) = 4x^3 - a, f'(1) = 0 \Rightarrow 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4 \xrightarrow{(1)} -4 + b = -1 \Rightarrow b = -3$$

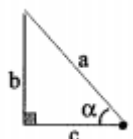
$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

پس نقطه $(1, -2)$ مینیمم نسبی است.

x		۱
f'		- ۰ +
f		↘ -۲ ↗

۴۱۸- گزینه ۴

با توجه به ابعاد بیضی داریم:



$$\tan \alpha = \frac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = 2c$$

از طرفی طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (2c)^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 5c^2 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۴۱۹- گزینه ۱

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \text{مرکز } O(1, -1)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4 \times (-2)} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 8}$$

$$r = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$$

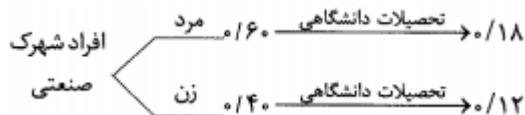
اگر دایره مورد نظر را C' در نظر بگیریم:

$$C': (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = r'^2$$

$$d = r + r' \Rightarrow \sqrt{(5 - 1)^2 + 0} = 4 = 2 + r' \Rightarrow r' = 2$$

$$C': x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$$

۴۲۰- گزینه ۲



$$\Rightarrow P = 0/6 \times 0/18 + 0/4 \times 0/12 = 0/108 + 0/48 = 0/156 \Rightarrow 15/6 \%$$

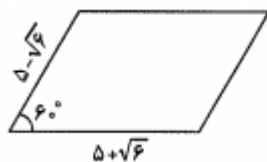
۴۲۱- گزینه ۲

اگر جمله اول و قدر نسبت این دنباله حسابی را a و d فرض کنیم، جملات $a + 2d$ و $a + 6d$ و $a + 8d$ تشکیل دنباله هندسی می دهند. پس جمله وسط، واسطه هندسی دو جمله دیگر است:

$$(a + 6d)^2 = (a + 2d)(a + 8d) \Rightarrow a^2 + 36d^2 + 12ad = a^2 + 16d^2 = 10ad \\ \Rightarrow 20d^2 + 2ad = 2d(a + 10d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

۴۲۲- گزینه ۳

مساحت مثلث را به کمک دو ضلع و سینوس زاویه بین آنها می یابیم.



$$S = (5 + \sqrt{6})(5 - \sqrt{6}) \sin 60^\circ = (25 - 6) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19\sqrt{3}}{2}$$

حال مساحت مثلث را به کمک ارتفاع و قاعده بزرگ محاسبه می کنیم.

$$S = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \Rightarrow \frac{19\sqrt{3}}{2} = h(5 + \sqrt{6}) \Rightarrow h = \frac{19\sqrt{3}}{10 + 2\sqrt{6}}$$

۴۲۳- گزینه ۱

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2b^2} - \frac{a+b}{ab} \\ \geq 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a^3 + b^3 - (a+b)ab}{a^2b^2} \\ \geq 0 \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)ab}{a^2b^2} \\ \geq 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از عبارت (a+b)}} \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab)}{a^2b^2} \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{(a+b)(a^2 - 2ab + b^2)}{a^2b^2} \geq 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع کامل}} \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2} \geq 0$$

واضح است که $(a-b)^2$ و a^2b^2 همواره مثبت هستند و فقط کافی است $a+b$ نیز مثبت باشد:

$$a + b > 0$$

۴۲۴- گزینه ۳

وقتی نمودار $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است، یعنی:

$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x|$$

برای حل این نامعادله باید یک بار $x \geq 0$ و بار دیگر $x < 0$ فرض کنیم.

$$x \geq 0 \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x \Rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2} < 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 7x - 9 < 0 \Rightarrow \Delta = 121$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{4} \begin{cases} \frac{-7 - 11}{4} = -\frac{9}{2} \\ \frac{-7 + 11}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < 1$$

اشتراک با شرط $x \geq 0$ ، بازه $[0, 1)$ است.

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x - x \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 3x - 9 \Rightarrow \Delta = 81$$

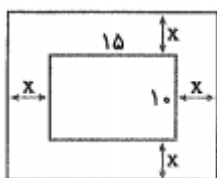
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{4} \begin{cases} \frac{-3 - 9}{4} = -3 \\ \frac{-3 + 9}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow -3 < x < \frac{3}{2}$$

اشتراک با شرط $x < 0$ ، بازه $(-3, 0)$ است.

اجتماع مجموعه جوابها $-3 < x < 1$ و مرکز بازه -1 است.

۴۲۵- گزینه ۲

فاصله لبه‌های فرش تا دیوار را x می‌نامیم. با توجه به شکل داریم:



$$\text{طول اتاق} = 15 + 2x$$

$$\text{عرض اتاق} = 10 + 2x$$

پس:

$$S = 300 \Rightarrow (15 + 2x)(10 + 2x) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \Rightarrow \Delta = 4900 \Rightarrow x = \frac{-50 \pm \sqrt{4900}}{8}$$

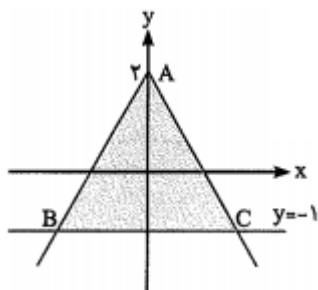
$$\Rightarrow x = \frac{-50 \pm 70}{8} = \begin{cases} \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ \frac{-120}{8} = -15 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

پس محیط اتاق برابر است با:

$$P = 2(\text{عرض} + \text{طول}) = 2((15 + 2x) + (10 + 2x)) = 2(25 + 4x) = 50 + 8x$$

$$= 50 + 8\left(\frac{5}{2}\right) = 70$$

۴۲۶- گزینه ۲



$$y = |x| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طولها}} y = -|x| \xrightarrow{2 \text{ واحد انتقال به بالا}} y = -|x| + 2$$

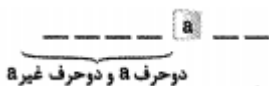
ارتفاع مثلث ۳ واحد است. برای پیدا کردن قاعده BC باید نقاط برخورد دو نمودار را بیابیم.

$$-|x| + 2 = -1 \rightarrow |x| = 3 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow BC = 6$$

$$S = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} (3)(6) = 9$$

۴۲۷- گزینه ۱

هفت جایگاه در نظر می‌گیریم که در پنجمین جایگاه، سومین حرف a است.



در چهار جایگاه اول، ۲ حرف غیر a یعنی b, c داریم. بنابراین به $\binom{4}{2}$ طریق دو جایگاه از چهار جایگاه اول را انتخاب کرده و در آن‌ها حرف a را قرار می‌دهیم. دو جایگاه دیگر هر کدام ۲ حالت (b یا c) دارند. جایگاه‌های ششم و هفتم هیچ محدودیتی ندارند و می‌توانند هر یک از سه حرف a یا b یا c را اختیار کنند. بنابراین پاسخ مسأله برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times 2^2 \times 3^2 = 216$$

۴۲۸- گزینه ۱

اعضای پیشامد را می‌نویسیم:

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\}$$

تعداد اعضای فضای نمونه برای پرتاب دو تاس ۳۶ است پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

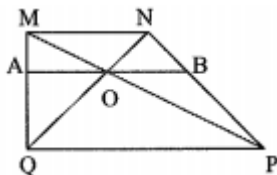
۴۲۹- گزینه ۴

برای این که معادله درجه دوم دارای دو ریشه منفی باشد باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \xrightarrow{+4} m^2 + 3m - 18 > 0 \\ \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0 \Rightarrow m < -6 \text{ یا } m > 3 \\ S < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -\frac{-2m}{m-6} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m < 6 \end{cases}$$

اشتراک مجموعه جواب‌های بالا $3 < m < 6$ است.

۴۳۰- گزینه ۲



چون $PQ \parallel AB$ ، پس بنا به قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$\text{در مثلث } NQP: \frac{NB}{NP} = \frac{OB}{PQ}$$

از سوی دیگر چون $MN \parallel AB \parallel PQ$ ، پس $\frac{MA}{AQ} = \frac{NB}{BP}$ و در نتیجه به کمک ترکیب در مخرج

$$\text{در مثلث } MQP: \frac{MA}{MQ} = \frac{OA}{PQ}$$

$$\frac{MA}{AQ + MA} = \frac{NB}{BP + NB} \Rightarrow \frac{MA}{MQ} = \frac{NB}{NP}$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$\frac{OB}{PQ} = \frac{OA}{PQ} \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

۴۳۱- گزینه ۴

دو مثلث ABC و BDE با هم متشابه‌اند، چون زاویه $A = D_1$ و زاویه B در دو مثلث مشترک است. پس:

$$\frac{BC}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE} \rightarrow BC \cdot BD = BE \cdot AB$$

۴۳۲- گزینه ۱

برای یافتن قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم در واقع باید تابع وارون آن را بیابیم.

$$3y - 2x = 4 \Rightarrow 3x - 2y = 4 \Rightarrow 3x - 4 \Rightarrow 2y \Rightarrow y = \frac{3x}{2} - 2$$

عرض از مبدأ این خط ۲- است.

۴۳۳- گزینه ۲

$$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = 2$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = 2 \Rightarrow \cos x - \sin x = 2 \sin x + 2 \cos x$$

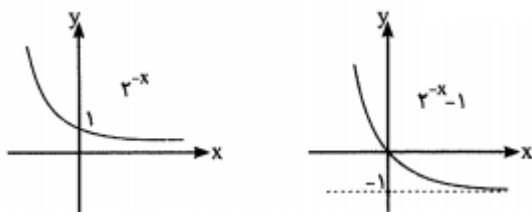
$$\Rightarrow 3 \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{3}$$

۴۳۴- گزینه ۳

ضابطه تابع را ساده می کنیم.

$$f(x) = \frac{1 - 2^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} - \frac{2^x}{2^x} = 2^{-x} - 1$$

نمودار تابع را رسم می کنیم.



نمودار تابع از ربع اول و سوم عبور نمی کند.

۴۳۵- گزینه ۱

از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3 - \sqrt{x}} - 1} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{14}{-\frac{1}{4}} = \frac{14}{-\frac{1}{8}} = -112$$

۴۳۶- گزینه ۲

حد راست، خود تابع و حد چپ در $x = 3$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} a \log_2(1 + x) = a \log_2 4 = 2a \\ f(3) = a \log_2 4 = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + 2^{x-3} = 3a + 2^0 = 3a + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = 3a + 1 \Rightarrow a = -1$$

حال حاصل $f(2)$ را می یابیم:

$$f(x) = -x + 2^{x-3} \Rightarrow f(2) = -2 + 2^{-1} = -1/5$$

۴۳۷- گزینه ۲

اگر طول اضلاع مربع را x_1 و x_2 و x_3 در نظر بگیریم.

$$\bar{x} = 25 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

از طرفی $cv = 0/06$ است پس:

$$\frac{\sigma}{\bar{x}} = 0/06 \rightarrow \sigma = 0/06 \times 25 = 1/5 \rightarrow \sigma^2 = (1/5)^2 = 2/25 \rightarrow$$

$$\text{صورت واریانس} = (x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + (x_3 - 25)^2$$

$$(x_1^2 - 50x_1 + 625) + (x_2^2 - 50x_2 + 625) + (x_3^2 - 50x_3 + 625)$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} - \frac{50(x_1 + x_2 + x_3)}{3} + \frac{3(625)}{3} = 2/25$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} - 1250 + 625 = 2/25 \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} = 627/25$$

۴۳۸- گزینه ۳

اگر A پیشامد قهرمانی در آسیا و B پیشامد صعود به جام جهانی باشد:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{13}{36}$$

۴۳۹- گزینه ۴

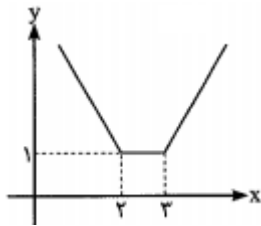
قرار می دهیم $t = 2x - 3$:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(t) = 4 \left(\frac{t+3}{2} \right)^2 - 14 \left(\frac{t+3}{2} \right) + 13$$

$$f(t) = (t^2 + 6t + 9) - 7t - 21 + 13 \Rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

۴۴۰- گزینه ۱

نمودار تابع را رسم می کنیم:



تابع در بازه $(-\infty, 2]$ اکیداً نزولی و ضابطه آن $y = -x + 2 - x + 3 = -2x + 5$ است. محل برخورد نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ را می‌یابیم.

$$-2x + 5 = 2x^2 - x - 10 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x + 6)(2x - 5) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ و } x = +\frac{5}{2}$$

در بازه $(-\infty, 2]$ در یک نقطه مشترک هستند.

۴۴۱- گزینه ۲

با توجه به نمودار، دوره تناوب $T = 4$ است پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{2}$$

همچنین تابع محور y ها را در -3π قطع می‌کند پس:

$$f(0) = -3\pi \Rightarrow a = -3\pi \Rightarrow a + |b| = -3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$

۴۴۲- گزینه ۲

معادله را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\sin x \sin 2x = \cos x \cos 2x \Rightarrow \sin x (2 \sin x \cos x) = \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$$

$$2 \sin^2 x \cos x = \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \Rightarrow 4 \sin^2 x \cos x = \cos x \Rightarrow 4 \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۴۴۳- گزینه ۲

$x = 2$ ریشه مخرج کسر می‌باشد پس:

$$(2)^2 + 2 + a = 0 \Rightarrow a = -6$$

تابع به صورت $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ تبدیل خواهد شد.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{(-5)(0^+)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{(-5)(0^-)} = +\infty$$

۴۴۴- گزینه ۲

تابع در $x = 2$ مشتق پذیر است پس پیوسته نیز هست:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} x^3 - x = f(-2) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} ax^2 + bx + 4 \Rightarrow -8 + 2 = 4a - 2b + 4 \Rightarrow 2a - b \\ &= -5 \end{aligned}$$

همچنین مشتق‌های چپ و راست تابع نیز در $x = -2$ باید برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} f'_-(-2) = 3x^2 - 1 = 3(4) - 1 = 11 \\ f'_+(-2) = 2a + b = -4a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -4a + b = 11$$

حال از حل دستگاه مقدار a و b را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} 2a - b = -5 \\ -4a + b = 11 \end{cases} \\ \hline &-2a = 6 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -1 \end{aligned}$$

حاصل $f(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y = -3x^2 - x + 4 \xrightarrow{x=1} y = 0$$

۴۴۵- گزینه ۲

شیب خط مماس بر نمودار تابع را در $x = 4$ به کمک نزدیک‌ترین نقطه به آن یعنی $x = 4/001$ می‌یابیم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5/004 - 5}{4/001 - 4} = \frac{0/004}{0/001} = 4$$

شیب خط مماس بر منحنی در $x = 4$ برابر ۴ است پس شیب خط قائم بر آن $0/25 = -\frac{1}{4}$ است.

۴۴۶- گزینه ۳

مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

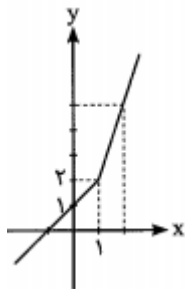
$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

تابع در نقاطی صعودی است که مقدار مشتق آن مثبت باشد پس:

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

۴۴۷- گزینه ۲

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 1 \\ 1+x & ; x < 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار $f(x)$ ، نقطه $(1, 2)$ که نقطه تغییر شیب تابع است، تنها نقطه بحرانی آن است، اما اکسترمم نسبی تابع f نمی‌باشد.

۴۴۸- گزینه ۴

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4x^2 + 4y^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 6x + 3y^2 + 12y - 45 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + 2x + y^2 + 4y - 15 = 0 \end{aligned}$$

بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M همان قطر دایره فوق است:

$$d = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 4^2 - 4(-15)} \right) = \sqrt{4 + 16 + 60} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

۴۴۹- گزینه ۳

دایره بودن معادله را بررسی می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 1 + 1 > \frac{4m}{17} \Rightarrow m < \frac{17}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m \in \{1, 2, \dots, 8\}$$

۴۵۰- گزینه ۳

احتمال به دنیا آمدن فرزند پسر در این خانواده $1/4$ است پس احتمال بیمار بودن فرزند این خانواده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \frac{6}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{100} = \frac{30 + 24}{1000} = 0/054$$

۴۵۱- گزینه ۴

سه جمله a ، b و c در صورتی جملاتی متوالی دنباله هندسی اند که $b^2 = ac$ باشد. بنابراین:

$$x^2 = (12 + x)(8 - x) = 96 - 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 8)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 6, x = -8$$

با جای گذاری مقادیرهای x ، جمله‌ها را می‌نویسیم:

$$12 + x, x, 8 - x \xrightarrow{x=6} 18, 6, 2 \text{ دنباله نزولی}$$

$$12 + x, x, 8 - x \xrightarrow{x=-8} 4, -8, 16 \text{ دنباله نه صعودی و نه نزولی}$$

مجموع جملات دنباله نزولی برابر ۲۶ است.

۴۵۲ - گزینه ۳

با توجه به این که زاویه AOB برابر $\frac{\pi}{3}$ (متمم زاویه A) می‌باشد، طول ضلع AB برابر $\tan \frac{\pi}{3}$ است.

مساحت مثلث قائم‌الزاویه AOB را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot AB = \frac{1}{2} (1) \times \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال مساحت مثلث BOC را به دست می‌آوریم.

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} (1)(1) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

مساحت مثلث ABC از تفاضل مساحت این دو مثلث به دست می‌آید.

$$S_{ABC} = S_{AOB} - S_{BOC} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۴۵۲ - گزینه ۳

عبارت‌های $6 + 4\sqrt{2}$ و $3 - 2\sqrt{2}$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم.

$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

حال مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} + \frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2}$$

$$= \sqrt{2} + 1 + 2 - \sqrt{2} = 3$$

۴۵۴- گزینه ۲

علامت تابع در اطراف $x = 1$ تغییر نکرده و در اطراف $x = -2$ تغییر کرده است. بنابراین $x = 1$ ریشه مضاعف عبارت $f(x)$ و $x = -2$ ریشه ساده آن است از آنجایی که ضریب x^3 برابر ۱ است می توان نوشت:

$$f(x) = (x+2)(x-1)^2 = (x+2)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 \\ \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$$

پس مقدار b برابر ۳- است.

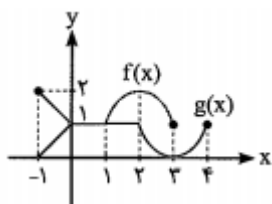
۴۵۵- گزینه ۳

برای مماس بودن خط بر منحنی باید معادله تلاقی آن ها ریشه مضاعف داشته باشد (اگر معادله تلاقی درجه دوم شد، $\Delta = 0$ قرار می دهیم)

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 \\ \Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0 \\ \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

۴۵۶- گزینه ۳

باید در دامنه مشترک نقاطی را بیابیم که $f(x) - g(x) > 0$ باشد. دو نمودار را با هم رسم می کنیم.



$$f(x) > g(x) \Rightarrow (1, 3]$$

۴۵۷- گزینه ۲

ابتدا باید یکی از پدرها را انتخاب کنیم. در حالت اول از خانواده ۵ نفره پدر را انتخاب می کنیم سپس فرد دیگری را از بین ۴ عضو باقی مانده آن خانواده برمی داریم و در نهایت ۲ نفر هم از خانواده ۴ نفره انتخاب می کنیم.

$$\binom{1}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{2} = 24$$

در حالت دوم از خانواده ۴ نفره پدر و یک نفر دیگر را انتخاب می کنیم و از خانواده ۵ نفره نیز ۲ عضو انتخاب می کنیم.

$$\binom{1}{1} \binom{3}{1} \binom{5}{2} = 30$$

در مجموع در ۵۴ حالت این بازی (با این شرایط) قابل اجراست.

۴۵۸- گزینه ۲

$$P(\text{حداقل یک مهره آبی خارج شود}) = 1 - P(\text{مهره آبی خارج نشود}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

دقت کنید که فضای نمونه کل برابر انتخاب ۳ مهره از کل ۹ مهره است. هم‌چنین برای این که هیچ مهره آبی انتخاب نشود، باید تمام مهره‌های انتخابی از سایر مهره‌ها باشند. چون تعداد مهره‌های غیر آبی ۵ است، پس باید ۳ مهره از ۵ مهره انتخاب کنیم.

۴۵۹- گزینه ۴

دو منحنی را تلافی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \\ y = 2^x \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2})^{x+1} + 4 = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2})^x \times \sqrt{2} + 4 = 2^x \Rightarrow 2^x - \sqrt{2}(\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

حالا با فرض $(\sqrt{2})^x = t$ معادله به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 2 - 4(1)(-4) = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{18}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ t = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{18}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$t = (\sqrt{2})^x \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^x = (\sqrt{2})^3 \Rightarrow x = 3 \\ (\sqrt{2})^x = -\sqrt{2} \quad \times \end{cases}$$

با قرار دادن $x = 3$ در یکی از توابع، مختصات عرض نقطه تلافی را هم می‌یابیم:

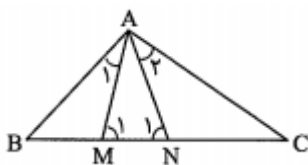
$$y = 2^x \xrightarrow{x=3} y = 8 \Rightarrow \text{نقطه تلافی} = B(3, 8)$$

فاصله این نقطه از نقطه $A(0, 4)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

۴۶۰- گزینه ۱

زوایای M_1 و N_1 با هم برابرند، زیرا



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM: \text{زاویه خارجی: } \widehat{M}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B} \\ \triangle ACN: \text{زاویه خارجی: } \widehat{N}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{C} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\widehat{A}_1 = \widehat{C}} \\ \xrightarrow{\widehat{A}_2 = \widehat{B}} \end{array} \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \Rightarrow AM = AN$$

حال از تشابه دو مثلث ABM و ACN ($\widehat{A}_2 = \widehat{B}, \widehat{A}_1 = \widehat{C}$) طول AM را حساب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{NC} = \frac{BM}{AN} \Rightarrow AM \times AN = BM \times NC \\ AM = AN \end{array} \right\} \Rightarrow AM^2 = BM \times NC \Rightarrow AM = \sqrt{3 \times 4} \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$$

۴۶۱- گزینه ۴

فاصله نقطه وسط قطر مربع از یک ضلع آن، برابر نصف طول ضلع مربع است. چون $A(3, -1)$ مرکز مربع و خط $2y - x = 5$ یک ضلع مربع است بنابراین با محاسبه فاصله نقطه از خط داریم:

$$\Rightarrow \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 2}} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = a^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۴۶۲- گزینه ۱

دامنه تابع f بازه $(0, +\infty)$ و دامنه تابع g ، $\{-2, -1, 0, 1\}$ است. دامنه مشترک $x = 1$ است.

$$(2f - g)(1) = 2f(1) - g(1) = 2 \left(\frac{3(1) + 1}{\sqrt{1}} \right) - 2 = 6$$

پس $a = 1$ و $b = 6$ است و $a + b = 7$

۴۶۳- گزینه ۲

با توجه به این که $\tan 214^\circ = \tan(180 + 34) = \tan 34$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3 \sin 416^\circ + 2 \cos 124^\circ}{4 \sin 304^\circ + \cos 56^\circ} = \frac{3 \sin(180 - 34) + 2 \cos(90 + 34)}{4 \sin(270 + 34) + \cos(90 - 34)} \\ &= \frac{3 \sin 34^\circ - 2 \sin 34^\circ}{-4 \cos 34^\circ + \sin 34^\circ} \Rightarrow A = \frac{\sin 34^\circ}{-4 \cos 34^\circ + \sin 34^\circ} \end{aligned}$$

حال با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos 34^\circ$ داریم:

$$A = \frac{\frac{\sin 34^\circ}{\cos 34^\circ}}{-4 \frac{\cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} + \frac{\sin 34^\circ}{\cos 34^\circ}} = \frac{\tan 34^\circ}{-4 + \tan 34^\circ} \xrightarrow{\tan 34^\circ = a-1} A = \frac{a-1}{-4+a-1} = \frac{a-1}{a-5}$$

۴۶۴- گزینه ۳

$$\begin{aligned}\log_x(3x+8) &= 2 - \log_x(x-6) \Rightarrow \log_x(3x+8) + \log_x(x-6) = 2 \\ &\Rightarrow \log_x(3x+8)(x-6) = 2 \Rightarrow \log_x(3x^2 - 10x - 48) = 2 \\ &\Rightarrow 3x^2 - 10x - 48 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \\ &\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (مینا نمی تواند منفی باشد)}$$

حالا حاصل لگاریتم $x = 8$ را در پایه ۴ می یابیم:

$$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

۴۶۵- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{2 - \sqrt[3]{2+6}}{\sqrt{2^2 - 4(2) + 4}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام ابتدا در مخرج از اتحاد مربع دو جمله ای به صورت مقابل استفاده می کنیم:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

چون در مخرج، قدر مطلق ایجاد شد، اول باید در حوالی راست $x = 2$ ، علامت داخل قدر مطلق را تعیین و سپس آن را حذف کنیم:

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$$

حد را به فرم زیر بازنویسی می کنیم و سپس برای رفع ابهام هوییتال می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{0 - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{1} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = -\frac{1}{3(4)} = -\frac{1}{12}$$

۴۶۶- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} a \cos \frac{2x}{3} = a \cos \frac{2\pi}{3} = a \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-a}{2}$$

$$f(\pi) = a \cos \frac{2\pi}{3} = a \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-a}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

چون تابع در $x = \pi$ پیوسته است.

$$\frac{-a}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

۴۶۷- گزینه ۲

احتمال این که بیمار پس از طی دوره نقاهت زنده بماند برابر با $1 - 0/2 = 0/8$ است، بنابراین طبق قوانین احتمال شرطی داریم:

$$\begin{aligned} P(\text{زنده ماندن}) &= P(\text{از عمل زنده ماندن و طی کردن دوره نقاهت}) \\ &= P(\text{زنده ماندن از عمل}) \times P(\text{طی کردن دوره نقاهت} | \text{زنده ماندن از عمل}) \\ &= 0/7 \times (1 - 0/2) = 0/7 \times 0/8 = 0/56 \end{aligned}$$

۴۶۸- گزینه ۳

انحراف معیار ۱۸ داده برابر ۳ است پس واریانس آن‌ها ۹ است.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2}{18} = 9 \Rightarrow \text{صورت کسر} = 162$$

با اضافه شدن داده‌های جدید تعداد داده‌ها ۲۱ می‌شود و چون میانگین ۳ داده اضافه شده هم برابر ۲۵ است، میانگین کل داده‌ها تغییر نمی‌کند.

$$\text{صورت واریانس} = (x_1 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} \approx 9/52$$

۴۶۹- گزینه ۳

برای یافتن طول نقاط تلاقی منحنی $y = x^2 - 3x - 10$ با محور x باید معادله $x^2 - 3x - 10 = 0$ را حل کنیم:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 5$$

پس برای این که طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی شود یا به عبارت دیگر ریشه منفی نداشته باشد، باید نمودار تابع را حداقل به اندازه ۲ واحد به راست منتقل کنیم. (در این حالت ریشه‌ها صفر و ۷ خواهند شد و در نتیجه ریشه منفی نخواهیم داشت.)

۴۷۰- گزینه ۴

اگر این تابع در فاصله $(1, \frac{3}{2})$ معکوس پذیر نباشد باید رأس سهمی در این بازه قرار گیرد.

$$1 < \frac{-a}{2} < \frac{3 \times (-2)}{2} \rightarrow -3 < a < -2$$

۴۷۱- گزینه ۳

چون نمودار تابع در یک دوره تناوب رسم شده بنابراین دوره تناوب تابع برابر ۶ است:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow 6 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

از طرفی ماکزیمم تابع برابر ۲ است، پس $|a| = 2$

چون نمودار تابع، بلافاصله بعد از محور y ها صعودی است پس همانند نمودار $y = \sin x$ است. پس باید پس از ساده سازی کمان با کمک روابط مربوط به کمان $-\alpha$ ، ضریب سینوس عددی مثبت باشد. در نتیجه دو حالت $(a = 2, b = \frac{1}{3})$ یا $(a = -2, b = -\frac{1}{3})$ می توانند برقرار باشند. چون:

$$a = 2, b = \frac{1}{3}: y = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \checkmark$$

$$a = -2, b = -\frac{1}{3}: y = -2 \sin\left(-\frac{\pi x}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = \frac{7}{3} \rightarrow (3 \text{ گزینه}) \\ a = -2, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow a + b = -\frac{7}{3} \rightarrow (\text{در گزینه‌ها نیست}) \end{cases}$$

یادآوری: در تابع $y = a \sin(bx)$

(۱) دوره تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

(۲) ماکزیمم مقدار برابر $|a|$ و مینیمم مقدار برابر $-|a|$ است.

۴۷۲- گزینه ۴

در مخرج:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

بنابراین:

$$\text{معادله: } \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1$$

حالا با فرض $\sin x \neq 0$ (یا $x \neq k\pi$) طرفین وسطین می کنیم:

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \neq k\pi} \text{ جواب ندارد.} \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

دقت کنید که هیچ یک از جواب‌های $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ، به صورت $k\pi$ نخواهند شد.

۴۷۳- گزینه ۳

چون $\lim_{x \rightarrow b} \frac{1}{x^2 - x + a} = +\infty$ است پس باید مخرج ریشه مضاعف b داشته باشد.

$$\Delta = 1 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{مخرج} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{ریشه مضاعف} = \frac{1}{2} = b \Rightarrow a + b = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

۴۷۴- گزینه ۱

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{0/5}{2/25} = \frac{5}{22/5} = \frac{1}{4/5} = \frac{1}{\frac{9}{2}} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow x = 4 \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = f'(4) = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

بنابراین آهنگ متوسط به اندازه $\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$ از آهنگ لحظه‌ای کم‌تر است.

۴۷۵- گزینه ۲

برای مشتق‌پذیری f در $x = 1$ باید:

(۱) f در $x = 1$ پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{x} - 5\right) = 3 - 5 = -2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b \end{cases} \Rightarrow 1 + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -3 \quad (*)$$

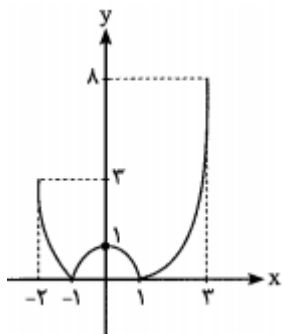
$$(۲) f'_-(1) = f'_+(1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x^2} & ; x \geq 1 \\ 2x + a & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = -3 \\ f'_-(1) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow 2 + a = -3 \Rightarrow a = -5 \xrightarrow{(*)} b = 2$$

۴۷۶- گزینه ۱

نمودار تابع را رسم می‌کنیم با توجه به شکل نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ مینیمم نسبی و نقطه $(0, 1)$ ماکزیمم نسبی است پس مجموع عرض‌ها برابر ۱ خواهد شد.



۴۷۷- گزینه ۲

نقاط روی سهمی را به صورت $A(x, x^2)$ در نظر می‌گیریم و فاصله آن را تا خط $x - y - 2 = 0$ حساب می‌کنیم. سپس آن را مینیمم می‌کنیم.

$$|AH| = \frac{|x - x^2 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x + 2)$$

$|AH|$ وقتی مینیمم می‌شود که $x^2 - x + 2$ مینیمم شود که در رأس آن اتفاق می‌افتد.

$$\text{عرض رأس سهمی} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\min|AH| = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{4(1)(2) - (-1)^2}{4(1)} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

۴۷۸- گزینه ۲

در دو دایره مماس خارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ رابطه زیر برقرار است:

$$OO' = R + R'$$

در دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ داریم:

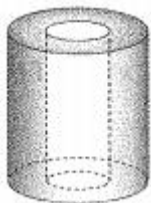
$$\text{مرکز } O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, -2)$$

$$\text{شعاع } R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

چون مرکز دایره دیگر برابر $O'(-2, 2)$ است، در نتیجه:

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = 2 + R' \Rightarrow 5 = 2 + R' \Rightarrow R' = 3$$

۴۷۹- گزینه ۲



شکل حاصل فضای بین دو استوانه خواهد بود که شعاع‌های آن‌ها ۱ و ۳ واحد است و البته ارتفاع یکسان ۲ واحد دارند.

$$V_2 - V_1 = \pi(3)^2(2) - \pi(1)^2(2) = 16\pi$$

۴۸۰- گزینه ۱

اول احتمال این‌که کارمند انتخابی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد را می‌یابیم:



$$p(\text{تحصیلات دانشگاهی داشته باشد}) = \frac{60}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{30}{100} = 0/3$$

چون می‌خواهیم از ۳ نفر انتخابی، دقیقاً دو نفر تحصیلات دانشگاهی داشته باشند و یک نفر تحصیلات نداشته باشد، و احتمال داشتن تحصیلات دانشگاهی ۰/۳ است پس احتمال نداشتن تحصیلات دانشگاهی ۰/۷ است.

$$P = \binom{3}{2} \underbrace{(0/3)(0/3)}_{1 \text{ نفر بدون تحصیلات}} \underbrace{(0/7)}_{2 \text{ نفر با تحصیلات}} = 0/189$$

۴۸۱- گزینه ۱

برای محاسبه جمله آخر دسته بیستم، پرانتزها را در نظر نمی‌گیریم.

$$\underbrace{1}_1, \underbrace{2,3}_2, \underbrace{4,5,6}_3, \underbrace{7,8,9,10}_4, \dots \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20(20+1)}{2} = 210$$

با توجه به این‌که در دسته بیستم، ۲۰ جمله داریم، جمله اول دسته بیستم برابر است با:

$$210 - 20 + 1 = 191$$

مجموع جمله‌های اول و آخر دسته بیستم برابر است با:

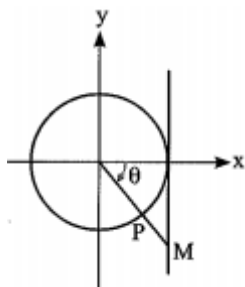
$$191 + 210 = 401$$

۴۸۲- گزینه ۲

عرض نقطه P در واقع سینوس زاویه‌ای مانند θ در ربع چهارم است.

$$\sin \theta = -0/8$$

عرض نقطه M نیز تانژانت زاویه θ است.



$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta \Rightarrow \frac{1}{(-0/8)^2} = 1 + \cot^2 \theta \Rightarrow \frac{25}{16} = 1 + \cot^2 \theta \Rightarrow \cot \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

۴۸۳- گزینه ۱

طرفین معادله را به توان ۳ می‌رسانیم.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \Rightarrow x^3 + 3x^2 \frac{1}{x} + 3x \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^3} = 27 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18 \Rightarrow \frac{x^6 + 1}{x^3} = 18$$

۴۸۴- گزینه ۴

اگر نمودار تابع $y_1 = x^2 + x + 3$ و خط $y_2 = mx + 1$ یکدیگر را قطع نکنند، معادله $y_1 = y_2$ جواب ندارد.

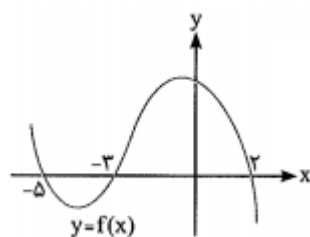
$$x^2 + x + 3 = mx + 1 \Rightarrow x^2 + (1 - m)x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$(1 - m)^2 - 8 < 0 \Rightarrow (1 - m)^2 < 8 \Rightarrow |1 - m| < 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2} < m - 1 < 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} + 1 < m < 2\sqrt{2} + 1$$

۴۸۵- گزینه ۴

ابتدا با کمک نمودار $y = f(x - 2)$ نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید نمودار $y = f(x - 2)$ را دو واحد به چپ انتقال دهیم. پس نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر است:



حالا برای محاسبه دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$xf(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 & , & f(x) \geq 0 \rightarrow x \in [0, 2] \\ x \leq 0 & , & f(x) \leq 0 \rightarrow x \in [-5, -3] \end{cases}$$

بنابراین با اجتماع گیری از جواب ها:

$$\text{دامنه} = [-5, -3] \cup [0, 2]$$

۴۸۶- گزینه ۳

با توجه به این که چهار مهره از کیسه خارج می کنیم، برای این که یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید باشد، باید «یک مهره قرمز و ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه» یا «یک مهره قرمز و ۳ مهره سفید» باشد.

$$\text{احتمال} = \frac{\binom{2}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{7}{1}}{\binom{14}{4}} = \frac{2 \times 21 \times 5 + 2 \times 35}{\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{280}{7 \times 13 \times 11} = \frac{40}{143}$$

۴۸۷- گزینه ۴

همه جمله های معادله را به سمت چپ منتقل می کنیم.

$$(x^2 - 1)^2 - 3x^2 + 5 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 - 3x^2 + 3 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1) + 2 = 0$$

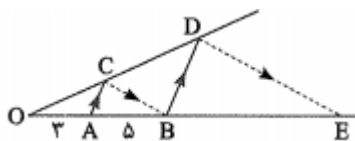
اگر $x^2 - 1$ را t فرض کنیم.

$$\begin{aligned} t^2 - 3t + 2 = 0 &\Rightarrow (t - 1)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 1, t = 2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

مجموع ریشه ها برابر صفر است.

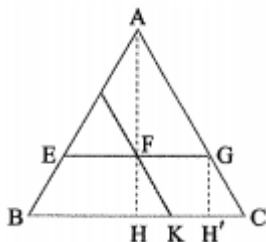
۴۸۸- گزینه ۱

اگر اندازه ها را روی شکل نمایش دهیم شکل مقابل حاصل می شود. با توجه به شکل:



$$\begin{cases} AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{BE} = \frac{OC}{CD} \end{cases} \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{8}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

۴۸۹- گزینه ۳



در مثلث AHC داریم: $\frac{GH'}{AH} = \frac{CG}{CA}$

از طرفی می‌دانیم CG ، ثلث CA است. پس $GH' = \frac{1}{3}AH$

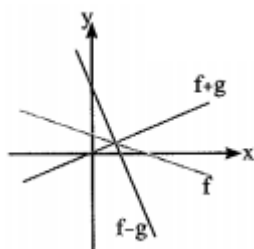
همین‌طور CK نیز ثلث CB است.

$$\frac{S_{FGCK}}{S_{ABC}} = \frac{GH' \times CK}{\frac{1}{2}AH \cdot CB} = \frac{\frac{1}{3}AH \cdot \frac{1}{3}CB}{\frac{1}{2}AH \cdot CB} = \frac{2}{9}$$

۴۹۰- گزینه ۳

می‌دانیم $f = \frac{(f+g)+(f-g)}{2}$ پس عرض تابع f در هر نقطه برابر میانگین عرض دو تابع $f+g$ و $f-g$ در آن نقطه است.

در شکل مشخص است که نمودار f از ربع سوم نمی‌گذرد.



۴۹۱- گزینه ۳

نقطه $(a, 5) \in f^{-1}$ است پس:

$$5 = \frac{a+1}{-a+2} \Rightarrow a+1 = -5a+10 \Rightarrow 6a=9 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

۴۹۲- گزینه ۳

با توجه به این که مقدار $\tan 20^\circ$ را داریم، پس تمام نسبت‌ها را برحسب کمان 20° می‌نویسیم:

$$\sin(250^\circ) = \sin(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\sin(700^\circ) = \sin(720^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\cos(560^\circ) = \cos(540^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\cos(110^\circ) = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

پس کسر داده‌شده به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{کسر} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

چون مقدار $\tan 20^\circ$ را داریم، صورت و مخرج را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{کسر} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{7}{3}$$

۴۹۳- گزینه ۳

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow E = 10^{11/8+1/5M}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{11/8+1/5M_2}}{10^{11/8+1/5M_1}} = 10^{1/5(M_2-M_1)} = 10^{1/5(7-5)} = 10^3 = 1000$$

۴۹۴- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2g(x)}{g^2(x)} = 4 \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g^2(x)} = 4 \Rightarrow \frac{-\frac{1}{4} - 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g^2(x)} = 4$$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ را k فرض می‌کنیم.

$$\frac{-\frac{1}{4} - 2k}{k^2} = 4 \Rightarrow 4k^2 + 2k + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

۴۹۵- گزینه ۴

برای پیوسته بودن تابع در بازه $[0, 2\pi]$ باید تابع در همه نقاط درونی این بازه مانند $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x (\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x (\sin x - 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sin 5x - a = \sin \frac{5\pi}{2} - a = 1 - a$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{5\pi}{2} - a = 1 - a$$

$$1 - a = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

۴۹۶- گزینه ۲

می‌دانیم اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ است یعنی:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{5}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

حال احتمال واکنش حداقل یکی از مواد A یا B را محاسبه می‌کنیم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{20} = \frac{13 - 2}{40} = \frac{11}{40}$$

۴۹۷- گزینه ۲

میانگین اضلاع مربعها (x_1, x_2, \dots, x_n) برابر ۸ است. بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 8$$

از طرفی میانگین مساحت مربعها $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ هم برابر ۶۵/۴۴ است، پس:

$$\frac{\sum x_i^2}{n} = 65/44$$

برای محاسبه ضریب تغییرات به مقدار انحراف معیار هم احتیاج داریم. پس ابتدا واریانس را با کمک رابطه $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ و سپس انحراف معیار (جذر واریانس) را می‌یابیم:

$$\sigma^2 = 65/44 - (8)^2 = 65/44 - 64 = 1/44$$

پس ضریب تغییرات برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/2}{8} = 0/15$$

۴۹۸- گزینه ۱

ابتدا دامنه توابع f و g را می‌یابیم:

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} \Rightarrow D_f: -x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow D_f: -1 < x < 2$$

حالا برای محاسبه دامنه $f \circ g$ از تعریف دامنه ترکیب توابع استفاده می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g, g(x) \in D_f \right\} \Rightarrow \left\{ x \in \mathbb{R}, \underbrace{-1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2}_{\text{همواره برقرار}} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}, \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \right\}$$

$$\Rightarrow (2^{-2})^x < 2^1 \Rightarrow 2^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow D_{f \circ g}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

۴۹۹- گزینه ۳

با توجه به ریشه‌های داخل هر قدر مطلق، قدر مطلق‌ها را تعیین علامت کرده و تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 + x + 1 & , x < -1 \\ -2x + 6 - x - 1 & , -1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 6 - x - 1 & , x > 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x + 7 & , x < -1 \\ -3x + 5 & , -1 \leq x \leq 3 \\ x - 7 & , x > 3 \end{cases}$$

با توجه به شیب خط‌های حاصل (ضریب x)، تابع f در فاصله $x > 3$ صعودی است. پس ضابطه معکوس تابع را در این فاصله می‌یابیم:

$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow \text{تابع معکوس: } y = x + 7$$

تا همین جا به جواب رسیدیم. می‌توانیم برای کامل تر شدن جواب، دامنه f^{-1} که همان برد f است را هم محاسبه می‌کنیم:

$$x > 3 \Rightarrow x - 7 > -4 \Rightarrow \text{دامنه تابع معکوس: } x > -4$$

۵۰۰- گزینه ۳

اول از رابطه $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ استفاده می‌کنیم و تساوی را به صورت ساده‌تری نمایش می‌دهیم:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow -2 \cot \left(2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) = 1 \Rightarrow -2 \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

برای محاسبه $\tan 2x$ چون مقدار $\cot x$ و در نتیجه مقدار $\tan x$ را داریم از رابطه $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\cot x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\tan x = \frac{1}{\cot x}} \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۵۰۱- گزینه ۱

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x$$

می‌دانیم $\cos(\pi - x) = -\cos x$ بنابراین:

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\cos x \neq 0$ پس جواب $k\pi - \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نیست چون به ازای این جواب مقدار کسینوس برابر با صفر می‌شود. بنابراین جواب کلی برابر است با:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۵۰۲- گزینه ۱

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4 \Rightarrow x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$$

چون مجموع ضرایب صفر است، پس یک ریشه معادله، $x = 1$ است. در نتیجه در تجزیه عبارت $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4$ یک عامل $(x-1)$ وجود دارد:

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ + ax^2 + (4-a)x - 4 \\ \underline{-(ax^2 - ax)} \\ + (4-a)x - 4 \\ - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

پس تجزیه عبارت $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4$ به صورت $(x-1)(x^2 + ax + 4)$ است در نتیجه:

$$\text{معادله: } (x-1)(x^2 + ax + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + ax + 4 = 0 \end{cases}$$

برای این که معادله، ۳ ریشه مثبت داشته باشد باید معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ دو ریشه مثبت داشته باشد. در نتیجه باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -4$$

البته به ازای $a = -5$ معادله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0 &\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-1)(x-4) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)^2(x-4) = 0 \end{aligned}$$

همان طور که می بینید در این جا معادله یک ریشه مضاعف $x = 1$ و یک ریشه ساده $x = 4$ دارد و سه ریشه متمایز ندارد. جواب دقیق این سؤال برابر است با:

$$a \in (-\infty, -4) - \{-5\}$$

۵۰۳- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x| + 1}{ax^n - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax^n} = \frac{-1}{2} \Rightarrow n = 1, a = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + |x| + 1}{-6x - 6} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - x + 1}{-6x - 6} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{-6(x + 1)} = -\frac{1}{6}$$

گزینه ۲ - ۵۰۴

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - [2x^2]x = x^3 - [4^+]x = x^3 - 4x \Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = (x^3 - 4x)' \\ &= 3x^2 - 4 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} 3(2) - 4 = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۴ - ۵۰۵

آهنگ متوسط تغییر تابع در نقطه $x = 1$ با نمو $0/44$ برابر آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله $[1, 1/44]$ است. بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(1/44) - f(1)}{1/44 - 1} = \frac{\frac{1/44 - 1}{\sqrt{1/44}} - \frac{1 - 1}{\sqrt{1}}}{0/44} = \frac{0/44}{0/44} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{1/2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

همچنین آهنگ لحظه‌ای در $x = 1$ برابر مشتق تابع در این نقطه است. چون عبارت $(x - 1)$ در تابع f عامل صفرشونده است، بنابراین برای محاسبه مشتق کافی است تنها از عامل صفرشونده مشتق بگیریم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} : f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$\text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۳ - ۵۰۶

$$f'(x) = 2x^2 - 2(m - 1)x + 8 = 0$$

ریشه‌های این معادله منفی هستند پس $\Delta > 0$, $P > 0$ و $S < 0$ است.

$$\begin{cases} P = \frac{c}{a} = \frac{8}{2} = 4 > 0 \\ S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2(m-1)}{2} = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ \Delta > 0 \Rightarrow 4(m-1)^2 - 64 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 16 \Rightarrow |m-1| > 4 \\ \Rightarrow \begin{cases} m-1 > 4 \\ m-1 < -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < -3 \end{cases} \end{cases}$$

اشتراک مجموعه جوابها $m < -3$ است.

گزینه ۳ - ۵۰۷

$$x + 2y = 6 \Rightarrow x = 6 - 2y$$

$$A = x^2y = y(6 - 2y)^2 \Rightarrow A' = (6 - 2y)^2 - 4y(6 - 2y) = 0 \Rightarrow (6 - 2y)(6 - 2y - 4y) = 0$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A = 16 \end{cases}$$

گزینه ۲ - ۵۰۸

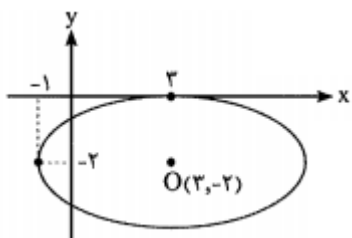
اگر این دایره بر محور عرضها مماس باشد $r = |a| = 2$ خواهد بود و معادله آن به صورت $(x - 2)^2 + (y - \beta)^2 = 4$ می‌باشد. حال نقطه $(2 + \sqrt{3}, 0)$ را در معادله دایره قرار می‌دهیم.

$$(2 + \sqrt{3} - 2)^2 + (0 - \beta)^2 = 4 \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1 \xrightarrow{\beta > 0} \beta = 1$$

معادله دایره: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

گزینه ۳ - ۵۰۹

مطابق شکل مختصات مرکز $O(3, -2)$ است و طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۴ است.



$$\begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۲ - ۵۱۰

برای این که مهره خارج شده از جعبه A سفید باشد:



$$P(A) = \frac{10}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{11} \times \frac{5}{12} = \frac{65}{132}$$

گزینه ۴ - ۵۱۱

$$a_n = 2a_{n-1} - 2 = 2(a_{n-1} - 1)$$

حال چند جمله اول دنباله را می‌یابیم:

$$a_2 = 2(a_1 - 1) \xrightarrow{a_1=3} a_2 = 2(3 - 1) = 4$$

$$a_3 = 2(a_2 - 1) \xrightarrow{a_2=4} a_3 = 2(4 - 1) = 6$$

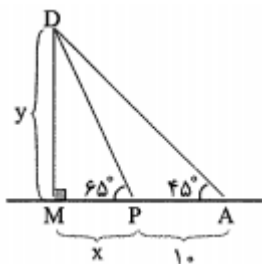
\Rightarrow جملات دنباله: 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130

$$\Rightarrow a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

۵۱۲- گزینه ۳

از D خطی عمود بر امتداد خط AP رسم می‌کنیم و پای عمود را M می‌نامیم.

در مثلث ADM داریم:



$$\tan A = \frac{DM}{AM} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{y}{10+x} \Rightarrow y = 10+x$$

در مثلث PDM نیز داریم:

$$\tan P = \frac{DM}{MP} \Rightarrow \tan 65^\circ = \frac{y}{x} \Rightarrow 2 = \frac{y}{x} \Rightarrow y = 2x$$

با حل دستگاه حاصل از دو معادله بالا مقادیرهای x و y را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = 10+x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow y = 20, x = 10$$

۵۱۳- گزینه ۲

ابتدا یک طرف نامعادله را صفر می‌کنیم:

$$\frac{3x^2 - 3x}{x^3 - 1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 3x - x^3 + 1}{x^3 - 1} < 0 \Rightarrow \frac{-(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{x^3 - 1} < 0$$

با نوشتن اتحاد مکعب کامل در صورت و چاق و لاغر در مخرج، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{-(x-1)^3}{(x-1)(x^2+x+1)} < 0 \xrightarrow[\text{با شرط } x \neq 1]{\text{با شرط}} -\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} < 0$$

با شرط $x \neq 1$ ، عبارت $(x-1)^2$ همواره مثبت است.

عبارت $x^2 + x + 1$ هم با توجه به $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ همواره مثبت است پس حاصل $\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$ همواره مثبت و $-\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$ همواره منفی است بنابراین نامعادله به ازای همه $x \neq 1$ برقرار است.

در نتیجه فقط $x = 1$ در مجموعه جواب نامعادله صدق نمی‌کند.

۵۱۴- گزینه ۲

عبارت را تجزیه می‌کنیم و سعی بر این داریم که تا آن جا که می‌توان $x^4 + 1$ تولید کرد:

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2 &= (x^6 + x^2) + (x^5 + x) - (2x^4 + 2) \\ &= x^2(x^4 + 1) + x(x^4 + 1) - 2(x^4 + 1) = (x^4 + 1)(x^2 + x - 2) \\ &= (x^4 + 1)(x + 2)(x - 1) \end{aligned}$$

بنابراین دو عامل دیگر $x + 2$ و $x - 1$ هستند که مجموع آنها برابر است با:

$$(x + 2) + (x - 1) = 2x + 1$$

۵۱۵- گزینه ۴

روش اول:

$$2x + 1 - |x - 2| > \underbrace{|x^2 + 1|}_{+} \Rightarrow 2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 : 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+1)} < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \xrightarrow[\text{با } x \geq 2]{\text{اشتراک}} x \in \emptyset \\ x < 2 : 2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)(x-1)} < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \xrightarrow[\text{با } x < 2]{\text{اشتراک}} 1 < x < 2 \end{cases}$$

جواب نهایی، اجتماع دو جواب \emptyset و $1 < x < 2$ است که برابر $1 < x < 2$ می شود.

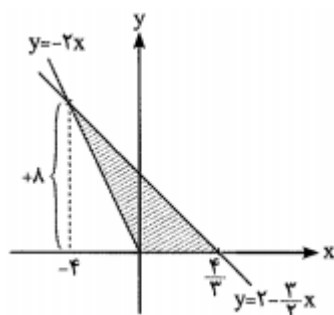
روش دوم:

(عددگذاری): ابتدا عددی مانند $\frac{3}{2}$ را در رابطه اصلی قرار می دهیم:

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \left(\frac{3}{2} \right) + 1 - \left| \frac{3}{2} - 2 \right| > \left| \frac{9}{4} + 1 \right| \Rightarrow 4 - \frac{1}{2} > \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{7}{2} > \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{14}{4} > \frac{13}{4} \quad \checkmark$$

چون $x = \frac{3}{2}$ در رابطه صدق کرد پس گزینه های ۱ و ۲ که فاقد $\frac{3}{2}$ هستند، رد می شوند. از طرفی $x = 0$ در نامعادله صدق نمی کند، پس گزینه ۳ که شامل صفر می باشد، رد می شود و لذا گزینه ۴ صحیح است.

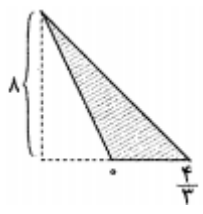
۵۱۶- گزینه ۳



$$y_1 = |x| - x = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases}$$

$$y_2 = 2 - \frac{3}{2}x$$

معادلات دو خط را با هم قطع می‌دهیم و نقاط تقاطع را می‌یابیم:



$$\text{نقاط تقاطع} \begin{cases} -2x = 2 - \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}x = -2 \Rightarrow x = -4 \\ 2 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow 2 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$S = \frac{8 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{16}{3}$$

۵۱۷- گزینه ۴

اعداد مورد نظر سه رقم فرد و دو رقم زوج دارند.

— — — — —
3 رقم فرد و دو رقم زوج

سه جایگاه از پنج جایگاه را برای ارقام فرد انتخاب می‌کنیم، (به $\binom{5}{3}$ طریق) و دو جایگاه باقیمانده را به طور یکتا زوج خواهند بود. در سه جایگاه انتخاب شده برای ارقام فرد می‌توان هر یک از ارقام ۱ و ۳ و ۵ و دو جایگاه باقیمانده می‌توان ارقام ۲ و ۴ را انتخاب کرد. بنابراین پاسخ مسأله برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times 3^3 \times 2^2 = 10 \times 27 \times 4 = 1080$$

۵۱۸- گزینه ۲

فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $6 \times 6 = 36$ حالت دارد. اگر A پیشامد رو شدن دو عدد متوالی در پرتاب ۲ تاس باشد داریم:

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۵۱۹- گزینه ۲

اگر علی به تنهایی کار را در t_A و رضا کار را در t_R انجام دهد می‌توان گفت:

$$t_A = t_R - 8$$

از طرفی علی و رضا با هم کار را در ۴۵۰ دقیقه یعنی $7/5$ ساعت انجام می‌دهند ($t_{AR} = 7/5$) و با توجه به رابطه زیر t_R به دست می‌آید:

$$\frac{1}{t_{AR}} = \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_R} \Rightarrow \frac{1}{7/5} = \frac{1}{t_R - 8} + \frac{1}{t_R} \xrightarrow{\text{طرفین } \times 7/5(t_R - 8)t_R} (t_R - 8)t_R = 7/5 t_R + 7/5 (t_R - 8)$$

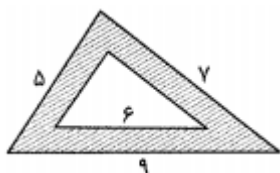
$$\Rightarrow t_R^2 - 8t_R = 15t_R - 60 \Rightarrow t_R^2 - 23t_R + 60 = 0 \Rightarrow (t_R - 3)(t_R - 20)$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} t_R = 3 \\ t_R = 30 \end{cases}$$

به ازای $t_R = 3$ مقدار ساعت $t_A = 3 - 8 = -5$ به دست می آید که با توجه به مثبت بودن زمان غیر قابل قبول است.

۵۲۰- گزینه ۳

با توجه به شکل زیر و طبق فرضیات سؤال، دو مثلث متشابه‌اند (اضلاع موازی هم هستند)



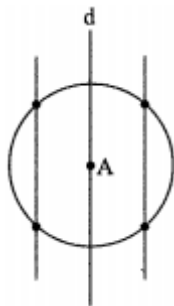
S : مساحت مثلث بزرگ

S' : مساحت مثلث کوچک

$$\frac{\text{مساحت محدود بین دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = \frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \left(\frac{9}{6}\right)^2 - 1 = \frac{81}{36} - 1 = \frac{81 - 36}{36} = \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$$

$$= 1/25$$

۵۲۱- گزینه ۳



مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله معلوم k هستند یک دایره به مرکز A و شعاع k می‌باشد. از طرفی مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله k' هستند دو خط موازی با d است. محل تلاقی این دو خط موازی با دایره نقاط مورد نظر هستند که تعداد آن‌ها حداکثر ۴ می‌باشد.

۵۲۲- گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱:

$$\begin{cases} D_f: x \leq 0 \\ D_g: x \leq 0 \end{cases}, f(x) = x\sqrt{-x} \stackrel{x < 0}{=} -(-x)\sqrt{-x} = -\sqrt{(-x)^3} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

گزینه ۲:

$$\begin{cases} D_f: \mathbb{R} - \{1\} \\ D_g: \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

گزینه ۳:

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

این دو تابع با هم مساوی اند.

گزینه ۴: ضابطه دو تابع برابر نیستند پس تابع $f(x)$ با تابع $g(x)$ برابر نیست.

۵۲۳- گزینه ۱

با توجه به ماکزیمم و مینیمم تابع می توان نوشت:

$$\begin{cases} |a| + b = 1 \\ -|a| + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2 \cos x - 1$$

برای یافتن مقادیر α و β باید $f(x)$ را برابر صفر بگذاریم.

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \beta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین $2\alpha + \beta = \frac{7\pi}{3}$ است.

۵۲۴- گزینه ۲

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = 2x - 5 \Rightarrow x + 2 = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

حال داریم:

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} \stackrel{x=7}{=} \log_4 \sqrt[3]{8} = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

۵۲۵- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{2 - \sqrt{4}}{2a + b} = \frac{0}{2a + b}$$

چون کسر برابر صفر شده ولی حد مقدار دارد، پس باید مخرج هم صفر شود تا ابهام $\frac{0}{0}$ ایجاد شده را رفع کنیم:

$$2a + b = 0 (*)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} &= \frac{1 - \frac{3}{2 \times 2}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4a} \stackrel{\text{طبق سؤال}}{\underset{\text{حد}=\frac{1}{2}}{\rightarrow}} \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 2 \left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \\ &\Rightarrow b = -1 \end{aligned}$$

۵۲۶- گزینه ۴

حد تابع را در نقطه $x = \pi$ محاسبه می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x - \sin x}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - \sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x (2 \cos x - 1)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \cos x - 1}{\sin x} = \frac{-3}{0} = \infty$$

حد تابع وجود ندارد بنابراین، تابع در نقطه $x = \pi$ به ازای هیچ مقدار a قابلیت پیوسته شدن را ندارد.

۵۲۷- گزینه ۳

می خواهیم فقط یکی از ۳ مهره انتخابی، سفید باشد. داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} + \binom{2+3}{2}}{\binom{2+3+4}{2}} = \frac{4 \times 10}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{10}{21}$$

۵۲۸- گزینه ۴

اگر داده ها را x_1, x_2, \dots, x_{30} با میانگین \bar{x} در نظر بگیریم، داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{30}}{30} \Rightarrow \bar{x} = \frac{240}{30} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{30} - \bar{x})^2}{30} = \frac{480}{30} = 16$$

بنابراین واریانس داده ها ۱۶ و انحراف معیار آن ها ۴ است. حال ضریب تغییرات را محاسبه می کنیم.

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{8} = 0.5$$

۵۲۹- گزینه ۳

روش اول:

$$(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(2x + 1) = 8x^2 + 6x + 5$$

حال $2x + 1$ را t می گیریم و از روی آن x را بر حسب t به دست می آوریم که برابر $x = \frac{t-1}{2}$ می شود، بنابراین:

$$\Rightarrow f(t) = 8 \left(\frac{t-1}{2} \right)^2 + 6 \left(\frac{t-1}{2} \right) + 5 = 2(t^2 - 2t + 1) + 3t - 3 + 5 \Rightarrow f(t)$$

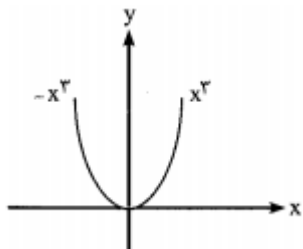
$$= 2t^2 - 4t + 2 + 3t - 3 + 5 \Rightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

روش دوم (روش عددگذاری):

$$f(2x + 1) = 8x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{x=0} f(1) = 0 + 0 + 5 = 5$$

حال اگر در گزینه‌ها $x = 1$ را قرار دهیم، فقط گزینه ۳ برابر ۵ می‌شود و صحیح است.

۵۳۰- گزینه ۳



$$y = |x^3| = \begin{cases} x^3 & , x \geq 0 \\ -x^3 & , x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که تابع غیر یک‌به‌یک است و در نتیجه وارون پذیر نمی‌باشد.

۵۳۱- گزینه ۱

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{عبارت: } \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

نکته: در حل این سؤال از رابطه‌های زیر استفاده کردیم:

$$۱) \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$۲) 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

۵۳۲- گزینه ۱

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{4}$$

مجموع کمان‌های دو تابع مثلثاتی $\frac{\pi}{2}$ است یعنی:

$$\left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4} \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}{2} \\ &\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

۵۳۳- گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|(x-1)}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{1(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{\pi}}{0^-} = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

۵۳۴- گزینه ۱

حد داده شده همان مشتق تابع f در $x = 1$ است:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \times \frac{4 \times 3 - 5 \times 1}{(x+3)^2} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{2 \times \frac{3}{2}} \times \frac{7}{4^2} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{16} \\ &\Rightarrow f'(1) = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

۵۳۵- گزینه ۴

تابع در $x = 0$ پیوسته است پس:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1(x+1) - 1(x)}{(x+1)^2} & ; x > 0 \\ 2x - 1 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & ; x > 0 \\ 2x - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_-(0) = 2(0) - 1 = -1 \\ f'_+(0) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow f'_-(0) - f'_+(0) = -1 - 1 = -2$$

۵۳۶- گزینه ۲

فقط (ج) صحیح است. هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی تابع است.

۵۳۷- گزینه ۳

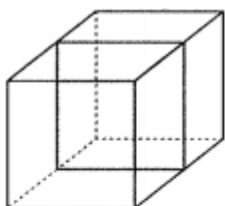
با توجه به نمودار f' آن را تعیین علامت می کنیم.

x	$-\infty$	-۲	۲	$+\infty$
f'		-	+	+
f		↘	↗	↗

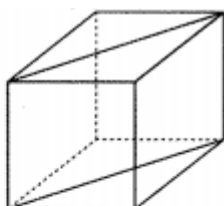
با توجه به جدول تعیین علامت f' ، تابع f در $x = -2$ مینیمم نسبی دارد.

۵۳۸- گزینه ۳

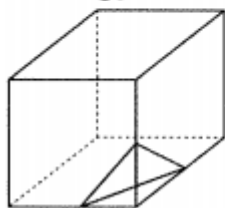
شکل های حاصل از برش یک صفحه با یک مکعب مربع شکل های زیر هستند.



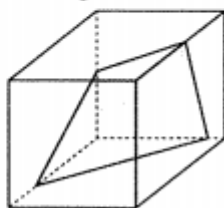
مربع



مستطیل

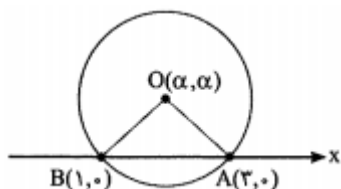


مثلث



ذوزنقه

۵۳۹- گزینه ۳



مرکز دایره بر روی خط $y = x$ قرار دارد، پس مختصات نقطه مرکزی را به صورت

$O(\alpha, \alpha)$ در نظر می گیریم. با توجه به شکل روبه رو فاصله مرکز تا نقاط A و B

با هم برابر و برابر شعاع دایره می باشد.

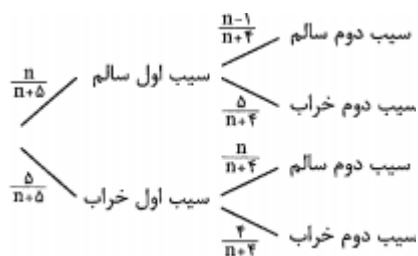
پس:

$$R = OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow R = \sqrt{(2 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

۵۴۰- گزینه ۲

تعداد کل سیبها $n + 5$ تاست. به نمودار درختی توجه کنید.



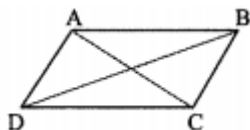
$$\frac{n}{n+5} \times \frac{5}{n+4} + \frac{5}{n+5} \times \frac{4}{n+4} = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{5n+20}{(n+4)(n+5)} = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{1}{n+5} = \frac{1}{16} \Rightarrow n = 11$$

۵۴۱- گزینه ۲

$A \subset B$ است پس $A \cap B = A$ و $A - B = \emptyset$ است بنابراین:

$$(A - B) \cup (B - A) = B \Rightarrow B \cup (B - A) = B$$

۵۴۲- گزینه ۴



$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (12)(8\sqrt{3}) \times \sin 60^\circ = 6 \times 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$$

۵۴۳- گزینه ۳

مخرج کسرها را گویا می کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1} \times \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$$

حال داریم:

$$\frac{a\sqrt[4]{x^3} + b\sqrt[4]{x} + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + 1}{x-1}$$

می توان نتیجه گرفت:

$$a = 1, b = 1 \Rightarrow a + 2b = 3$$

۵۴۴- گزینه ۴

$$\text{بررسی دامنه: } \frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} \geq \frac{9 \times 2x^2}{2} \Rightarrow 4 \geq 9x^2 \Rightarrow x^2 \leq \frac{4}{9} \Rightarrow |x| \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

دقت داشته باشید چون x^2 در مخرج است، بنابراین x نمی تواند صفر باشد. پس:

$$D = \left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$$

۵۴۵- گزینه ۱

برای یافتن دامنه تابع، باید عبارت زیر را دیکال را مثبت در نظر بگیریم.

$$3 - f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < 3$$

طول قسمت‌هایی از نمودار تابع که عرض نقاط آن کمتر از ۳ است را می‌یابیم:

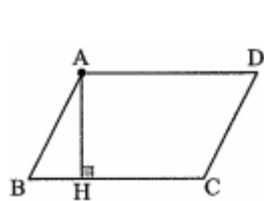
$$f(x) < 3 \Rightarrow (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$$

۵۴۶- گزینه ۳

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2+3}{1} + \binom{3}{2}\binom{2+5}{1} + \binom{2}{2}\binom{5+3}{1}}{\binom{5+2+3}{3}} = \frac{10 \times 5 + 3 \times 7 + 1 \times 8}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}} = \frac{79}{120}$$

۵۴۷- گزینه ۳

مساحت متوازی‌الاضلاع با حاصل ضرب ارتفاع در قاعده برابر است. پس کافی است طول قاعده BC و ارتفاع AH (فاصله A از خط BC) را به دست آورده و در هم ضرب کنیم:

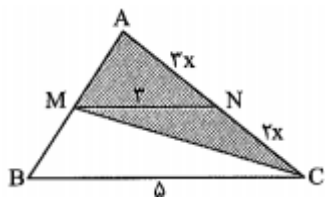


$$BC: \begin{cases} B(-1, 1), C(4, 3) \Rightarrow BC = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{29} \\ m_{BC} = \frac{3 - 1}{4 - (-1)} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC: y - y_B = m(x - x_B) \\ \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{5}(x + 1) \Rightarrow 2x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

فاصله A از BC طبق رابطه $AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ برابر است با:

$$AH = \frac{|2(3) - 5(-2) + 7|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{23}{\sqrt{29}} \xrightarrow{BC = \sqrt{29}} S_{ABCD} = AH \times BC = \frac{23}{\sqrt{29}} \times \sqrt{29} = 23$$

۵۴۸- گزینه ۴



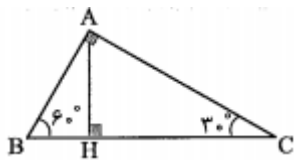
ابتدا شکل را نام‌گذاری می‌کنیم و سپس نسبت‌ها را روی آن‌ها مشخص می‌کنیم:

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow k = \frac{3}{5} \Rightarrow k^2 = \frac{9}{25} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} \Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{ABC}} = \frac{16}{25}$$

$$\text{مثلث دو هم‌ارتفاع} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{AMC}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{9}{25} S_{ABC}}{S_{AMC}} = \frac{3}{5}$$

$$S_{AMC} = \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{25}{16} S_{MNCB} \right) = \frac{15}{16} S_{MNCB}$$

۵۴۹- گزینه ۴



با توجه به روابط طول صادق در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \quad (1)$$

پس برای محاسبه نسبت $\frac{BH}{CH}$ کافی است $\frac{AB^2}{AC^2}$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم طول اضلاع روبه‌رو زوایای 30° و 60° در یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب $\frac{1}{2}$ وتر و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}, \widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \quad (2)$$

حال با توجه به روابط (1) و (2) خواهیم داشت:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\frac{BC^2}{4}}{\frac{3}{4}BC^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{3}$$

۵۵۰- گزینه ۲

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(a) = 8 \Rightarrow (f \circ g)(8) = a \Rightarrow f(g(8)) = a \Rightarrow f(\sqrt{40+9}) = a \Rightarrow f(7) = a \Rightarrow a = 3$$

۵۵۱- گزینه ۲

دامنه توابع کسری شامل ریشه‌های مخرج نیست. کافی است ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$$x^3 + 2kx^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2kx + 2) = 0$$

واضح است که $x = 0$ یکی از ریشه‌های مخرج است و سایر ریشه‌ها از معادله $x^2 + 2kx + 2 = 0$ به دست می‌آیند که تعداد آن‌ها وابسته به Δ است:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4(1)(2) = 4k^2 - 8 = 4(k^2 - 2)$$

از طرفی چون $|k| < \sqrt{2}$ است، پس داریم:

$$|k| < \sqrt{2} \Rightarrow k^2 < 2 \Rightarrow k^2 - 2 < 0 \Rightarrow 4(k^2 - 2) < 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

پس این معادله جواب ندارد و دامنه تابع فقط شامل $x = 0$ نیست.

۵۵۲- گزینه ۱

می‌دانیم که مقدار کسینوس یک زاویه همواره عددی در بازه $[-1, 1]$ است. پس حاصل ضرب دو کسینوس در هم یعنی حاصل ضرب دو عدد در بازه $[-1, 1]$ که فقط در حالتی می‌تواند ۱ باشد که قدر مطلق هر دو برابر ۱ باشد:

$$|\cos(A - B)| = 1 \xrightarrow{\text{A و B زوایای مثلث}} \cos(A - B) = 1 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

و به طریق مشابه $B = C$ و لذا $A = B = C = 60^\circ$ و مثلث متساوی الاضلاع است.

۵۵۳- گزینه ۴

$$\log(x+2y) = \log 10 + \log y \Rightarrow \log(x+2y) = \log 10y \Rightarrow x+2y = 10y \\ \Rightarrow x = 8y \quad (1)$$

$$3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y} \Rightarrow 2x+y = 2+x-y \Rightarrow x+2y = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 8y + 2y = 2 \Rightarrow 10y = 2 \Rightarrow y = 0/2$$

$$(1) \Rightarrow x = 8y = 8(0/2) = 1/6$$

۵۵۴- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{(x-3)^2}}{(x-3)(x-4)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])|x-3|}{(x-3)(x-4)} \xrightarrow{x < 3} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-2) \times (-(x-3))}{(x-3)(x-4)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-4} = \frac{-1}{3-4} = 1$$

۵۵۵- گزینه ۳

باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع در نقطه $x = 1$ برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

بنابراین a هر مقداری می تواند باشد.

۵۵۶- گزینه ۳

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ = P(A) + P(B)(1 - P(A)) = P(A) + P(B) \times P(A') \\ = 0/84 + 0/75(0/16) = 0/84 + 0/12 = 0/96$$

۵۵۷- گزینه ۲

برای محاسبه میانگین از همه داده ها عددی دلخواه مانند ۱۴ واحد کم می کنیم.

داده های جدید : $-2, -2, 0, 0, 0, 2, 2, 8$

میانگین داده های جدید را می یابیم.

$$\bar{x} = \frac{-2 + (-2) + 2 + 2 + 8}{8} = 1$$

واریانس داده‌های جدید را نیز پیدا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{صورت واریانس} &= (-2 - 1)^2 + (-2 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 1)^2 \\ &\quad + (2 - 1)^2 + (8 - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{9 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 49}{8} = \frac{72}{8} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

انحراف معیار داده‌های قدیم نیز ۳ است ولی برای یافتن میانگین آن‌ها باید ۱۴ واحد به میانگین داده‌های جدید بیافزاییم.

$$\bar{x}_{\text{قدیم}} = 14 + 1 = 15$$

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0/2$$

۵۵۸- گزینه ۲

$$\begin{aligned} y = \frac{x+4}{x-2} &\Rightarrow yx - 2y = x + 4 \Rightarrow yx - x = 4 + 2y \Rightarrow x(y-1) = 4 + 2y \Rightarrow x = \frac{4+2y}{y-1} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1} \end{aligned}$$

برای یافتن محل تلاقی f و f^{-1} ، باید ضابطه این دو تابع را مساوی هم قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2x+4}{x-1} &= \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

۵۵۹- گزینه ۳

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} = \frac{1-\frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{7}{2-x}} \\ &= \frac{-7x-7}{7} = -x-1 \end{aligned}$$

۵۶۰- گزینه ۱

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2} \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{2} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2} \end{cases}$$

حاصل تفاضل دو مقدار خواسته شده را می یابیم.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2} - \frac{1 - \sin 2\alpha}{2} = \sin 2\alpha$$

برای محاسبه $\sin 2\alpha$ باید مقدار $\sin \alpha$ را از روی $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ به دست آوریم. (چون α در ربع چهارم است، مقدار سینوس آن منفی است.)

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{7}{9}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

۵۶۱- گزینه ۴

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x \Rightarrow \sin 2x = \sin(\pi + x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi + x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - \pi - x \Rightarrow x = \frac{2k}{3}\pi \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{4\pi}{3}, x_4 = \frac{6\pi}{3} = 2\pi, x_5 = \pi$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5\pi$$

۵۶۲- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - (x)(x - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x^2 + x}{x^2 - 1} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x + 1}{2x} = \frac{-3}{2}$$

۵۶۳- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a+1)x^2 + x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 6x + 1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a+2)x^2 + 2x + 1}{10x^2 - 8x + 2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{a+1}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

۵۶۴- گزینه ۴

عرض نقطه B همان $f(4/5)$ است. با توجه به تعریف مشتق در نقطه $x = 4$ می توان نوشت.

$$\frac{f(4/5) - f(4)}{4/5 - 4} \approx f'(4) \Rightarrow \frac{f(4/5) - 6}{0/5} \approx f'(4) \Rightarrow f(4/5) \approx \frac{1}{2}f'(4) + 6 \Rightarrow f(4/5) \approx \frac{1}{2}(1/5) + 6 \Rightarrow f(4/5) = 6/75$$

۵۶۵- گزینه ۱

از تابع مشتق می‌گیریم.

$$y' = 3ax^2 + 2bx - 3 = 0$$

ریشه‌های این معادله (α و β) طول نقاط اکسترمم تابع هستند.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{2b}{3a}$$

از طرفی مختصات نقطه A میانگین مختصات اکسترمم‌های تابع است.

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \Rightarrow -\frac{2b}{3a} = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = -3$$

۵۶۶- گزینه ۳

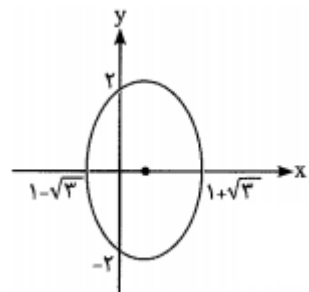
چون نقطه M روی تابع قرار دارد پس M را می‌توان به صورت $M(x, 4 - x^3)$ در نظر گرفت.

$$S = x(4 - x^3) = 4x - x^4 \Rightarrow S' = 4 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x_M = 1 \Rightarrow y_M = 3$$

زمانی مساحت ماکزیمم است که مشتق تابع برابر با صفر باشد) پس ابعاد مستطیل ۱ در ۳ است:

$$S_{max} = 1 \times 3 = 3$$

۵۶۷- گزینه ۱

با توجه به ثابت بودن طول کانون‌های بیضی، بیضی قائم است. مرکز بیضی (M) و فاصله کانونی بیضی ($2C$) را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \end{cases}$$

$$2c = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow c = 1$$

خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{2}$ است بنابراین:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = b^2 + 1^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}$$

دامنه تغییرات x بازه $[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$ است.

۵۶۸- گزینه ۱

چون دو خط داده شده موازیند پس فاصله آنها برابر قطر دایره است.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2r = \frac{|3 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow r = \frac{1}{5}$$

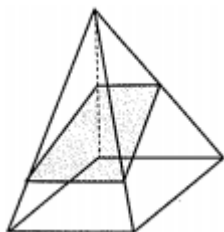
از طرفی شعاع دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y + a = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 - 4a} = \frac{1}{2}\sqrt{20 - 4a} = \sqrt{5 - a}$$

$$\sqrt{5 - a} = \frac{1}{5} = 0/2 \Rightarrow 5 - a = 0/04 \Rightarrow a = 4/96$$

۵۶۹- گزینه ۴

مطابق شکل، سطح مقطع دوزنقه است.



۵۷۰- گزینه ۴

احتمال مبتلا شدن:

$$P(A) = \frac{20}{100} \times \frac{4}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{8 + 25 + 6}{1000} = \frac{39}{1000} = 0/039$$

احتمال مبتلا نشدن:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0/039 = 0/961$$

۵۷۱- گزینه ۱

$$\begin{aligned} \text{جمله آخر} = 40 &\Rightarrow a + (n - 1)d = 40 \Rightarrow -14 + 90d = 40 \Rightarrow 90d = 54 \Rightarrow d = \frac{54}{90} = \frac{6}{10} \\ &= 0/6 \end{aligned}$$

حال کافی است جمله عمومی دنباله را منفی قرار دهیم و n را بیابیم:

$$\begin{aligned} a + (n - 1)d < 0 &\Rightarrow -14 + 0/6n - 0/6 < 0 \Rightarrow 0/6n < 14/6 \Rightarrow n < \frac{14/6}{0/6} = \frac{146}{6} \\ &= \frac{73}{3} = 24/66 \end{aligned}$$

پس $n = 24$ آخرین جمله منفی دنباله است و این دنباله ۲۴ جمله منفی دارد.

۵۷۲- گزینه ۴

به بررسی موارد می پردازیم:

$$\text{الف) } a + b - c = 1 \Rightarrow a + b = 1 + c \xrightarrow{\text{توان 2}} a^2 + b^2 + 2ab = 1 + c^2 + 2c$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2c \Rightarrow \text{الف صحیح است.}$$

$$\text{ب) } a + b - c = 1 \Rightarrow a - c = 1 - b \xrightarrow{\text{توان 2}} a^2 + c^2 - 2ac = 1 + b^2 - 2b$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 = 1 + 2ac - 2b \Rightarrow \text{ب صحیح است.}$$

$$\text{پ) } a + b - c = 1 \xrightarrow{\text{توان 2}} (a + b - c)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2a + 2ac + 2bc \Rightarrow \text{پ صحیح است.}$$

(ت) با توجه به قسمت الف می دانیم که:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2c \xrightarrow{c=a+b-1} a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2(a + b - 1)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -1 - 2ab + 2a + 2b \Rightarrow \text{ت صحیح است.}$$

بنابراین هر ۴ قسمت صحیح هستند.

۵۷۳- گزینه ۲

$$x = 2 - \sqrt{5} \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2 - \sqrt{5}} \xrightarrow{\substack{\text{ضرب صورت و مخرج} \\ \text{در مزدوج مخرج}}} \frac{2 + \sqrt{5}}{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} = \frac{2 + \sqrt{5}}{4 - 5} = -(2 + \sqrt{5})$$

$$= -2 - \sqrt{5}$$

پس:

$$x + x^{-1} - 3\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5}) + (-2 - \sqrt{5}) - 3\sqrt{5} = -5\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt[3]{x + x^{-1} - 3\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt[3]{-5\sqrt{5}} = -\sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}} = -\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = -\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{5}$$

۵۷۴- گزینه ۲

وقتی خط $y = -1$ مماس بر سهمی است، پس عرض نقطه رأس سهمی $y = -1$ است. از طرفی:

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3}$$

حال کافی است نقطه رأس سهمی یعنی $(-\frac{2}{3}, -1)$ را به عنوان یکی از نقاط روی منحنی، داخل ضابطه آن قرار دهیم:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + m \xrightarrow{\left(-\frac{2}{3}, -1\right)} -1 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) + m$$

واضح است که m همان عرض از مبدأ سهمی است.

۵۷۵- گزینه ۳

نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{-x}$$

دو واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم:

$$y = \sqrt{-x} \Rightarrow y = \sqrt{-(x-2)}$$

برای یافتن محل برخورد نمودار تابع حاصل با نیمساز ناحیه اول و سوم داریم:

$$\sqrt{-x+2} = x \Rightarrow -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$x = -2$ غیر قابل قبول است چون در دامنه معادله $\sqrt{-x+2} = x$ وجود ندارد و تنها جواب معادله $x = 1$ است.

۵۷۶- گزینه ۳

$$f(x) = \frac{2x-3}{5x+1} \Rightarrow f(2) = \frac{2(2)-3}{5(2)+1} = \frac{1}{11} \Rightarrow f\left(\frac{2}{f(2)}\right) = f\left(\frac{2}{\frac{1}{11}}\right) = f(22) = \frac{2(22)-3}{5(22)+1} = \frac{41}{111}$$

۵۷۷- گزینه ۲

ابتدا ۲ زوج از ۶ زوج را انتخاب می‌کنیم (به $\binom{6}{2}$ حالت). با انتخاب این دو زوج، ۴ نفر از ۷ نفر مشخص می‌شوند و ۳ نفر دیگر کم داریم. اما در بین این سه نفر نباید زوج دیگری وجود داشته باشد. به همین جهت ۳ زوج از ۴ زوج باقیمانده را انتخاب کرده (به $\binom{4}{3}$ طریق) و از هر کدام از این ۳ زوج، یک نفر را برمی‌گزینیم. (یا زن یا شوهر) بنابراین پاسخ مسأله برابر است با:

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{3} \times 2^3 = 480$$

۵۷۸- گزینه ۲

عضوهای مجموعه پیشامد را می‌نویسیم:

$$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$= n(A) = 12$$

تعداد اعضای مجموعه فضای نمونه برابر 6×6 است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

۵۷۹- گزینه ۱

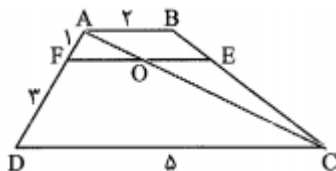
برای این که معادله درجه دومی دارای ۲ ریشه حقیقی مثبت باشد باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m > 0 \Rightarrow m^2 - 8m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 8 \\ m < 0 \end{cases} \\ S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m-2}{1} > 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases}$$

اشتراک مجموعه جواب‌های بالا $-1 < m < 0$ است.

۵۸۰- گزینه ۱

برای حل این تست‌ها بهتر است طول پاره‌خط‌ها را برابر خود نسبت‌ها در نظر بگیریم. مثلاً اگر $\frac{DC}{AB} = \frac{5}{2}$ است بهتر است DC را ۵ و AB را ۲ فرض کنیم. به همین روش $AF = 1$ و $AD = 4$ در نظر می‌گیریم. در مثلث ADC داریم:



$$\frac{FO}{DC} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow \frac{FO}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow FO = \frac{5}{4}$$

در مثلث ABC داریم:

$$\frac{OE}{AB} = \frac{CE}{CD} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow \frac{OE}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow OE = \frac{3}{2}$$

بنابراین $FE = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$ و نسبت $\frac{FE}{CD}$ برابر $\frac{11}{20}$ است.

۵۸۱- گزینه ۲

عدد ۴۱ مثال نقض گزینه اول است.

$$41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \times 43$$

مثال نقض گزینه سوم نیز مثلث قائم‌الزاویه است که اضلاع قائمه با ارتفاع‌ها برابرند.

گزینه ۴ نیز در حالت کلی درست نیست و فقط در مورد مربع و مستطیل درست است.

گزینه ۲ صحیحی است زیرا:

$$S = \frac{1}{2}ah \Rightarrow a = \frac{2S}{h}$$

هرچه h کوچک تر باشد، ضلع بزرگ تر است.

۵۸۲- گزینه ۳

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{4} &\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

حال $\cos 4x$ را از روی $\sin 2x$ محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{9}{16}\right) = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

۵۸۳- گزینه ۴

دامنه توابع را پیدا می‌کنیم:

$$y = \log \frac{x-2}{x} \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < 0$$

$$۱) y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \{x > 2\} \cap \{x > 0\} = \{x > 2\}$$

$$۲) y = \log \frac{x^2-4}{x^2+2x} \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2+2x} > 0$$

$$\Rightarrow$$

		-۲	۰	۲	
$\frac{x^2-4}{x^2+2x}$	+	-	-	+	+
$\frac{x^2-4}{x^2+2x}$	+	-	+	+	+
	+	+	-	+	+

$$\text{دامنه} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{-2\}$$

$$۳) y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$۴) y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \{x > 2\} \text{ یا } \{x < 0\}$$

ضابطه تابع نیز در گزینه چهارم با ضابطه تابع (صورت سؤال) برابر است.

$$f(x) = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} = 2 \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \log \frac{x-2}{x}$$

۵۸۴- گزینه ۴

$$4^x + 1 = 3(2^x) - 1 \Rightarrow 4^x - 3(2^x) + 2 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 3(2^x) + 2 = 0$$

با تغییر متغیر $2^x = A$ معادله را حل می‌کنیم.

$$A^2 - 3A + 2 = 0 \Rightarrow (A - 1)(A - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ A = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

نقطه‌های تلاقی $A(0, 2)$ و $B(1, 5)$ هستند و فاصله آن‌ها برابر است با:

$$d = \sqrt{(1 - 0)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{10}$$

۵۸۵- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 5}{\frac{1}{2\sqrt{3 - x}} - \frac{4}{2\sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 16$$

۵۸۶- گزینه ۳

تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است پس حد چپ و حد راست و مقدار تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{ax + 3} = \sqrt{a + 3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + ax = 1 + a \Rightarrow 1 + a = \sqrt{a + 3} \xrightarrow{\text{توان 2}} 1 + a^2 + 2a = a + 3 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \\ f(1) = 1 + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a + 2)(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

حاصل $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ را می‌یابیم:

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right) + 3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1/5$$

۵۸۷- گزینه ۳

از همه داده‌ها ۱۳ واحد کم می‌کنیم تا به روش سریع تری میانگین را محاسبه کنیم.

$$\bar{x} = 13 + \frac{7 + (-4) + 5 + 3 + (-2) + 1 + (-3) + (-6) + (a - 13)}{9} = 13$$

$$\Rightarrow 7 + (-4) + 5 + 3 + (-2) + 1 + (-3) + (-6) + (a - 13) = 0 \Rightarrow a = 12$$

حال واریانس داده‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \text{واریانس} &= (12 - 13)^2 \\ &= (7 - 13)^2 + (10 - 13)^2 + (14 - 13)^2 + (11 - 13)^2 + (16 - 13)^2 \\ &\quad + (18 - 13)^2 + (9 - 13)^2 + (20 - 13)^2 \\ \sigma^2 &= \frac{1 + 36 + 9 + 1 + 4 + 9 + 25 + 16 + 49}{9} \approx 16/66 \end{aligned}$$

۵۸۸- گزینه ۲

فضای نمونه زوج‌های مرتبی را که مجموع آن‌ها ۵ یا ۱۰ باشد را می‌نویسیم:

$$S = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

مجموعه زوج‌هایی که هر دو عدد رو شده زوج نباشد را می‌نویسیم.

$$A = \{(5, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{7}$$

۵۸۹- گزینه ۴

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow [x] - 2 = 1 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

در این بازه تابع $f(x)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x) = |x - 3| - |x - 4| \xrightarrow{3 \leq x < 4} f(x) = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

حال نقاط برخورد تابع $f(x)$ و $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\frac{1}{2}(2x - 5)(2x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

در بازه $3 \leq x < 4$ دو نمودار فاقد نقطه مشترک هستند.

۵۹۰- گزینه ۱

توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{2(x+4) - 1}{(x+4) + 2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$(gof)(x) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{6x+7}{x+2}$$

معادله را می‌نویسیم و جواب‌های آن را می‌یابیم:

$$\frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow (2x+7)(x+2) = (6x+7)(x+6)$$

$$2x^2 + 11x + 14 = 6x^2 + 43x + 42 \Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -1 \end{cases}$$

۵۹۱- گزینه ۱

$$T = \frac{2\pi}{|\pi(a+1)|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |a+1| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a+1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a+1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{5}{2} \Rightarrow f(x)$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{5}{4} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

تابع f زمانی کمترین مقدارش را دارد که $\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$ کمترین مقدار یعنی -1 را داشته باشد:

$$\min f(x) = \frac{25}{4} - \frac{5}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

۵۹۲- گزینه ۲

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + (-2x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

به ازای $x = 2k\pi + \pi$ مخرج کسر معادله برابر صفر می شود و این جوابها غیر قابل قبول هستند.

۵۹۳- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - (x^3 + 2x^2 + 3x + 1)}{ax^2 - 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{ax^2} = -\frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = -1$$

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-3x^2 - 3x + 6}{-x^2 - 4x + 5} = \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 4x - 5} = \frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+2)}{x+5} = \frac{3 \times 3}{1+5} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

۵۹۴- گزینه ۲

شیب خط مماس بر منحنی، برابر مشتق تابع در نقطه تماس است.

$$f'(x) = 5 \Rightarrow y' = 4x - 3 = 5 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

طول نقطه تماس برابر ۲ است. مقدار دو معادله را در این نقطه برابر هم قرار می دهیم:

$$\Rightarrow 2(2)^2 - 3(2) + 6 = 5(2) + a \Rightarrow 8 - 6 + 6 = 10 + a \Rightarrow a = -2$$

۵۹۵- گزینه ۱

مشتق تابع $y = f(x^2 + 1)$ را در $x = 1$ محاسبه می‌کنیم.

$$y = f(x^2 + 1) \Rightarrow y' = (f(x^2 + 1))' \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + 1) \xrightarrow{x=1} y' = 2f'(2)$$

می‌دانیم $f'(2) = \frac{1}{3}$ پس:

$$y' = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

شیب خط قائم، عکس و قرینه شیب خط مماس است.

$$m = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

۵۹۶- گزینه ۲

دامنه تابع $[-1, 1]$ است. مشتق تابع را می‌یابیم و آن را مثبت فرض می‌کنیم.

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

با توجه به مثبت بودن $\sqrt{1-x^2}$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1-x^2} - x > 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} > x$$

اگر x منفی یا صفر باشد رابطه همواره برقرار است. در صورتی که x مثبت باشد می‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم.

$$1 - x^2 > x^2 \Rightarrow 2x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به مثبت بودن x ، بازه $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\text{نهایی: } (-1, 0] \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = b - a = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

۵۹۷- گزینه ۲

$$f(x) = x^3 + kx - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + k = 0 \xrightarrow{k>0} x \in \emptyset$$

مشتق این تابع هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود پس مقدار تابع را در ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم:

$$f(-1) = -8 - 2k - 2 = -2k - 10$$

$$f(1) = 1 + k - 2 = k - 1$$

$$f(1) - f(-2) = (k - 1) - (-2k - 10) = 3k + 9 = 12 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max f(x) = 0 \\ \min f(x) = -12 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع برابر صفر خواهد شد.

۵۹۸- گزینه ۲

این دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس فاصله مرکز تا محورهای مختصات برابر شعاع (R) است. از آن جایی که دایره از نقطه‌ای به مختصات $(1, -2)$ عبور کرده است، مرکز در ربع چهارم قرار دارد.

$$\begin{aligned} O(R, -R) \Rightarrow (x - R)^2 + (y + R)^2 &= R^2 \xrightarrow{(1, -2)} (1 - R)^2 + (-2 + R)^2 = R^2 \\ &\Rightarrow (1 + R^2 - 2R) + (4 + R^2 - 4R) = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \\ &\Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow R = 1, R = 5 \end{aligned}$$

۵۹۹- گزینه ۱

شکل حاصل از دوران، یک مخروط است که اگر با صفحه گفته شده برش دهیم دایره‌ای به شعاع BE خواهد بود. BE را با قضیه تالس محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BE}{DC} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{BE}{2} \Rightarrow BE = 1$$

۶۰۰- گزینه ۴

$$P(\text{انتقال}) = \frac{1}{2} \times P + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200} \Rightarrow P = 0/08$$

۶۰۱- گزینه ۳

اگر a , b و c به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله باشند، بین آن‌ها رابطه $a \times c = b^2$ برقرار است. پس داریم:

$$\begin{aligned} a_2 \times a_{12} &= (a_5)^2 \Rightarrow a_2(a_2 + 10d) = (a_2 + 3d)^2 \Rightarrow a_2^2 + 10a_2d = a_2^2 + 6a_2d + 9d^2 \\ &\Rightarrow 4a_2d = 9d^2 \xrightarrow{d \neq 0} a_2 = \frac{9}{4}d (*) \end{aligned}$$

حال برای تعیین قدر نسبت دنباله هندسی، دو جمله متوالی این دنباله را بر هم تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{b}{a} = \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_2 + 3d}{a_2} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{9}{4}d + 3d}{\frac{9}{4}d} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

۶۰۲- گزینه ۳

روش اول:

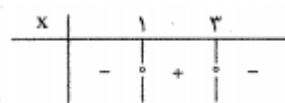
$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{f(x)} = [0, 2]$$

می‌دانیم دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ ، بازه $[0, 2]$ است، پس برای تعیین دامنهٔ تعریف تابع $f(3-x)$ ، ورودی این تابع، یعنی $3-x$ را در بازه $[0, 2]$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$0 \leq 3-x \leq 2 \stackrel{-3}{\Rightarrow} -3 \leq -x \leq -1 \stackrel{\times(-1)}{\Rightarrow} 3 \geq x \geq 1 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

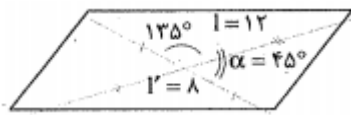
روش دوم: ابتدا ضابطهٔ $f(3-x)$ را ساخته و سپس دامنهٔ آن را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f(3-x) = \sqrt{\frac{2(3-x)}{6-2x} - \frac{(3-x)^2}{x^2-6x+9}} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$



$$\Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

۶۰۳- گزینهٔ ۲



$$l = 12, l' = 8, \alpha = 45^\circ$$

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \frac{1}{2} \times l \times l' \times \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 45^\circ = 24\sqrt{2}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۲۴ برابر $\sqrt{2}$ است.

۶۰۴- گزینهٔ ۳

ابتدا از میان ۵ مدرسه، ۳ مدرسه را انتخاب کرده و سپس از هر کدام از مدارس انتخاب‌شده (از چهار نفر آن)، یک نفر انتخاب می‌کنیم. داریم:

انتخاب یک نفر از هر کدام از مدارس انتخاب ۳ مدرسه

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

۶۰۵- گزینهٔ ۳

چون به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه کرده‌ایم، داده‌ها از x به $y = 2x + 3$ تغییر کرده‌اند، بنابراین انحراف معیار نیز در حالت دوم ۲ برابر می‌شود و میانگین (\bar{x}) نیز در حالت دوم به $\bar{y} = 2\bar{x} + 3$ تغییر می‌کند. بنابراین نسبت ضریب تغییرات در حالت دوم به حالت اول برابر است با:

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + 3} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + 3} \times \frac{\bar{x}}{\bar{x}} = \frac{2\bar{x}}{2\bar{x} + 3} \stackrel{\bar{x}=12}{=} \frac{2 \times 12}{2 \times 12 + 3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

۶۰۶- گزینهٔ ۴

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$n(A) = n(\text{مجموع دو تاس مضرب 4}) = n(\text{مجموع 4}) + n(\text{مجموع 8}) + n(\text{مجموع 12})$$

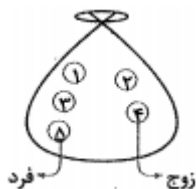
$$= n\left(\overbrace{\{(1,3), (2,2), (3,1)\}}^{\text{مجموع 4}}\right) + n\left(\overbrace{\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}}^{\text{مجموع 8}}\right) + n\left(\overbrace{\{(6,6)\}}^{\text{مجموع 12}}\right)$$

$$= 3 + 5 + 1 = 9$$

$$P(A) = P(\text{مجموع دو تاس مضرب 4}) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۶۰۷- گزینه ۱

برای آن که دو مهره با شماره‌های فرد متوالیاً خارج نشوند، باید مهره‌های فرد و زوج یکی در میان باشند. پس داریم:



$$P(\text{پنجمی فرد و چهارمی زوج و سومی فرد و دومی زوج و اولی فرد}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{10} = 0/1$$

۶۰۸- گزینه ۱

$$\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{2}} |x-2| > |2x+1| \xrightarrow{\text{به توان 2 می‌رسانیم.}} x^2 - 4x + 4$$



$$> 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0 \xrightarrow{\hspace{10em}} -3 < x$$

$$< \frac{1}{3}, x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

۶۰۹- گزینه ۲

$$\begin{cases} f(x) = (2x-3)^2 \\ g(x) = x+2 \end{cases} \Rightarrow f(g(x)) = (2g(x)-3)^2 = \left(\frac{2(x+2)-3}{2x+1}\right)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{cases} y_1 = f(x) = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 \\ y_2 = f(g(x)) = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \xrightarrow{y_1=y_2} 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 16x$$

$$= 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۶۱۰- گزینه ۴

روش اول: اگر از کیسه‌ای متوالیاً و بدون جایگذاری مهره خارج کنیم و مسئله به رنگ برخی از مهره‌ها اشاره کند و به رنگ برخی دیگر اشاره نکند، برای محاسبه احتمال، آن مهره‌هایی که به رنگ آن‌ها اشاره نمی‌شود، را کنار گذاشته و فکر می‌کنیم آن‌ها را از ابتدا انتخاب نکرده‌ایم. داریم:



$$P(\text{دومین مهره سفید باشد}) = P(\text{اولین مهره سفید باشد}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

روش دوم:

$$P = \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = \frac{6}{15 \times 14} (5 + 9) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۶۱۱- گزینه ۱

$$7000 = 1400(10)^{0/04t} \Rightarrow 5 = (10)^{0/04t} \Rightarrow \log_{10} 5 = \log_{10} 10^{0/04t} \Rightarrow \log 5 = 0/04 t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 5}{0/04} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{100}} = \frac{60}{4} = 15$$

۶۱۲- گزینه ۴

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{-\cos 2x \quad 1} = \sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \left(-\sin \frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x$$

$$= 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۶۱۳- گزینه ۴

عبارت داده شده را در $\sin 10^\circ$ ضرب و تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ برای ساده‌سازی کمک بگیریم:

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} \times \cos 10^\circ \times \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ = \frac{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ}$$

و از آن جایی که $\sin 80^\circ$ همان $\cos 10^\circ$ است، عبارت بالا را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$\frac{1 \sin 80^\circ}{8 \sin 10^\circ} = \frac{1 \cos 10^\circ}{8 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cot 10^\circ$$

۶۱۴- گزینه ۳

مقدار تابع در $x = 0$ برابر یک است، بنابراین $y(0) = 1$ است که می توان نتیجه گرفت $a = 1$ است.

از آن جایی که $b > 0$ فرض شده است، بیشترین مقدار تابع $y = a + b \sin(cx)$ برابر با $a + b$ می باشد که در صورت سؤال بیشترین مقدار عدد ۳ داده شده است. بنابراین:

$$a + b = 3 \stackrel{a=1}{\Rightarrow} b = 2$$

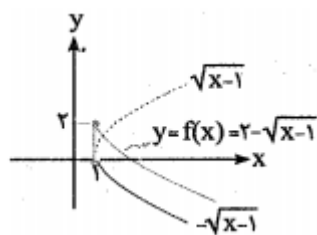
سومین اکستریم بعد از صفر تابع $y = \sin x$ نقطه $x = \frac{5\pi}{2}$ است که در تابع $y = a + b \sin(cx)$ عدد $x = 5$ داده شده است که:

$$|5c| = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{|c|} = 5 \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{2} \stackrel{c>0}{\Rightarrow} c = \frac{\pi}{2}$$

دقت کنید که اگر $c < 0$ بود نمودار $y = \sin x$ باید نسبت به محور y ها قرینه می شد. در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$\frac{c}{a+b} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

۶۱۵- گزینه ۱



$$y = f(x) = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} D_f = [1, +\infty) \\ R_f = (-\infty, 2] \end{cases}$$

$$\stackrel{f^{-1}}{\Rightarrow} x = 2 - \sqrt{y-1} \Rightarrow \sqrt{y-1} = 2-x$$

جای x و y را عوض می کنیم.

$$\begin{aligned} &= 2-x \stackrel{\text{به توان 2 می رسانیم}}{\Rightarrow} y-1 = (2-x)^2 \Rightarrow y \\ &= x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, D_{f^{-1}} \\ &= R_f = (-\infty, 2] \end{aligned}$$

تذکر: برای تعیین دامنه تعریف تابع وارون (یعنی دامنه f^{-1})، باید برد تابع f را مشخص کنیم. با توجه به نمودار تابع f به راحتی پی می بریم که برد تابع f ، بازه $(-\infty, 2]$ یا $y \leq 2$ است.

۶۱۶- گزینه ۲

از آن جایی که α و β ریشه های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ هستند باید در این معادله صدق کنند، یعنی:

$$\alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha + 3 = \alpha^2$$

$$\beta^2 - \beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta + 3 = \beta^2$$

حال به سراغ عبارت خواسته شده در صورت سؤال می رویم، یعنی:

$$\frac{\alpha^3}{\alpha+3} + \frac{\beta^3}{\beta+3} = \frac{\alpha^3}{\alpha^2} + \frac{\beta^3}{\beta^2} = \alpha + \beta = S = 1$$

۶۱۷- گزینه ۳

اگر f و g اکیداً نزولی باشند بنابر تعریف دو تابع اکیداً نزولی خواهیم داشت:

$$x_1 > x_2 \xrightarrow{\text{نزولی } g} g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow{\text{نزولی } f} f(g(x_1)) > f(g(x_2))$$

بنابراین $f \circ g$ یک تابع اکیداً صعودی خواهد بود.

۶۱۸- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2(1 - x))$$

در همسایگی $x = 0$ عبارت $1 - x$ به عدد یک نزدیک می‌شود و عبارت x^2 با مقادیر مثبت به عدد صفر نزدیک می‌شود و می‌توان گفت در همسایگی $x = 0$ عبارت $x^2(1 - x)$ با مقادیر مثبت به عدد صفر نزدیک می‌شود و می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$$

۶۱۹- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

حال با جایگذاری $a = -3$ حد عبارت را وقتی $x \rightarrow 3$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} &\times \frac{(1 - x) - \sqrt{x + 1}}{(1 - x) - \sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x + 9)(1 - x - \sqrt{x + 1})}{(1 - x)^2 - (x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-3x + 9)(1 - x - \sqrt{x + 1})}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(1 - x - \sqrt{x + 1})}{x} = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

چنانچه در مدرسه قاعده هوییتال به شما آموزش داده شده است می‌توانید پاسخ این سؤال را به کمک این قاعده محاسبه کنید.

۶۲۰- گزینه ۴

$$\begin{cases} 3x - [x] & , \quad x < 2 \Rightarrow \text{دح پچ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = 6 - [2^-] = 5 \\ a & , \quad x = 2 \Rightarrow \text{رادقم} = f(2) = a \\ x + 2 & , \quad x > 2 \Rightarrow \text{دح تسار} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \end{cases}$$

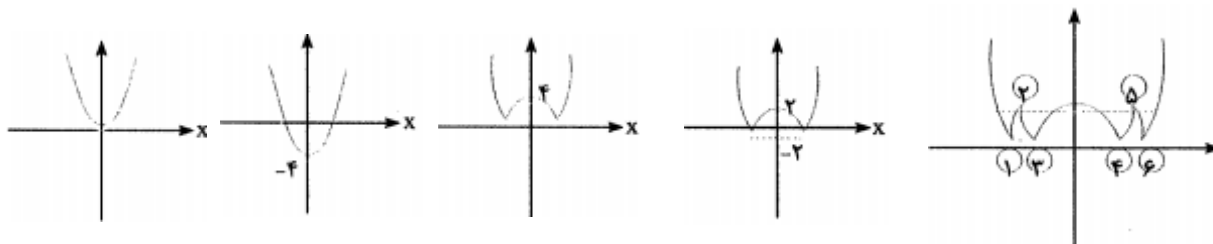
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

چون حد چپ و حد راست تابع f در $x = 2$ برابر نیستند، در نتیجه تابع در $x = 2$ حد نداشته و ناپیوسته است. پس به ازای هیچ مقدار a تابع f در $x = 2$ پیوسته نمی‌باشد.

۶۲۱- گزینه ۳

نمودار تابع $f(x) = ||x^2 - 4| - 2|$ را رسم می‌کنیم و نقاط مشتق ناپذیر را مشخص می‌کنیم:

$$y = x^2 \quad y = x^2 - 4 \quad y = |x^2 - 4| \quad y = |x^2 - 4| - 2 \quad y = ||x^2 - 4| - 2|$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع در ۶ نقطه (نقطه گوشه) مشتق ناپذیر است.

۶۲۲- گزینه ۲

تابع $y = \sqrt{x^3 + x + 2}$ در نقطه $x = 1$ مقداری برابر با ۲ دارد. حال شیب خط مماس بر تابع را در نقطه $A(1, 2)$ مشخص می‌کنیم:

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x + 2}} \Rightarrow y'(1) = \frac{2}{2} = 1$$

با داشتن شیب خط مماس ($m = 1$) و نقطه $A(1, 2)$ معادله خط مماس در این نقطه را می‌نویسیم:

$$y - 2 = (x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

طبق معادله به دست آمده عرض از مبدأ برابر ۱ است.

۶۲۳- گزینه ۱

ابتدا عرض نقاط بحرانی تابع را در بازه $(-2, 2)$ مشخص می‌کنیم. داریم:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \\ x = 3 \in (-2, 2) \end{cases}$$

حال عرض تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه به دست می‌آوریم. داریم:

$$y(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

$$y(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

در آخر بین مقادیر به دست آمده، بیشترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق تابع در این بازه معرفی می‌کنیم:

$$y_{\text{مطلق}}^{\max} = \max\{10, 3, -17\} = 10$$

۶۲۴- گزینه ۲

مشتق تابع $y = x^5 - 5x^3 + 2$ را محاسبه و $y'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3) \Rightarrow$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'		+	-	-	+
		/	\	\	/

بنابراین دو نقطه $x = \pm\sqrt{3}$ که یکنوایی تابع در اطراف آن‌ها تغییر کرده است، اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

۶۲۵- گزینه ۱

برای آن که تابع $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + x - 3$ یک تابع همواره صعودی باشد، باید $y'(x) \geq 0$ باشد:

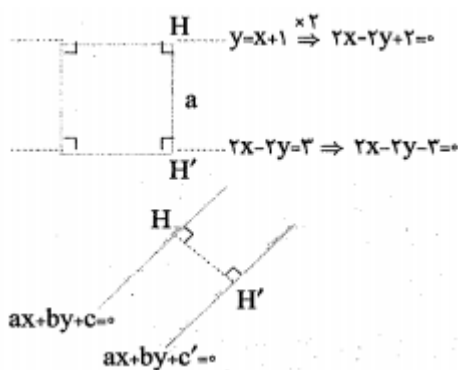
$$y'(x) = x^2 + 2mx + 1$$

و برای آن که یک عبارت درجه ۲ همواره نامنفی باشد، باید ضریب x^2 آن مثبت و $\Delta \leq 0$ باشد:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow |m| \leq 1$$

۶۲۶- گزینه ۳

چون معادله دو خط داده شده، معادله دو خط موازی است، در نتیجه معادله دو خط داده شده، معادله دو ضلع مقابل یک مربع است. فاصله این دو خط موازی، برابر با اندازه طول ضلع این مربع است، پس داریم:



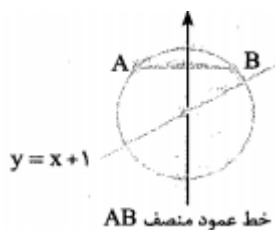
$$HH' = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مربع}} = (HH')^2 = a^2 = \frac{25}{8}$$

۶۲۷- گزینه ۴

روش اول: می‌دانیم که عمودمنصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد. بنابراین ابتدا معادله عمودمنصف AB را

می‌نویسیم:



$$A \text{ و } B \text{ وسط و نقطه} : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), m_{\text{عمودمنصف}} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{3} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{6} \Rightarrow 3y + x = 2$$

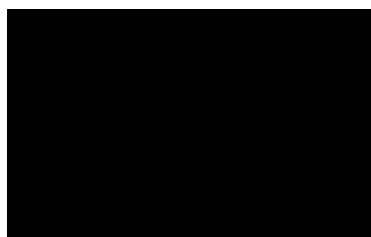
محل برخورد دو خط $3y + x = 2$ و $y = x + 1$ مرکز دایره است، بنابراین: $O\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

روش دوم: از آنجایی که مرکز بر روی خط $y = x + 1$ است مختصاتی به صورت $O(\alpha, \alpha + 1)$ دارد و چون دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(0, -1)$ روی دایره هستند، فاصله مرکز تا A و B یکسان و برابر شعاع است.

$$\begin{aligned} |OB| = |OA| &\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (\alpha + 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2} \Rightarrow \sqrt{2\alpha^2 + 4\alpha + 4} \\ &= \sqrt{2\alpha^2 - 4\alpha + 2} \xrightarrow{\text{به توان 2 می‌رسانیم}} 8\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow O(\alpha, \alpha + 1) \\ &= \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

۶۲۸- گزینه ۱

با توجه به صورت سؤال، چون $AB = AC$ است، بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین می‌باشد. از طرفی چون QM و PN به ترتیب عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC می‌باشند و هر نقطه‌ای روی عمودمنصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است، بنابراین دو مثلث ANB و ACM نیز متساوی الساقین می‌باشند. بنابراین داریم:



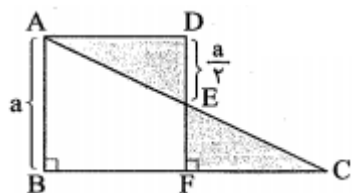
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta ABC: \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ \\ \Delta ANB: \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B} = 50^\circ \\ \Delta ACM: \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \widehat{C} = 50^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_2 = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_2 = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

پس \widehat{A}_2 کوچک‌ترین زاویه ΔAMN است.

۶۲۹- گزینه ۳

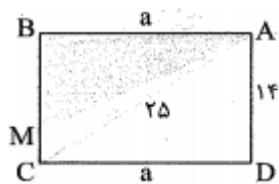
با توجه به صورت سؤال، چون دو سایه زده همنهشت می‌باشند، بنابراین $EF = DE = \frac{AB}{2}$ می‌باشد، بنابراین داریم:



$$\frac{S_{\text{دورنقه}}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{\left(a + \frac{a}{2}\right) \times a}{a^2} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{a^2} = \frac{3}{4}$$

۶۳۰- گزینه ۱

چون پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت $\frac{5}{9}$ تقسیم می کند، پس مساحت ΔABM $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$ مساحت کل مستطیل $ABCD$ است. پس داریم:



$$\Delta ACD \text{ در فیثاغورس در } \sqrt{14^2 + a^2} = 25 \Rightarrow a^2 = 625 - 196 = 429$$

$$\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{\frac{BM \times a}{2}}{14 \times a} = \frac{5}{14} \Rightarrow BM = 10$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{\frac{429}{a^2} + 100} = \sqrt{529} = 23$$

۴-۶۳۱- گزینه ۴

$$x^2 + 4, 2x, x^2 - 2 \xrightarrow{\text{سه جمله متوالی } c, b, a} b^2 = ac \Rightarrow (2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2$$

دنباله هندسی نزولی هستند.

$$= x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^2 - 2x^2 - 8 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 & (\text{به ازای } x = -2 \text{ دنباله نزولی نخواهد بود.}) \\ t = x^2 = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

با معلوم بودن $x = 2$ ، مقدار سه جمله اول متوالی این دنباله هندسی نزولی به صورت ۸، ۴ و ۲ خواهد بود. حال برای تعیین مجموع هفت جمله اول این دنباله، از فرمول S_n بهره می گیریم. داریم:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \xrightarrow{a_1=a=8, q=\frac{1}{2}} S_7 = \frac{8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8 \left(1 - \frac{1}{128}\right)}{\frac{1}{2}} = 16 \times \frac{127}{128} = \frac{127}{8}$$

۲-۶۳۲- گزینه ۲

اگر ابتدا نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی انتقال داده و سپس یک واحد به طرف y های مثبت انتقال دهیم، ضابطه این تابع پس از انتقال های صورت گرفته به صورت $y = f(x + 4) + 1 = \frac{1}{2}|x + 4| - 1$ تبدیل می شود. حال برای تعیین طول نقطه تقاطع نمودار تابع انتقال یافته (نمودار جدید) و نمودار اولیه، ضابطه این دو تابع را با هم قطع می دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y_1 = f(x) = \frac{1}{2}|x| - 2 \\ y_2 = f(x+4) + 1 = \frac{1}{2}|x+4| - 1 \end{cases} \xrightarrow[y_1=y_2]{\substack{\text{قطع می دهیم} \\ \times 2}} \frac{1}{2}|x| - 2 = \frac{1}{2}|x+4| - 1 \Rightarrow |x| - |x+4|$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -4 : -x + (x+4) = 2 \Rightarrow 4 = 2 \xrightarrow{\text{غ ق ق}} x \in \emptyset \\ -4 \leq x \leq 0 : -x - (x+4) = 2 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3 \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = -3 \\ x > 0 : x - (x+4) = 2 \Rightarrow -4 = 2 \xrightarrow{\text{غ ق ق}} x \in \emptyset \end{cases}$$

۶۳۳- گزینه ۴

چون میانگین چهار داده حذف شده برابر $\bar{x} = \frac{10+15+45+50}{4} = \frac{120}{4} = 30$ است و برابر با میانگین داده‌های اولیه می‌باشد، پس میانگین ۲۱ داده باقی مانده نیز تغییری نکرده و همان ۳۰ باقی می‌ماند. یعنی:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = 30 (*)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 64 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{25} \Rightarrow \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 1600$$

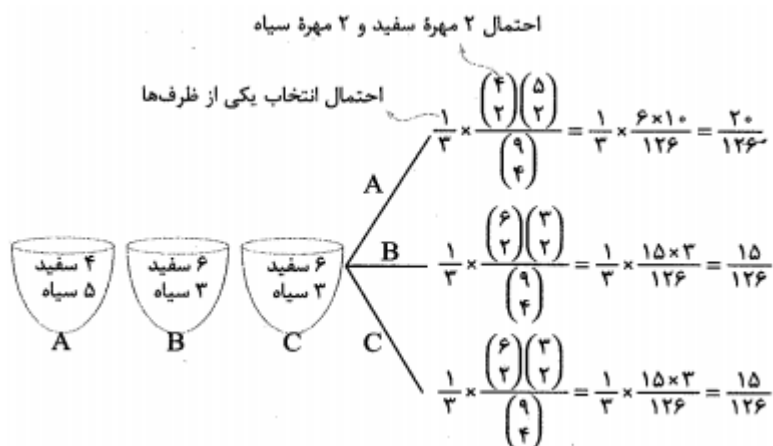
حال چهار داده حذف شده را از بین داده‌ها کم می‌کنیم بنابراین واریانس داده‌های باقی مانده برابر است با:

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{1600 - [(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (50 - 30)^2 + (45 - 30)^2]}{n_{\text{جدید}} = 21} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{1600 - [400 + 225 + 400 + 225]}{21} = \frac{1600 - 1250}{21} = \frac{350}{21} = 16/66$$

توجه: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$ مجموع مربعات انحرافات داده‌ها از میانگین است و

۶۳۴- گزینه ۱

با توجه به قانون جمع احتمال‌ها، داریم:



$$\Rightarrow P(2 \text{ مهره سفید و } 2 \text{ مهره سیاه}) = \frac{20}{126} + \frac{15}{126} + \frac{15}{126} = \frac{50}{126} = \frac{25}{63}$$

۶۳۵- گزینه ۲

اگر محمد و زهرا را از ۵ فرزند خانواده کنار بگذاریم، ۳ فرزند خواهیم داشت که در بین آن‌ها باید دقیقاً ۲ پسر وجود داشته باشد، پس به دنبال احتمال ۲ پسر از ۳ فرزند هستیم:

$$\frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

۶۳۶- گزینه ۱

$$m x^2 - \underbrace{(m+3)}_b x + \underbrace{5}_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی} = x_1^2 + x_2^2 = 6 \xrightarrow{x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9 - 10m}{m^2} = 6 \Rightarrow m^2 - 4m + 9$$

$$= 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

حال به ازای این مقادیر به دست آمده برای m ، کنترل می‌کنیم که Δ معادله منفی نباشد. داریم:

$$\begin{cases} m = 1: x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 20 = -4 \geq 0 \text{ غ ق ق} \\ m = -\frac{9}{5}: -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \end{cases}$$

۶۳۷- گزینه ۳

$$f(x) = ab^x - 1 \begin{cases} \xrightarrow{A(-\frac{11}{2}, \frac{11}{2}) \in f} \frac{1}{2} = a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \quad (1) \quad \xrightarrow{\text{معادله (1)}} \frac{ab}{a} \Rightarrow \frac{12}{\frac{3}{2}} \Rightarrow b\sqrt{b} \\ \xrightarrow{B(1, 11) \in f} 11 = a(b)^1 - 1 \Rightarrow ab = 12 \quad (2) \quad \xrightarrow{\text{معادله (2)}} \frac{ab}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{12}{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$= 8 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 2^3 \xrightarrow{\text{به توان } \frac{2}{3} \text{ می‌رسانیم.}} b = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4 \xrightarrow{ab=12} a = 3 \xrightarrow{b=4} f(x)$$

$$= 3 \times 4^x - 1 \Rightarrow f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۶۳۸- گزینه ۴

با توجه به صورت سؤال در می‌یابیم باید معادله لگاریتمی حل کنیم، داریم:

$$\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5 \Rightarrow \log_x(x^2 + 4) - \log_x 5 = 1 \Rightarrow \log_x \frac{x^2 + 4}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 4}{5} = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \xrightarrow{\text{مینای لگاریتم نمی تواند 1 باشد.}} \text{غ ق ق} \Rightarrow \log_2 x \stackrel{x=4}{=} \log_2 4 = 2 \log_2 2 = 2 \\ x = 4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۶۳۹- گزینه ۲

$$\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases} \xrightarrow{\text{بی شمار جواب}} \frac{m}{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}} \frac{1}{3} = \frac{m - 1}{m - 2} = \frac{m - 1}{4 - 2m} \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

به ازای $m = -1$ ، دو نسبت اول برابر $\frac{1}{3}$ بوده و نسبت سوم نیز برابر $\frac{1}{3}$ می باشد، پس قابل قبول است. ولی به ازای $m = 3$ ، نسبت سوم برابر با دو نسبت اول و دوم نبوده و دستگاه جواب نخواهد داشت.

۶۴۰- گزینه ۲

حاصل جمع دو عبارت نامنفی هنگامی می تواند صفر باشد که هر دو عبارت به صورت همزمان صفر باشند که تنها در نقطه $x = 1$ است که دو عبارت $|x^2 + 3x - 4|$ و $\sqrt{x^3 + x - 2}$ می توانند صفر باشند. بنابراین تنها جواب این معادله 1 می باشد.

۶۴۱- گزینه ۲

اگر دو تابع $y = x + c$ و $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq b \\ a & x = b \end{cases}$ بخواهند با یکدیگر برابر باشند، در مرحله اول باید دامنه های

یکسان داشته باشند، بنابراین $b = 2$ است تا دامنه دو تابع \mathbb{R} باشد. حال بریم سراغ ضابطه دو تابع $y = x + c$

و $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$ به ازای $x \neq 2$ ضابطه دو تابع $y = x + c$ و $y = x + 2$ است، بنابراین $c = 2$ خواهد

بود. هم چنین در $x = 2$ یک ضابطه $y = x + 2$ و ضابطه دیگر $y = a$ است که با جایگذاری $x = 2$ در ضابطه اول داریم $a = 4$ و در نتیجه حاصل $a + b + c$ برابر است با ۸.

۶۴۲- گزینه ۳

می دانیم:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

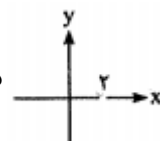
بنابراین می توان گفت:

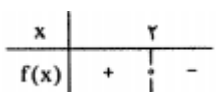
$$(f^{-1} \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$$

حال از آن جایی که در صورت سؤال $f^{-1} \circ g$ داده شده است کافیست آن را معکوس کنیم تا $g^{-1} \circ f$ به دست آید:

$$(f^{-1} \circ g)^{-1} x = \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{-1} = \left(\frac{3x+2}{x-1} \right) \Rightarrow (g^{-1} \circ f)(2) = \frac{8}{1} = 8$$

۶۴۳- گزینه ۳

از آن جایی که تابع $f(x)$ اکیداً نزولی با دامنه \mathbb{R} است و $f(2) = 0$ ، نمودار شماتیکی به صورت  دارد

و جدول تعیین علامت آن به صورت  می باشد. حال برای محاسبه دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x+3}}$ عبارت $\frac{f(x)}{x+3}$ را تعیین علامت می کنیم که خواهیم داشت:

x	-3	2
f(x)	+	-
x+3	-	+
$\frac{f(x)}{x+3}$	-	+

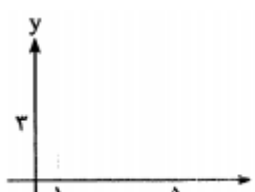
بنابراین عبارت $\frac{f(x)}{x+3}$ در بازه $[-3, 2]$ نامنفی است و در نتیجه دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x+3}}$ برابر با $[-3, 2]$ خواهد بود.

۶۴۴- گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر $T = 4$ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است، پس داریم:

$$y = a + \sin(b\pi x) \Rightarrow \text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4$$

$$\Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

 مقدار عرض از مبدأ $x=0$ $a = 3$

چون به ازای $x > 0$ ، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right) \Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

۶۴۵- گزینه ۱

با کمک گرفتن از اتحاد $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ عبارت $\sin^2 mx$ را می‌توان به صورت $y = \frac{1 - \cos 2mx}{2}$ نوشت. از آنجایی که تناوب تابع $y = \cos x$ عدد $T = 2\pi$ می‌باشد، تناوب تابع $y = \frac{1 - \cos 2mx}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2mx)$ برابر با $T = \frac{2\pi}{|2m|}$ است که بنا بر فرض مسئله آن را برابر با ۲ قرار می‌دهیم، داریم:

$$\left| \frac{2\pi}{2m} \right| = 2 \Rightarrow |m| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = +\frac{\pi}{2} \text{ یا } m = -\frac{\pi}{2}$$

۶۴۶- گزینه ۳

برای حل معادله $\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ با کمک گرفتن از رابطه $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) &= -\sin x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{3} - x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow * \end{cases} \end{aligned}$$

به ازای $k = 1, 2$ جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ می‌باشند، بنابراین این معادله ۲ ریشه در این بازه خواهد داشت.

۶۴۷- گزینه ۲

دقت کنید که می‌توان همسایگی مفروض در اطراف دو نقطه $x = 2$ و $x = \sqrt{2}$ یافت که شامل هیچ عدد صحیحی نباشد، بنابراین حد تابع $y = f(x)$ در هر دو نقطه $x = 2$ و $x = \sqrt{2}$ از ضابطه‌ای به دست می‌آید که در آن $x \notin \mathbb{Z}$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = 3 + 3 = 6$$

۶۴۸- گزینه ۳

با توجه به عبارت $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{2x^2+ax+b} = +\infty$ چون به ازای $x = 1$ صورت کسری عدد ۴ می‌باشد، برای آن که در همسایگی راست و چپ $x = 1$ حاصل حد $+\infty$ شود، باید در هر دو همسایگی راست و چپ، مخرج با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک شود، یعنی باید $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج باشد و اگر عبارت $2x^2 + ax + b$ بخواهد ریشه مضاعف $x = 1$ داشته باشد، باید به صورت $2(x-1)^2$ باشد:

$$2x^2 + ax + b = 2(x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 4x + 2$$

بنابراین $a = -4$ و $b = 2$ است. حال با به دست آوردن a و b ، حد عبارت $\frac{ax - \sqrt{x^2 + 3x}}{bx + 3}$ را در $+\infty$ با کمک قاعده پرتوان محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - |x|}{bx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x}{bx} = \frac{a-1}{b} = \frac{-5}{2}$$

۶۴۹- گزینه ۲

همان طور که می دانیم تابع $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ در $x = 2k$ ناپیوسته است اما پیوستگی راست دارد. تابع $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ در بازه $[0, 5]$ در سه نقطه $\{0, 2, 4\}$ ناپیوسته است اما از آن جایی که $x = 0$ ابتدای بازه است فقط به پیوستگی راست نیاز دارد که پیوستگی راست وجود دارد. ولی نقاط $x = 2$ و $x = 4$ باید ریشه عبارت ضریب برکت باشد تا تابع پیوسته شود. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 4 + 2a + b = 0 \\ 16 + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 12 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6 \xrightarrow{2a+b=-4} b = 8$$

بنابراین $a + b = 2$ می باشد.

۶۵۰- گزینه ۲

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{u} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \xrightarrow{f'(x)=nu^{n-1}.u'} f'(x) = -\frac{1}{2} (2x+1)^{-\frac{3}{2}} \times 2$$

$$x_2 = 12 \text{ تا } x_1 = 4 \text{ از آهنگ متوسط تغییر تابع از } = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{-\frac{2}{15}}{8} = -\frac{1}{60}$$

$$x = 4 \text{ در آهنگ لحظه‌ای } = f'(4) = -\frac{1}{2} (9)^{-\frac{3}{2}} \times 2 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{27} \times 2 = -\frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{-27 + 60}{60 \times 27} = \frac{33}{60 \times 27} = \frac{11}{540}$$

۶۵۱- گزینه ۳

برای تابع $y = (x-2)^2[x]$ در همسایگی $x = 2$ داریم:

$$y(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & ; 1 \leq x < 2 \\ 2(x-2)^2 & ; 2 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \begin{cases} 2(x-2) & ; 1 < x < 2 \\ 4(x-2) & ; 2 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow y''(x) = \begin{cases} 2 & ; 1 < x < 2 \\ 4 & ; 2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow y''_+(2) + y''_-(2) = 6$$

۶۵۲- گزینه ۴

اگر خط $y = 2x - 1$ بر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = 3$ مماس باشد، می توان نتیجه گرفت: $f'(3) = 5$. حال برای نوشتن معادله خط مماس بر تابع $y = f^2(3x)$ در نقطه $x = 1$ مقدار و شیب خط مماس بر تابع در این نقطه را به دست می آوریم:

$$y(1) = f^2(3) = 25 \Rightarrow (1, 25)$$

$$y'(x) = 6f'(3x)f(3x) \Rightarrow y'(1) = 6f'(3)f(3) = 60$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم و برای به دست آوردن عرض از مبدأ به جای x عدد صفر را جایگزین می‌کنیم:

$$y - 25 = 60(x - 1) \stackrel{x=0}{\Rightarrow} y = -35$$

۶۵۳- گزینه ۱

$$y'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

دو نقطه $x = \pm 1$ ریشه‌های غیر مضاعف مشتق اول و طول اکسترم‌های نسبی تابع هستند. برای به دست آوردن شیب خط گذرنده از این دو نقطه باید عرض این نقاط را نیز به دست آورد:

$$y(1) = -4, y(-1) = 0$$

حالا شیب خط گذرنده از دو نقطه $(1, -4)$ و $(-1, 0)$ را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{0 + 4}{-1 - 1} = \frac{4}{-2} = -2$$

۶۵۴- گزینه ۲

روش اول: با کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$y = (\sqrt{\sin x} - 2)^2 - 4$$

$$0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sqrt{\sin x} - 2 \leq -1 \Rightarrow 1 \leq (\sqrt{\sin x} - 2)^2 \leq 4 \Rightarrow -3 \leq (\sqrt{\sin x} - 2)^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq y \leq 0 \Rightarrow y_{max} = 0$$

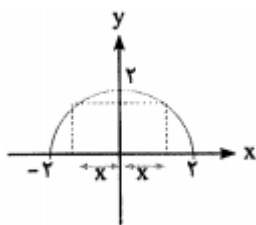
روش دوم: ابتدا نقاط بحرانی و سر و ته بازه تعریف تابع را به دست می‌آوریم، سپس مقدار تابع را در این نقاط را مشخص می‌کنیم:

$$y(x) = \sin x - 4\sqrt{\sin x} \Rightarrow y'(x) = \cos x - \frac{4 \cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \cos x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\sin x}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 1 - \frac{2}{\sqrt{\sin x}} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{\sin x} \text{ غ ق ق} \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -3 \\ y(k\pi) = 0 \end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع صفر و کم‌ترین مقدار -3 است.

۶۵۵- گزینه ۲



$y = \sqrt{4 - x^2}$ یک نیم‌دایره به مرکز $(0, 0)$ و شعاع ۲ می‌باشد. مستطیلی که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس آن روی دایره فوق باشد، طولی برابر $2x$ و عرضی برابر $f(x)$ و مساحتی برابر با $S = 2x\sqrt{4 - x^2}$ دارد. حال باید بیشترین مقدار $S = 2x\sqrt{4 - x^2}$ را بیابیم:

$$S' = \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_{max} = S(\sqrt{2}) = 4$$

۶۵۶- گزینه ۱

روش اول:

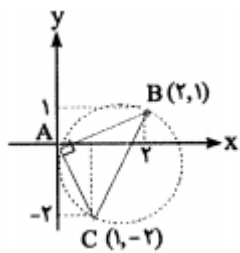
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \begin{cases} \text{را صدق می‌دهیم} & \rightarrow c = 0 \\ \text{را صدق می‌دهیم} & \rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0 \\ \text{را صدق می‌دهیم} & \rightarrow 1 + 4 + a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ 2a - 4b = -10 \end{cases} \Rightarrow 5a = -15$$

$$\Rightarrow a = -3$$

$$a = -3 \xrightarrow{4a+2b=-10} 4(-3) + 2b = -10 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

حال با معلوم بودن مقادیر a ، b و c ، شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$



روش دوم: با رسم نقاط در دستگاه مختصات، به راحتی پی می‌بریم که مثلث ABC با ابعاد $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است. پس در دایره محیطی این مثلث (دایره‌ای که از سه رأس این مثلث می‌گذرد)، قطر همان وتر مثلث محسوب می‌شود. پس داریم:

$$\text{قطر دایره} = \text{وتر} = 2R = BC = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

۶۵۷- گزینه ۴

بنابر اطلاعات مسئله، خروج از مرکز $\frac{2}{3}$ و طول وتر کانونی ۲ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} c = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow b^2 = \frac{5}{9}a^2 \quad (I) \\ \text{طول وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a} = 2 \Rightarrow b^2 = a \quad (II) \end{cases} \xrightarrow{(I),(II)} a = \frac{5}{9}a^2 \xrightarrow{a \neq 0} a = \frac{9}{5} \xrightarrow{b = \sqrt{a}} b = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

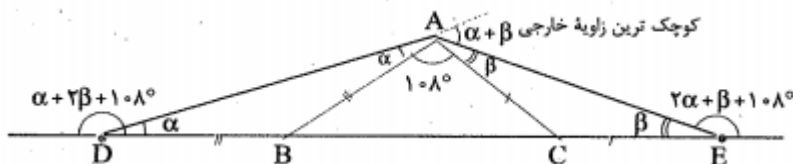
و بر طبق رابطه $c^2 = a^2 - b^2$ خواهیم داشت:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{81}{25} - \frac{9}{5} = \frac{81 - 45}{25} = \frac{36}{25} \Rightarrow c = \frac{6}{5}$$

بنابراین خواسته مسئله یعنی فاصله کانونی برابر با $2c = \frac{12}{5} = 2/4$ است.

۶۵۸- گزینه ۳

همان طور که در شکل مشاهده می کنیم، کوچک ترین زاویه خارجی مثلث ADE ، زاویه خارجی نظیر رأس A است. از طرفی مجموع زوایای داخلی در مثلث ADE برابر 180° می باشد، پس داریم:



$$(\alpha + 108^\circ + \beta) + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 72^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \text{کوچک ترین زاویه خارجی مثلث } ADE = \alpha + \beta = 36^\circ$$

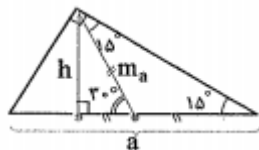
۶۵۹- گزینه ۱

اگر یک لوزی حول قطر بزرگ دوران کند دو مخروط هم حجم متصل به یکدیگر را ایجاد خواهد کرد که قطر قاعده آن ها برابر با طول قطر کوچک لوزی و در هر مخروط ارتفاع برابر با نصف قطر بزرگ است و از آن جایی که حجم هر مخروط $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ است. خواهیم داشت:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi(2)^2(3) = 4\pi$$

بنابراین حجم کل به اندازه حجم دو مخروط و 8π می باشد.

۶۶۰- گزینه ۱



چون زوایای داخلی مثلث با اعداد ۶، ۵ و ۱ متناسب است، در نتیجه این زوایا به ترتیب 90° ، 75° و 15° می باشند. در هر مثلث قائم الزاویه به زوایای داخلی 15° و 75° ، کوچک ترین ارتفاع (ارتفاع وارد بر وتر)، $\frac{1}{4}$ برابر بزرگ ترین ضلع (وتر) است. داریم:

$$h = \frac{1}{2}m_a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a$$

۶۶۱- گزینه ۲

اگر خوب دقت کنید $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ و $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ است، حال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = \left| \frac{2 + \sqrt{3}}{\text{عدد مثبت}} \right| + \left| \frac{2 - \sqrt{3}}{\text{عدد مثبت}} \right| \\ &= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \end{aligned}$$

۶۶۲- گزینه ۲

تعداد پاره‌خط‌های هر مرحله برابر است با:

6, 11, 16, ...

که این اعداد، جملات یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 6$ و قدر نسبت $d = 5$ هستند که جمله عمومی آن به صورت $a_n = 5n + 1$ است.

حال $a_n \geq 100$ قرار می‌دهیم تا بتوانیم اولین بار که a_n ، رقمی می‌شود را به دست آوریم:

$$5n + 1 \geq 100 \Rightarrow n > 19/8 \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} n \geq 20$$

بنابراین برای اولین بار در $n = 20$ ، a_n عددی ۳ رقمی می‌شود.

۶۶۳- گزینه ۳

دسته پنجم / دسته چهارم / دسته سوم / دسته دوم / دسته اول
 {21, 23, 25, 27, 29} / {13, 15, 17, 19} / {7, 9, 11} / {3, 5} / {1} ...

با نوشتن چند دسته اول، به این نتیجه می‌رسیم که جمله اول هر دسته، n امین عدد طبیعی فرد است که شماره جمله‌اش (یعنی n) برابر با $\{1 + (\text{مجموع شماره‌های دسته‌های قبلی})\}$ می‌باشد. به عنوان مثال، جمله اول دسته ۶م، برابر با $16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ (۱ امین عدد فرد طبیعی، یعنی عدد $2(16) - 1 = 31$ است. پس داریم:

$$436 \text{ امین عدد طبیعی فرد} = \left\{ \frac{29(1+29)}{2} + 1 \right\} = \text{امین عدد طبیعی فرد} = \text{جمله اول دسته 30}$$

$$= 2 \times 436 - 1 = 871$$

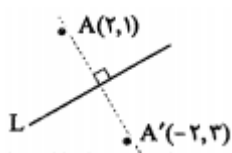
$$465 = 2 \times 465 - 1 = 929 = \text{امین عدد طبیعی فرد} = \text{جمله آخر دسته 30}$$

$$871 + 929 = 1800 = \text{جمله آخر} + \text{جمله اول}$$

۶۶۴- گزینه ۳

اگر به حقوق هر کارمندی ۲۰٪ اضافه شود یعنی حقوق کارمندان در عدد $1/2$ ضرب شده است و اگر تمام عددها در عدد a ضرب شود واریانس داده‌ها در a^2 ضرب می‌شود. بنابراین از آن جایی که تمام داده‌ها در عدد $1/2 = \frac{6}{5}$ ضرب شده است، واریانس آن‌ها در عدد $\frac{36}{25}$ ضرب می‌شود.

۶۶۵- گزینه ۳



بر اساس شکل رسم شده دقت کنید که اگر A و A' بخواهند نسبت به خط L قرینه باشند، خط L باید عمود منصف خط واصل A و A' باشد. بنابراین این خط شیبی برابر با $\frac{-1}{m_{AA'}}$ خواهد داشت که از نقطه $O(0,2)$ (نقطه وسط A و A') می‌گذرد:

$$m_L = \frac{-1}{m_{AA'}} = \frac{-1}{\frac{3-1}{-2-2}} = \frac{-1}{\frac{2}{-4}} = 2 \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - 2 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 2$$

۶۶۶- گزینه ۳

۳ مهره سفید
۲ مهره سیاه
۵ مهره قرمز

روش اول: تجربه تصادفی، انتخاب دو مهره دلخواه از درون این جعبه است. پس داریم:

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$P(\text{دو مهره هم‌رنگ نباشند}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1}}{45} = \frac{3 \times 2 + 3 \times 5 + 2 \times 5}{45} = \frac{31}{45}$$

روش دوم: با استفاده از احتمال پیشامد متمم، داریم:

$$P(\text{هم‌رنگ نباشند}) = 1 - P(\text{هم‌رنگ باشند}) = 1 - \left(\frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{5}{2}}{45} \right) = 1 - \frac{3 + 1 + 10}{45} = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$$

۶۶۷- گزینه ۲

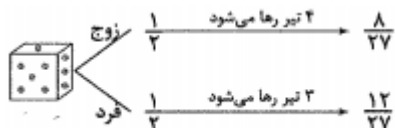
اگر در پرتاب یک تاس، عدد زوج ظاهر شود، ۴ تیر رها می‌کنیم. احتمال ۲ بار موفقیت در این ۴ تیر رها شده با توجه به توزیع احتمال دوجمله‌ای برابر است با:

$$P_1(X=2) = \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{27}$$

حال اگر عدد فرد ظاهر شود، ۳ تیر رها می‌کنیم و احتمال ۲ بار موفقیت در این ۳ تیر رها شده، برابر است با:

$$P_2(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$$

در آخر با توجه به قانون جمع احتمال‌ها، داریم:



$$P(2 \text{ بار موفقیت}) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{27} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{27} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{27} + \frac{12}{27} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{27} = \frac{10}{27}$$

۶۶۸- گزینه ۴

ریشه‌های معادله جدید را X در نظر گرفته و ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ را x در نظر می‌گیریم. با توجه به صورت تست، داریم:

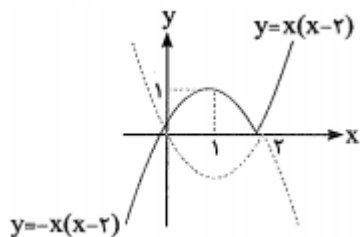
$$X = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = X + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{X + 1}$$

حال با جایگذاری چهره جدید x در معادله مفروض، داریم:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{X+1} \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{X+1} \right) - 1 &= 0 \xrightarrow{\times (X+1)^2} - (X+1)^2 - 3(X+1) + 2 \\ &= 0 \xrightarrow{\text{معادله جدید}} -X^2 - 5X - 2 = 0 \Rightarrow X^2 + 5X + 2 = 0 \end{aligned}$$

۶۶۹- گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ را رسم می‌کنیم تا پی ببریم که در کدام بازه نزولی است:



$$y = x|x - 2| \Rightarrow \begin{cases} x(x - 2) & ; x \geq 2 \\ -x(x - 2) & ; x < 2 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم تابع فوق در بازه $(1, 2)$ نزولی است، پس در این بازه وارون تابع را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 1 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} &\xrightarrow{\text{1 را اضافه و کم می‌کنیم}} y = -x(x - 2) = -x^2 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 1 \Rightarrow y \\ &= -(x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

حال x را بر حسب y محاسبه کرده و با تغییر x به y و y به x ، ضابطه وارون این تابع را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 = 1 - y &\xrightarrow{\text{جذر}} |x - 1| = \sqrt{1 - y} \xrightarrow{1 < x < 2} x - 1 = \sqrt{1 - y} \Rightarrow x = \sqrt{1 - y} + 1 ; 0 < y \\ &< 1 \xrightarrow{f^{-1}} y = 1 + \sqrt{1 - x} ; 0 < x < 1 \end{aligned}$$

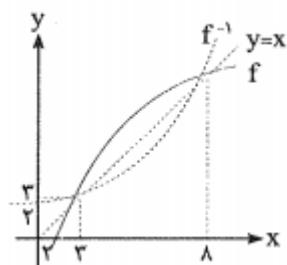
۶۷۰- گزینه ۲

بر اساس اطلاعات مسئله:

$$70 = 90 - 40 \left(\frac{1}{10}\right)^{0/02t} \Rightarrow -20 = -40 \left(\frac{1}{10}\right)^{0/02t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{0/02t} \Rightarrow \log \frac{1}{2} \\ = \log \left(\frac{1}{10}\right)^{0/02t} \Rightarrow -\log 2 = -0/02 t$$

۶۷۱- گزینه ۴

ابتدا با توجه به نمودار تابع f ، نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم، قرینه کنیم. داریم:



حال به تعیین دامنه تعریف تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ می‌پردازیم. برای این منظور عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

برای تشخیص این که در کدام فاصله f^{-1} کوچک‌تر یا مساوی $y = x$ می‌باشد، کافی است به نمودار توجه کرده که در این صورت به راحتی پی می‌بریم که در بازه $[3, 8]$ نامعادله فوق برقرار است. پس داریم:

$$D_{(\sqrt{x-f^{-1}(x)})} = [3, 8]$$

۶۷۲- گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \xRightarrow{\text{دامنه تابع}} D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_2(x^2 + 2x) \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & 0 & \\ \hline g & + & - & + \end{array} \Rightarrow D_g \\ = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

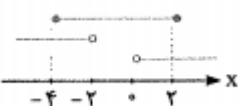
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{ x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \underbrace{\log_2(x^2 + 2x) \leq 3}_{(*)} \right\}$$

حال برای تعیین دامنه تابع $f \circ g$ باید مجموعه جواب نامعادله (*) را مشخص کنیم، داریم:

$$\log_a \text{ () } \leq k \stackrel{a>1}{\Rightarrow} \text{ () } \leq a^k \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \log_2(x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x \\ | \\ + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ -4 \quad 2 \quad 2 \end{array} \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

حال با توجه به جواب به دست آمده داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x < -2 \text{ یا } x > 0, -4 \leq x \leq 2\}$$


$$\Rightarrow \{x \mid -4 \leq x < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

۶۷۳- گزینه ۳

از آن جا که $f(x)$ یک تابع خطی معرفی شده است آن را $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم و در رابطه $2f(x-1) + f(2-x) = 3x + 4$ جایگزین می‌کنیم:

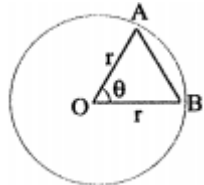
$$2a(x-1) + 2b + a(2-x) + b = 3x + 4 \Rightarrow ax + 3b = 3x + 4 \Rightarrow a = 3, b = \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = 3x + \frac{4}{3}$$

حال برای به دست آوردن $f^{-1}(3)$ ، $f(x)$ را برابر با ۳ قرار می‌دهیم.

$$3x + \frac{4}{3} = 3 \Rightarrow 3x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{9} \Rightarrow \left(\frac{5}{9}, 3\right) \in f \Rightarrow \left(3, \frac{5}{9}\right) \in f^{-1}$$

۶۷۴- گزینه ۲

می‌دانیم در دایره‌ای به شعاع r ، بین طول کمان AB و زاویه مرکزی روبه‌رو به آن برحسب رادیان رابطه $\theta = \frac{L}{r}$ برقرار است که براساس اطلاعات مسئله زاویه مرکزی روبه‌روی کمان AB برابر خواهد بود با



حال برای محاسبه مساحت مثلث OAB داریم: $\theta = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$$S = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{4} = 6.25$$

۶۷۵- گزینه ۱

می‌دانیم کمان‌های شامل مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، سینوس را به کسینوس و کسینوس را به سینوس تبدیل می‌کنند. از طرفی برای مشخص کردن علامت‌های آن‌ها کافی است مشخص کنیم کمان داده شده در کدام ربع از دایره مثلثاتی قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\frac{\overbrace{\cos(270^\circ + 15^\circ)}^{\text{ربع چهارم}} - \overbrace{\sin(270^\circ - 15^\circ)}^{\text{ربع سوم}}}{\underbrace{\sin(540^\circ - 15^\circ)}_{\text{ربع دوم}} - \underbrace{\sin(90^\circ + 15^\circ)}_{\text{ربع دوم}}} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

حال کافی است صورت و مخرج را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم کنیم:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{\frac{128}{100}}{-\frac{72}{100}} = \frac{128}{-72} = -\frac{16}{9}$$

۶۷۶- گزینه ۱

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 &\Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x \Rightarrow \sin 2x \\ &= -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha} 2x \\ &= k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

۶۷۷- گزینه ۲

همان طور که براساس نمودار داده شده مشاهده می کنید تابع $f(x)$ در $-\infty$ با مقادیر کم تر از ۲ در حال نزدیک شدن به عدد ۲ می باشد. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x(x-2)} = \frac{3}{2 \times 0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

۶۷۸- گزینه ۱

از آن جایی که براساس اطلاعات مسئله $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = -1$ است، با کمک گرفتن از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - 2|x|} = \frac{ax^n}{5x} = -1 \Rightarrow n = 1, a = -5$$

حال با جایگذاری $n = 1$ و $a = -5$ حد عبارت را در $x = 3$ محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

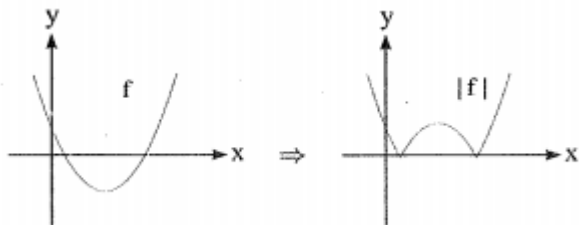
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{9x^2 - 4x^2 - 15x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{5x} = -6$$

۶۷۹- گزینه ۲

که مقدار آن در $x = 2$ برابر با $\frac{-1}{8}$ خواهد شد.

۶۸۳- گزینه ۳

داخل قدر مطلق تابع درجه دوم $y = x^2 + mx + 3$ وجود دارد که اگر بخواهد قدر مطلق آن ۳ نقطه بحرانی داشته باشد باید تابع درجه دوم داده شده ۲ ریشه ساده داشته باشد تا پس از قدر مطلق گرفتن از آن ۳ نقطه بحرانی ایجاد شود. به نمودار تابع درجه دوم زیر پس از قدر مطلق گذاشتن توجه کنید:



بنابراین:

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 12 > 0 \Rightarrow |m| > 2\sqrt{3}$$

۶۸۴- گزینه ۴

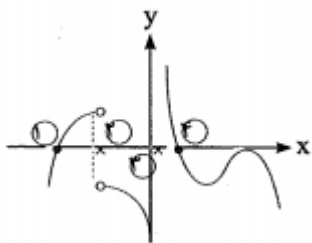
اگر تابع $y = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشد، باید مشتقی بزرگتر مساوی صفر داشته باشد و از آنجایی که مشتق آن تابع درجه دوم $y' = 3x^2 - 3(m+2)x + 3$ است، خواهیم داشت:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4(m+2)^2 - 4 \times 9 \leq 0 \Rightarrow |m+2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq m+2 \leq 3 \Rightarrow -5 \leq m \leq 1$$

بنابراین براساس گزینه‌های داده شده $m = 2$ نمی‌تواند صحیح باشد.

دقت کنید که اگر در تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد این عبارت همواره بزرگتر مساوی صفر خواهد بود.

۶۸۵- گزینه ۲



در یک تابع پیوسته اگر در اطراف نقطه $x = a$ یکنوایی تابع (علامت مشتق f') تغییر کند، آن نقطه اکسترمم نسبی است. حال از آنجایی که در اطراف نقاط مشخص شده، f' تغییر علامت داده است، این نقاط در تابع f اکسترمم نسبی می‌باشند.

۶۸۶- گزینه ۴

براساس کتاب درسی خروج از مرکز عددی بین صفر و یک است که هرچه به صفر نزدیک‌تر باشد، بیضی گردتر و هر چه به یک نزدیک‌تر باشد، شکل کشیده‌تر می‌باشد و به پاره‌خط نزدیک می‌شود، بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ صحیح است. اما برای گزینه ۴ مثال نقض ساده‌ای می‌توان زد:

$$(1) \text{ مثال نقض } \begin{cases} c = 2 \\ a = 4 \Rightarrow 2c = 4 \\ e = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2) \text{ مثال نقض } \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \Rightarrow 2c = 2 \\ e = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۶۸۷- گزینه ۳

اگر مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$ باشد و دایره بر هر دو محور مماس باشد، باید $|\alpha| = |\beta| = R$ باشد. حال از آن جایی که دایره مورد نظر از نقطه $(1, -1)$ می‌گذرد، مرکز این دایره در ناحیه چهارم دستگاه مختصات است، یعنی $\alpha = -\beta = R$ می‌باشد و معادله‌ای به صورت مقابل دارد:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

حال با صدق دادن نقطه $(1, -1)$ در معادله دایره خواهیم داشت:

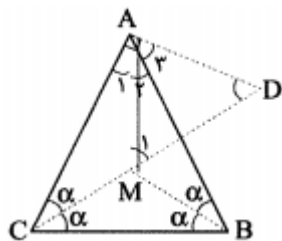
$$(1 - R)^2 + (R - 1)^2 = R^2 \Rightarrow 2R^2 - 4R + 2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 4R + 2 = 0 \Rightarrow R = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\text{مساحت حداقل}} R = 2 - \sqrt{2}$$

۶۸۸- گزینه ۲

همان‌طور که می‌دانیم نقاط روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. بنابراین محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث نقطه‌ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است، بنابراین هر سه رأس نقطه روی دایره می‌باشند.

۶۸۹- گزینه ۱



شکل را طبق فرضیات رسم کرده و سپس از A به M وصل می‌کنیم. در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - 4\alpha \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \hat{A}_3 = 90^\circ - (180^\circ - 4\alpha) = 4\alpha - 90^\circ$$

هم‌چنین در مثلث ACD داریم:

$$\hat{D} = 90^\circ - \alpha$$

بنابراین در مثلث AMD می‌توان گفت:

$$\hat{M}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 + 2\alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 90^\circ - \alpha$$

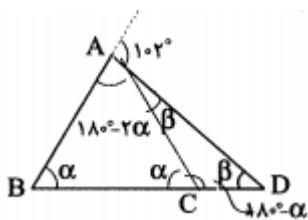
همان‌طور که می‌بینید در مثلث AMD زاویه‌های زیر ساق برابر و مثلث متساوی‌الساقین است، یعنی $AM = AD$

۶۹۰- گزینه ۴

شکل را طبق فرضیات رسم می‌کنیم. در مثلث ABC ، زاویه‌های زیر ساق را α فرض می‌کنیم. در مثلث ACD داریم:

$$2\beta = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$$

حال مثلث ABD را در نظر می‌گیریم و داریم:

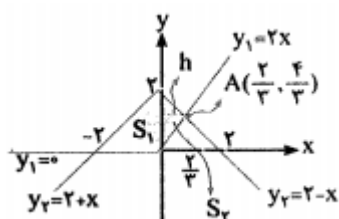


$$\Delta ABD \text{ زاویه خارجی} : 102^\circ = \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 102^\circ \Rightarrow \alpha = 68^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زاویه رأس } A = 180^\circ - 2\alpha = 44^\circ$$

۶۹۱- گزینه ۳

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



$$y = x + |x| \Rightarrow \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{3}$$

$$y = 2 - |x| \Rightarrow \begin{cases} 2 - x & x \geq 0 \\ 2 + x & x < 0 \end{cases}$$

$$S_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2, S_2 = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

۶۹۲- گزینه ۴

$$\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1 \Rightarrow \log_3 \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 3^1 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \text{ غ ق} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_8(2x - 1) \stackrel{x=\frac{5}{2}}{=} \log_8 \left(2 \left(\frac{5}{2} \right) - 1 \right) = \log_8 4 = \frac{2}{3}$$

۶۹۳- گزینه ۳

در صورت سؤال صحبت از میانگین طول اضلاع مربع‌ها شده است و خواسته سؤال از ما میانگین مساحت مربع‌ها می‌باشد، بنابراین برای حل این سؤال از فرمول دوم واریانس استفاده می‌کنیم. حال با داشتن ضریب تغییرات و میانگین آن‌ها، ابتدا انحراف معیار و سپس واریانس را محاسبه می‌کنیم:

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow \text{واریانس} : \sigma^2 = 9, \sigma^2 = \frac{\overbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}^{\text{مجموع مربعات داده‌ها}}}{n} - (\bar{x})^2$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n} - (15)^2 \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n} = 9 + 225 = 234$$

میانگین مساحت مربع‌ها
نیگنایم تحاسم اعرم

بنابراین میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۲۳۴ می‌باشد.

۶۹۴- گزینه ۲

در پیشامد مطلوب باید مجموع ارقام بر ۳ بخش پذیر باشد:

$$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{10} = 0/4$$

۶۹۵- گزینه ۲

$$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|2x-3|} > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} |x-2| > |2x-3| \xrightarrow{\text{به توان 2}} x^2 - 4x + 4 > 4x^2 - 12x + 9$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{3}$$

ولی $x = \frac{3}{2}$ که در این بازه قرار دارد، غیر قابل قبول است (ریشه مخرج می‌باشد) پس مجموعه جواب صحیح این نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in \left(1, \frac{5}{3}\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

دقت کنیم! گزینه‌های ۱ و ۳ نیز جواب‌های درست محسوب می‌شوند، ولی کامل‌ترین جواب، گزینه ۲ است. در غیر این صورت گزینه‌های ۱ و ۳ هم صحیح خواهند بود.

۶۹۶- گزینه ۴

$P(A) = 0/9$ ، $P(B) = 0/8$ ، A و B مستقل هستند .

$$P\left(\text{لاقل عمل جراحی برای یکی از دو نفر موفقیت‌آمیز باشد}\right) = P(A \cup B)$$

$P(A \cup B)$

$$= \begin{cases} \text{روش اول} & P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0/9 + 0/8 - 0/9 \times 0/8 = 0/98 \\ \text{روش دوم} & 1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A') \cdot P(B') = 1 - 0/1 \times 0/2 = 1 - 0/02 = 0/98 \\ \text{روش سوم} & P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B) = 0/9 \times 0/2 + 0/1 \times 0/8 + 0/9 \times 0/8 \\ & = 0/18 + 0/08 + 0/72 = 0/98 \end{cases}$$

۶۹۷- گزینه ۴

اگر ۶ موقعیت برای باز تعریف کنیم، داریم:

حالت اول: ابتدا انتخاب ۴ موقعیت برای پیروزی که به دنبال آن ۲ موقعیت شکست نیز مشخص می‌شود، سپس رخداد هر پیروزی به احتمال $\frac{3}{4}$ و رخداد هر شکست به احتمال $\frac{1}{4}$ می‌باشد. بنابراین برای احتمال ۴ پیروزی و شکست خواهیم داشت:

$$\binom{6}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

حالت دوم: با توضیحی مشابه حالت اول برای ۳ پیروزی داریم:

$$\binom{6}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

بنابراین نسبت این دو احتمال برابر است با:

$$\text{نسبت دو احتمال} = \frac{\binom{6}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\binom{6}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{9}{4}$$

۶۹۸- گزینه ۳

در دنباله هندسی داریم:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$$

بنابر فرض مسئله داریم:

$$a_1, 5, a_1q^2$$

از طرفی قرار است $x - a_1q^2, 5, a_1$ تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۴ بدهند، بنابراین:

$$5 - a_1 = 4 \Rightarrow a_1 = a \xrightarrow{a_1q=5} q = 5$$

توجه داشته باشید که x همان مقداری است که باید از جمله سوم کم کنیم.

بنابراین دنباله هندسی به صورت 1, 5, 25 و دنباله حسابی به صورت 1, 5, 9 است، که اگر از جمله سوم دنباله هندسی 16 واحد کم شود، دنباله حسابی نوشته شده به دست می آید.

۶۹۹- گزینه ۲

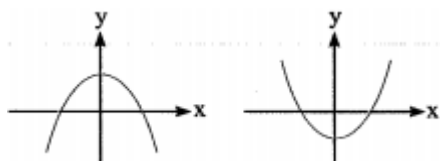
از آن جایی که $[x^2]$ ، $[x]$ و ۴ عبارت‌های همواره صحیح هستند، بنابراین x ای که بخواید در رابطه $[x^2] + [x] = x + 4$ صدق کند نیز باید صحیح باشد. حال با فرض صحیح بودن x ، براکت را از روی x و x^2 می‌توان برداشت زیرا آن‌ها نیز صحیح هستند و نیازی به وجود نماد براکت نیست:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow x + x^2 = x + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

بنابراین معادله ۲ جواب دارد.

۷۰۰- گزینه ۱

اگر یک تابع درجه دوم بخواید از هر ۴ ناحیه محورهای مختصات عبور کند باید دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد:

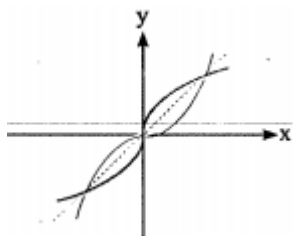


حال برای داشتن دو ریشه مختلف‌العلامت در یک معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو شرط $\Delta > 0$ و $P < 0$ نیاز است که شرط $P < 0$ اگر برقرار باشد، $\Delta > 0$ خواهد بود. بنابراین:

$$P < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1$$

۷۰۱- گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم:



۷۰۲- گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

(۱) تابع $y = \sin x + \cos 2x$ یک تابع متناوب با دامنه \mathbb{R} و غیر یک‌به‌یک است. دقت کنید که توابع متناوب هیچ‌گاه یک‌به‌یک نمی‌باشند.

(۲) تابع $y = x^3 - x$ دارای ۳ ریشه است، یعنی $(1, 0)$ و $(0, 0)$ و $(-1, 0)$ نقاطی از تابع هستند که در این صورت تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

(۳) تابع $y = x^3 + \sqrt{x} + 2$ یک تابع اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است.

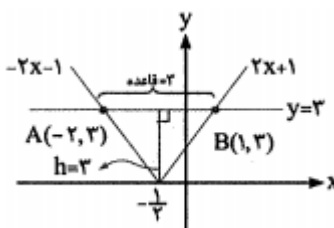
(۴) تابع $y = x + |x|$ را می‌تواند به صورت $y = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ نوشت که وجود تابع ثابت در $x < 0$ نشان می‌دهد که تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۷۰۳- گزینه ۳

ابتدا ضابطه $g \circ f$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + x, g(x) = \sqrt{4x+1} \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{4f(x)+1} \\ = \sqrt{4(x^2+x)+1}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{(2x+1)^2}} = |2x+1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$


$$= 4/5$$

۷۰۴- گزینه ۱

از آن جایی که تابع f یک تابع اکیداً صعودی است، محل برخورد f و f^{-1} لزوماً روی خط $y = x$ می‌باشد. بنابراین کفایت معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow 4x+1 = x \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ غ ق}$$

$$x < 0 \Rightarrow x + \sqrt[3]{x} = x \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ غ ق}$$

بنابراین f و f^{-1} فاقد نقطه برخورد می‌باشند.

۷۰۵- گزینه ۱

بنابر اطلاعات داده شده در صورت سؤال $f(x+3) = -f(x)$ می‌باشد که اگر در این رابطه به جای x ، $x+3$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$f(x+6) = -f(x+3) = -(-f(x)) = f(x)$$

حال از آن جایی که $f(x+6) = f(x)$ است، می توان گفت تابع $y = f(x)$ یک تابع با دوره تناوب ۶ است و می توان گفت:

$$f(29) = f(30 + (-1)) = f(-1)$$

۷۰۶- گزینه ۱

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \cos \alpha &= \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان 2}} \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

۷۰۷- گزینه ۱

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 &\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 \\ &= 0 \xrightarrow{\cos x = t} -2t^2 + 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-4} \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ t = \cos x = 2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{aligned}$$

۷۰۸- گزینه ۲

با کمک گرفتن از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{a + 2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

حال با جایگذاری $a = 3$ در تابع حد آن را در $x = -1$ محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{عبارت را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می کنیم.}$$

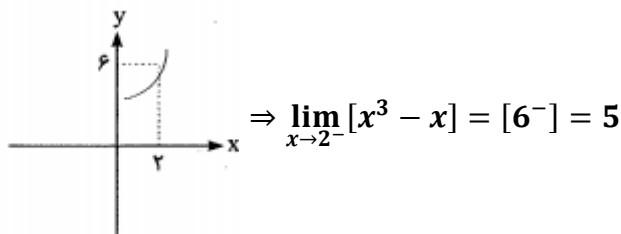
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(9x^2) - (4x^2 + 5)}{(2x + 2)(3x - \sqrt{4x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5(x-1)(x+1)}{2(x+1)(3x - \sqrt{4x^2 + 5})} = \frac{5(-2)}{2(-6)} = \frac{5}{6}$$

۷۰۹- گزینه ۲

دقت کنید که تابع $f(x)$ در $+\infty$ با مقادیر کمتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود و می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x^3 - x]$$

حال از آن جایی که تابع $y = x^3 - x$ در همسایگی $x = 2$ صعودی است ($y'(2) > 0$)، اگر از سمت چپ به $x = 2$ نزدیک شویم تابع با مقادیر کمتر از ۶ به ۶ نزدیک می شود و خواهیم داشت:



۷۱۰- گزینه ۲

همان طور که می‌دانیم تابع $y = [f(x)]$ در صحیح‌کننده‌های $f(x)$ ناپیوسته است، مگر برای تابع $f(x)$ مینیمم نسبی باشد، بنابراین تابع $y = [x^2]$ در نقاط به فرم $x = \pm\sqrt{k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) به جز $x = 0$ ناپیوسته است. $x = 0$ مینیمم نسبی x^2 است.

هم‌چنین در بازه‌ای که از $(-\sqrt{2})$ شروع می‌شود دو ناپیوستگی اول $[x^2]$ در $x = 1$ و $x = -1$ است که هر دوی این نقاط عبارت $(x^2 - 1)$ که در ضریب $[x^2]$ قرار گرفته است را صفر می‌کند و تابع $y = (x^2 - 1)[x^2]$ در این نقاط پیوسته خواهد شد.

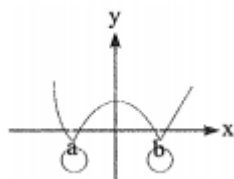
سومین ناپیوستگی $x = \sqrt{2}$ می‌باشد که نباید در بازه‌ای به فرم $(-\sqrt{2}, \alpha)$ قرار داشته باشد تا تابع $y = (x^2 - 1)[x^2]$ در این بازه پیوسته باشد، بنابراین انتهای بازه یعنی α حداکثر می‌تواند $\sqrt{2}$ باشد.

۷۱۱- گزینه ۱

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 = \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{3}{2} \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-3-4}{(2x-3)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-7}{1^2} \right) = \frac{3}{2} (2^2)^{\frac{1}{2}} (-7) = \frac{3}{2} \times (-14) = -21$$

۷۱۲- گزینه ۴



در بازه $(b, +\infty)$ تابع یک خط با شیب مثبت است، بنابراین مشتق آن باید یک تابع ثابت با عرض مثبت باشد. (گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند).

در بازه $(-\infty, a)$ تابع درجه دوم است که مشتق آن از درجه اول و یک خط شیب‌دار خواهد بود. (گزینه ۳ حذف می‌شود).

۷۱۳- گزینه ۲

اگر خط مماس در نقطه x_0 بر خط $y = 2x$ عمود باشد، باید $y'(x_0) = -\frac{1}{2}$ باشد. بنابراین:

$$y'(x_0) = \frac{-2}{x_0^2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2$$

بنابراین نقاط مورد نظر دو نقطه با مختصات $(2, 1)$ و $(-2, -1)$ می‌باشند که فاصله آن‌ها از یکدیگر $\sqrt{20}$ یا $2\sqrt{5}$ است.

۷۱۴- گزینه ۲

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x, x \in [-4, 3]$$

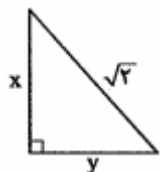
$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \notin (-4, 3) \\ x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 - 15(-3) = -9 - 9 + 45 = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 - (-4)^2 - 15(-4) = \frac{-64}{3} - 16 + 60 = \frac{68}{3} = 22/... \\ f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 15(3) = 9 - 9 - 45 = -45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{max} = \max\left\{27, \frac{68}{3}, -45\right\} = 27 \\ y_{min} = \min\left\{27, \frac{68}{3}, -45\right\} = -45 \end{cases}$$

۷۱۵- گزینه ۴



$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{2 - x^2}$$

$$A = 3x + 4y = 3x + 4\sqrt{2 - x^2} \Rightarrow A'(x) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{3\sqrt{2 - x^2} - 4x}{\sqrt{2 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2 - x^2} = 4x \xrightarrow{\text{توان 2}} 18 - 9x^2 = 16x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{18}{25} \xrightarrow{x>0} x = \frac{3\sqrt{2}}{5} \xrightarrow{x^2+y^2=2} y$$

$$= \frac{4\sqrt{2} A=3x+4y}{5} \rightarrow A_{max} = 5\sqrt{2}$$

۷۱۶- گزینه ۱

مشتق تابع را در همسایگی $x = 0$ بررسی می‌کنیم. (تابع در $x = 0$ پیوسته است).

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & ; x \geq 0 \\ \frac{1}{-x+1} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x+1)^2} & ; x > 0 \\ \frac{1}{(-x+1)^2} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_+(0) = -1 \\ y'_-(0) = 1 \end{cases}$$

از آن جایی که مشتق در راست و چپ $x = 0$ مختلف‌العلامت است، نقطه $x = 0$ یک اکسترمم نسبی است که براساس علامت مشتق راست و چپ یک ماکزیمم نسبی می‌باشد.

۷۱۷- گزینه ۲

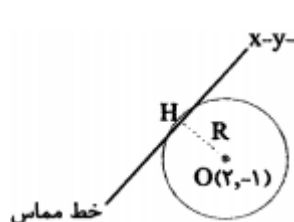
طبق متن کتاب درسی گزینه ۲ جواب می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) دایره (۳) سهمی (۴) بیضی

۷۱۸- گزینه ۱

می‌دانیم اگر دایره‌ای به مرکز O بر خط d مماس باشد، فاصله مرکز O از خط مماس، برابر شعاع دایره است. پس فاصله مرکز دایره را از خط مماس محاسبه کرده و برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم. داریم:



$$x - y - 1 = 0, O(2, -1)$$

$$\text{فاصله مرکز از خط مماس} = OH = \frac{|2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow R$$

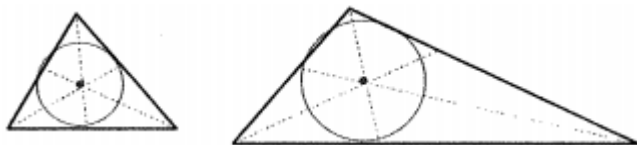
$$= OH = \sqrt{2}$$

حال با معلوم بودن مرکز دایره و شعاع آن، معادله دایره را نوشته و سپس بررسی می‌کنیم محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{O(2, -1)}{R=\sqrt{2}} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 &= (\sqrt{2})^2 \stackrel{y=0}{\Rightarrow} (x-2)^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |x-2| = 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x-2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

۷۱۹- گزینه ۱

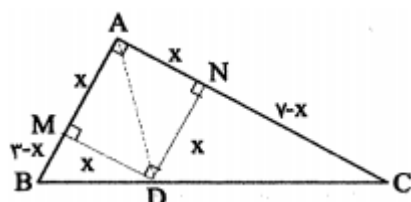
از آن جایی که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع به یک فاصله است، بنابراین نقطه‌های هم‌رسی نیمسازهای یک مثلث، از ۳ ضلع مثلث به یک فاصله است. بنابراین دایره مورد نظر بر هر ۳ ضلع مثلث مماس است.



۷۲۰- گزینه ۴

چهارضلعی $ANDM$ مربع است، پس $AM \parallel ND$ و در مثلث ABC طبق

قضیه تالس داریم:



$$\frac{ND}{AB} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{7-x}{7} \Rightarrow 7x = 21 - 3x \Rightarrow x = 2/1$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2}x = 2/1\sqrt{2}$$

نکته: هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۷۲۱- گزینه ۲

می‌دانیم اگر $(a, b) \in f$ باشد، آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$ می‌باشد. با توجه به فرض سؤال چون $f^{-1}(g(2a)) = 6$ می‌باشد، بنابراین داریم $f(6) = g(2a)$. پس در تابع f باید به دنبال زوج مرتبی باشیم که مؤلفه اول آن عدد ۶ باشد، بنابراین زوج مرتب $(6, 3)$ منظور ما است، حال برای یافتن a کافی است $g(2a) = 3$ را قرار دهیم:

$$\frac{2a}{2a-1} = 3 \Rightarrow 2a = 6a - 3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۷۲۲- گزینه ۳

کافی است از دو معادله داده شده مقادیرهای مجهول را بیابیم:

$$2^{x-7} \times 4^{x+7} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 1 \Rightarrow 2^{(x-7)+(2x+2y)} = 1 = 2^0$$

$$\Rightarrow (x-7) + (2x+2y) = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \quad (1)$$

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 \times x \xrightarrow{\text{حذف } \log \text{ از طرفین}} y = 9x \quad (2)$$

حال کافی است در معادله (۱) به جای y مقدار $9x$ را قرار دهیم:

$$(1) : 3x + 2y - 7 = 0 \xrightarrow{y=9x} 3x + 2(9x) - 7 = 0 \Rightarrow 21x - 7 = 0 \Rightarrow 21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21}$$

$$= \frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$y = 9x \Rightarrow y = 9 \left(\frac{1}{3} \right) = 3$$

۷۲۳- گزینه ۲

هر سه مهره خارج شده باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند، داریم:

$$P = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{4 \times 5 \times 3}{12 \times 11 \times 10} = \frac{3}{11}$$

۷۲۴- گزینه ۱

$x = 1$ در نامعادله صدق نمی‌کند. زیرا به ازای آن داریم $-1 < -2 < 3$ ، پس گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ غلط و لذا گزینه ۱ صحیح است. دقت کنید که برای به دست آوردن جواب این نامعادله به جز روش رد گزینه می‌توان اشتراک جواب‌های دو نامعادله $\frac{3x+1}{x-3} < 3$ و $\frac{3x+1}{x-3} > -1$ را نیز به دست آورد.

۷۲۵- گزینه ۴

برای محاسبه ضابطه تابع $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ باید به جای x در تابع $g(x)$ ، $f(x)$ را قرار دهیم، داریم:

$$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{4x-2+2x+2}{2x+2-2x+1} = \frac{6x}{x+1} = \frac{6x}{3} = 2x$$

۷۲۶- گزینه ۲

با استفاده از نمودار درختی به راحتی مقدار احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:



$$P(\text{داشتن تحصیلات دانشگاهی}) = 0/6 \times 0/18 + 0/4 \times 0/12 = 0/156 \xrightarrow{\times 100} 15/6\%$$

۷۲۷- گزینه ۳

از عددگذاری استفاده می‌کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1) \in f \Rightarrow (1, 1) \in f^{-1} \Rightarrow \text{گزینه (2) یا (3) درست است.}$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow (-1, -1) \in f \Rightarrow (-1, -1) \in f^{-1} \Rightarrow \text{گزینه (3) درست است.}$$

۷۲۸- گزینه ۲

نقاط روی منحنی $y = x^2 - x$ به مختصات $(\alpha, \alpha^2 - \alpha)$ می‌باشند که فاصله آنها از خط $y - x + 5 = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|\alpha^2 - \alpha - \alpha + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|\alpha^2 - 2\alpha + 5|}{\sqrt{2}}$$

کم‌ترین مقدار این عبارت در $\alpha = -\frac{b}{2a} = 1$ رخ می‌دهد که خواهیم داشت:

$$d_{\min} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

۷۲۹- گزینه ۲

از آن جایی که تابع متناوب با دوره تناوب ۵ است، سطح محصور توسط نمودار تابع در بازه $(-26, -24)$ با سطح محصور در بازه $(-1, 1)$ یکسان است. زیرا فاصله این دو بازه به اندازه ۵ دوره تناوب است.

بر طبق شکل مساحت محصور در بازه $(-1, 1)$ برابر است با:

$$S = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

۷۳۰- گزینه ۱

در دنباله حسابی ... $2, x, \frac{1}{2}$ جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $\frac{3}{4}$ است که S برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_9 = \frac{63}{2}$$

حال اگر ۲ واحد به قدر نسبت اضافه کنیم و x واحد از جمله اول کم کنیم S خواهد شد:

$$S_9 = \frac{9}{2} \left(2 \left(\frac{1}{2} - x \right) + 8 \left(\frac{11}{4} \right) \right) = \frac{9}{2} (23 - 2x)$$

که بنا بر فرض مسئله دو مقدار به دست آمده برای S و باید با یکدیگر برابر باشند:

$$\frac{9}{2} (23 - 2x) = \frac{63}{2} \Rightarrow x = 8$$

۷۳۱- گزینه ۱

ابتدا به $\binom{6}{3}$ حالت انتخاب می‌کنیم که کدام ۳ سؤال از ۶ سؤال را درست پاسخ داده است. از آن جایی که در هر آزمون تستی احتمال درست جواب دادن هر سؤال $\left(\frac{1}{4}\right)$ و اشتباه جواب دادن آن $\left(\frac{3}{4}\right)$ است و پاسخ هر تست مستقل از تست دیگر است و قرار بر این است که ۳ سؤال صحیح و ۳ سؤال غلط جواب داده شود، داریم:

$$P(A) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{1024}$$

۷۳۲- گزینه ۳

هنگامی میانۀ تعدادی داده برابر با میانگین دو داده وسط است که تعداد داده‌ها زوج باشد. بنابراین تعداد داده‌ها ۸

تاست. (داده ۴ و ۵ داده‌های وسط هستند)، بنابراین میانگین داده‌ها برابر است با $\frac{360}{8} = 45$

۷۳۳- گزینه ۱

از آن جایی که اعمال بین توابع در دامنه‌های مشترک اتفاق می‌افتد تابع g را در ۳ نقطه $\{-1, 2, 0\}$ مشخص می‌کنیم تا عمل بین f و g را انجام دهیم:

$$\begin{cases} g = \{(-1, -2), (2, 7), (0, 1)\} \\ f = \{(-1, m), (2, 1 - m^2), (0, 4)\} \end{cases} \Rightarrow f - g = \{(-1, m + 2), (2, -m^2 - 6), (0, 3)\}$$

حال اگر تابع $f - g$ بخواهد اکیداً نزولی باشد، باید هر نقطه‌ای از دامنه که طول کمتری دارد عرض بیشتری داشته باشد، بنابراین:

$$\underbrace{m + 2 > 3}_{m > 1} > \underbrace{-m^2 - 6}_{\text{همواره برقرار است}}$$

بنابراین به ازای $m > 1$ تابع $f - g$ اکیداً نزولی است.

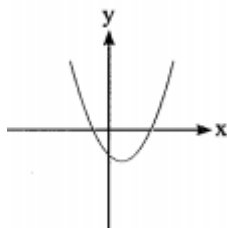
۷۳۴- گزینه ۳

از آن جایی که تابع $y = f(x)g(x)$ یک سهمی (تابع درجه دوم) می باشد و طبق نمودار داده شده در صورت سؤال $f(x)$ یک عبارت درجه اول است، $g(x)$ نیز باید از درجه اول $(g(x) = ax + b)$ باشد، بنابراین تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را می توان به صورت $y(x) = \frac{f(x)}{ax+b}$ نوشت و با کمک گرفتن از نمودار $\frac{f}{g}$ داریم:

$$y(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow \frac{3}{b} = -1 \Rightarrow b = -3, a = \frac{3}{2}$$

در نتیجه $g(x) = \frac{3}{2}x - 3$ و از طرفی بر طبق نمودار $f(x) = 3x + 3$ است، پس تابع $f(x)g(x)$ به صورت $y = \frac{1}{2}(3x + 3)(3x - 6)$ است و نمودارای به صورت روبه رو خواهد داشت:



۷۳۵- گزینه ۳

برای حل این معادله کافی است به جای $\cos 2x$ مقدار $2 \cos^2 x - 1$ را جایگذاری کنیم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow (2 \cos^2 x - 1) + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow 4 \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۷۳۶- گزینه ۲

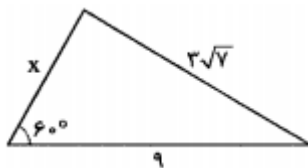
برای محاسبه مقدار خواسته شده باید از فرمول $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ استفاده کنیم:

$$\cot \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} = 2 \cot \alpha$$

با استفاده از فرمول مطرح شده می توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x = -2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) = -2 \left(\frac{1}{\frac{4}{3}} \right) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

۷۳۷-گزینۀ ۱



$$(3\sqrt{7})^2 = x^2 + 9^2 - 2(x)(9) \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow 63$$

$$= x^2 + 81 - 18x \times \frac{1}{2} \Rightarrow 63 = x^2 - 9x + 81$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 6$$

۷۳۸-گزینۀ ۲

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ برابر عدد ۲ است، بنابراین:

$$f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(2) = 3$$

۷۳۹-گزینۀ ۲

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{(x-1)(x-2)\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}(x-2)\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{0^-} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

۷۴۰-گزینۀ ۴

برای آن که تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد باید:

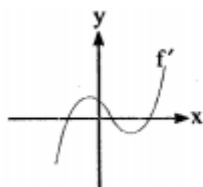
$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = a \Rightarrow a = 2$$

۷۴۱-گزینۀ ۱

براساس نمودار داده شده برای $f'(x)$ خواهیم داشت:



x	a	*	b
f'(x)	-	+	-
f(x)	↘	↗	↘
	min	max	min

بنابراین تابع $y = f(x)$ باید دو نقطه مینیمم نسبی و یک نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۷۴۲-گزینۀ ۳

تابع $y = |x^2 - 4|$ در نقاط $x = \pm 2$ مشتق ناپذیر است (نقاط گوشه) و از طرفی حدود تابع $y = \sqrt{|x|}$ و $y = 0$ تابع $|x^2 - 4|$ در نقاط مرزی $x = \pm 5$ نابرابرند، پس تابع داده شده در نقاط $x = \pm 5$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است، بنابراین:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 5, \pm 2\}$$

۷۴۳- گزینه ۳

تابع $y = mx + 2 + 2|x|$ در نقطه $x = 0$ مشتق ناپذیر (گوشه) است:

$$y(x) = \begin{cases} (m+2)x + 2 & ; x \geq 0 \\ (m-2)x + 2 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \begin{cases} (m+2) & ; x > 0 \\ (m-2) & ; x < 0 \end{cases}$$

بنابراین شیب خط نیم‌مماس راست در $x = 0$ برابر $m + 2$ و شیب خط نیم‌مماس چپ در $x = 0$ برابر $m - 2$ است و اگر این دو خط بخواهند بر هم عمود باشند باید شیب‌های معکوس و قرینه داشته باشند و در نتیجه:

$$(m+2)(m-2) = -1 \Rightarrow m^2 - 4 = -1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$$

۷۴۴- گزینه ۴

مشتق تابع $y = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ را محاسبه و تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \hline y' & + & - & - \end{array}$$

از بین ۴ گزینه داده شده تابع فقط در بازه $(-3, -2)$ تابع صعودی است. دقت کنید که اگر در داخل بازه‌ای هر دو همسایگی چپ و راست مجانب قائم قرار داشته باشد، تابع در آن بازه نمی‌تواند صعودی یا نزولی باشد و به همین علت گزینه ۲ غیر قابل قبول است.

۷۴۵- گزینه ۲

از آن جایی که عرض اکستریم نسبی در تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ برابر ۲ می‌باشد، چنانچه تابع را برابر با مقدار ۲ قرار دهیم باید ریشه مضاعف بدهد:

$$\frac{x}{mx^2 + 1} = 2 \Rightarrow 2mx^2 - x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow 1 - 16m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{16}$$

۷۴۶- گزینه ۱

تابع $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ، تابعی با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ است که مشتقی به صورت زیر دارد:

$$y'(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

مشتق این تابع فاقد ریشه است. بنابراین این تابع فاقد نقطه بحرانی در بازه $\mathbb{R} - \{0\}$ می‌باشد.

۷۴۷- گزینه ۴

برای تعیین وضعیت دو دایره شعاع و فاصله مراکز هر دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow O(1, 0), R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16} = \sqrt{5}, (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$\Rightarrow O'(1, -2), R' = 4$$

دو دایره با شعاع‌های $\sqrt{5}$ و ۴ فاصله مراکزهای ۲ واحد داریم و از آن جایی که R, R' و $|OO'|$ در رابطه زیر صدق می‌کنند دو دایره متقاطع هستند:

$$|R - R'| < |OO'| < R + R'$$

۷۴۸- گزینه ۱

ابتدا رابطه داده شده در صورت سؤال را برابر t در نظر می‌گیریم که به راحتی بتوانیم مقدار عددی هر زاویه را محاسبه کنیم:

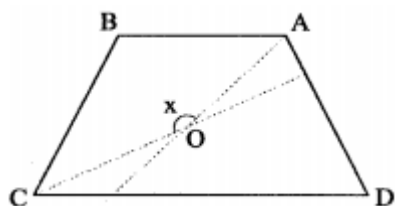
$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{5\hat{D}}{12} = t \Rightarrow \hat{A} = 3t, \hat{B} = 4t, \hat{C} = 5t, \hat{D} = \frac{12t}{5}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع زوایای یک چهارضلعی محدب برابر 360° است، یعنی داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 3t + 4t + 5t + \frac{12t}{5} = 360^\circ \Rightarrow 12t + \frac{12t}{5} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 12\left(t + \frac{t}{5}\right) = 360^\circ \Rightarrow t + \frac{t}{5} = 30^\circ \Rightarrow \frac{6}{5}t = 30^\circ \Rightarrow t = 25^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 75^\circ, \hat{C} = 125^\circ \\ \hat{B} = 100^\circ, \hat{D} = 60^\circ \end{cases}$$

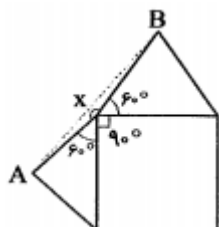


در چهارضلعی $OABC$ داریم:

$$\frac{\hat{A}}{2} + \hat{B} + \frac{\hat{C}}{2} + x = 360^\circ \Rightarrow \frac{75^\circ}{2} + 100^\circ + \frac{125^\circ}{2} + x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$$

۷۴۹- گزینه ۴



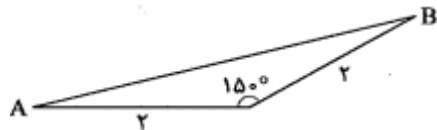
با توجه به شکل روبه‌رو، زاویه x را محاسبه کرده و سپس با استفاده از قضیه کسینوس‌ها مقدار خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$x + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + 210^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 150^\circ$$

با استفاده از قضیه کسینوس‌ها فاصله AB را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^2 = 2^2 + 2^2 - 2(2)(2) \cos 150^\circ \Rightarrow AB^2 = 4 + 4 - 8 \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + 4\sqrt{3}$$

مقدار AB^2 برابر $8 + 4\sqrt{3}$ شده است، حال برای یافتن مقدار AB باید جذر $8 + 4\sqrt{3}$ را بگیریم که شاید کار نسبتاً دشواری باشد، به شما پیشنهاد می‌کنیم هر کدام از گزینه‌ها را به توان ۲ برسانید و ببینید که حاصل کدام گزینه $8 + 4\sqrt{3}$ می‌شود. داریم:

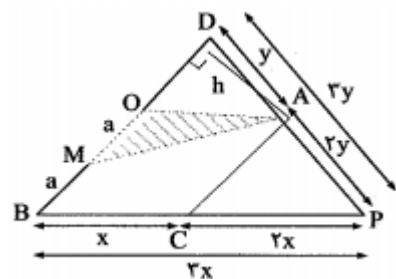


$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2 + 2\sqrt{6} \times 2 = 8 + 2\sqrt{12} = 8 + 4\sqrt{3}$$

بنابراین جواب صحیح گزینه ۴ است.

۷۵۰- گزینه ۲

از متوازی‌الاضلاع بودن $ACBO$ ، موازی بودن AC و DB نتیجه می‌شود، بنابراین روی ضلع PD نیز نسبت $\frac{PA}{PD} = \frac{2}{3}$ ایجاد می‌شود و نسبت‌های زیر را داریم:



$$PC = \frac{2}{3}PB \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} PC = 2x \\ PB = 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle PBD}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle PBD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle APC} + S_{\triangle OAD} = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) S_{\triangle PBD} = \frac{5}{9} S_{\triangle PBD}$$

$$\Rightarrow S_{OACB} = S_{\triangle PBD} - \underbrace{(S_{\triangle APC} + S_{\triangle OAD})}_{\frac{5}{9} S_{\triangle PBD}} = \frac{4}{9} S_{\triangle PBD} \Rightarrow S_{OACB} = \frac{4}{9} S_{\triangle PBD}$$

$$\frac{S_{\text{هاشورخورده}}}{S_{OACB}} = \frac{\frac{h \times a}{2}}{h \times 2a} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{1}{4} S_{OACB} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{9} S_{\triangle PBD}\right) = \frac{1}{9} S_{\triangle PBD}$$

۷۵۱- گزینه ۲

اگر $x^2 - x < 0$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $0 < x < 1$ است و همان‌طور که می‌دانیم اعداد بین صفر و یک هر چه به توان بزرگ‌تری می‌رسند کوچک‌تر می‌شوند. بنابراین از بین گزینه‌ها، تنها گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

$$\left(\frac{1}{3} < \frac{2}{5}\right)$$

۷۵۲- گزینه ۲

$$\text{مرحله اول: } 1^2 + 2(0)$$

$$\text{مرحله دوم: } 2^2 + 2(1)$$

$$\text{مرحله سوم: } 3^2 + 2(1 + 2)$$

$$\text{مرحله چهارم: } 4^2 + 2(1 + 2 + 3)$$

$$\text{مرحله } n\text{م: } n^2 + 2 \underbrace{(1 + 2 + \dots + (n - 1))}_{\frac{(n-1)n}{2}} = 2n^2 - n$$

حال تعداد نقاط مرحله ۱۰م برابر است با:

$$a_{10} = 2(10)^2 - 10 = 190$$

۷۵۳- گزینه ۱

همان طور که می دانیم قرینه هر تابع معکوس پذیر نسبت به خط $y = x$ تابع معکوس آن می باشد. بنابراین قرینه خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ خط $3x - 2y = 4$ می باشد که عرض از مبدأ آن برابر است با ۲- . توجه کنید که عرض از مبدأ خط d طول از مبدأ خط اولیه یعنی همان ۲- است.

۷۵۴- گزینه ۳

طبق گفته مسئله داریم:

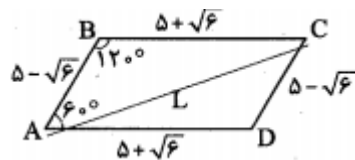
$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x| \Rightarrow 2x^2 + x - 9 + 4x + 2|x| < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x - 9 < 0 \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 1 \\ x < 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 9 < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{x < 0} -3 < x < 0 \end{cases}$$

بنابراین بازه $(-3, 1)$ جواب نامعادله مورد نظر می باشد که نقطه وسط این بازه نقطه $-1 = \frac{-3+1}{2}$ است.

۷۵۵- گزینه ۳

با کمک گرفتن از قضیه کسینوس ها در مثلث ABC داریم:



$$\begin{aligned} L^2 &= (5 - \sqrt{6})^2 + (5 + \sqrt{6})^2 \\ &\quad - 2(5 + \sqrt{6})(5 - \sqrt{6}) \cos(120^\circ) \Rightarrow L^2 \\ &= 50 + 12 - 2(25 - 6) \left(-\frac{1}{2}\right) = 81 \Rightarrow L \\ &= 9 \end{aligned}$$

۷۵۶- گزینه ۲

اگر تعداد مربع‌ها N و طول ضلع مربع را a فرض کنیم، بر طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$\bar{x} = 25 = \text{میانگین طول اضلاع مربع}$$

$$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{6}{100} \xrightarrow{\bar{x}=25} \sigma_x = \text{انحراف معیار طول اضلاع} = \frac{6}{100} \times 25 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma_x^2 = 2/25 \Rightarrow \frac{\sum a^2}{N} - \bar{x}^2 = 2/25 \Rightarrow \frac{\sum a^2}{N} = 625 + 2/25 = 627/25$$

۷۵۷- گزینه ۱

در این حالت‌های موجود پرتاب دو تاس (۳۶ حالت)، پیشامد این‌که مجموع دو تاس مضرب ۴ باشد به صورت زیر است:

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\}$$

بنابراین $P(A)$ برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۷۵۸- گزینه ۴

برای آن‌که معادله درجه دوم ۲ ریشه منفی داشته باشد، باید $S < 0$ ، $P > 0$ و $\Delta > 0$ باشد. بنابراین این ۳ شرط را بر روی معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ اعمال می‌کنیم:

$$۱) P > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6$$

$$۲) S < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \xrightarrow{m-6 < 0} 2m > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$۳) \Delta > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(-3)(m-6) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3)$$

$$\Rightarrow (m+6)(m-3) \Rightarrow m > 3 \text{ یا } m < -6$$

در نتیجه از اشتراک ۳ شرط (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت: $3 < m < 6$

۷۵۹- گزینه ۴

از آن‌جایی که در صورت سؤال $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ داده شده است، با فرض $2x-3 = t$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2x-3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(t) &= 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \Rightarrow f(t) \\ &= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 \Rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \end{aligned}$$

۷۶۰- گزینه ۱

برای تابع $y = |x - 2| + |x - 3|$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & ; x > 3 \\ 1 & ; 2 \leq x \leq 3 \\ 5 - 2x & ; x < 2 \end{cases}$$

همان‌طور که مشخص است تابع در $x < 2$ نزولی است و بنابر خواسته مسئله به ازای $x < 2$ تابع $f(x)$ را با تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ تلاقی می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$5 - 2x = 2x^2 - x - 10 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

در نتیجه تنها جواب $x = -3$ در بازه $x < 2$ است.

۷۶۱- گزینه ۳

برای محاسبه $f(-1)$ از روی ضابطه $f(3-x) + 2f(2) = x^2$ ابتدا با قرار دادن $x = 1$ در رابطه داده شده، $f(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(2) + 2f(2) = 1 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3}$$

حال با قرار دادن $f(2) = \frac{1}{3}$ در رابطه داده شده در صورت سؤال داریم:

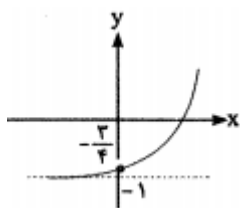
$$f(3-x) = x^2 - \frac{2}{3}$$

بنابراین با قرار دادن $x = 4$ در این عبارت $f(-1)$ به دست می‌آید:

$$f(-1) = 16 - \frac{2}{3} = \frac{46}{3}$$

۷۶۲- گزینه ۱

با کمک گرفتن از نمودار تابع $y = a + \left(\frac{1}{2}\right)^{b-x}$ که در صورت سؤال داده شده است a و b را به دست می‌آوریم:



الف) تابع از نقطه $(0, -\frac{3}{4})$ می‌گذرد:

$$y(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow a + \left(\frac{1}{2}\right)^b = -\frac{3}{4}$$

ب) حد تابع در $-\infty$ برابر -1 است:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a + \left(\frac{1}{2}\right)^{b-x} = -1 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{a + \left(\frac{1}{2}\right)^b = -\frac{3}{4}} b = 2$$

پس نسبت $\frac{a}{b}$ برابر با $-\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۷۶۳- گزینه ۲

قبل از رسم تابع $y = |x| - \left[\frac{x}{2}\right]$ در بازه $[-2, 4]$ این بازه را به بازه‌های کوچک‌تر طوری افزایش می‌کنیم که در هر بازه عدد جزء صحیح و علامت عبارت داخل قدر مطلق منحصر به فرد باشد:

$$x \in [-2, 0) \Rightarrow y = -x + 1$$

$$x \in [0, 2) \Rightarrow y = x$$

$$x \in [2, 4) \Rightarrow y = x - 1$$

همان‌طور که مشخص است نمودار تابع از ۳ پاره‌خط در بازه‌های $[-2, 0)$ ، $[0, 2)$ و $[2, 4)$ تشکیل شده است که برای محاسبه طول این پاره‌خطها باید مختصات سر و ته هر پاره‌خط به دست آید:

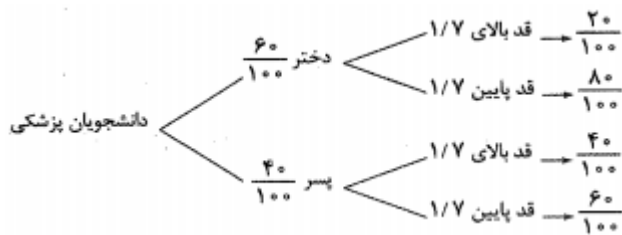
$$x \in [-2, 0) ; (-2, 3) , (0, 1) \Rightarrow L = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$x \in [0, 2) ; (0, 0) , (2, 2) \Rightarrow L = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$x \in [2, 4) ; (2, 1) , (4, 3) \Rightarrow L = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

بنابراین حاصل جمع طول پاره‌خطها $3\sqrt{8}$ یا $6\sqrt{2}$ می‌باشد.

۷۶۴- گزینه ۲



$$P(\text{دختر} | \text{قد بالای } 1/7) = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{60}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{40}{100}} = \frac{60 \times 20}{60 \times 20 + 40 \times 40} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

۷۶۵- گزینه ۴

از آنجایی که در صورت سؤال $\sin x = \frac{3}{2} \cos x$ داده شده است، با کمک گرفتن از رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم:

$$\frac{9}{4} \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{13}{4} \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}, \sin^2 x = \frac{9}{13}$$

طبق صورت سؤال انتهای کمان x در ربع چهارم قرار دارد که در ربع چهارم سینوس منفی و کسینوس مثبت است، پس می‌توان گفت:

$$\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

حال خواسته مسئله یعنی عبارت $2 \sin x + \cos x$ را به دست می آوریم:

$$2 \left(\frac{-3}{\sqrt{13}} \right) + \frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{4}{\sqrt{13}} = -\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

۷۶۶- گزینه ۴

$$\begin{aligned} \tan x \tan 3x = 1 &\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\tan 3x} \Rightarrow \tan x = \cot 3x \Rightarrow \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cot 3x \Rightarrow 3x \\ &= k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

۷۶۷- گزینه ۲

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ بخواند در نقطه $x = -2$ مشتق پذیر باشد، باید در نقطه $x = -2$ پیوسته و مشتق راست و چپ برابر داشته باشد:

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) \Rightarrow -6 = 4a - 2b + 4 \Rightarrow b - 2a = 5$$

$$f'_+(-2) = f'_-(-2) \Rightarrow (3x^2 - 1) = (2ax + b) \Big|_{x=-2} \Rightarrow 11 = -4a + b$$

بنابراین $a = -3$ و $b = -1$ است و با به دست آوردن این دو مقدار بنابر خواسته مسئله $f(1)$ را محاسبه می کنیم:

$$f(1) = (-3)(1) + (-1)(1) + 4 = 0$$

۷۶۸- گزینه ۱

حد تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ در نقطه $x = 2$ برابر ۳ است، اما از آن جایی که $f(x)$ در همسایگی $x = 2$ تابعی نزولی است ($f'(x) < 0$) هنگامی که از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می شویم این تابع با مقادیر بیش تر از ۳ به عدد ۳ نزدیک می شود و می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 2$$

۷۶۹- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x^2 - 10x - 8)(\sqrt{3 - \sqrt{x}} + 1)}{2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

به منظور رفع ابهام ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x^2 - 10x - 8)(\sqrt{3 - \sqrt{x}} + 1)}{2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

مجدداً صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)}{(3x^2 - 10x - 8)(\sqrt{3 - \sqrt{x}} + 1)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{14}{2 \cdot 4} = -112$$

توجه: چنانچه در مدرسه به شما قاعده هویپیتال آموزش داده شده است، حل این مسئله به کمک قاعده هویپیتال بسیار ساده تر خواهد بود.

۷۷۰- گزینه ۲

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(x+1) & ; x \geq 3 \end{cases}$ بخواهد در $x = 3$ پیوسته باشد، باید:

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + 2^{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} a \log_2(x+1) \Rightarrow 3a + 1 = 2a \Rightarrow a = -1$$

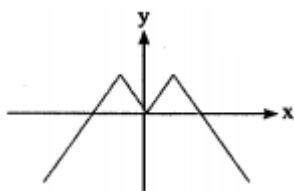
حال با به دست آوردن $a = -1$ ، مقدار تابع را در نقطه $x = 2$ محاسبه می کنیم:

$$f(2) = (-1)(2) + (2)^{(-1)} = -2 + \frac{1}{2} = -1/5$$

۷۷۱- گزینه ۱

ابتدا تابع $y = (f \circ f)(x) = 1 - |1 - |x||$ را تشکیل می دهیم:

حال با رسم این تابع به کمک خواص رسم تابع قدر مطلق مشتق ناپذیر آن را مشخص می کنیم:



تابع رسم شده در ۳ نقطه (گوشه) مشتق ناپذیر است.

۷۷۲- گزینه ۱

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر روی بازه } [0, 3] &= \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{3^2 + 16} - \sqrt{0^2 + 16}}{3} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{16}}{3} \\ &= \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

از طرفی آهنگ تغییر لحظه ای تابع در $x = \sqrt{2}$ ، برابر با مشتق تابع در همین نقطه است. پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ در تابع } f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

بنابراین آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای برابر بوده و اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

۷۷۳- گزینه ۳

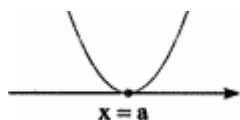
از آن جایی که شیب خطوط به فرم $y = m$ صفر است، ابتدا مشخص می‌کنیم در کدام نقطه از تابع $y = f(x^2 - 4x)$ شیبی برابر صفر داریم:

$$y'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

حال مقدار تابع در $x = 2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y = f(-4) = m$$

۷۷۴- گزینه ۳



طبق نمودار مقابل می‌توان گفت:

(۱) $f'(x)$ در نقطه $x = a$ صفر است.

(۲) در همسایگی چپ و راست $x = a$ ، $f'(x) > 0$ و تابع صعودی است. بنابراین نمودار f در $x = a$ شیبی برابر صفر دارد اما به علت آن که مشتق در اطراف آن نقطه تغییر علامت نداشته است نمی‌تواند ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد.

۷۷۵- گزینه ۴

برای محاسبه نقاط بحرانی در تابع پیوسته $y = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x}$ مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y(x) = x^{\frac{7}{3}} - 28x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y'(x) = \frac{7}{3}\left(\frac{x^2 - 4}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید مشتق این تابع در دو نقطه $\{2, -2\}$ صفر است و در نقطه $x = 0$ ، $(y'(0) = \infty)$ تابع مشتق‌ناپذیر است. بنابراین این تابع در ۳ نقطه بحرانی است.

۷۷۶- گزینه ۴

برای آن که تابع $y = x^2 + \frac{a}{x}$ دارای ماکزیمم نسبی باشد، مشتق آن باید ریشه‌ای داشته باشد که مشتق در اطراف آن از مثبت به منفی تغییر علامت دهد:

$$y'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = \frac{2x^3 - a}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

بنابراین این تابع همواره ریشه مشتقی برابر $\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ دارد (مخرج کسر همواره نامنفی است). اما علامت مشتق در اطراف $\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ همواره از منفی به مثبت است و این نقطه هیچ‌گاه نمی‌تواند ماکزیمم نسبی باشد و همواره مینیمم نسبی می‌باشد.

۷۷۷- گزینه ۴

براساس تأکید کتاب درسی هر چه خروج از مرکز بیضی به عدد صفر نزدیک‌تر باشد، شکل گردتر و هر چه به عدد یک نزدیک‌تر باشد، شکل تیزتر می‌باشد.

بنابراین بر طبق شکل‌های رسم‌شده باید:

$$e_1 < e_2 < e_3$$

بنابراین گزینه ۴ با این نامساوی هم‌خوانی دارد.

۷۷۸- گزینه ۴

طبق گفته مسئله فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ دو برابر فاصله آن از نقطه $(0, 0)$ می‌باشد، که می‌توان نوشت:

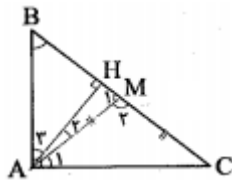
$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0 \end{aligned}$$

همان‌طور که مشخص است معادله مکان هندسی نقطه M یک دایره می‌باشد که بزرگ‌ترین وتر آن قطر دایره است و داریم:

$$2R = \sqrt{4 + 16 + 60} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۷۷۹- گزینه ۴

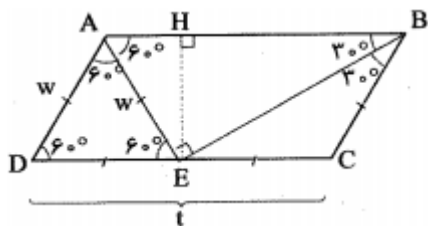
طبق اطلاعات مسئله $\widehat{A}_2 = 12^\circ$ می‌باشد، بنابراین با توجه به مجموع زوایای مثلث AHM زاویه M_1 برابر 78° خواهد بود. همچنین زاویه M_2 مکمل زاویه M_1 و برابر با 102° است.



از آن جایی که میانه وارد بر وتر نصف وتر است، مثلث AMC متساوی‌الساقین می‌باشد و زوایای پای ساق (A_1, C) با هم برابر هستند. پس $\widehat{A}_1 = \widehat{C} = 39^\circ$ بنابراین زاویه B نیز 51° خواهد بود. در نتیجه کوچک‌ترین زاویه مثلث 39° است.

۷۸۰- گزینه ۳

بنابر اطلاعات مسئله $2t + 2w = 12\sqrt{3}$ است یعنی $t + w = 6\sqrt{3}$ از طرفی در مثلث قائم الزویه AEB داریم:



$$\cos 60^\circ = \frac{w}{t} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2w = t, w + t = 6\sqrt{3} \Rightarrow t = 4\sqrt{3}, w = 2\sqrt{3}$$

در مثلث AHE داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{EH}{AE} = \frac{EH}{w} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{EH}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EH = 3$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ برابر است با:

$$S = EH \times t = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

۷۸۱- گزینه ۱

تابع در $x = 2$ تعریف نشده است، بنابراین $x = 2$ باید ریشهٔ مخرج کسر باشد، پس $c = 2$ است. از طرفی $x =$

-2 ریشهٔ مضاعف تابع می‌باشد، زیرا در اطراف آن تابع تغییر علامت نداده است و از طرفی در ضابطهٔ تابع $x = a$

ریشهٔ مضاعف می‌باشد، بنابراین $a = -2$ است. ریشهٔ دیگر تابع $x = 3$ است، بنابراین $-b = 3$ یا $b = -3$

است، در نتیجه مقدار $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ برابر با $\frac{4}{9}$ است. $\left(\frac{-2}{-3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

۷۸۲- گزینه ۴

اگر a, b, c به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، بین آن‌ها رابطهٔ $a + c = 2b$ برقرار است.

جملهٔ دوم، دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم یک دنبالهٔ هندسی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی اند. پس

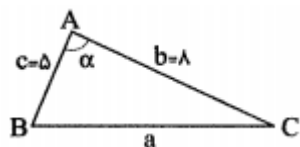
داریم:

$$\begin{aligned} a_2 + a_8 &= 2(2a_5) \Rightarrow a_2 + (a_2 q^6) = 4(a_2 q^3) \Rightarrow a_2(1 + q^6) = 4a_2 q^3 \Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 \\ &= 0 \xrightarrow{q^3=t} t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = q^3 \end{aligned}$$

حال با معلوم بودن q^3 ، نسبت بزرگ‌ترین این سه عدد (یعنی a_8) به کوچک‌ترین آن‌ها (یعنی a_2) برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{a_8}{a_2} &= q^{8-2} = q^6 = (q^3)^2 = (2 \pm \sqrt{3})^2 = 4 + 3 \pm 4\sqrt{3} = 7 \pm 4\sqrt{3} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} \frac{a_8}{a_2} \\ &= 7 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

۷۸۳- گزینه ۲



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \sin \alpha \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \\ &\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

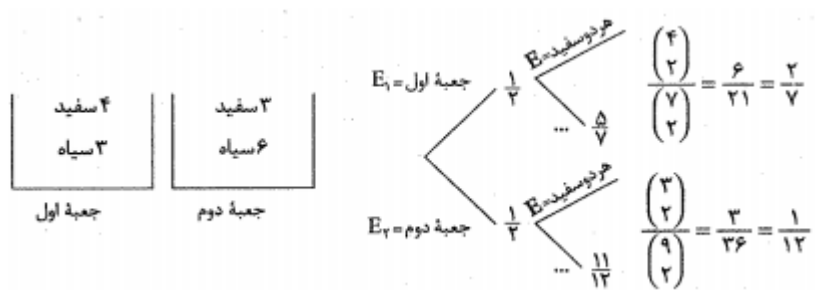
۷۸۷- گزینه ۲

برای حل معادله $x^4 - mx^2 + 1 - m^2 = 0$ ، با فرض $x^2 = t$ ، اگر $t > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز (قرینه) و اگر $t < 0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد و اگر $t = 0$ باشد، معادله یک ریشه دارد (ریشه مضاعف). بنابراین برای این که معادله $x^4 - mx^2 + 1 - m^2 = 0$ دو ریشه متمایز داشته باشد، باید معادله $t^2 - mt + 1 - m^2 = 0$ دو ریشه مثبت و منفی داشته باشد ($t_1 > 0$ و $t_2 < 0$)، پس داریم:

$$t_1 > 0, t_2 < 0 \Rightarrow P < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \frac{1 - m^2}{1} < 0 \Rightarrow |m| > 1$$

۷۸۸- گزینه ۱

با توجه به قانون جمع و ضرب احتمال‌ها، داریم:



$$P(E) = P(E_1) \times P(E|E_1) + P(E_2) \times P(E|E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{12} \right) = \frac{31}{168}$$

۷۸۹- گزینه ۲

$$x^2 - 2x < |x - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overbrace{x \geq 2: x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow 1 < x < 2}^{\text{اشتراک}} \Rightarrow x \in \emptyset & \text{اجتماع} \\ \overbrace{x < 2: x^2 - 2x < -x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow -1 < x < 2}^{\text{اشتراک}} \Rightarrow -1 < x < 2 & \end{cases}$$

$$-1 < x < 2$$

۷۹۰- گزینه ۱

می‌دانیم $f \circ g(x) = f(g(x))$ است، بنابراین داریم:

$$f(x) = x - \sqrt{x}, g(x) = \sin^4 x$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - \sin^2 x = \sin^2 x (\overbrace{\sin^2 x - 1}^{-\cos^2 x}) \\ &= -(\sin x \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

۷۹۱- گزینه ۴

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{x} & , x > 0 \Rightarrow y > 0 \\ 0 & , x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \Rightarrow y < 0 \end{cases}$$

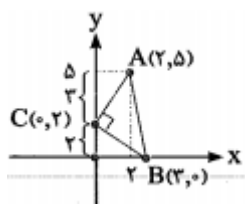
$$f^{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \xrightarrow{\text{به توان 2 می‌رسانیم}} x^2 = y, \overbrace{x > 0}^{y_1 \text{ برد}} \\ x = -\sqrt{-y} \xrightarrow{\text{به توان 2 می‌رسانیم}} x^2 = -y \Rightarrow y = -x, \overbrace{x > 0}^{y_2 \text{ برد}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = x|x|$$

۷۹۲- گزینه ۲

چون شیب ضلع AC $(m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3}{2})$ ، عکس و قرینه شیب ضلع BC $(m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -\frac{2}{3})$ است،

لذا این دو ضلع بر هم عمود بوده و مثلث قائم‌الزاویه است، پس مساحت آن برابر است با:



$$AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, BC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$S_{ABC} = \frac{\text{حاصل ضرب دو ضلع قائمه}}{2} = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$

۷۹۳- گزینه ۳

همان طور که از مفهوم دامنه و برد تابع می‌دانیم برد دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(1 - 4|x|)$ برابر است، بنابراین داریم:

$$-2 \leq f(1 - 4|x|) \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \leq -2f(1 - 4|x|) \leq 4 \xrightarrow{\div(3)} -3 \leq 3 - 2f(1 - 4|x|) \leq 7$$

بنابراین برد تابع خواسته شده $[-3, 7]$ می‌باشد.

۷۹۴- گزینه ۱

۴ مهره سفید
۵ مهره سیاه

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9}{3} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

$$n(\text{سه مهره هم‌رنگ باشند}) = n(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14 \Rightarrow P(A)$$

هر سه سفید هر سه سیاه

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{84} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۷۹۵- گزینه ۳

$$\begin{cases} 4^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \\ \xrightarrow{2^x=t} t^2 + t - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -9 = 2^x \Rightarrow \text{جواب ندارد (نشدنی)} \\ t = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3 \end{cases} \\ \log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y+9) = 2 \\ \Rightarrow \log_{10} 4(2y+9) = 2 \Rightarrow 8y = 36 = 10^2 \Rightarrow 8y = 64 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

۷۹۶- گزینه ۴

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 4x \Rightarrow \sin 5x = \sin(-4x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + (-4x) \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-4x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \xrightarrow{[0,2\pi]} \begin{array}{c|c} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{9} & \frac{4\pi}{9} & \frac{6\pi}{9} & \dots & \frac{8\pi}{9} \end{array} \\ x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \begin{array}{c|c} k & 0 \\ \hline x & \pi \end{array} \end{cases}$$

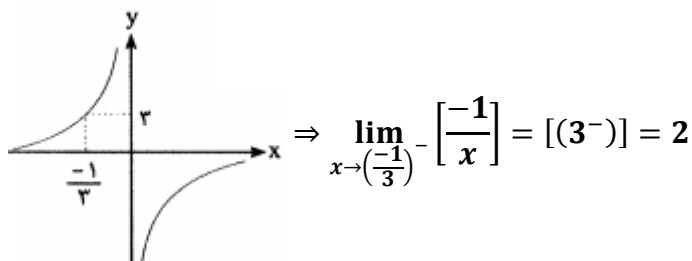
مجموع تمام جوابها در بازه $[0, 2\pi]$

$$= \left(0 + \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{9} + \dots + 2\pi\right) + \pi \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(0 + 2\pi) + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

تذکر: جوابهای معادله اول در بازه $[0, 2\pi]$ ، ۱۰ جمله اول یک دنباله عددی با جمله اول صفر و قدر نسبت $d = \frac{2\pi}{9}$ می باشد.

۷۹۷- گزینه ۲

مقدار تابع $y = \frac{-1}{x}$ در $x = \frac{-1}{3}$ برابر ۳ است و از آنجایی که نمودار تابع $y = \frac{-1}{x}$ در همسایگی $x = \frac{-1}{3}$ صعودی است، در همسایگی چپ $x = \frac{-1}{3}$ تابع با مقدار کم تر از ۳ به ۳ نزدیک می شود. یعنی:



۷۹۸- گزینه ۳

بنابر تعریف کتاب درسی، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ باشد:

(۱) تابع در همسایگی راست و چپ $x = a$ باید تعریف شود.

(۲) حد چپ و راست باید موجود و با هم برابر باشد.

بنابراین گزینه صحیح گزینه ۳ است. حال مثال‌های نقضی برای گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ مطرح می‌کنیم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} [-x^2 + 3] = 2$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3, f(1) = 5$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{(x) - 3} = \text{حد ندارد.}$$

۷۹۹- گزینه ۴

اگر تابع بخواهد در $x = 1$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{x - 1} = 4 \Rightarrow m = 4$$

۸۰۰- گزینه ۱

اگر برای تابع در نقطه $x = a$ داشته باشیم $f'(a) = \pm\infty$ ، در این صورت تابع در نقطه $x = a$ مشتق ندارد، اما خط مماس دارد و از آن جایی که مشتق تابع $y = \sqrt[3]{x^4 - 2x^3}$ برابر با $y'(x) = \frac{4x-6}{3\sqrt{(x-2)^2}}$ است و تنها در نقطه $x = 2$ داریم $y'(2) = +\infty$.

۸۰۱- گزینه ۲

با کمک گرفتن از تکنیک مشتق از عامل صفرکننده برای محاسبه مشتق تابع $y = \frac{(x^2-2x)f(x)}{f(2x-2)}$ در نقطه $x = 2$ تنها از عامل صفرکننده $(x^2 - 2x)$ مشتق می‌گیریم:

$$x = 2 \text{ همسایگی : } y'(x) = \frac{(2x-2)f(x)}{f(2x-2)} \Rightarrow y'(2) = \frac{2f(2)}{f(2)} = 2$$

۸۰۲- گزینه ۳

اگر $f(x) = x^2|x - 2|$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ است. حال از آن جایی که در همسایگی چپ $x = 2$ داخل قدر مطلق منفی است می‌توان قدر مطلق را برداشت و قرینه آن را از قدر مطلق خارج کرد و سپس مشتق را محاسبه کرد:

$$x = 2 \text{ همسایگی چپ : } f(x) = 2x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x - 3x^2 \Rightarrow f'_-(2) = 8 - 12 = -4$$

۸۰۳- گزینه ۲

باید مینیمم مطلق تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ را روی دامنه‌اش یعنی $D_f = \mathbb{R}$ به دست آوریم. برای این منظور ابتدا باید عرض نقاط بحرانی تابع را مشخص کنیم. بنابراین داریم:

$$y' = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y(0) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = \frac{1}{4} + 1 - 2 = -\frac{3}{4} \\ x = 4 \Rightarrow y(4) = 64 - 64 - 32 = -32 \end{cases}$$

سپس مقدار تابع را در بی نهایت به دست می آوریم:

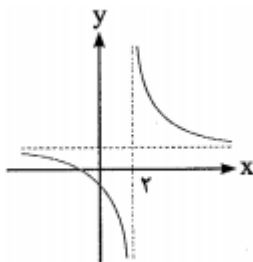
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \right) \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{4}x^4 = +\infty$$

حال بین مقادیر به دست آمده، کم ترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع معرفی می کنیم. داریم:

$$y \text{ مطلق } \min = \min \left\{ 0, -\frac{3}{4}, -32, +\infty \right\} = -32$$

۸۰۴- گزینه ۱

نمودار تابع $y = \frac{x+1}{x-2}$ به صورت زیر می باشد و تنها می توان گفت از بین گزینه های داده شده تابع در $(3, +\infty)$ نزولی و یکنواست.



۸۰۵- گزینه ۲

تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2}$ تابعی پیوسته در \mathbb{R} است، بنابراین برای یافتن اکسترم های نسبی کفایت مشتق تابع را تعیین علامت کنیم:

$$y'(x) = \frac{3x^2 - 8x}{3\sqrt[3]{x^2(x-4)^2}} = \frac{3x - 8}{3\sqrt[3]{x(x-4)^2}} \Rightarrow$$

x	$\frac{8}{3}$	4
$y'(x)$	+ تعریف نشده	- + تعریف نشده
$y(x)$	↗	↘

بنابراین دو نقطه $x = 0$ (ماکزیمم نسبی) و $x = \frac{8}{3}$ (مینیمم نسبی) اکسترم نسبی است.

۸۰۶- گزینه ۴

اگر $A(1, 2)$ و $B(3, -2)$ دو سر قطر باشند، طول پاره خط AB برابر قطر دایره است:

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

از طرفی مرکز دایره وسط دو نقطه A و B می‌باشد، یعنی $O(2, 0)$. حال با داشتن مرکز و شعاع دایره، معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

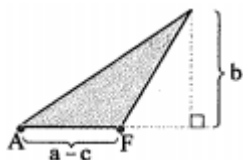
۸۰۷- گزینه ۳

طول قطر کوچک $2b$ و خروج از مرکز $\frac{c}{a}$ است و طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = a \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4c^2 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{3}$$

بنابراین $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$ و $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ، $b = 2$ است.

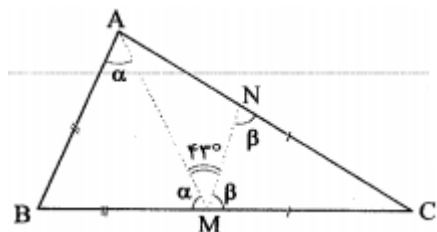
از طرفی مثلث مشخص شده مثلثی است با قاعده $a - c$ و ارتفاع b ، بنابراین خواهیم داشت:



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(a - c)b = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \times 2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۸۰۸- گزینه ۲

با توجه به شکل، داریم:

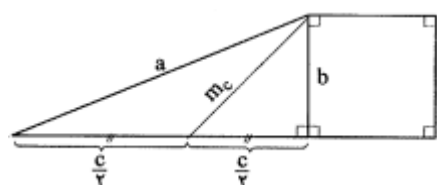


$$\begin{cases} \alpha + \beta + 43^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 137^\circ \\ \widehat{B} + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - 2\alpha \\ \widehat{C} + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} &= 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta) \\ &= 2\alpha + 2\beta - 180^\circ = 2(\alpha + \beta) - 180^\circ \\ &= 2 \times 137^\circ - 180^\circ = 94^\circ \end{aligned}$$

۸۰۹- گزینه ۱

با توجه به صورت مسئله، داریم:

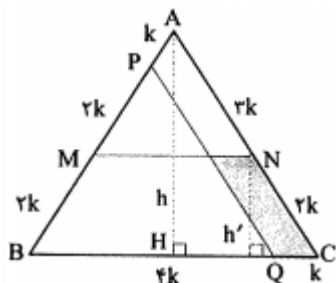


$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ S_{\text{مثلث}} = S_{\text{مربع}} \Rightarrow \frac{bc}{2} = b^2 \Rightarrow 2b = c \Rightarrow b = \frac{c}{2} \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$m_c^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow m_c = \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{4b^2 + c^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}$$

۸۱۰- گزینه ۱

با توجه به قضیه تالس در مثلث متساوی الاضلاع ABC ، داریم:

$$\begin{cases} MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{3k}{2k} \\ PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC} = \frac{4k}{k} \\ \Delta ACH: \frac{CN}{AC} = \frac{h'}{h} = \frac{2k}{5k} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

حال، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\text{سایه زده}}}{S_{\text{مثلث اصلی}}} = \frac{CQ \times h'}{\frac{BC \times h}{2}} = \frac{k \times h'}{\frac{5k \times h}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{h'}{h} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} \text{ یا } 16\%$$

۸۱۱- گزینه ۳

اگر x و $8 - x$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، x را واسطه هندسی $12 + x$ و $8 - x$ می‌گوییم و خواهیم داشت:

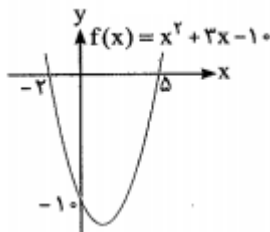
$$x^2 = (12 + x)(8 - x) \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow x = -8 \text{ یا } x = 6$$

از آن جایی که دنباله هندسی به صورت نزولی مطرح شده است، $x = -8$ غیر قابل قبول و $x = 6$ قابل قبول است. حال با داشتن $x = 6$ دو عدد $\frac{x}{2}$ و $3x$ به صورت ۳ و ۱۸ می‌باشند، که اگر بخواهیم بین آن‌ها ۴ واسطه با قدر نسبت q درج کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_6 = 18 \end{cases} \Rightarrow a_1 q^5 = 18 \Rightarrow q^5 = 6 \Rightarrow q = \sqrt[5]{6}$$

۸۱۲- گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع درجه دوم $f(x) = x^2 - 3x - 10$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. توجه داشته باشیم که تقعر این تابع رو به بالا بوده و طول از مبدأهای آن (ریشه‌های آن) برابر $x = 5$ و $x = -2$ می‌باشند. عرض از مبدأ تابع فوق نیز برابر $y = -10$ است. پس داریم:



حال با توجه به نمودار رسم شده، به راحتی نتیجه می‌گیریم که اگر نمودار تابع f را حداقل ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم، طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور x ‌ها، غیر منفی می‌باشد.

۸۱۳- گزینه ۲

از آن جایی که تعداد سوالات ریاضی رشته تجربی مشخص است تعداد حالات مختلف از سوالات به دست، غلط و نزده محدود می‌باشد و بنابراین درصد درس ریاضی رشته تجربی یک متغیر کمی گسسته است زیرا هر مقدار دلخواهی را نمی‌تواند بپذیرد.

۸۱۴- گزینه ۳

میانگین داده‌های اضافه شده برابر $25 = \frac{75}{3} = \frac{20+27+28}{3}$ می‌باشد که همان میانگین داده‌های اولیه است، پس با اضافه شدن این داده‌ها میانگین داده‌های جدید تغییری نمی‌کند. یعنی داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \bar{x}_{\text{اولیه}} = 25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 9 = \frac{\sum_{i=1}^{18} (x_i - 25)^2}{18} \Rightarrow \sum_{i=1}^{18} (x_i - 25)^2 = 162$$

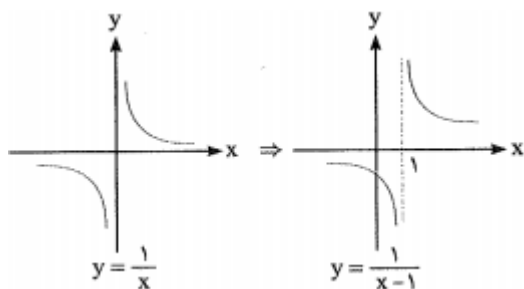
حال با اضافه کردن ۳ داده جدید ۲۰، ۲۷، ۲۸ داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{جدید}}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{21} (x_i - 25)^2}{21} = \frac{162 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2}{21} \\ &= \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} = 9\frac{5}{21} \end{aligned}$$

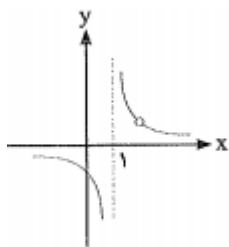
۸۱۵- گزینه ۳

$$y = \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}$$

بنابراین تابع داده شده در صورت سؤال به ازای $x \neq 2$ با تابع $y = \frac{1}{x-1}$ برابر است و در $x = 2$ تعریف نمی‌شود:



بنابراین باید نقطه $x = 2$ از دامنه حذف شود، داریم:



۸۱۶- گزینه ۲

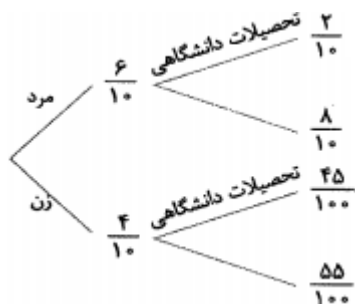


$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9}{3} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{1} = 84$$

$$P(\text{حداقل یک مهره آبی باشد}) = 1 - P(\text{هیچ مهره‌ای آبی نباشد}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{84} = 1 - \frac{10}{84} \\ = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

۸۱۷- گزینه ۱

با توجه به قانون جمع احتمال‌ها، ابتدا احتمال آن را حساب می‌کنیم که اگر فردی به تصادف از این سازمان انتخاب شود، با کدام احتمال تحصیلات دانشگاهی دارد، داریم:



$$\Rightarrow P(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = \frac{6}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{45}{100} = \frac{12}{100} + \frac{180}{1000} = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$$

حال اگر به تصادف ۳ نفر از بین افراد این سازمان انتخاب کنیم، برای محاسبه احتمال آن که ۲ نفر آن‌ها تحصیلات دانشگاهی دارند، از فرمول توزیع احتمال دو جمله‌ای بهره می‌گیریم. داریم:

$$p = \frac{3}{10} \Rightarrow 1 - p = \frac{7}{10}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^1 = 3 \times \frac{9}{100} \times \frac{7}{10} = \frac{189}{1000} = 0/189$$

۸۱۸- گزینه ۱

برای آن که نمودار تابع $y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول مماس باشد، باید معادله تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ آن را برابر صفر قرار دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y_1 = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6 \\ y_2 = x \end{cases} \xrightarrow[y_1=y_2]{\text{قطع می‌دهیم.}} 2x^2 + (m + 1)x + m + 6 = x$$

$$\Rightarrow \underbrace{2}_{a} x^2 + \underbrace{m}_{b} x + \underbrace{m + 6}_{c} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m + 6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m ، معادله تقاطع، ریشه مثبت خواهد داشت. داریم:

$$\begin{cases} m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow 2(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ق ق} \\ m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۸۱۹- گزینه ۴

$$\begin{cases} y_1 = 2^x \\ y_2 = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \xrightarrow[y_1=y_2]{\text{قطع می‌دهیم.}} 2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \Rightarrow 2^x - \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{(\sqrt{2})^x = t} t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 3 \\ t_2 = (\sqrt{2})^x = -\sqrt{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

حال با معلوم بودن طول نقطه تقاطع دو منحنی، عرض نقطه تقاطع را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$x = 3 \xrightarrow{y=2^x \text{ صدق در تابع}} y = 2^3 = 8 \xrightarrow{\text{نقطه تقاطع}} B(3, 8)$$

$$A(0, 4), B(3, 8) \Rightarrow Ab = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

۸۲۰- گزینه ۳

$$\begin{aligned}
\log_x(3x+8) &= 2 - \log_x(x-6) \Rightarrow \log_x(3x+8) + \log_x(x-6) = 2 \\
&\Rightarrow \log_x(3x+8)(x-6) = 2 \Rightarrow \log_x(3x^2 - 10x - 48) = 2 \\
&\Rightarrow 3x^2 - 10x - 48 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \\
&\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-3 \end{cases} \text{ غ ق ق} \Rightarrow \log_4 x^{x=8} = \log_4 8 = -\log_2 2^3 \\
&= \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

۸۲۱- گزینه ۴

از آن جایی که $f(x) = 4x - x^2$ داده شده است، می توان گفت $f(g(x)) = 4g(x) - g^2(x)$ حال عبارت به دست آمده را با ضابطه $f \circ g$ داده شده در صورت مسئله مساوی قرار می دهیم و $g(x)$ را می یابیم:

$$\begin{aligned}
4g(x) - g^2(x) &= x^2 - 2x \Rightarrow -(g(x) - 2)^2 = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow (g(x) - 2)^2 \\
&= 4 + 2x - x^2 \Rightarrow |g(x) - 2| = \sqrt{4 + 2x - x^2} \\
&\Rightarrow \begin{cases} g(x) = \sqrt{4 + 2x - x^2} + 2 \\ g(x) = 2 - \sqrt{4 + 2x - x^2} \end{cases}
\end{aligned}$$

۸۲۲- گزینه ۳

از آن جایی که نقطه $(\frac{1}{2}, -1)$ محل برخورد f و f^{-1} است می توان گفت $(\frac{1}{2}, -1) \in f$ و $(\frac{1}{2}, -1) \in f^{-1}$ می باشد. بنابر تعریف تابع و تابع معکوس اگر $(\frac{1}{2}, -1) \in f^{-1}$ باشد، $(-1, \frac{1}{2}) \in f$ خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{8} + \frac{b}{2} - \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow a + 4b = -2 \\ f(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -a - b - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -\frac{1}{4}$$

بنابراین $ab = \frac{1}{4}$ خواهد بود.

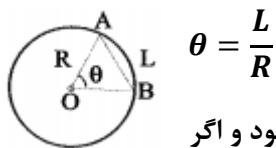
۸۲۳- گزینه ۴

چون نقطه A وسط قطر مربع است، در نتیجه نقطه A مرکز مربع می باشد، پس فاصله آن از یکی از اضلاع، برابر نصف ضلع این مربع است، پس داریم:

$$\begin{aligned}
2y - x = 5 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow AH &= \frac{a}{2} = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^2 \\
&= \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80
\end{aligned}$$

۸۲۴- گزینه ۱

همان طور که می‌دانیم در هر دایره به شعاع R ، اگر طول کمان برابر با L و زاویه مرکزی مقابل به آن θ باشد، خواهیم داشت:



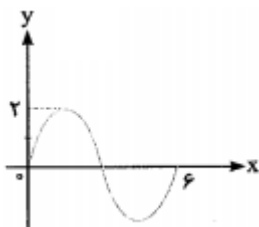
$$\theta = \frac{L}{R}$$

بنابراین در دایره‌ای به شعاع ۳ که طول کمان \widehat{AB} برابر π است زاویه θ برابر $\frac{\pi}{3}$ خواهد بود و اگر زاویه θ ، $\frac{\pi}{3}$ باشد، مثلث OAB متساوی‌الاضلاع و طول هر ضلع آن از جمله وتر AB ، ۳ می‌باشد.

۸۲۵- گزینه ۳

همان طور که در شکل زیر مشاهده می‌کنیم، دوره تناوب اصلی تابع $y = a \sin(b\pi x)$ برابر $T = 6$ است. می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = \sin(kx + k')$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد، پس نتیجه می‌گیریم که:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow \text{دوره تناوب} : T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} \stackrel{T=6}{\Rightarrow} \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$



طبق نمودار تابع، a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشد، $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. از طرفی بیش‌ترین مقدار این تابع برابر ۲ است. می‌دانید که بیش‌ترین مقدار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که تابع سینوس بیش‌ترین مقدار خود، یعنی مقدار ۱ را به خود می‌گیرد. پس بیش‌ترین مقدار این تابع برابر a است. و داریم:

$$\text{بیش‌ترین مقدار تابع} = a = 2 \Rightarrow a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۸۲۶- گزینه ۴

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1 \Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \stackrel{\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi}{\Rightarrow} \sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \text{یا} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ و } \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \stackrel{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

۸۲۷- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] \cot x = (0)(+\infty) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] \cot x = (-1)(-\infty) = +\infty$$

۸۲۸- گزینه ۳



از آن جایی که عبارت $x^3 + x - 10$ یک تابع صعودی است در همسایگی $x = 2$ به صورت روبه‌رو خواهد بود:

و همان‌طور که از وضعیت تابع در همسایگی $x = 2$ مشخص است در همسایگی چپ $x = 2$ تابع با مقادیر کم‌تر از صفر به صفر می‌رسد و قرینه این عبارت از قدر مطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^3 + x - 10|}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^3 + x - 10)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x^2 + 2x + 5)}{x(x-2)} = \frac{-13}{2} = -6/5$$

۸۲۹- گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

(۱) تابع $y = \tan x$ در بازه $[0, 2]$ پیوسته نیست زیرا $x = \frac{\pi}{2}$ در این بازه و ریشه مخرج در این تابع است.

(۲) تابع $y = \frac{x+2}{2x-1}$ نیز در $x = \frac{1}{2}$ تعریف نمی‌شود و بنابراین این تابع نیز در بازه $[0, 2]$ پیوسته نمی‌باشد.

(۳) دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{4x - x^2}$ بازه $[0, 4]$ است که در $x = 0$ نیز پیوستگی راست دارد، بنابراین می‌توان گفت که این تابع در بازه $[0, 2]$ پیوسته است.

(۴) تابع $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ در نقاط به فرم $x = 2k$ که $k \in \mathbb{Z}$ است ناپیوسته است، اما فقط پیوستگی راست دارد، بنابراین این تابع در $x = 2$ که انتهای بازه $[0, 2]$ است، پیوستگی چپ ندارد و می‌توان گفت تابع در بازه $[0, 2]$ ناپیوسته است.

۸۳۰- گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x_2 = 6/25 \text{ تا } x_1 = 4 \text{ از آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{\frac{625}{100}} - \sqrt{4}}{\frac{225}{100} - 4} = \frac{\frac{25}{10} - 2}{\frac{225}{100} - 4}$$

$$= \frac{\frac{5}{10}}{\frac{225}{100}} = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}$$

آهنگ متوسط - آهنگ لحظه‌ای $\Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ = آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطه‌ای به طول $x = 4$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

۸۳۱- گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & , x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & , x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x^2} & , x > 1 \\ 2x + a & , x < 1 \end{cases}$$

برای آن که تابع f در نقطه‌ای به طول $x = 1$ مشتق پذیر باشد، باید:

۱- تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد. داریم:

$$\begin{cases} \text{مقدار تابع} = \text{حد راست} = \text{چپ} = -2 & \text{مقدار تابع در } x = 1 \text{ در حد راست و مقدار تابع در } x = 1 \text{ در حد چپ} \\ \xrightarrow{\text{مشتق راست} = \text{مشتق چپ}} 1 + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -3 \quad (I) \\ x = 1 \text{ در حد چپ} = 1 + a + b \end{cases}$$

۲- مشتق راست تابع f با مشتق چپ تابع در نقطه‌ای به طول $x = 1$ برابر باشند. داریم:

$$\begin{cases} \text{جایگذاری در معادله (I)} \\ \xrightarrow{\text{مشتق راست} = \text{مشتق چپ}} 2 + a = -3 \Rightarrow a = -5 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله (I)}} b = 2 \\ \text{مشتق راست} = f'_+(1) = -3 \\ \text{مشتق چپ} = f'_-(1) = 2 + a \end{cases}$$

۸۳۲- گزینه ۴

برای محاسبه مشتق تابع $y = x^2|x - 1|$ ابتدا آن را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم که خواهیم داشت:

$$y(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & x \geq 1 \\ -(x^3 - x^2) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & x > 1 \\ -(3x^2 - 2x) & x < 1 \end{cases}$$

از آن جایی که در نقطه $x = 1$ مشتق راست و چپ نابرابر هستند، تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است و در $x > 1$ ، مشتق تابع به صورت $(3x^2 - 2x)$ و در $x < 1$ به صورت $-(3x^2 - 2x)$ می‌باشد، بنابراین می‌توان تابع مشتق را به صورت $y'(x) = (3x^2 - 2x) \frac{|x-1|}{x-1}$ نوشت.

۸۳۳- گزینه ۳

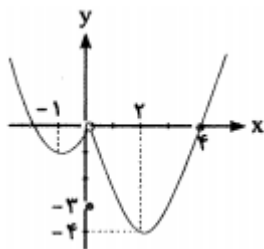
برای آن که تابع $y = \frac{2x-1}{x-m}$ در هر بازه از دامنه تعریفش اکیداً نزولی باشد، باید $y'(x) < 0$ قرار گیرد:

$$y'(x) = \frac{-2m+1}{(x-m)^2} < 0 \Rightarrow 1 - 2m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$$

دقت کنید در این مثال وجود ریشه در مخرج مشکل ساز نخواهد بود، زیرا تابعی که بخواهد در هر بازه از دامنه تعریفش نزولی باشد، این بازه نمی‌تواند شامل ریشه مخرج کسر باشد زیرا در آن صورت، دیگر آن بازه، بازه‌ای از دامنه نخواهد بود.

۸۳۴- گزینه ۴

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x & x > 0 \\ -3 & x = 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases} \text{ نمودار تابع } y \text{ را رسم می‌کنیم:}$$



همان طور که از نمودار تابع مشخص است تابع در نقاط $\{-1, 2, 0\}$ دارای مینیمم نسبی است.

۸۳۵- گزینه ۱

تابع $y = |x^2 - 1|$ را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم.

$$y(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ x - x^3 & -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 1 - 3x^2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

مشتق تابع در دو نقطه $\left\{\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ صفر است و تابع در دو نقطه $\{\pm 1\}$ مشتق ناپذیر است، بنابراین این تابع دارای ۴ نقطه بحرانی می‌باشد.

۸۳۶- گزینه ۲

کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط رأس یک بیضی از کانون $a - c$ و $a + c$ می‌باشد که طبق گفته مسئله داریم:

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2, c = 1$$

حال خروج از مرکز بیضی را با کمک رابطه $e = \frac{c}{a}$ به دست می‌آوریم:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

۸۳۷- گزینه ۲

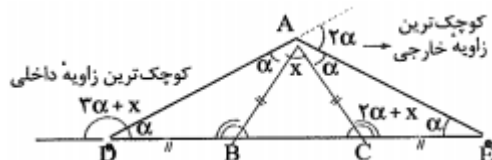
اگر دو دایره C و C' به شعاع‌های R و R' طول خط‌المركزین d نسبت به هم مماس خارج باشند، قطعاً $d = R + R'$ است. در دایره C مرکز $O(-2, 2)$ بوده و در دایره C' : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مرکز $O'(1, -2)$ و شعاع $R' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2$ می‌باشد. پس داریم:

$$d = OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d = R + R' \Rightarrow 5 = R + 2 \Rightarrow R = 3$$

۸۳۸- گزینه ۳

دو مثلث ABD و ACE با توجه به برابری دو ضلع و زاویه بین آنها، با هم برابر هستند. از برابری آنها نتیجه می‌گیریم که $AD = AE$ می‌باشد، پس مثلث ADE ، یک مثلث متساوی‌الساقین بوده و زوایای نظیر قاعده‌اش یعنی زوایای D و E با هم برابر می‌باشند، پس داریم:



$$\frac{\text{کوچک‌ترین زاویه خارجی}}{\text{کوچک‌ترین زاویه داخلی}} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$$

۸۳۹- گزینه ۲

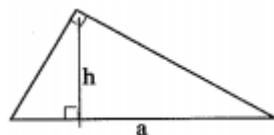
برای تعیین مساحت سایه‌زده باید از مجموع مساحت‌های دو نیم‌دایره به قطرهای ۳ و ۴، مساحت هاشورخورده را کم کنیم. برای تعیین مساحت هاشورخورده، باید از مساحت نیم‌دایره‌ای به قطر ۵، مساحت مثلث قائم‌الزاویه را کم نماییم. داریم:



$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_5 - S_{\text{مثلث قائم‌الزاویه}} - S_{\text{نیم‌دایره به قطر ۳}} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3 \times 4}{2} = \frac{25}{8}\pi - 6$$

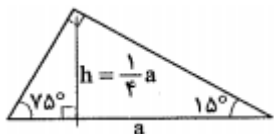
$$\begin{aligned} S_{\text{سایه‌زده}} &= (S_3 + S_4) - S_{\text{هاشورخورده}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{25}{8}\pi - 6\right) \\ &= \left(\frac{9}{8}\pi + \frac{16}{8}\pi\right) - \left(\frac{25}{8}\pi - 6\right) = 6 \end{aligned}$$

۸۴۰- گزینه ۱



$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \times \text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} &= \frac{1}{8} \times \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot h}{3} = \frac{1}{8} a^2 \Rightarrow a = 4h \text{ یا } h \\ &= \frac{1}{4} a \end{aligned}$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع وارد بر وترش، $\frac{1}{4}$ وتر باشد، زوایای داخلی اش 15° و 75° است، پس:



$15^\circ =$ کوچک‌ترین زاویه مثلث

۸۴۱- گزینه ۱

دسته ۱ (1) ، دسته ۲ (2, 3) ، دسته ۳ (4, 5, 6) ، دسته ۴ (7, 8, 9, 10) ، دسته ۵ (11, 12, 13, 14, 15) ، دسته ۶ (16, ...)

با نوشتن چند دسته اول، به راحتی نتیجه می‌گیریم که جمله اول دسته ششم، برابر با یک واحد بیشتر از مجموع شماره‌های دسته‌های قبلی، یعنی برابر $16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ است. پس در دسته بیستم داریم:

$$20 \text{ جمله اول دسته } = (1 + 2 + \dots + 19) + 1 = \frac{19(1+19)}{2} + 1 = 191$$

$$20 \text{ جمله آخر دسته } = 191 + 19 = 210$$

$$20 \text{ مجموع جملات دسته } = \frac{20}{2}(191 + 210) = 4010$$

۷ مهره سفید
۵ مهره سیاه
۲ مهره قرمز

۸۴۲- گزینه ۳

$$n(S) = \binom{14}{4} = \frac{14}{2} \times \frac{13}{1} \times \frac{12}{4 \times 3} \times \frac{11}{1} = 7 \times 13 \times 11$$

$$P(\text{یک مهره قرمز و حداقل 2 مهره سفید}) = \frac{\overbrace{\binom{2}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{1}}^{3 \text{ سفید و 1 قرمز}} + \overbrace{\binom{2}{1}\binom{7}{3}}^{1 \text{ سیاه و 2 سفید و 1 قرمز}}}{7 \times 13 \times 11} = \frac{210 + 70}{7 \times 13 \times 11}$$

$$= \frac{280}{7 \times 13 \times 11} = \frac{4 \times 7 \times 10}{7 \times 13 \times 11} = \frac{40}{143}$$

۸۴۳- گزینه ۲

با توجه به قانون جمع احتمال ها و توزیع احتمال دوجمله‌ای، داریم:

$$P(\text{فقط 1 تیر اصابت کند}) = \frac{1}{2} \times \frac{48}{5^4} + \frac{1}{2} \times \frac{36}{5^3} = \frac{24}{625} + \frac{90}{625} = \frac{114}{625}$$

۸۴۴- گزینه ۱

مجموع ضرایب جملات معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$ پس یکی از ریشه‌های این معادله $x = 1$ می‌باشد. حال برای تجزیه این معادله، کافی است آن را به $x - 1$ تقسیم کنیم. داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ ax^2 + (4-a)x - 4 \\ \underline{-(ax^2 - ax)} \\ 4x - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

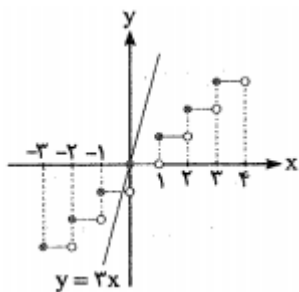
$$\Rightarrow x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = (x-1)(x^2 + ax + 4)$$

حال برای آن که معادله قبل دارای سه ریشه مثبت باشد، باید معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ دارای ۲ ریشه مثبت باشد. برای این منظور، داریم:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a < -4 \text{ یا } a > 4 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \checkmark \text{ (همواره برقرار)} \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{اشتراک} \\ \Rightarrow a < -4 \end{matrix}$$

۸۴۵- گزینه ۳

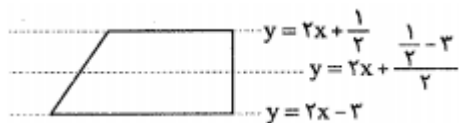
برای پیدا کردن تعداد ریشه‌های معادله $[x] = 3x$ می‌توان از رسم نمودار استفاده کرد:



بنابراین بر طبق نمودار، دو تابع در ۲ نقطه با یکدیگر برخورد دارند.

۸۴۶- گزینه ۲

از آن جایی که دو خط داده شده موازی هستند، معادله خط، قاعده‌های ذوزنقه می‌باشند:

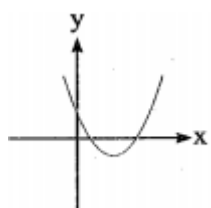


همان طور که مشخص است معادله خطی که از دو خط موازی $y = 2x - 3$ و $y = 2x + \frac{1}{2}$ به یک فاصله باشد از وسط دو ساق ذوزنقه عبور می‌کند:

$$y = 2x - \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 5 = 8x$$

۸۴۷- گزینه ۳

تنها نقطه‌ای که با حذف آن از دامنه نقطه‌ای از برد تابع درجه دوم حذف می‌شود رأس سهمی است، بنابراین $\frac{-b}{2a} = 2$ است. یعنی:



$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{m-1}{2} = 2 \Rightarrow m = 5$$

با به دست آوردن $m = 5$ ، تابع درجه دوم به صورت $y = x^2 - 4x + 3$ می‌باشد که نموداری به صورت مقابل خواهد داشت که تنها از ناحیه سوم عبور نخواهد کرد.

۸۴۸- گزینه ۲

فرض می‌کنیم ماشین سریع‌تر A و ماشین دیگر B باشد و فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی کل کار را انجام می‌دهد.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقدار کار در یک ساعت
A	t	$\frac{1}{t}$
B	$2t$	$\frac{1}{2t}$
A و B با هم	4	$\frac{1}{4}$

حال با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1 \times 2}{4} \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 6$$

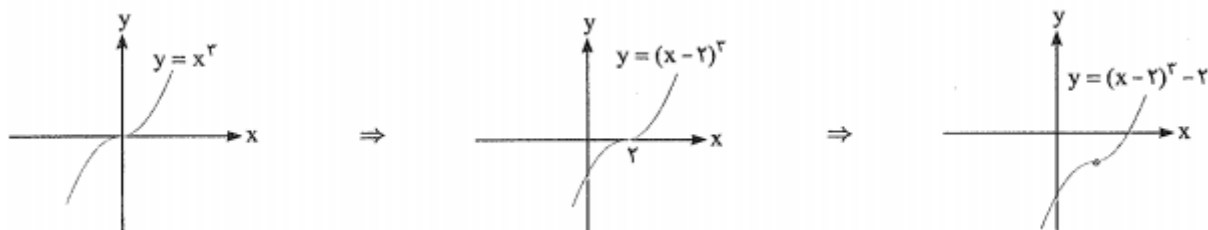
۸۴۹- گزینه ۲

بر طبق مطالب کتاب درسی اگر بزرگی زلزله M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله برابر E است که رابطه آن به صورت $\log E = 11/8 + 1/5 M$ می‌باشد، حال بر طبق مفروضات مسئله خواهیم داشت:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 (6/6) \Rightarrow \log E = 21/7 \Rightarrow E = 10^{21/7} \text{ Erg}$$

۸۵۰- گزینه ۲

ابتدا تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 10$ را به صورت $y = (x-2)^3 - 2$ می‌نویسیم. حال با کمک گرفتن از نمودار تابع $y = x^3$ و خواص انتقال توابع، تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

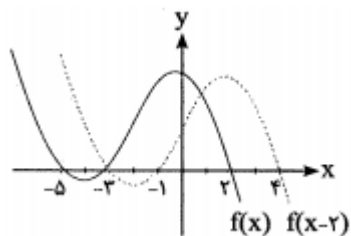


۸۵۱- گزینه ۲

فرض می‌کنیم طول اضلاع مربع‌ها x_n, \dots, x_2, x_1 باشد. در این صورت میانگین مساحت آن‌ها به صورت $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$ می‌باشد. حال داریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2 = 65/44 - (8)^2 = 65/44 - 64 = 1/44 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1/44} = 1/2$$

۸۵۲- گزینه ۴



با توجه به نمودار تابع $y = f(x - 2)$ ، نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور نمودار تابع $f(x - 2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. حال برای تعیین دامنه تعریف تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، باید فاصله‌ای را انتخاب کنیم که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت بوده و یا حداقل یکی از آنها صفر باشد تا $xf(x) \geq 0$ برقرار شود، پس داریم:

$$D_{(\sqrt{xf(x)})} = [-5, -3] \cup [0, 2]$$

۸۵۳- گزینه ۱

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} \Rightarrow -x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 2 \\ \hline & - & + \end{array} \Rightarrow D_f: -1 < x < 2$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} \Rightarrow \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\right\}$$

حال برای تعیین دامنه $f \circ g$ ، باید نامعادله زیر را حل کنیم، داریم:

$$-1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \xrightarrow[\text{در مبنای } \frac{1}{4} \text{ می‌گیریم.}]{\text{از طرفین لگاریتم}} x \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right) > \log_{\frac{1}{4}} 2 \Rightarrow x > \frac{-1}{2} \log_2 2 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

توجه کنید که چون $\frac{1}{4} < 1$ است، پس جهت عوض می‌شود. حال با توجه به جواب به دست آمده داریم:

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

۸۵۴- گزینه ۳

برای پی بردن به این موضوع که تابع $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در چه بازه‌ای صعودی است، تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 1| \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6 + x + 1 = -x + 7 & ; x \leq -1 \\ -2x + 6 - x - 1 = -3x + 5 & ; -1 < x \leq 3 \\ 2x - 6 - x - 1 = x - 7 & ; x > 3 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نمودار تابع f در بازه $x > 3$ صعودی است. حال برای تعیین ضابطه معکوس آن در این فاصله، داریم:

$$\begin{array}{l} x > 3 \\ \xrightarrow{y > -4} \end{array} y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \xrightarrow[\begin{array}{l} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{array}]{f^{-1}} y = x + 7 \quad ; \quad x > -4$$

۸۵۵ - گزینه ۳

می‌دانیم کمان‌هایی که شامل مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هستند، می‌توانند سینوس را به کسینوس و کسینوس را به سینوس تبدیل می‌کنند، در ضمن کافی است برای تشخیص علامت‌های آن‌ها ببینیم در کدام ربع از دایره مثلثاتی قرار می‌گیرند، داریم:

$$\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ} = \frac{\overbrace{\sin(270^\circ - 20^\circ)}^{\text{ربع سوم}} + \overbrace{\sin(720^\circ - 20^\circ)}^{\text{ربع چهارم}}}{\underbrace{\cos(540^\circ + 20^\circ)}_{\text{ربع سوم}} - \underbrace{\cos(90^\circ + 20^\circ)}_{\text{ربع دوم}}} = \frac{-\cos(20^\circ) - \sin(20^\circ)}{-\cos 20^\circ + \sin(20^\circ)}$$

حال صورت و مخرج را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div \cos 20^\circ} \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0/4}{-1 + 0/4} = \frac{-1/4}{-0/6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

۸۵۶ - گزینه ۳

می‌دانیم $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ می‌باشد، داریم:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow -2 \cot 2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

بنابراین داریم:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{4}{3}$$

۸۵۷ - گزینه ۱

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

توجه کنید که چون در صورت تست به این شرط اشاره شده است که $\cos x \neq 0$ ، پس جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ غیر قابل قبول بوده و جواب کلی این معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ می‌باشد.

۸۵۸ - گزینه ۲

از آن جایی که در صورت سؤال $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6} = \frac{-1}{2}$ داده شده است، با کمک گرفتن از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x|}{ax^n} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax^n} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = -6, n = 1$$

حال حد عبارت $\frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6}$ را در $x = -1$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{\overbrace{3x(x+1)}^{3x(x+1)}}{4x^2 - (x^2 - 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x}{-6(2x - \sqrt{x^2 - 3x})} = \frac{-3}{-6(-4)} = \frac{-1}{8} \end{aligned}$$

۸۵۹- گزینه ۴

تابع در نقاط $x = 0$, $x = 1$ و $x = 2$ حد دارد و در بین گزینه‌های داده شده تنها در نقطه $x = \sqrt{2}$ حد ندارد. دقت کنید $[x^2]$ در $x = 0$ حد دارد ولی در $x = 1$ و $x = 2$ حد ندارد اما در این دو نقطه $(x^2 - 3x + 2)$ حدی برابر صفر دارد و باعث می شود $[x^2](x^2 - 3x + 2)$ در این دو نقطه حد صفر داشته باشد.

۸۶۰- گزینه ۲

پیوستگی تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{x + a} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a}{x - 2} \Rightarrow \frac{-2}{1 + a} = \frac{a}{-1} \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

به ازای $a = -2$ دامنه تابع $\mathbb{R} - \{2\}$ می شود و تابع نمی تواند در \mathbb{R} پیوسته باشد اما به ازای $a = 1$ دامنه تابع \mathbb{R} خواهد بود و تابع در \mathbb{R} پیوسته است.

۸۶۱- گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \Delta x = 0/44 \text{ و } x = 1 \text{ در نقطه } f \text{ در آهنگ متوسط تغییر تابع } f &= \frac{f(1/44) - f(1)}{0/44} = \frac{\frac{1/44 - 1}{\sqrt{1/44}} - 0}{0/44} \\ &= \frac{\frac{0/44}{1/2}}{0/44} = \frac{1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ در } f \text{ آهنگ لحظه‌ای تابع } f = f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

۸۶۲- گزینه ۲

این تست غلط می باشد، اما سازمان سنجش پاسخ را گزینه ۲ اعلام کرده است، چون تابع در $x = \sqrt{2}$ (پیوستگی چپ ندارد) و تنها از سمت راست، پیوستگی دارد، در نتیجه تنها مشتق راست آن موجود است. به عبارتی دیگر

چون تابع f در $x = \sqrt{2}$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ تابع نیز در این نقطه موجود نیست. با توجه به این توضیحات، تنها به محاسبه مشتق راست تابع f در $x = \sqrt{2}$ می پردازیم که برابر است با:

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - [2x^2]x &\Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = (x^3 - [2(2^+)]x)' \stackrel{[4^+]=4}{=} (x^3 - 4x)' \\ &= 3x^2 - 4 \stackrel{x=\sqrt{2}}{=} 3(\sqrt{2})^2 - 4 = 2 \end{aligned}$$

۸۶۳- گزینه ۲

قبل از محاسبه مشتق تابع $y = 3^{1-\log_3(x^2-1)}$ عبارت داده شده را ساده می کنیم که خواهیم داشت:

$$3^{(1-\log_3(x^2-1))} = 3^{(\log_3 3 - \log_3(x^2-1))} = 3^{\log_3 \frac{3}{x^2-1}} = \left(\frac{3}{x^2-1}\right)^{\log_3 3} = \frac{3}{x^2-1}$$

حال برای تابع $y = \frac{3}{x^2-1}$ مقدار و شیب خط مماس را در نقطه $x = \sqrt{2}$ محاسبه می کنیم.

$$y(\sqrt{2}) = \frac{3}{1} = 3$$

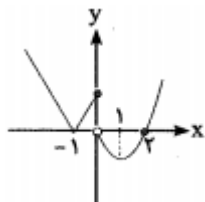
$$y'(x) = \frac{-6x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow y'(\sqrt{2}) = \frac{-6\sqrt{2}}{1}$$

حال معادله خط گذرنده از نقطه $(\sqrt{2}, 3)$ با شیب $-6\sqrt{2}$ را می نویسیم:

$$y - 3 = -6\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \Rightarrow y - 3 = -6\sqrt{2}x + 12 \Rightarrow y + 6\sqrt{2}x = 15$$

۸۶۴- گزینه ۳

نمودار تابع داده شده را رسم می کنیم:

$$y(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x > 0 \\ |x + 1| & ; x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$


همان طور که از نمودار تابع مشخص است، تابع در دو نقطه $x = -1$ و $x = 0$ مشتق ناپذیر و در نقطه $x = 1$ مشتقی برابر صفر دارد و در نتیجه این تابع دارای ۳ نقطه بحرانی است.

۸۶۵- گزینه ۳

در تابع پیوسته $y = \frac{2x+m}{x^2+1}$ ماکزیمم و مینیمم های نسبی، ریشه های غیر مضاعف مشتق اول می باشند. بنابراین در ابتدا باید مشتق این تابع حداقل دو ریشه غیر مضاعف داشته باشد:

$$y'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+m)}{(x^2+1)^2} = \frac{(2x^2+2) - (4x^2+2mx)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2mx + 2}{(x^2+1)^2}$$

برای آن که صورت این کسر دو ریشه ساده داشته باشد باید $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = 4m^2 + 16 > 0$$

همان طور که مشاهده می کنید به ازای $m \in \mathbb{R}$ ، $\Delta > 0$ می باشد و دقت کنید که اگر این تابع دو ریشه غیر مضاعف داشته باشد، الزاماً یکی ماکزیمم و یکی مینیمم خواهد بود.

۸۶۶- گزینه ۳

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع ابتدا نقاط بحرانی تابع را می یابیم:

$$y'(x) = \frac{(1)(x^2 + 1) - (2x)(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

حال مقدار تابع در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ را می یابیم:

$$y(1) = \frac{1}{2}, y(-1) = \frac{-1}{2}$$

از آن جایی که دامنه تابع \mathbb{R} می باشد، حد تابع در $\pm\infty$ را نیز محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

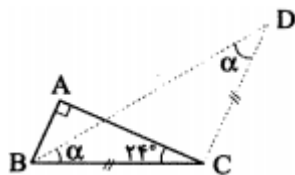
بنابراین بیشترین مقدار تابع $\frac{1}{2}$ و کمترین مقدار تابع $-\frac{1}{2}$ است که حاصل جمع آن ها برابر با صفر می باشد.

۸۶۷- گزینه ۳

برای به دست آوردن وتر مشترک دو دایره کافیست معادله گسترده آن ها را با یکدیگر برابر قرار دهیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = x^2 + y^2 + 2x - 3 \Rightarrow 4x + 4y + 1 = 0$$

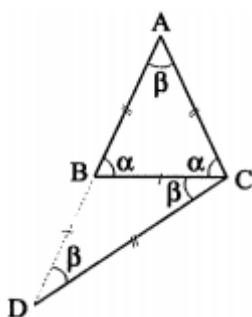
۸۶۸- گزینه ۱



مثلث BCD متساوی الساقین است، چون گفته شده $BC = CD$ ، بنابراین زاویه های زیر ساق برابرند و در نتیجه در مثلث BCD داریم:

$$\alpha + \alpha + 90^\circ + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 33^\circ$$

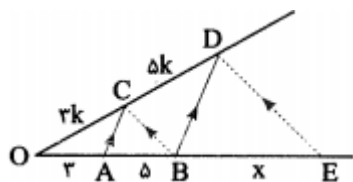
۸۶۹- گزینه ۴



مثلث ABC متساوی الساقین است. زاویه های زیر ساق را α نام گذاری می کنیم. هم چنین مثلث BCD نیز متساوی الساقین است. زاویه های زیر ساق را β نام گذاری می کنیم. حال چون $AC = DC$ است، پس $\hat{A} = \beta$ می باشد. در مثلث های ABC و ADC داریم:

$$\begin{cases} \triangle ABC: 2\alpha + \beta = 180^\circ \\ \triangle ADC: 3\beta + \alpha = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow 2(180^\circ - 3\beta) + \beta = 180^\circ \Rightarrow 5\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 36^\circ$$

۸۷۰- گزینه ۱



چون AC موازی BD است، بنابراین $OC = 3k$, $CD = 5k$. حال در مثل ODE داریم:

$$\frac{8}{8+x} = \frac{3k}{8k} \Rightarrow \frac{8}{8+x} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

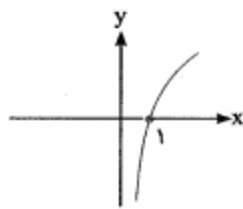
۸۷۱- گزینه ۴

از آن جایی که $x^2 - x < 0$ می باشد، $0 < x < 1$ خواهد بود. حال با داشتن محدوده x هر یک از گزینه های داده شده را بررسی می کنیم:

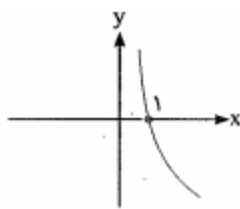
(۱) اعداد بین صفر و یک هر چه به توان بزرگ تری می رسند کوچک تر می شوند، پس:

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{5} \Rightarrow x^{\frac{3}{4}} < x^{\frac{2}{5}}$$

(۲) با توجه به نمودارهای رسم شده اگر $0 < x < 1$ باشد، $\log_2 x < 0$ و $\log_{\frac{1}{3}} x > 0$ است و خواهیم داشت:

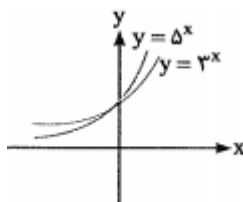


$$y = \log_7 x$$



$$y = \log_{\frac{1}{7}} x$$

(۳) بنابر نمودار رسم شده در بازه $0 < x < 1$ ، داریم: $5^x > 3^x$



بنابراین هر سه گزینه صحیح می باشند.

۸۷۲- گزینه ۲

بنابر اطلاعات داده شده در صورت سؤال می توان نوشت:

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4} \Rightarrow 1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4}$$

حال بنابر خواسته مسئله نسبت $\frac{a_7}{a_1}$ را در این دنباله می‌یابیم:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 \xrightarrow{q^2 = \frac{1}{2}} \frac{a_7}{a_1} = (q^2)^3 = \frac{1}{8}$$

۸۷۳- گزینه ۴

ابتدا ۳ نفر از بین ۷ نفر و سپس ۲ نفر از بین ۴ نفر باقی‌مانده را برای اهدای کتاب‌های ریاضی و ادبیات انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{7}{3} \binom{4}{2}$ طریق انجام می‌گیرد:

$$\binom{7}{3} \binom{4}{2} = \frac{7!}{3!4!} \times \frac{4!}{2!2!} = 35 \times 6 = 210$$

۸۷۴- گزینه ۲

همان‌طور که می‌دانیم:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x : D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f \quad , \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x : D_{f^{-1} \circ f} = D_f$$

از طرفی در تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ ، $D_f = [2, +\infty)$ و $R_f = [3, +\infty)$ است، بنابراین دو تابع f و $f^{-1} \circ f$ در بازه $[3, +\infty)$ که دامنه مشترکشان است بر یکدیگر منطبق می‌باشند و مجموعه جواب معادله $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ بازه $[3, +\infty)$ است.

۸۷۵- گزینه ۲

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$A \Rightarrow$ دو عدد رو شده متوالی اند : A

$$= \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۸۷۶- گزینه ۳

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84$$

$$\left. \begin{array}{l} n \left(\begin{array}{c} A \\ \text{بها} \\ \text{فقط 1 مهره سفید} \end{array} \right) = \binom{4}{1} \times \binom{5}{2} = 4 \times 10 = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

2 مهره از رنگ‌های دیگر 1 مهره سفید

۸۷۷- گزینه ۲

۴ مهره سفید
۳ مهره سیاه
۲ مهره قرمز

از آن جایی که ۲ رادیان کمانی در ربع دوم دایره مثلثاتی است و در این ربع $-1 < \cos x < 0$ است می توان گفت $[\cos 2] = -1$ می باشد. اما برای عبارت $[\log_{4\sqrt{2}} \sqrt{5}]$ داریم:

$$\log_{4\sqrt{2}} \sqrt{5} = \log_{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^2} 5^{\frac{1}{2}} = 2 \log_2 5 = \log_2 25$$

و از طرفی داریم:

$$2^4 < 25 < 2^5 \Rightarrow \log_2 2^4 < \log_2 25 < \log_2 2^5 \Rightarrow 4 < \log_2 25 < 5 \Rightarrow [\log_2 25] = 4$$

$$= [\log_{4\sqrt{2}} \sqrt{5}] = 4$$

بنابراین حاصل $[\log_{4\sqrt{2}} \sqrt{5}] + [\cos 2]$ برابر با $3 - 1 = 2$ است.

۸۷۸- گزینه ۴

در صورت سؤال صحبت از مجموع مربعات داده ها شده است، بنابراین از فرمول دوم واریانس استفاده می کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\overbrace{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}^{\text{مجموع مربعات داده ها}}}{n} - (\bar{x})^2$$

حال با استفاده از تعداد داده ها و مجموع آن ها میانگین داده ها را به دست می آوریم و سپس به محاسبه ضریب تغییرات می پردازیم:

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{2190}{30} - (8)^2 = 73 - 64 = 9 \Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \text{ضریب تغییرات} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0/375$$

۸۷۹- برای حل این معادله لگاریتمی، باید در دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم مبنا ساخته و سپس عبارت های جلوی لگاریتم ها را برابر قرار دهیم. داریم:

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \Rightarrow \log \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \log(2x - 5)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 2x - 5 \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x - 3)(2x - 5) \Rightarrow x^2 - x - 6 = 2x^2 - 11x + 15$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \text{عضو دامنه معادله نیست}$$

حال حاصل لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴ را به دست می آوریم. داریم:

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} \stackrel{x=7}{=} \log_4 \sqrt[3]{7+1} = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

۸۸۰- گزینه ۱

از آن جایی که خط مفروض بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است، شیبی برابر با -1 دارد و معادله آن به صورت $y + x + m = 0$ می‌باشد. حال فاصله مبدأ مختصات تا این خط را برابر با $\sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم تا m به دست آید:

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |m| = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow y + x = -2 \\ m = -2 \Rightarrow y + x = 2 \end{cases}$$

۸۸۱- گزینه ۲

اگر $2x + y = 4$ باشد، خواهیم داشت $y = 4 - 2x$ و با جایگذاری در رابطه xy عبارت $4x - 2x^2$ به دست خواهد آمد که این ماکزیمم آن در نقطه $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$ اتفاق می‌افتد که برابر با 2 می‌باشد.

۸۸۲- گزینه ۲

دوره تناوب تابع $y = f(x)$ عدد 4 است که بنابر تعریف تابع متناوب، اگر T دوره تناوب تابع باشد، nT ($n \in \mathbb{N}$) نیز دوره تناوب تابع خواهد بود و خواهیم داشت:

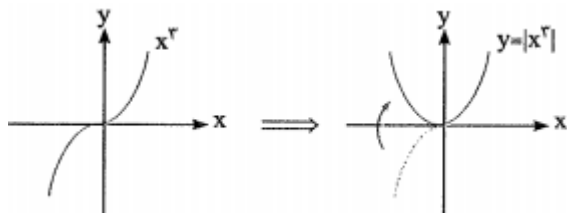
$$f(x + nT) = f(x)$$

بنابراین:

$$f(159) = f((-1) + 160) = f((-1) + (4 \times 40)) = f(-1) = 0$$

۸۸۳- گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $y = |x^3|$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نمودار x^3 را رسم کرده و سپس آن قسمتی از نمودار که در زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. داریم:



این تابع غیریکنوا (نه صعودی و نه نزولی) و غیر یک‌به‌یک است. پس جواب درست گزینه ۳ می‌باشد.

۸۸۴- گزینه ۳

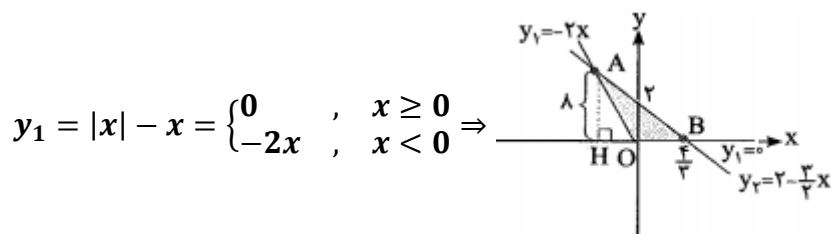
$$g(x) = 2x + 1, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(2x + 1) = 8x^2 + 6x + 5$$

ورودی تابع f را برابر t قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} 2x + 1 = t &\Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \\ &= 2(t-1)^2 + 3(t-1) + 5 = 2t^2 - t + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

۸۸۵ - گزینه ۳

برای تعیین مساحت ناحیه محدود بین نمودارهای دو تابع $y_1 = |x| - x$ و $y_2 = 2 - \frac{3}{2}x$ نمودار این دو تابع را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. داریم:



برای تعیین ارتفاع مثلث OAB ، باید عرض نقطه A را به عنوان ارتفاع معرفی کنیم. برای این منظور دو خط $y_1 = -2x$ و $y_2 = 2 - \frac{3}{2}x$ را با هم قطع می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y_1 = -2x \\ y_2 = 2 - \frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow -2x = 2 - \frac{3}{2}x \Rightarrow x = -4, y = 8 \Rightarrow A(-4, 8), y_2 = 2 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow 2 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow B\left(\frac{4}{3}, 0\right) \Rightarrow AH = h = 8 \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{OB \times AH}{2} = \frac{\frac{4}{3} \times 8}{2} = \frac{16}{3}$$

۸۸۶ - گزینه ۱

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ پس داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

۸۸۷ - گزینه ۲

با کمک گرفتن از اتحاد $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ و جایگذاری در معادله داده شده در صورت سؤال خواهیم داشت:

$$\cos 4x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \Rightarrow \cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

در بازه $[0, 2\pi]$ نقاط $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$ پاسخ معادله می‌باشند.

۸۸۸ - گزینه ۴

در تابع $y = \frac{\sin x}{x-|x|}$ در همسایگی راست $x = 0$ داریم: $\frac{\sin x}{x-x}$ و از آن جایی که مخرج کسر به صورت دقیق صفر می باشد حد تابع $y = \frac{\sin x}{x-|x|}$ در سمت راست $x = 0$ وجود نخواهد داشت.

۸۸۹- گزینه ۲

صورت کسر $\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}$ در نقطه $x = 2$ صفر می باشد و از آن جایی که پاسخ حد این تابع در $x = 2$ عدد $\frac{1}{2}$ است باید مخرج کسر نیز در $x = 2$ صفر شود که حد به حالت $\frac{0}{0}$ دربیاید و پس از رفع ابهام، حدی برابر $\frac{1}{2}$ داشته باشد:

$$x = 2 \xrightarrow{\text{مخرج کسر باید صفر شود.}} 2a + b = 0$$

حال برای رفع ابهام ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم. (به جای a نیز $-\frac{b}{2}$ را جایگذاری می کنیم.)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (3x - 2)}{\left(-\frac{b}{2}x + b\right)(x + \sqrt{3x - 2})} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{\frac{-b}{2}(x - 2)(x + \sqrt{3x - 2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{-\frac{b}{2}(x + \sqrt{3x - 2})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{-\frac{b}{2}(4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1 \end{aligned}$$

۸۹۰- گزینه ۳

با توجه به نمودار تابع خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(f(0)) = f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع $y = (f \circ f)(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

۸۹۱- گزینه ۱

حد مطرح شده در تست، تعریف مشتق تابع f در $x = 1$ است. پس داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{12-5}{2\sqrt{4x+5}} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = \frac{7}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} \\ &= \frac{7}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

۸۹۲- گزینه ۴

تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است، بنابراین مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y(x) = \begin{cases} 3x & ; x \geq 1 \\ 5x - 2 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \begin{cases} 3 & ; x > 1 \\ 5 & ; x < 1 \end{cases}$$

دقت کنید از آنجایی که $f'_+(1) = 3$ و $f'_-(1) = 5$ می‌باشد، تابع y در $x = 1$ فاقد مشتق اول می‌باشد و چون $x = 1$ در دامنه تابع y' وجود ندارد، مشتق دوم این تابع نیز در نقطه $x = 1$ وجود نخواهد داشت.

۸۹۳- گزینه ۳

مشتق تابع $y = f(\sqrt[3]{2x+1})$ را در نقطه $x = \frac{7}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$y'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} f'(\sqrt[3]{2x+1}) \Rightarrow y'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{64}} f'(2)$$

و همان‌طور که از نمودار تابع $y = f(x)$ مشخص است $f'(2) = -1$ است، زیرا خط مماس در نقطه $x = 2$ بر تابع f رسم شده است که خطی است که از دو نقطه $(3, 0)$ و $(2, 1)$ می‌گذرد و خواهیم داشت:

$$y'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{12} \times (-1) = \frac{-1}{6} = \text{شیب خط مماس}$$

بنابراین $m = 6$ شیب خط قائم بر تابع $y = f(\sqrt[3]{2x+1})$ در نقطه $x = \frac{7}{2}$ می‌باشد.

۸۹۴- گزینه ۲

تابع $y = x - |x|$ در بازه $x \geq 0$ به تابع ثابت $y = 0$ تبدیل می‌شود و تمام این نقاط (بی‌شمار نقطه) بحرانی خواهند بود. دقت کنید که گزینه ۱، یک نقطه و گزینه ۳ دو نقطه بحرانی دارد و گزینه ۴، فاقد نقطه بحرانی است.

۸۹۵- گزینه ۱

برای آن که نقطه $x = \pi$ در تابع $y = \frac{m}{\cos x}$ نقطه ماکزیمم نسبی باشد، باید $y'(\pi) = 0$ و قبل از این نقطه تابع صعودی و بعد از آن تابع نزولی باشد:

$$y'(x) = \frac{m \sin x}{\cos^2 x}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، همواره $y'(\pi) = 0$ است و از آنجایی که عبارت $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ در همسایگی $x = \pi$ علامتش به صورت زیر است، m باید بزرگ‌تر از صفر باشد تا مشتق قبل از $x = \pi$ مثبت و بعد از آن منفی باشد و این نقطه بتواند یک ماکزیمم نسبی باشد.

x	π
$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	+ -

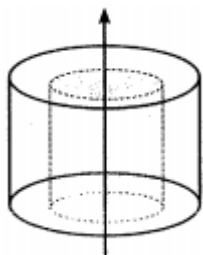
دقت کنید که در حالت $m = 0$ تابع ثابت $y = 0$ خواهیم داشت در آن صورت نیز $x = \pi$ ماکزیمم نسبی خواهد بود.

$$y'(x) = \frac{(1)(x^2 + 1) - (2x)x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-	0	+	-
y		↘	↗	↘
		min	max	

در $x = 1$ شیب خط مماس صفر و این نقطه یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

دقت کنید که با دوران مربع توصیف شده در صورت سؤال یک استوانه به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۳ خواهیم داشت که در مرکز آن یک استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ برداشته شده است:



بنابراین برای حجم شکل حاصل خواهیم داشت:

$$V = V_1 - V_2 = \pi(5)^2 \times 3 - \pi(2)^2 \times 3 = 3\pi(25 - 4) = 63\pi$$

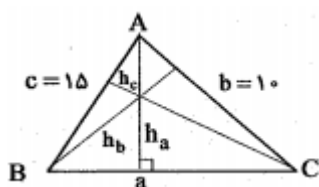
طبق صورت سؤال، دایره محور x ها را در دو نقطه به طولهای ۱ و ۳ قطع کرده است. بنابراین نقاط $(1, 0)$ و $(3, 0)$ روی دایره قرار دارند، از طرفی مرکز دایره روی نیمساز ربع اول می باشد. بنابراین، مختصات مرکز دایره به صورت $O(\alpha, \alpha)$ می باشد، حال داریم:

$$\text{فرم کلی معادله دایره} \quad (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = R^2 \Rightarrow \begin{cases} (1, 0) \Rightarrow (1 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2 = R^2 \\ (3, 0) \Rightarrow (3 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2 = (3 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2 \Rightarrow (1 - \alpha)^2$$

$$= (3 - \alpha)^2 \xrightarrow{\text{جذر می گیریم}} \begin{cases} 1 - \alpha = 3 - \alpha \Rightarrow 1 = 3 \text{ غ ق} \\ 1 - \alpha = \alpha - 3 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = R^2 \Rightarrow 1 + 4 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$



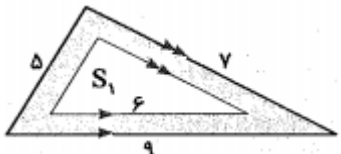
$$\Rightarrow S = \frac{h_a \times a}{2} = \frac{h_b \times b}{2} = \frac{h_c \times c}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}$$

$$h_a = h_b + h_c \Rightarrow \frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{3+2}{30} \Rightarrow 5a = 30$$

$$\Rightarrow a = 6$$

۹۰۰- گزینه ۳

در دو شکل متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است، نسبت تشابه برابر با نسبت دو ضلع متناظر می‌باشد، پس $k = \frac{6}{9}$ خواهد بود بنابراین داریم:



$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{6}{9}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_1}{S - S_1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{S - S_1}{S_1} = \frac{5}{4} = 1/25$$

۹۰۱- گزینه ۲

می‌دانیم اگر $(a, b) \in f$ باشد، آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$ است، از طرفی دیگر می‌دانیم $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$ می‌باشد، بنابراین داریم:

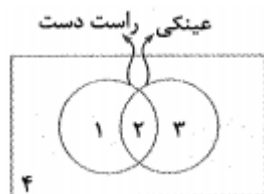
$$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(a) = 8 \Rightarrow f \circ g(8) = a \Rightarrow f(g(8)) = a \quad (I)$$

حال به محاسبه $g(8)$ می‌پردازیم:

$$g(x) = \sqrt{5x + 9} \Rightarrow g(8) = \sqrt{40 + 9} = 7 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} f(7) = a \Rightarrow a = 3$$

۹۰۲- گزینه ۳

فضای مجموعه کلاس را به ۴ قسمت ۱، ۲، ۳ و ۴ افزایش کردیم که براساس اطلاعات مسئله داریم:



افراد عینکی چپ‌دست: (ناحیه ۳)

افراد بدون عینک: (ناحیه ۴) \cup (ناحیه ۱)

افراد عینکی راست‌دست: (ناحیه ۲)

حال بر طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} n(\text{ناحیه } 3) = \frac{1}{3}(n(\text{ناحیه } 1) + n(\text{ناحیه } 4)) \\ n(\text{ناحیه } 2) = 3 \\ n(\text{ناحیه } 1) + n(\text{ناحیه } 2) + n(\text{ناحیه } 3) + n(\text{ناحیه } 4) = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4n(\text{ناحیه } 3) = 16 \Rightarrow n(\text{ناحیه } 3) = 4 \Rightarrow n(\text{ناحیه } 1) + n(\text{ناحیه } 4) = 12$$

۹۰۳- گزینه ۳

خط $y = x + 3$ با افق زاویه 45° می‌سازد (زیرا شیب خط ۱ است)، بنابراین خطی که بخواهد با این خط زاویه 15° داشته باشد باید با افق زاویه 60° یا 30° بسازد و از آن جایی که شیب خط تانژانت زاویه‌ای است که خط با افق می‌سازد شیب این خطوط $m_1 = \sqrt{3}$ ، $m_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است، که داریم:

$$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۹۰۴- گزینه ۲

تابع درجه دومی که صفرهای آن با تابع $y = x^2 - 3x + 2$ مشترک باشد به فرم $y = a(x-1)(x-2)$ می‌باشد و از آن جایی که عرض از مبدأ این تابع ۱- است، داریم:

$$y(0) = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

حال با جایگذاری a به دست آمده تابع به صورت $y = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ خواهد شد. از طرفی خط افقی مماس بر سهمی (بر طبق گزینه‌ها) در رأس آن مماس می‌باشد و چون رأس سهمی در $x = \frac{3}{2}$ است و $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8}$ ، بنابراین خط افقی $y = \frac{1}{8}$ خط مماس بر این سهمی در رأس آن است.



۹۰۵- گزینه ۲

اگر $|x-1| < 5$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} -5 < x-1 < 5 &\Rightarrow -4 < x < 6 \Rightarrow -8 < 2x < 12 \Rightarrow -7 < 2x+1 < 13 \Rightarrow \frac{-7}{3} \\ &< \frac{2x+1}{3} < \frac{13}{3} \Rightarrow \left[\frac{2x+1}{3}\right] = -3 \text{ یا } -2 \text{ یا } -1 \text{ یا } 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \end{aligned}$$

بنابراین حاصل براکت ۸ عدد نوشته شده می‌تواند باشد.

۹۰۶- گزینه ۴

برای محاسبه دامنه تابع $y = \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ داریم:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} 4 - 9x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$$

۹۰۷- گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \frac{1-3x}{x+2} \\ f(x) &= \frac{2x+3}{2-x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} = \frac{-(7x+7)}{7} = -x-1$$

۹۰۸- گزینه ۲

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 4 \Rightarrow yx - x = 4 + 2y \Rightarrow (y-1)x = 4 + 2y \Rightarrow x = \frac{4+2y}{y-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4+2x}{x-1}$$

برای محاسبه محل برخورد نمودارهای f و f^{-1} معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{4+2x}{x-1} \Rightarrow (x+4)(x-1)$$

$$= (x-2)(4+2x) \xrightarrow{\text{ساده‌سازی}} x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4, -1$$

۹۰۹- گزینه ۳

دو پیشامد قبولی فرد A و قبولی فرد B ، نسبت به هم مستقل هستند، پس داریم:

$$P(\underbrace{A}_{\text{قبولی فرد}}) = 0/84, P(\underbrace{B}_{\text{قبولی فرد}}) = 0/75$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \quad \text{روش اول:}$$

$$= 0/84 + 0/75 - 0/84 \times 0/75 = 0/96$$

$$P(\text{لااقل یکی از آنان قبول شوند}) = 1 - P(\text{هیچ کدام قبول نشوند}) \quad \text{روش دوم:}$$

$$= 1 - \frac{0/04}{0/16 \times 0/25} = 0/96$$

۹۱۰- گزینه ۳

روش اول: می‌خواهیم ۲ مهره خارج شده هم‌رنگ باشد، داریم:

$$P(\text{هم‌رنگ بودن دو مهره خارج شده}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{3}{2}\binom{7}{1} + \binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{79}{120}$$

روش دوم: می‌خواهیم از کیسه زیر سه مهره به تصادف خارج کنیم، بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:



$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10}{1} \times \frac{9}{3} \times \frac{8}{2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

$$A = \text{مهره هم‌رنگ باشند} \Rightarrow n(A') = \underbrace{\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}_{\text{3 مهره غیر هم‌رنگ}} + \underbrace{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}_{\text{هر 3 مهره هم‌رنگ}} = 30 + 10 + 1 = 41$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{41}{120} = \frac{79}{120}$$

۹۱۱- گزینه ۲

ابتدا از تمام داده‌ها ۱۸ واحد کم می‌کنیم و واریانس را با داده‌های جدید به دست آمده محاسبه می‌کنیم:

$$-3, -2, -2, -1, 0, 0, 0, 1, 2, 3$$

$$\text{میانگین} = \bar{x} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

$$\text{واریانس} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{9 + 4 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9}{10} - \frac{1}{25} = \frac{32}{10} - \frac{1}{25} = 3/16$$

توجه: دقت کنید که اگر یک عدد ثابت از تمام داده‌ها کم شود واریانس و انحراف معیار تغییری نخواهند کرد.

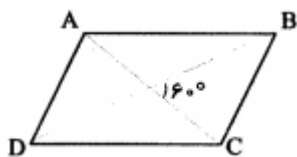
۹۱۲- گزینه ۳

از آن جایی که نقطه $A(1, -2)$ متعلق به تابع $y = 1 + f(2x + 1)$ است پس باید در آن صدق کند که خواهیم داشت:

$$-2 = 1 + f(3) \Rightarrow f(3) = -3$$

حال نقطه متناظر نقطه A در تابع $y = 2 - f\left(\frac{x}{3}\right)$ نقطه‌ای که با جایگذاری آن $f(3) = -3$ برقرار باشد، یعنی باید به جای x عدد ۹ و به جای y عدد ۵ قرار دهیم:

$$y = 2 - f\left(\frac{x}{3}\right) \stackrel{(9,5)}{\implies} 5 = 2 - f(3) \Rightarrow f(3) = -3$$



۹۱۳- گزینه ۴

$$S = \frac{1}{2} (AC \times DB \times \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$$

۹۱۴- گزینه ۴

ابتدا معادله نمایی و لگاریتمی داده شده را از شکل نمایی لگاریتمی خارج نموده و پس از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی حاصل، مقدار x را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} 3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \xrightarrow{9=3^2} 3^{2x+y} = 3^{2+x-y} \\ \xrightarrow{a^f=a^g \Rightarrow f=g} 2x+y = 2+x-y \Rightarrow x+2y = 2; (1) \\ \log(x+2y) = 1 + \log y \Rightarrow \log(x+2y) = \log 10y \\ \xrightarrow{\log_a f = \log_a g \Rightarrow f=g} x+2y = 10y \Rightarrow x-8y = 0; (2) \end{cases}$$

۹۱۵- گزینه ۲

با استفاده از دو معادله داده شده و استفاده از قوانین لگاریتم هر یک از مقادیر x و y را می‌یابیم:

$$\log(y+x-1) + \log(2y+3) = 0 \Rightarrow (y+x-1)(2y+3) = 1 \quad (1)$$

$$\log(x-4y) = 2 \log 2 \Rightarrow x-4y = 4 \Rightarrow x = 4 + 4y \quad (2)$$

به جای x مقدار مساوی آن را از معادله (۲)، در معادله (۱) قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} (5y+3)(2y+3) = 1 &\Rightarrow 9 + 21y + 10y^2 = 1 \Rightarrow 10y^2 + 21y + 8 = 0, \Delta \\ &= 441 - 320 = 121 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-21 \pm 11}{20} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-21-11}{20} = \frac{-32}{20} = \frac{-8}{5} \text{ (غ ق ق)} \text{ (} \log(2y+3) \text{ دامنه } \log(2y+3) \text{ نیست.)} \\ \frac{-21+11}{20} = \frac{-10}{20} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow xy = -1$$

۹۱۶- گزینه ۴

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها = $0 + \pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$

۹۱۷- گزینه ۲

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان 2 می‌رسانیم}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

حال با کمک گرفتن از اتحاد $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ داریم:

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(\frac{9}{16} \right) = -\frac{1}{8}$$

۹۱۸- گزینه ۳

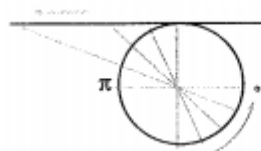
ابتدا مشخص می‌کنیم که x به سمت کدام عدد میل کند تا عبارت $\frac{2x+1}{1-2x}$ به سمت عدد -1 میل کند:

$$\frac{2x+1}{1-2x} = -1 \Rightarrow 1 = -1 \quad (\text{غ ق ق})$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در هیچ نقطه‌ای مانند $x = a$ عبارت $\frac{2x+1}{1-2x}$ به سمت -1 میل نمی‌کند. اما اگر $x \rightarrow +\infty$ ، براساس قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x - 1}{x^3 + x^2 + 1} = 2$$

۹۱۹- گزینه ۲



دقت کنید که اعداد بین 0 و 1 هر چه به توان بزرگ‌تری می‌رسند کوچک‌تر می‌شوند، بنابراین در همسایگی راست $x = 0$ داریم:

$$x^3 < x \Rightarrow x^3 - x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot(x^3 - x) = \cot(0^-) = -\infty$$

۹۲۰- گزینه ۳

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \\ ax - a + 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع در $x = 1$ برابر باشد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax - a + 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = 2$$

از آن جایی که حد کسر $\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ در $x = 1$ ابهام $\frac{0}{0}$ دارد برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-x} \times (x+\sqrt{x}) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

بنابراین به ازای هر مقدار از a این تابع در $x = 1$ پیوسته است، زیرا همواره حد راست و چپ و مقدار تابع در $x = 1$ با یکدیگر برابر هستند.

۹۲۱- گزینه ۲

تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ در نقاطی به فرم $x = \frac{1}{k}$; $k \in \mathbb{Z}$ (صحیح‌کننده‌های داخل براکت)، ناپیوسته است اما در هر کدام از این اعداد پیوستگی چپ دارد. بنابراین اگر تابع بخواند در بازه‌ای پیوسته باشد، نباید داخل آن بازه عددی به فرم $\frac{1}{k}$ قرار داشته باشد مگر آن که انتهای بازه باشد (زیرا در انتهای بازه فقط پیوستگی چپ کافیتست) که در بین گزینه‌های داده شده تنها گزینه ۲ با این شرایط سازگار است.

۹۲۲- گزینه ۲

از طرفین رابطه $f(2x - x^2) = x^3 - 4x^2 + 1$ مشتق می‌گیریم که خواهیم داشت:

$$(2 - 2x)f'(2x - x^2) = 3x^2 - 8x \quad (I)$$

حال برای آن که $f'(-3)$ به دست آید کافیتست x ای بیابیم که $2x - x^2$ را برابر با -3 کند:

$$2x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & x < 0 \\ x = -1 & \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

بنابراین در طرفین رابطه (I) مقدار $x = -1$ را جایگزین می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$(4)f'(-3) = 3 + 8 \Rightarrow f'(-3) = \frac{11}{4} = 2/75$$

۹۲۳- گزینه ۲

خطوط موازی محور x ها شیبی برابر صفر دارند، بنابراین ابتدا مشخص می‌کنیم در کدام نقاط از تابع شیب خط مماس صفر است:

$$y'(x) = \frac{(x^2 + 2) - 2x^2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

که مقدار تابع در این دو نقطه $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ است. بنابراین فاصله این دو خط مماس افقی $2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۹۲۴- گزینه ۳

ابتدا نقاط بحرانی تابع $y = x^3 - 3x$ در بازه $[-3, 1]$ می‌یابیم:

$$y'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی و انتهای بازه مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(-1) = 2 \\ f(-3) = -18 \end{cases}$$

در نتیجه بیشترین مقدار تابع ۲ و کمترین مقدار ۱۸- است که تفاضلی برابر با ۲۰ دارند.

۹۲۵- گزینه ۴

مشتق تابع را در $x = 0$ محاسبه و تابع مشتق را در همسایگی $x = 0$ تعیین علامت می‌کنیم:

$$y'(x) = x^3 - x^2 \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & & \\ \hline & - & - & + \\ y' & & & \end{array}$$

بنابراین در نقطه $x = 0$ شیب خط مماس صفر است و در دو طرف آن تابع نزولی می‌باشد، گزینه ۴ جواب است.

۹۲۶- گزینه ۴

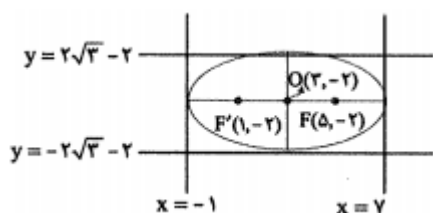
از آنجا که فاصله دو کانون $F(1, -2)$ و $F'(5, -2)$ برابر ۴ است و فاصله دو کانون در بیضی $2c$ می‌باشد، داریم:

$$2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

از طرفی در صورت سؤال خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ مطرح شده است که داریم:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, c = 2 \Rightarrow a = 4$$

و بر طبق رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ خواهیم داشت $b = 2\sqrt{3}$ ، بنابراین با داشتن a, b, c و مختصات مرکز (وسط F و F') داریم:

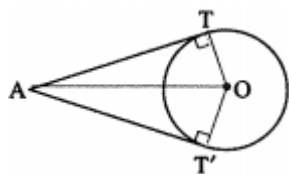


۹۲۷- گزینه ۳

به شکل زیر دقت کنید:

در مثلث AOT یک ضلع R ، یک ضلع $|OA|$ (فاصله مرکز دایره تا نقطه A) و ضلع دیگر $|AT|$ (طول مماس) می‌باشد، بنابراین در دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ مرکز و شعاع را به دست می‌آوریم تا R و $|OA|$ را بتوانی به دست آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow O(1, 0), R = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1 \\ |OA| = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$



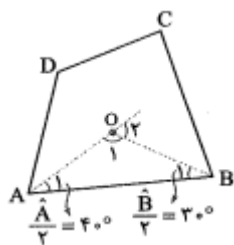
حال رابطه فیثاغورس را در مثلث OAT می نویسیم:

$$|OA|^2 = |AT|^2 + R^2 \Rightarrow 5 = |AT|^2 + 1 \Rightarrow |AT| = 2$$

۹۲۸- گزینه ۳

رابطه داده شده در صورت سؤال را برابر k قرار می دهیم که به راحتی مقدار عددی هر زاویه به دست بیاید:

$$\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11} = k \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 4k \\ \hat{B} = 3k \\ \hat{C} + \hat{D} = 11k \end{cases}$$



چون مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است، داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 4k + 3k + 11k = 18k = 360^\circ$$

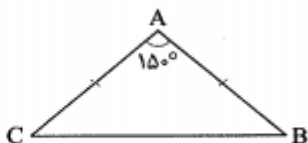
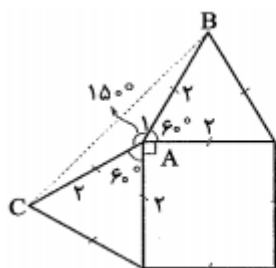
$$\Rightarrow k = 20^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 80^\circ \\ \hat{B} = 60^\circ \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{OA نیمساز } \hat{A}} \\ \xrightarrow{\text{OB نیمساز } \hat{B}} \end{matrix} \begin{cases} \hat{A}_1 = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \\ \hat{B}_1 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \end{cases}$$

حال برای تعیین زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه \hat{A} و \hat{B} کافی است بدانیم مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، داریم:

$$OAB \text{ در مثلث } : \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O}_1 = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + 30^\circ + \hat{O}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 110^\circ \Rightarrow \text{زاویه حاده} \\ : \hat{O}_2 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

۹۲۹- گزینه ۳

$$\hat{A}_1 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 150^\circ$$



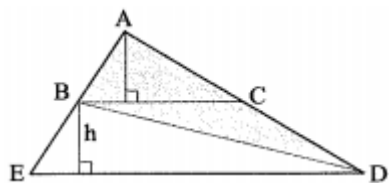
حال برای تعیین مساحت مثلث ABC ، با معلوم بودن دو ضلع مجاور زاویه \hat{A}_1 و اندازه زاویه \hat{A}_1 ، داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}_1 \\ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sin 150^\circ}{\frac{1}{2}} = 1$$

۹۳۰- گزینه ۴

$$\text{دورنقه است } BCDE \Rightarrow BC \parallel ED \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AED}} = \left(\frac{BC}{ED}\right)^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AED} - S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{BCDE}} \\ = \frac{9}{16} \quad (1)$$

$$BC = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BC}{ED + BC} = \frac{3}{8} \quad (*)$$



$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{BCDE}} = \frac{\frac{1}{2} \times h \times BC}{\frac{1}{2} \times h \times (BC + ED)} = \frac{BC}{ED + BC} \stackrel{(*)}{=} \frac{3}{8} \Rightarrow S_{\triangle BCD} = \frac{3}{8} S_{BCDE} \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث هاشورزده}}{\text{مساحت دوزنقه}} = \frac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD}}{S_{BCDE}} = \frac{9}{16} + \frac{3}{8} = \frac{15}{16}$$

۹۳۱- گزینه ۱

اگر $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ را برابر با t در نظر بگیریم می توان نوشت:

$$t^2 = (4 + \sqrt{15}) + (4 - \sqrt{15}) + 2\sqrt{4 + \sqrt{15}}\sqrt{4 - \sqrt{15}} \Rightarrow t^2 = 4 + 4 + 2 \Rightarrow t^2 = 10 \Rightarrow t = \sqrt{10}$$

۹۳۲- گزینه ۴

دقت کنید که تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ تابعی است با دامنه $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. بنابراین در اولین قدم تابعی که بخواهد با آن برابر باشد باید دامنه یکسانی با آن داشته باشد، با بررسی گزینه ها خواهیم داشت:

۱) $D = (2, +\infty)$ حذف *

۲) $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ حذف *

۳) $D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$ حذف *

بنابراین گزینه ۴ تنها گزینه ای است که با تابع $y = \log \left(\frac{x-2}{x}\right)$ برابر است:

$$y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} = 2 \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \log \left(\frac{x-2}{x}\right)$$

۹۳۳- گزینه ۳

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{واحد به سمت } x \text{ های مثبت}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{2-x}$$

حال تابع به دست آمده را با خط $y = x$ برابر قرار می دهیم:

$$\sqrt{2-x} = x \xrightarrow{0 \leq x \leq 2} 2-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق ق} \\ x = 1 \end{cases}$$

۹۳۴- گزینه ۴

$$y = x + 2\sqrt{x-4} - 1 \Rightarrow y = (x-4) + 2\sqrt{x-4} + 3$$

حال با کمک گرفتن از اتحاد مربع کامل می توان نوشت:

$$\begin{aligned} y &= (\sqrt{x-4} + 1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (\sqrt{x-4} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y-2} = |\sqrt{x-4} + 1| \Rightarrow \sqrt{y-2} \\ &= \sqrt{x-4} + 1 \Rightarrow \sqrt{y-2} - 1 = \sqrt{x-4} \Rightarrow (\sqrt{y-2} - 1)^2 = x - 4 \\ &\Rightarrow (\sqrt{y-2} - 1)^2 + 4 = x \Rightarrow y^{-1}(x) = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

۹۳۵- گزینه ۴

ابتدا تعداد حالاتی که ۵ حرف آن بدون تکرار از بین حروف A, L, I, R, E, Z انتخاب شده باشد را حساب می کنیم:

انتخاب ۵ حرفی که

قرار است استفاده شود.

$$\binom{6}{5} 5! = 6 \times 5!$$

تعداد حالت چیدمان ۵ حرف

انتخاب شده در کنار هم

سپس تعداد حالاتی که در آن حرف A دو بار تکرار شود را محاسبه می کنیم که در این حالت ۳ حرف دیگر باید از

بین حروف L, I, R, E, Z انتخاب شود:

انتخاب ۳ حرف

$$\binom{5}{3} \frac{5!}{2!} = 10 \times \frac{5!}{2!} = 5 \times 5!$$

چیدمان ۵ حرفی که

۲ حرف آن A باشد.

$$6 \times 5! + 5 \times 5! = 11 \times 5! = 1320 \text{ بنا بر این کل حالات برابر است با:}$$

۹۳۶- گزینه ۱

می دانیم حاصل ضرب اعداد رو شده زمانی فرد است که هر دو عدد فرد باشد:

$P(5)$ (برض صاح دادعا ور هدش درف دشاب | عومجم ود سات رتمک زا

$$= \frac{P(\text{مجموع دو تاس کمتر از } 5 \text{ و حاصل ضرب اعداد رو شده فرد باشد})}{P(\text{حاصل ضرب اعداد رو شده فرد باشد})}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

تاس دو فرد تاس اول فرد

توجه کنید که حالاتی که هر دو فرد و مجموع کمتر از ۵ است به صورت $\{(3, 1), (1, 3), (1, 1)\}$ می باشد.

(جورخ هرهم زمرق) P

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{l} \text{2 مهره سفید به} \\ \text{ظرف A اضافه شود.} \end{array} \times \left(\begin{array}{l} \text{ظرف B انتخاب شود} \\ \text{و از آن قرمز خارج شود.} \end{array} \right) \\
 &= \frac{\overset{\frown}{1}}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \right) \\
 & \begin{array}{l} \text{2 مهره سفید به} \\ \text{ظرف B اضافه شود.} \end{array} \times \left(\begin{array}{l} \text{ظرف A انتخاب شود} \\ \text{و از آن قرمز خارج شود.} \end{array} \right) \\
 &+ \frac{\overset{\frown}{1}}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{8} \right) \Rightarrow P(\text{خروج مهره قرمز}) = \frac{35}{96}
 \end{aligned}$$

از آن جایی که میانگین داده‌ها ۱۳ داده شده است، داریم:

$$\frac{105 + a}{9} = 13 \Rightarrow a = 12$$

حال با به دست آمدن a داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20 \Rightarrow \text{میانۀ} = 12$$

شرط آن که معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه حقیقی مثبت داشته باشد آن است که:

$$\Delta > 0, P > 0, S > 0$$

این شرطها را روی معادله درجه دوم داده شده اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} P > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \\ S > 0 \Rightarrow 2 - m > 0 \Rightarrow m < 2 \\ \Delta > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4(m + 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty) \end{cases}$$

اشتراک 3 شرط

$$\implies -1 < m < 0$$

این که خط $y = 5x + a$ بر تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است یعنی در نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) شیب خط مماس ۵ می‌باشد. ابتدا این نقطه را به دست می‌آوریم:

$$y'(x_0) = 4x_0 - 3 = 5 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 8$$

بنابراین نقطه مورد نظر $(2, 8)$ است که باید در معادله خط مماس صدق کند:

$$8 = 10 + a \Rightarrow a = -2$$

۹۴۱- گزینه ۱

ابتدا دو ضابطه fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}, (gof)(x) = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 4 = \frac{6x+7}{x+2}$$

حال این دو ضابطه را برابر یکدیگر قرار می‌دهیم تا پاسخ معادله $fog = gof$ به دست آید:

$$\frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow 2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 36x + 7x + 42 \Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

۹۴۲- گزینه ۴

اگر $[x - 2] = 1$ باشد، داریم:

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

بنابراین نقطه برخورد دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ را در بازه $[3, 4)$ به دست می‌آوریم، از طرفی تابع $y = |x - 3| - |x - 4|$ در بازه $[3, 4)$ به صورت $y = 2x - 7$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x = -2, x = \frac{5}{2}$$

در نتیجه هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده در بازه $[3, 4)$ نمی‌باشد.

۹۴۳- گزینه ۲

ابتدا با کمک گرفتن از قضیه کسینوس‌ها خواهیم داشت:

$$64 = 16 + 36 - 2(4)(6) \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

سپس با کمک گرفتن از اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ خواهد شد و می‌توان نوشت:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{1}{2} (4)(6) \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$

۹۴۴- گزینه ۲

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{-\cos(\pi - \beta)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{-\frac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{\frac{10}{17}} = -\frac{\sqrt{170}}{17}$$

۹۴۵- گزینه ۲

کسر $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x}$ هنگامی صفر می‌باشد که صورت کسر صفر باشد. بنابراین:

$$\sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

دقت کنید که جواب $x = 2k\pi + \pi$ که به دست آمده ریشهٔ مخرج است و قابل قبول نیست، بنابراین تنها جواب معادله $x = \frac{2k\pi}{5}$ می‌باشد.

۹۴۶- گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 < x < 2 \\ \frac{6}{x} & x > 2 \text{ یا } x < -2 \end{cases}$$

تابع $x^2 - 1$ و $\frac{6}{x}$ در محدودهٔ تعریفشان حد دارند، فقط کافیست در دو نقطهٔ مرزی ۲ و -۲ حد این توابع بررسی شود:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6}{x} = 3 \qquad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 \qquad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{6}{x} = -3$$

بنابراین این تابع تنها در $x = -2$ حد ندارد.

۹۴۷- گزینه ۳

کسر داده شده را برای رفع ابهام در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که کسر داده شده مجدداً $\frac{0}{0}$ است و برای رفع ابهام در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x^2 + 5x + 3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})}{2 - \sqrt{3-x}} \\ &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x^2 + 5x + 3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})(2 + \sqrt{3-x})}{1+x} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})(2 + \sqrt{3-x})}{1} = (1)(4)(4) = 16 \end{aligned}$$

دقت کنید چنانچه در مدرسه قاعده هوییتال به شما آموزش داده شده است حل این سؤال به کمک قاعده هوییتال ساده تر خواهد بود.

۹۴۸- گزینه ۳

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$ باید $x = 1$ پیوسته باشد، اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & x < 1 \\ x^2 + ax & x \geq 1 \end{cases}$ بخواید در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\sqrt{a+3} = 1 + a \xrightarrow{a \geq -1} a + 3 = a^2 + 2a + 1 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } a = 1 \xrightarrow{a \geq -1} a = 1$$

حال پس از به دست آمدن $a = 1$ مقدار تابع $y = f(x)$ را در نقطه $-\frac{3}{4}$ محاسبه می کنیم:

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right) + 3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

۹۴۹- گزینه ۲

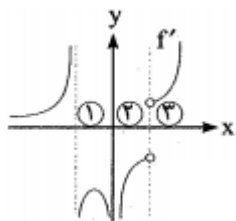
دو نقطه $(-2, 1)$ و $(-1, 2)$ متعلق به تابع هستند و خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند شیبی برابر با $m = \frac{2 - (-2)}{-1 - 1} = -2$ دارد. حال می خواهیم ببینیم در چند نقطه از تابع $y = x^3 - 3x$ شیب خط مماس برابر با -2 است:

$$y'(x) = 3x^2 - 3 = -2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین در ۲ نقطه از این تابع شیب خط مماس برابر با -2 است.

۹۵۰- گزینه ۳

تابع $y = f(x)$ در ۳ نقطه (۱)، (۲)، و (۳) مشتق ناپذیر است اما در دو نقطه (۲) و (۱) خط مماس قائم وجود دارد و فقط در نقطه (۳) خط مماس نداریم زیرا در این نقطه یک گوشه خواهیم داشت.



۹۵۱- گزینه ۱

همان طور که می دانیم $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = f'(-2)$ است، بنابراین با کمک گرفتن از رابطه داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4} = 8 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x - 2} = 8 \Rightarrow f'(-2) \times \frac{-1}{4} = 8$$

$$\Rightarrow f'(-2) = -32$$

حال مشتق تابع $y = f(x^3 + 6)$ را در نقطه $x = -2$ محاسبه می‌کنیم:

$$y'(x) = (3x^2)f'(x^3 + 6) \Rightarrow y'(-2) = 12f'(-2) = 12 \times (-32) = -384$$

۹۵۲- گزینه ۳

اگر قطار با سرعت ثابت V کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

$$C = 800000t + (320V^2)t$$

هزینه t ساعت حرکت

$$C = 800000\left(\frac{x}{V}\right) + (320V^2)\left(\frac{x}{V}\right)$$

هزینه x کیلومتر حرکت

$$C(v) = \frac{800000}{V} + 320V$$

هزینه 1 کیلومتر حرکت

حال $C'(v)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$C'(v) = \frac{-800000}{V^2} + 320$$

برای یافتن کم‌ترین مقدار $C(v)$ ابتدا نقطه بحرانی این تابع را می‌یابیم:

$$C'(v) = 0 \Rightarrow V^2 = \frac{800000}{320} = 2500 \Rightarrow V = 50$$

بنابراین می‌توان گفت کم‌ترین تعداد هزینه در سرعت $V = 50$ رخ می‌دهد.

۹۵۳- گزینه ۲

از آن جایی که ضابطه $x^3 - 4x$: $x \geq 1$ در نقطه $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ دارای نقطه بحرانی است، برای آن که تابع $f(x) =$

$$\begin{cases} x^3 - 4x & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$$

فقط یک نقطه بحرانی داشته باشد، باید در نقطه $x = 1$ تابع پیوسته و مشتقی مخالف

صفر داشته باشد تا تعداد نقاط بحرانی بیشتر نشود.

$$x = 1 \text{ در پیوستگی در } \Rightarrow a + b + 1 = -3 \Rightarrow a + b = -4$$

$$x = 1 \text{ در مشتق راست و چپ } \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = (-1) \\ f'_-(1) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3, b = -1$$

بنابراین $2a + b$ برابر با -7 است.

۹۵۴- گزینه ۲

برای یافتن اکسترمم‌های نسبی تابع $y = (x - 1)\sqrt{x + 2}$ ابتدا مشتق تابع را محاسبه و سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

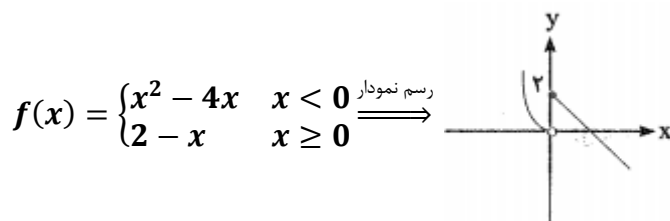
$$y'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x+2}} = \frac{2(x+2) + x-1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3x+3}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow$$

x	-2	-1	
$y'(x)$	-	-	+
$y(x)$	↘	↘	↗

بنابراین این تابع تنها در یک نقطه $x = -1$ مینیمم نسبی دارد.

۹۵۵- گزینه ۳

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



همان‌طور از که نمودار تابع مشخص است تابع نه صعودی و نه نزولی است.

۹۵۶- گزینه ۳



سطح مقطع حاصل یک مثلث متساوی‌الساقین به طول ساق ۲ و زاویه بین ۶۰° است. بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

۹۵۷- گزینه ۲

در دایره‌ای به مرکز (α, β) و به شعاع R که هر دو محور مختصات مماس است. خواهیم داشت:

$$|\alpha| = |\beta| = R$$

و از آن جایی که بنا بر فرض مسئله این دایره از نقطه‌ای در ناحیه چهارم عبور می‌کند، مرکز آن نیز در ناحیه چهارم است و می‌توان نوشت:

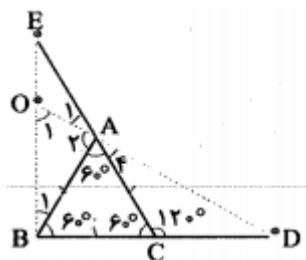
$$\alpha = -\beta = R$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$ می‌باشد، حال چون قرار است دایره از نقطه $(1, -2)$ عبور کند، این نقطه باید در معادله آن صدق کند که خواهیم داشت:

$$(1 - R)^2 + (R - 2)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases}$$

۹۵۸- گزینه ۲

بنابر شکل داده شده:



$$\triangle ACD \cong \triangle AED \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_4, \hat{D} = \hat{E}$$

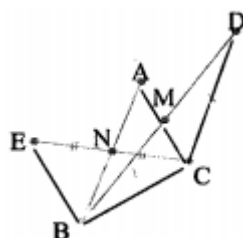
از طرفی در مثلث ODB رابطه مجموع زوایای داخلی را می نویسیم که داریم:

$$\hat{O}_1 + \hat{D} + 60^\circ + \hat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{D} + 60^\circ + \hat{A}_4 = 180^\circ$$

همان طور که می دانیم در مثلث ACD , $\hat{D} + \hat{A}_4 = 60^\circ$ است. بنابراین: $\hat{O}_1 = 60^\circ$

۹۵۹- گزینه ۳

با کمک اطلاعات مسئله شکل زیر را رسم می کنیم:



بنابر اطلاعات مسئله BM برابر MD می باشد، در نتیجه پاره خط CM میانه مثلث BCD است و بنابراین $S_{BCD} = 2S_{BMC}$

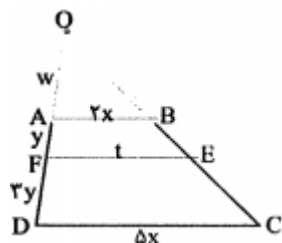
$$(I) 2S_{BMC}$$

با استدلالی مشابه استدلال فوق: $S_{EBC} = 2S_{BNC}$ (II)، از طرفی می دانیم دو مثلث BMC و BNC دو مثلث

هم مساحت هستند. یعنی:

$$S_{BNC} = S_{BMC} \xrightarrow{\text{طرفین را در 2 ضرب می کنیم.}} 2S_{BNC} = 2S_{BMC} \xrightarrow{(I),(II)} S_{BCD} = S_{EBC}$$

۹۶۰- گزینه ۱



با توجه به تالس در مثلث OEF داریم:

$$1) \frac{\frac{w}{OA+AE}}{\frac{w}{y}} = \frac{\frac{2x}{AB}}{\frac{t}{t}}$$

و با توجه به تالس در مثلث ODC داریم:

$$۲) \frac{\overbrace{OA}^w + \overbrace{AF}^y}{\underbrace{OA}_{w} + \underbrace{AF}_{y} + \underbrace{FD}_{3y}} = \frac{\overbrace{EF}^t}{\underbrace{DC}_{5x}}$$

از رابطه اول $\frac{x}{t} = \frac{w}{2w+2y}$ و از رابطه دوم $\frac{t}{x} = \frac{5w+5y}{w+4y}$ که با برابر قرار دادن $\frac{x}{t}$ از دو رابطه داریم:

$$\frac{w+4y}{5w+5y} = \frac{w}{2w+2y} \Rightarrow w = \frac{8}{3}y \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{x}{t} = \frac{4}{11}$$

از طرفی خواسته مسئله $\frac{EF}{CD}$ است که داریم:

$$\frac{EF}{CD} = \frac{t}{5x} = \frac{1}{5} \times \frac{11}{4} = \frac{11}{20}$$

۹۶۱- گزینه ۱

۹۶۲- گزینه ۳

۹۶۳- گزینه ۲

۹۶۴- گزینه ۲

۹۶۵- گزینه ۳

۹۶۶- گزینه ۲

۹۶۷- گزینه ۴

۹۶۸- گزینه ۴

۹۶۹- گزینه ۱

۹۷۰- گزینه ۱

۹۷۱- گزینه ۱

۹۷۲- گزینه ۱

۹۷۳- گزینه ۱

۹۷۴- گزینه ۲

۹۷۵- گزینه ۱

۹۷۶- گزینه ۴

۹۷۷- گزینه ۳

۹۷۸- گزینۀ ۱

۹۷۹- گزینۀ ۲

۹۸۰- گزینۀ ۴

۹۸۱- گزینۀ ۲

۹۸۲- گزینۀ ۳

۹۸۳- گزینۀ ۲

۹۸۴- گزینۀ ۲

۹۸۵- گزینۀ ۳

۹۸۶- گزینۀ ۳

۹۸۷- گزینۀ ۳

۹۸۸- گزینۀ ۲

۹۸۹- گزینۀ ۳

۹۹۰- گزینۀ ۱

۹۹۱- گزینۀ ۱

۹۹۲- گزینۀ ۲

۹۹۳- گزینۀ ۲

۹۹۴- گزینۀ ۲

۹۹۵- گزینۀ ۳

۹۹۶- گزینۀ ۲

۹۹۷- گزینۀ ۲

۹۹۸- گزینۀ ۳

۹۹۹- گزینۀ ۲

۱۰۰۰- گزینۀ ۳

۱۰۰۱- گزینۀ ۳

۱۰۰۲- گزینۀ ۲

۱۰۰۳- گزینۀ ۲

۱۰۰۴- گزینۀ ۲

۱۰۰۵- گزینۀ ۲

۱۰۰۶- گزینۀ ۲

۱۰۰۷- گزینۀ ۲

۱۰۰۸- گزینۀ ۳

۱۰۰۹- گزینۀ ۱

۱۰۱۰- گزینۀ ۱

۱۰۱۱- گزینۀ ۱

۱۰۱۲- گزینۀ ۳

۱۰۱۳- گزینۀ ۴

۱۰۱۴- گزینۀ ۳

۱۰۱۵- گزینۀ ۱

۱۰۱۶- گزینۀ ۲

۱۰۱۷- گزینۀ ۱

۱۰۱۸- گزینۀ ۳

۱۰۱۹- گزینۀ ۲

۱۰۲۰- گزینۀ ۲

۱۰۲۱- گزینۀ ۳

۱۰۲۲- گزینۀ ۴

۱۰۲۳- گزینۀ ۲

۱۰۲۴- گزینۀ ۲

۱۰۲۵- گزینۀ ۲

۱۰۲۶- گزینہ ۳

۱۰۲۷- گزینہ ۲

۱۰۲۸- گزینہ ۴

۱۰۲۹- گزینہ ۳

۱۰۳۰- گزینہ ۱

۱۰۳۱- گزینہ ۳

۱۰۳۲- گزینہ ۳

۱۰۳۳- گزینہ ۴

۱۰۳۴- گزینہ ۲

۱۰۳۵- گزینہ ۱

۱۰۳۶- گزینہ ۱

۱۰۳۷- گزینہ ۳

۱۰۳۸- گزینہ ۲

۱۰۳۹- گزینہ ۱

۱۰۴۰- گزینہ ۱

۱۰۴۱- گزینہ ۱

۱۰۴۲- گزینہ ۴

۱۰۴۳- گزینہ ۳

۱۰۴۴- گزینہ ۱

۱۰۴۵- گزینہ ۲

۱۰۴۶- گزینہ ۳

۱۰۴۷- گزینہ ۲

۱۰۴۸- گزینہ ۳

۱۰۴۹- گزینہ ۲

۱۰۵۰- گزینۀ ۴

۱۰۵۱- گزینۀ ۳

۱۰۵۲- گزینۀ ۲

۱۰۵۳- گزینۀ ۱

۱۰۵۴- گزینۀ ۳

۱۰۵۵- گزینۀ ۲

۱۰۵۶- گزینۀ ۲

۱۰۵۷- گزینۀ ۲

۱۰۵۸- گزینۀ ۴

۱۰۵۹- گزینۀ ۴

۱۰۶۰- گزینۀ ۳

۱۰۶۱- گزینۀ ۲

۱۰۶۲- گزینۀ ۲

۱۰۶۳- گزینۀ ۴

۱۰۶۴- گزینۀ ۳

۱۰۶۵- گزینۀ ۱

۱۰۶۶- گزینۀ ۴

۱۰۶۷- گزینۀ ۲

۱۰۶۸- گزینۀ ۳

۱۰۶۹- گزینۀ ۴

۱۰۷۰- گزینۀ ۳

۱۰۷۱- گزینۀ ۲

۱۰۷۲- گزینۀ ۱

۱۰۷۳- گزینۀ ۲

۱۰۷۴- گزینۀ ۱

۱۰۷۵- گزینۀ ۳

۱۰۷۶- گزینۀ ۲

۱۰۷۷- گزینۀ ۳

۱۰۷۸- گزینۀ ۳

۱۰۷۹- گزینۀ ۳

۱۰۸۰- گزینۀ ۴

۱۰۸۱- گزینۀ ۳

۱۰۸۲- گزینۀ ۱

۱۰۸۳- گزینۀ ۴

۱۰۸۴- گزینۀ ۱

۱۰۸۵- گزینۀ ۲

۱۰۸۶- گزینۀ ۴

۱۰۸۷- گزینۀ ۳

۱۰۸۸- گزینۀ ۴

۱۰۸۹- گزینۀ ۱

۱۰۹۰- گزینۀ ۳

۱۰۹۱- گزینۀ ۳

۱۰۹۲- گزینۀ ۱

۱۰۹۳- گزینۀ ۴

۱۰۹۴- گزینۀ ۲

۱۰۹۵- گزینۀ ۴

۱۰۹۶- گزینۀ ۳

۱۰۹۷- گزینۀ ۴

۱۰۹۸- گزینۀ ۴

۱۰۹۹- گزینۀ ۲

۱۱۰۰- گزینۀ ۱

۱۱۰۱- گزینۀ ۲

۱۱۰۲- گزینۀ ۳

۱۱۰۳- گزینۀ ۱

۱۱۰۴- گزینۀ ۳

۱۱۰۵- گزینۀ ۲

۱۱۰۶- گزینۀ ۴

۱۱۰۷- گزینۀ ۴

۱۱۰۸- گزینۀ ۳

۱۱۰۹- گزینۀ ۱

۱۱۱۰- گزینۀ ۲

۱۱۱۱- گزینۀ ۳

۱۱۱۲- گزینۀ ۲

۱۱۱۳- گزینۀ ۲

۱۱۱۴- گزینۀ ۳

۱۱۱۵- گزینۀ ۳

۱۱۱۶- گزینۀ ۴

۱۱۱۷- گزینۀ ۲

۱۱۱۸- گزینۀ ۳

۱۱۱۹- گزینۀ ۳

۱۱۲۰- گزینۀ ۲

۱۱۲۱- گزینۀ ۳

۱۱۲۲- گزینۀ ۱

۱۱۲۳- گزینۀ ۱

۱۱۲۴- گزینۀ ۴

۱۱۲۵- گزینۀ ۴

۱۱۲۶- گزینۀ ۲

۱۱۲۷- گزینۀ ۳

۱۱۲۸- گزینۀ ۴

۱۱۲۹- گزینۀ ۱

۱۱۳۰- گزینۀ ۲

۱۱۳۱- گزینۀ ۳

۱۱۳۲- گزینۀ ۲

۱۱۳۳- گزینۀ ۴

۱۱۳۴- گزینۀ ۲

۱۱۳۵- گزینۀ ۳

۱۱۳۶- گزینۀ ۴

۱۱۳۷- گزینۀ ۱

۱۱۳۸- گزینۀ ۳

۱۱۳۹- گزینۀ ۳

۱۱۴۰- گزینۀ ۲

۱۱۴۱- گزینۀ ۳

۱۱۴۲- گزینۀ ۳

۱۱۴۳- گزینۀ ۴

۱۱۴۴- گزینۀ ۴

۱۱۴۵- گزینۀ ۱

۱۱۴۶- گزینہ ۲

۱۱۴۷- گزینہ ۴

۱۱۴۸- گزینہ ۲

۱۱۴۹- گزینہ ۳

۱۱۵۰- گزینہ ۱

۱۱۵۱- گزینہ ۲

۱۱۵۲- گزینہ ۲

۱۱۵۳- گزینہ ۴

۱۱۵۴- گزینہ ۲

۱۱۵۵- گزینہ ۲

۱۱۵۶- گزینہ ۳

۱۱۵۷- گزینہ ۲

۱۱۵۸- گزینہ ۳

۱۱۵۹- گزینہ ۲

۱۱۶۰- گزینہ ۲

۱۱۶۱- گزینہ ۱

۱۱۶۲- گزینہ ۳

۱۱۶۳- گزینہ ۳

۱۱۶۴- گزینہ ۳

۱۱۶۵- گزینہ ۲

۱۱۶۶- گزینہ ۳

۱۱۶۷- گزینہ ۲

۱۱۶۸- گزینہ ۲

۱۱۶۹- گزینہ ۱

۱۱۷۰- گزینۀ ۳

۱۱۷۱- گزینۀ ۳

۱۱۷۲- گزینۀ ۲

۱۱۷۳- گزینۀ ۳

۱۱۷۴- گزینۀ ۲

۱۱۷۵- گزینۀ ۱

۱۱۷۶- گزینۀ ۳

۱۱۷۷- گزینۀ ۲

۱۱۷۸- گزینۀ ۲

۱۱۷۹- گزینۀ ۲

۱۱۸۰- گزینۀ ۳

۱۱۸۱- گزینۀ ۳

۱۱۸۲- گزینۀ ۱

۱۱۸۳- گزینۀ ۱

۱۱۸۴- گزینۀ ۳

۱۱۸۵- گزینۀ ۱

۱۱۸۶- گزینۀ ۳

۱۱۸۷- گزینۀ ۱

۱۱۸۸- گزینۀ ۴

۱۱۸۹- گزینۀ ۲

۱۱۹۰- گزینۀ ۴

۱۱۹۱- گزینۀ ۱

۱۱۹۲- گزینۀ ۴

۱۱۹۳- گزینۀ ۱

۱۱۹۴- گزینہ ۱

۱۱۹۵- گزینہ ۲

۱۱۹۶- گزینہ ۴

۱۱۹۷- گزینہ ۱

۱۱۹۸- گزینہ ۴

۱۱۹۹- گزینہ ۲

۱۲۰۰- گزینہ ۱

۱۲۰۱- گزینہ ۱

۱۲۰۲- گزینہ ۱

۱۲۰۳- گزینہ ۲

۱۲۰۴- گزینہ ۴

۱۲۰۵- گزینہ ۱

۱۲۰۶- گزینہ ۳

۱۲۰۷- گزینہ ۱

۱۲۰۸- گزینہ ۲

۱۲۰۹- گزینہ ۱

۱۲۱۰- گزینہ ۲

۱۲۱۱- گزینہ ۱

۱۲۱۲- گزینہ ۲

۱۲۱۳- گزینہ ۱

۱۲۱۴- گزینہ ۱

۱۲۱۵- گزینہ ۱

۱۲۱۶- گزینہ ۲

۱۲۱۷- گزینہ ۴

۱۲۱۸- گزینہ ۲

۱۲۱۹- گزینہ ۲

۱۲۲۰- گزینہ ۲

۱۲۲۱- گزینہ ۴

۱۲۲۲- گزینہ ۲

۱۲۲۳- گزینہ ۴

۱۲۲۴- گزینہ ۲

۱۲۲۵- گزینہ ۴

۱۲۲۶- گزینہ ۴

۱۲۲۷- گزینہ ۱

۱۲۲۸- گزینہ ۴

۱۲۲۹- گزینہ ۱

۱۲۳۰- گزینہ ۴

۱۲۳۱- گزینہ ۳

۱۲۳۲- گزینہ ۴

۱۲۳۳- گزینہ ۴

۱۲۳۴- گزینہ ۲

۱۲۳۵- گزینہ ۴

۱۲۳۶- گزینہ ۳

۱۲۳۷- گزینہ ۴

۱۲۳۸- گزینہ ۳

۱۲۳۹- گزینہ ۴

۱۲۴۰- گزینہ ۴

۱۲۴۱- گزینہ ۳

۱۲۴۲- گزینۀ ۲

۱۲۴۳- گزینۀ ۱

۱۲۴۴- گزینۀ ۱

۱۲۴۵- گزینۀ ۲

۱۲۴۶- گزینۀ ۱

۱۲۴۷- گزینۀ ۳

۱۲۴۸- گزینۀ ۲

۱۲۴۹- گزینۀ ۱

۱۲۵۰- گزینۀ ۳

۱۲۵۱- گزینۀ ۳

۱۲۵۲- گزینۀ ۱

۱۲۵۳- گزینۀ ۲

۱۲۵۴- گزینۀ ۳

۱۲۵۵- گزینۀ ۴

۱۲۵۶- گزینۀ ۳

۱۲۵۷- گزینۀ ۳

۱۲۵۸- گزینۀ ۳

۱۲۵۹- گزینۀ ۲

۱۲۶۰- گزینۀ ۳

۱۲۶۱- گزینۀ ۱

۱۲۶۲- گزینۀ ۲

۱۲۶۳- گزینۀ ۴

۱۲۶۴- گزینۀ ۳

۱۲۶۵- گزینۀ ۲

۱۲۶۶- گزینۀ ۲

۱۲۶۷- گزینۀ ۱

۱۲۶۸- گزینۀ ۲

۱۲۶۹- گزینۀ ۱

۱۲۷۰- گزینۀ ۲

۱۲۷۱- گزینۀ ۳

۱۲۷۲- گزینۀ ۲

۱۲۷۳- گزینۀ ۱

۱۲۷۴- گزینۀ ۳

۱۲۷۵- گزینۀ ۱

۱۲۷۶- گزینۀ ۲

۱۲۷۷- گزینۀ ۳

۱۲۷۸- گزینۀ ۳

۱۲۷۹- گزینۀ ۱

۱۲۸۰- گزینۀ ۳

۱۲۸۱- گزینۀ ۳

۱۲۸۲- گزینۀ ۴

۱۲۸۳- گزینۀ ۳

۱۲۸۴- گزینۀ ۲

۱۲۸۵- گزینۀ ۳

۱۲۸۶- گزینۀ ۱

۱۲۸۷- گزینۀ ۴

۱۲۸۸- گزینۀ ۲

۱۲۸۹- گزینۀ ۳

۱۲۹۰- گزینۀ ۲

۱۲۹۱- گزینۀ ۲

۱۲۹۲- گزینۀ ۱

۱۲۹۳- گزینۀ ۴

۱۲۹۴- گزینۀ ۳

۱۲۹۵- گزینۀ ۲

۱۲۹۶- گزینۀ ۱

۱۲۹۷- گزینۀ ۲

۱۲۹۸- گزینۀ ۳

۱۲۹۹- گزینۀ ۲

۱۳۰۰- گزینۀ ۳

۱۳۰۱- گزینۀ ۳

۱۳۰۲- گزینۀ ۲

۱۳۰۳- گزینۀ ۳

۱۳۰۴- گزینۀ ۲

۱۳۰۵- گزینۀ ۲

۱۳۰۶- گزینۀ ۴

۱۳۰۷- گزینۀ ۴

۱۳۰۸- گزینۀ ۱

۱۳۰۹- گزینۀ ۱

۱۳۱۰- گزینۀ ۱

۱۳۱۱- گزینۀ ۳

۱۳۱۲- گزینۀ ۱

۱۳۱۳- گزینۀ ۲

۱۳۱۴- گزینۀ ۳

۱۳۱۵- گزینۀ ۳

۱۳۱۶- گزینۀ ۱

۱۳۱۷- گزینۀ ۴

۱۳۱۸- گزینۀ ۲

۱۳۱۹- گزینۀ ۳

۱۳۲۰- گزینۀ ۲

۱۳۲۱- گزینۀ ۲

۱۳۲۲- گزینۀ ۳

۱۳۲۳- گزینۀ ۲

۱۳۲۴- گزینۀ ۱

۱۳۲۵- گزینۀ ۲

۱۳۲۶- گزینۀ ۳

۱۳۲۷- گزینۀ ۴

۱۳۲۸- گزینۀ ۲

۱۳۲۹- گزینۀ ۱

۱۳۳۰- گزینۀ ۱

۱۳۳۱- گزینۀ ۳

۱۳۳۲- گزینۀ ۲

۱۳۳۳- گزینۀ ۲

۱۳۳۴- گزینۀ ۴

۱۳۳۵- گزینۀ ۱

۱۳۳۶- گزینۀ ۲

۱۳۳۷- گزینۀ ۳

۱۳۳۸-گزینۀ ۴

۱۳۳۹-گزینۀ ۱

۱۳۴۰-گزینۀ ۲

۱۳۴۱-گزینۀ ۴

۱۳۴۲-گزینۀ ۲

۱۳۴۳-گزینۀ ۲

۱۳۴۴-گزینۀ ۳

۱۳۴۵-گزینۀ ۱

۱۳۴۶-گزینۀ ۱

۱۳۴۷-گزینۀ ۳

۱۳۴۸-گزینۀ ۳

۱۳۴۹-گزینۀ ۲

۱۳۵۰-گزینۀ ۲

۱۳۵۱-گزینۀ ۴

۱۳۵۲-گزینۀ ۳

۱۳۵۳-گزینۀ ۲

۱۳۵۴-گزینۀ ۴

۱۳۵۵-گزینۀ ۴

۱۳۵۶-گزینۀ ۴

۱۳۵۷-گزینۀ ۱

۱۳۵۸-گزینۀ ۲

۱۳۵۹-گزینۀ ۳

۱۳۶۰-گزینۀ ۱

۱۳۶۱-گزینۀ ۱

۱۳۶۲-گزینۀ ۳

۱۳۶۳-گزینۀ ۲

۱۳۶۴-گزینۀ ۳

۱۳۶۵-گزینۀ ۲

۱۳۶۶-گزینۀ ۳

۱۳۶۷-گزینۀ ۲

۱۳۶۸-گزینۀ ۱

۱۳۶۹-گزینۀ ۳

۱۳۷۰-گزینۀ ۲

۱۳۷۱-گزینۀ ۳

۱۳۷۲-گزینۀ ۴

۱۳۷۳-گزینۀ ۲

۱۳۷۴-گزینۀ ۱

۱۳۷۵-گزینۀ ۴

۱۳۷۶-گزینۀ ۴

۱۳۷۷-گزینۀ ۳

۱۳۷۸-گزینۀ ۲

۱۳۷۹-گزینۀ ۱

۱۳۸۰-گزینۀ ۳

۱۳۸۱-گزینۀ ۳

۱۳۸۲-گزینۀ ۳

۱۳۸۳-گزینۀ ۴

۱۳۸۴-گزینۀ ۱

۱۳۸۵-گزینۀ ۳

۱-۱۳۸۶ گزینۀ ۱

۲-۱۳۸۷ گزینۀ ۲

۴-۱۳۸۸ گزینۀ ۴

۳-۱۳۸۹ گزینۀ ۳

۴-۱۳۹۰ گزینۀ ۴

۱-۱۳۹۱ گزینۀ ۱

۴-۱۳۹۲ گزینۀ ۴

۳-۱۳۹۳ گزینۀ ۳

۴-۱۳۹۴ گزینۀ ۴

۲-۱۳۹۵ گزینۀ ۲

۴-۱۳۹۶ گزینۀ ۴

۲-۱۳۹۷ گزینۀ ۲

۴-۱۳۹۸ گزینۀ ۴

۲-۱۳۹۹ گزینۀ ۲

۳-۱۴۰۰ گزینۀ ۳

۳-۱۴۰۱ گزینۀ ۳

۳-۱۴۰۲ گزینۀ ۳

۱-۱۴۰۳ گزینۀ ۱

۱-۱۴۰۴ گزینۀ ۱

۲-۱۴۰۵ گزینۀ ۲

۲-۱۴۰۶ گزینۀ ۲

۴-۱۴۰۷ گزینۀ ۴

۱-۱۴۰۸ گزینۀ ۱

۱-۱۴۰۹ گزینۀ ۱

۱۴۱۰- گزینۀ ۱

۱۴۱۱- گزینۀ ۲

۱۴۱۲- گزینۀ ۱

۱۴۱۳- گزینۀ ۲

۱۴۱۴- گزینۀ ۳

۱۴۱۵- گزینۀ ۲

۱۴۱۶- گزینۀ ۱

۱۴۱۷- گزینۀ ۴

۱۴۱۸- گزینۀ ۴

۱۴۱۹- گزینۀ ۱

۱۴۲۰- گزینۀ ۲

۱۴۲۱- گزینۀ ۴

۱۴۲۲- گزینۀ ۲

۱۴۲۳- گزینۀ ۳

۱۴۲۴- گزینۀ ۳

۱۴۲۵- گزینۀ ۴

۱۴۲۶- گزینۀ ۳

۱۴۲۷- گزینۀ ۱

۱۴۲۸- گزینۀ ۳

۱۴۲۹- گزینۀ ۱

۱۴۳۰- گزینۀ ۲

۱۴۳۱- گزینۀ ۲

۱۴۳۲- گزینۀ ۲

۱۴۳۳- گزینۀ ۳

۱۴۳۴-گزینۀ ۱

۱۴۳۵-گزینۀ ۳

۱۴۳۶-گزینۀ ۲

۱۴۳۷-گزینۀ ۴

۱۴۳۸-گزینۀ ۲

۱۴۳۹-گزینۀ ۳

۱۴۴۰-گزینۀ ۲

۱۴۴۱-گزینۀ ۳

۱۴۴۲-گزینۀ ۴

۱۴۴۳-گزینۀ ۱

۱۴۴۴-گزینۀ ۲

۱۴۴۵-گزینۀ ۲

۱۴۴۶-گزینۀ ۲

۱۴۴۷-گزینۀ ۴

۱۴۴۸-گزینۀ ۳

۱۴۴۹-گزینۀ ۳

۱۴۵۰-گزینۀ ۲

۱۴۵۱-گزینۀ ۱

۱۴۵۲-گزینۀ ۳

۱۴۵۳-گزینۀ ۲

۱۴۵۴-گزینۀ ۱

۱۴۵۵-گزینۀ ۲

۱۴۵۶-گزینۀ ۱

۱۴۵۷-گزینۀ ۱

۱۴۵۸-گزینہ ۴

۱۴۵۹-گزینہ ۴

۱۴۶۰-گزینہ ۱

۱۴۶۱-گزینہ ۴

۱۴۶۲-گزینہ ۲

۱۴۶۳-گزینہ ۲

۱۴۶۴-گزینہ ۳

۱۴۶۵-گزینہ ۴

۱۴۶۶-گزینہ ۳

۱۴۶۷-گزینہ ۳

۱۴۶۸-گزینہ ۳

۱۴۶۹-گزینہ ۲

۱۴۷۰-گزینہ ۳

۱۴۷۱-گزینہ ۴

۱۴۷۲-گزینہ ۲

۱۴۷۳-گزینہ ۱

۱۴۷۴-گزینہ ۲

۱۴۷۵-گزینہ ۲

۱۴۷۶-گزینہ ۲

۱۴۷۷-گزینہ ۴

۱۴۷۸-گزینہ ۲

۱۴۷۹-گزینہ ۲

۱۴۸۰-گزینہ ۴

۱۴۸۱-گزینہ ۳

۱۴۸۲-گزینہ ۲

۱۴۸۳-گزینہ ۲

۱۴۸۴-گزینہ ۴

۱۴۸۵-گزینہ ۲

۱۴۸۶-گزینہ ۳

۱۴۸۷-گزینہ ۲

۱۴۸۸-گزینہ ۴

۱۴۸۹-گزینہ ۳

۱۴۹۰-گزینہ ۲

۱۴۹۱-گزینہ ۴

۱۴۹۲-گزینہ ۳

۱۴۹۳-گزینہ ۳

۱۴۹۴-گزینہ ۲

۱۴۹۵-گزینہ ۱

۱۴۹۶-گزینہ ۲

۱۴۹۷-گزینہ ۳

۱۴۹۸-گزینہ ۴

۱۴۹۹-گزینہ ۴

۱۵۰۰-گزینہ ۳

۱۵۰۱-گزینہ ۳

۱۵۰۲-گزینہ ۲

۱۵۰۳-گزینہ ۱

۱۵۰۴-گزینہ ۳

۱۵۰۵-گزینہ ۴

۱۵۰۶- گزینہ ۲

۱۵۰۷- گزینہ ۴

۱۵۰۸- گزینہ ۳

۱۵۰۹- گزینہ ۳

۱۵۱۰- گزینہ ۳

۱۵۱۱- گزینہ ۱

۱۵۱۲- گزینہ ۳

۱۵۱۳- گزینہ ۳

۱۵۱۴- گزینہ ۲

۱۵۱۵- گزینہ ۴

۱۵۱۶- گزینہ ۴

۱۵۱۷- گزینہ ۲

۱۵۱۸- گزینہ ۳

۱۵۱۹- گزینہ ۱

۱۵۲۰- گزینہ ۳

۱۵۲۱- گزینہ ۲

۱۵۲۲- گزینہ ۲

۱۵۲۳- گزینہ ۳

۱۵۲۴- گزینہ ۳

۱۵۲۵- گزینہ ۱

۱۵۲۶- گزینہ ۲

۱۵۲۷- گزینہ ۲

۱۵۲۸- گزینہ ۴

۱۵۲۹- گزینہ ۳

۱۵۳۰-گزینہ ۲

۱۵۳۱-گزینہ ۴

۱۵۳۲-گزینہ ۳

۱۵۳۳-گزینہ ۳

۱۵۳۴-گزینہ ۳

۱۵۳۵-گزینہ ۲

۱۵۳۶-گزینہ ۲

۱۵۳۷-گزینہ ۴

۱۵۳۸-گزینہ ۲

۱۵۳۹-گزینہ ۳

۱۵۴۰-گزینہ ۲

۱۵۴۱-گزینہ ۴

۱۵۴۲-گزینہ ۳

۱۵۴۳-گزینہ ۳

۱۵۴۴-گزینہ ۳

۱۵۴۵-گزینہ ۳

۱۵۴۶-گزینہ ۳

۱۵۴۷-گزینہ ۳

۱۵۴۸-گزینہ ۱

۱۵۴۹-گزینہ ۱

۱۵۵۰-گزینہ ۴

۱۵۵۱-گزینہ ۲

۱۵۵۲-گزینہ ۱

۱۵۵۳-گزینہ ۳

۱۵۵۴-گزینۀ ۱

۱۵۵۵-گزینۀ ۴

۱۵۵۶-گزینۀ ۱

۱۵۵۷-گزینۀ ۲

۱۵۵۸-گزینۀ ۳

۱۵۵۹-گزینۀ ۲

۱۵۶۰-گزینۀ ۱