

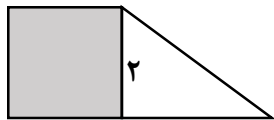
سؤال ۱۰۱: در شکل زیر مساحت مربع از $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت دوزنقه کدام است؟

۷ (۴)

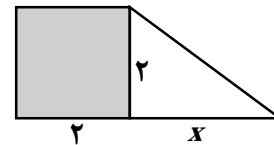
۶/۵ (۳)

۵/۵ (۲)

۵ (۱)



اگر طول ضلع مثلث را مطابق شکل، x بنامیم:



$$\text{مساحت مربع} = ۴$$

$$\text{مساحت مثلث قائم الزاویه} = \frac{1}{2}(2 \times x) = x$$

$$۴ = \frac{1}{3}x + ۳ \Rightarrow ۱ = \frac{x}{۳} \Rightarrow x = ۳, \quad \text{مساحت دوزنقه} = \frac{(۲ + ۲ + ۳)}{۲} \times ۲ = ۷$$

سؤال ۱۰۲: حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 2$ ، کدام است؟

-۱/۵ (۴)

-۳ (۳)

-۶/۵ (۲)

-۱۸ (۱)

طرفین معادله را در $k.m.$ مخرج‌ها یعنی $(x-2)(x+3)$ ضرب می‌کنیم:

$$x(x+3) - 3(x-2) = 2(x-2)(x+3) \Rightarrow x^2 + 3x - 3x + 6 = 2(x^2 + x - 6)$$

$$x^2 + 2x - 18 = 0$$

دلتای این معادله مثبت است پس دو ریشه دارد و از طرفی هر دو قابل قبول اند (مخرج را صفر نمیکنند!!!)

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{18}{1} = -18$$

سؤال ۱۰۳: نمودار یک تابع خطی از نقاط $(-2, a)$ ، $(-1, 3)$ و $(1, -4)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟

۷/۵ (۴)

۷ (۳)

۶/۵ (۲)

۶ (۱)

روش اول:

ابتدا شیب خطی که از نقاط $(1, -4)$ و $(-1, 3)$ و همچنین از نقاط $(-2, a)$ و $(-1, 3)$ می‌گذرد را محاسبه می‌کنیم. از طرفی چون شیب خط، ثابت است. پس این دو مقدار باید باهم برابر باشند:

$$\frac{-4-3}{1-(-1)} = \frac{a-3}{-2-(-1)} \Rightarrow -\frac{7}{2} = \frac{a-3}{-1} \Rightarrow 2a-6=7 \Rightarrow 2a=13 \Rightarrow a=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}$$

روش دوم: ابتدا معادله خطی که از نقاط $(-1, 3)$ و $(1, -4)$ میگذرد را بدست آورده :

$$y = mx + h = -\frac{7}{2}x + h \Rightarrow (-1, 3): 3 = \frac{7}{2} + h \Rightarrow h = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$$

حال نقطه $(-2, a)$ را در این معادله خط صدق می دهیم:

$$a = -\frac{7}{2}(-2) - \frac{1}{2} \Rightarrow a = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

سؤال ۱۰۴: اگر $f = \{(1, x - 2y), (2, 3), (9, 5), (1, -7), (9, x + y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^2 + y^2$ چند برابر $-x - 4y$ است؟

۲ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

زوج مرتبه هایی که مولفه اول یکسانی دارند، می بایست مؤلفه دوم آنها نیز برابر باشد:

$$\begin{cases} x - 2y = -7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4, x = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{-x - 4y} = \frac{17}{-17} = -1$$

سؤال ۱۰۵: اگر $f(x) = (|a| - |b|)x$ تابع همانی، $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت و $(f - g)(x) = x + 5$ باشند، چند

مقدار برای ac وجود دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

چون f یک تابع همانی است، باید ضریب x برابر ۱ باشد: $|a| - |b| = 1$

چون g تابعی ثابت است باید ضریب x صفر باشد: $b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow |b| = 1$

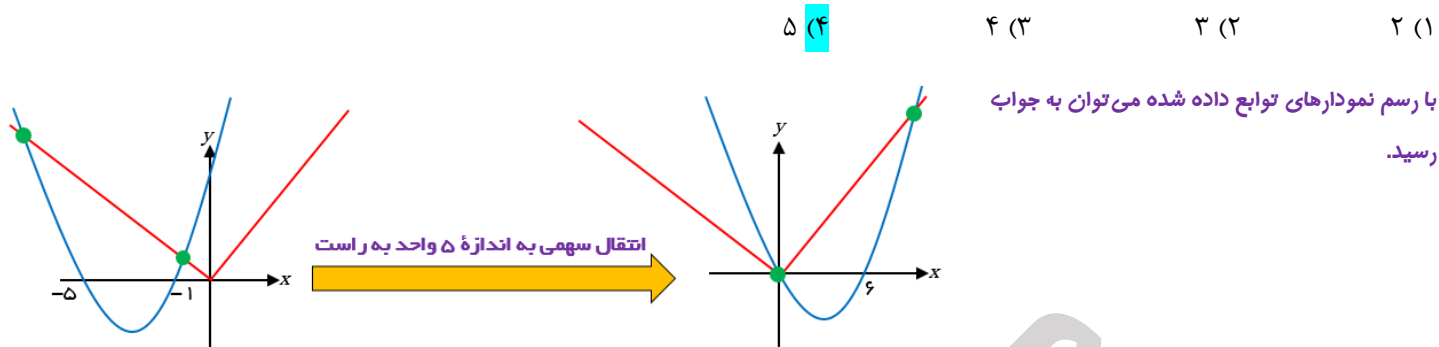
حال اگر در معادله اول مقدار را جایگذاری کنیم: $a^2 = 4$ یا $|a| = 2 \Rightarrow |a| - |b| = 1 \Rightarrow |a| - 1 = 1$

تا اینجا داریم: $f(x) = x$ و $g(x) = (a^2 + 1)c$ اکنون این ضابطه ها را در شرط زیر می دهیم:

$$(f - g)(x) = x + 5 \Rightarrow x - ((a^2 + 1)c) = x + 5 \Rightarrow -5c = 5 \Rightarrow c = -1$$

$$|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow ac = -2 \\ a = -2 \Rightarrow ac = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{دو مقدار}$$

سؤال ۱۰۶: نمودار $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y = |x|$ ، نامنفی باشد؟



سؤال ۱۰۷: اگر $f(x) = [1 - 3x]$ باشد، مقدار $f(-0.7) - f(-0.07)$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۶ (۲) ۱ (صفر)

$$\begin{cases} f(-0.7) = [1 - 3(-0.7)] = [1 + 2.1] = [3.1] = 3 \\ f(-0.07) = [1 - 3(-0.07)] = [1 + 0.21] = [1.21] = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{جواب} = 3 - 1 = 2$$

سؤال ۱۰۸: محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکسیم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

- ۱۱/۲۵ (۴) ۵۶/۲۵ (۳) ۲۰۹ (۲) ۲۲۵ (۱)

روش اول:

$$2(x + y) = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$$

$$S = xy = x(15 - x) = -x^2 + 15x \Rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{15}{2} \Rightarrow y_s = 15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$$

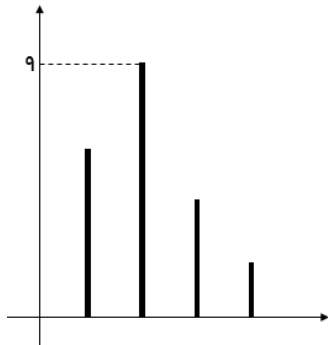
$$S_{max} = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = 56.25$$

روش دوم: اگر مجموع دو عبارت برابر مقداری ثابت باشد و از ما ماکزیم حاصل ضربشان خواسته شد، در آن صورت هر دو عبارت برابر با نصف آن عدد ثابت اند:

$$x + y = 15 \Rightarrow x = y = \frac{15}{2} \Rightarrow \text{Max}(xy) = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = 56.25$$

سؤال ۱۰۹: نمودار زیر، تعداد گل‌های زده یک فصل ۴ بازیکن A، B، C و D را نشان می‌دهد. میانگین گل زده این چهار بازیکن، کدام عدد زیر

می‌تواند باشد؟



- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

با توجه به نمودار داده‌شده، تعداد گل‌های زده بازیکنان متفاوت و مخالف صفر است. بنابراین می‌توان کمترین و بیشترین حالات ممکن را برای این بازیکنان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\text{کمترین تعداد گل: } ۱, ۲, ۳ \Rightarrow \frac{۱+۲+۳+۹}{۴} = \frac{۳}{۷۵} = \text{میانگین}$$

$$\text{بیشترین تعداد گل: } ۶, ۷, ۸, ۹ \Rightarrow \frac{۶+۷+۸+۹}{۴} = \frac{۷}{۵}$$

بنابراین میانگین تعداد گل‌ها عددی بین $\frac{۳}{۷۵}$ و $\frac{۷}{۵}$ است. که گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

سؤال ۱۱۰: اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری ۴۵ درجه باشد، داده‌ها برای چند متغیر گردآوری شده است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) ۳

$$\frac{۳۶۰}{۴۵} = ۸$$

سؤال ۱۱۱: گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow p$ در کدام حالت نادرست است؟

- (۱) $\sim p$ و $\sim q$ نادرست (۲) p و $\sim q$ درست (۳) $\sim p$ و $\sim q$ نادرست (۴) p و q درست

در یک گزاره شرطی، اگر تالی درست باشد آنگاه ارزش کلی گزاره نیز درست است و نیازی به چک کردن مقدم نیست. در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ تالی (p) درست است. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح می‌باشد.

سؤال ۱۱۲: اگر درآمد افراد یک جامعه ۴ برابر شود، مقادیر خط فقر با استفاده از میانگین (a) و خط فقر با استفاده از میانه (b) چه تغییری

می‌کنند؟

(۱) a و b ۲ برابر می‌شوند. (۲) a و b ۴ برابر می‌شوند.

(۳) a ، ۲ برابر و b ، ۴ برابر می‌شود. (۴) a ، ۴ برابر و b ، ۲ برابر می‌شود.

میانگین داده‌ها در ابتدا مساوی a می‌باشد، با ۴ برابر شدن درآمدها، میانگین نیز ۴ برابر می‌شود (یعنی $۴a$). از طرفی چون خط فقر نصف میانگین است، پس خط فقر برابر $۲a = \frac{۴a}{۲}$ می‌شود. به طریق مشابه، خط فقر بر حسب میانه برابر $۲b$ می‌شود.

تذکر: اگر منظور طراح از a خط فقر باشد، اونوقت جواب همیشه گزینه دو. (درآمدها در عددی ضرب شوند خط فقر نیز در آن عدد ضرب می‌شود)

سؤال ۱۱۳: یک شرکت تولیدی، هر واحد کالای خود را ۲۰۵ ریال می‌فروشد و $C(x) = x^2 + 2x + 600$ تابع هزینه x واحد از این نوع کالا بر حسب ریال است. اگر تولید این شرکت در یک روز به بیشترین مقدار نقطه سر به سر برسد، درآمد شرکت چند هزار ریال است؟

(۱) ۴۲/۲ (۲) ۴۱ (۳) ۲۶ (۴) ۱۱/۴

برای محاسبه نقطه نقطه (نقاط) سر به سر باید توابع هزینه و درآمد را با یکدیگر برابر قرار دهیم:

$$x^2 + 2x + 600 = 205x \Rightarrow x^2 - 203x + 600 = 0 \Rightarrow (x - 200)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 200 \text{ یا } x = 3$$

چون بیشترین مقدار نقطه سر به سر خواسته شده، پس $x = 200$ قابل قبول است.

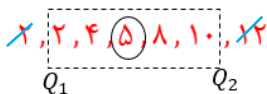
$$\text{تابع درآمد: } R(x) = 205x \Rightarrow R(200) = 205(200) = 41000$$

سؤال ۱۱۴: در داده‌های ۱۰، ۲، ۵، ۴، ۸، ۱۲، ۲ با حذف داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، دامنه تغییرات چند درصد کاهش می‌یابد؟

(۱) ۵۰ (۲) ۴۰ (۳) ۲۵ (۴) ۲۰

$$R_1 = 12 - 2 = 10 \quad \text{دامنه تغییرات در حالت اول:}$$

مرتب‌سازی داده‌ها و محاسبه چارک‌ها:



بنابراین با حذف داده‌های مورد نظر سؤال (یعنی ۲ و ۱۲)، دامنه تغییرات برابر است با:

$$R_p = 10 - 2 = 8$$

$$\text{علامت منفی بیانگر کاهش درصد می‌باشد.} \quad \text{درصد تغییرات} = \frac{8-10}{10} \times 100 = -20$$

سؤال ۱۱۵: تعداد مجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $\{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ که شامل عدد ۸ باشد، ولی شامل عدد ۴ نباشد، کدام است؟

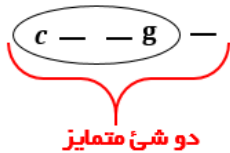
(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

عدد ۴ کنار می‌گذاریم و از طرفی تکلیف یکی از چهار عضو مشخص است (عدد ۸). حال باید ۳ عضو دیگر را از ۵ عدد باقیمانده (۰، ۱، ۲، ۴، ۶، ۹) انتخاب کرد:

$$\binom{5}{3} = 10$$

سؤال ۱۱۶: پنج بازیکن فوتسال تیم مدرسه‌ای، به‌طور تصادفی در یک ردیف کنار یکدیگر می‌ایستند. اگر دروازه‌بان و کاپیتان دو نفر متفاوت باشند، با کدام احتمال بین دروازه‌بان و کاپیتان دقیقاً دو نفر حضور دارند؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{15}$ (۴) $\frac{1}{20}$



دروازه‌بان، کاپیتان و دو نفری که قرار است بین‌شان قرار بگیرد را درون یک بسته قرار می‌دهیم. از طرفی این بسته به همراه نفر پنجم تشکیل دو شیء متمایز می‌دهند که به ۲! طریق جایگشت دارند.

جایگشت درون بسته: دروازه‌بان و کاپیتان به ۲! طریق با یکدیگر و دو نفری که بین‌شان قرار می‌گیرند به $3! \times 2!$ طریق.

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = 2! \times 2! \times 3! = 24$$

$$\text{تعداد کل حالات} = 5! = 120$$

$$\text{احتمال} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

سؤال ۱۱۷: جمله ۴۰۰ام دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{1+a_n} & n \text{ فرد} \end{cases}$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

با نوشتن چند جمله اول این دنباله (بصورت زیر) ، متوجه می‌شویم که مقدار جملات با شماره زوج برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشند.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ n = 1: \text{ فرد} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{2} \\ n = 2: \text{ زوج} \Rightarrow a_3 = 1 \\ n = 3: \text{ فرد} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{2} \\ \dots \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ زوج} \\ 1 & n \text{ فرد} \end{cases} \Rightarrow a_{400} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۱۱۸: اگر جمله اول و پنجم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، جمله دهم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

$$d = \frac{11 - 3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9(2) = 21$$

سؤال ۱۱۹: در یک دنباله هندسی، جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم برابر ۱۸- باشد، جمله پنجم چقدر از جمله هفتم بیشتر است؟

- ۸۹۱ (۱) ۹۷۲ (۲) ۱۰۵۶ (۳) ۱۲۹۶ (۴)

$$\frac{a_8}{a_4} = 81 \Rightarrow r^4 = 81 \Rightarrow r^2 = 9$$

$$\begin{cases} a_5 = a_3 r^2 = (-18)9 \\ a_7 = a_3 r^4 = (-18)81 \end{cases} \Rightarrow a_5 - a_7 = (-18)9 - (-18)81 = 9(18)(9-1) = 1296$$

سؤال ۱۲۰: حاصل عبارت $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72} + \sqrt{3}(\sqrt{96} - \sqrt{12}) - \sqrt{162}$ کدام است؟

- $\sqrt{3}$ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{18}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72} + \sqrt{3}(\sqrt{96} - \sqrt{12}) - \sqrt{162} &= \sqrt[3]{3 \times 72} + \sqrt{3}(\sqrt{6 \times 16} - \sqrt{3 \times 4}) - \sqrt{2 \times 81} = \\ \sqrt[3]{3^3 \times 2^3} + \sqrt{3}(4\sqrt{6} - 2\sqrt{3}) - 9\sqrt{2} &= 6 + 4\sqrt{3} \times \sqrt{6} - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 9\sqrt{2} = 6 + 12\sqrt{2} - 6 - 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{18} \end{aligned}$$

هرگز از گردش ایام دل آزرده مباش

بامدادیست پی هر شب تازی، آری...