فصل ۱

پاسخ درس ریاضی رشته تجربی کنکور ۱۴۰۱

«مدرس: صفی شاهی‌فرد»

۱.۱ پاسخ سوالات ریاضی رشته تجربی کنکور ۱۴۰۱ «صفی شاهی‌فرد»

۱) **تست:** حاصل عبارت $\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\sqrt{۱+\sqrt{۷}}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱   ۲) $\sqrt[۴]{۲}$ ۳) ۲   ۴) $۲\sqrt[۴]{۲}$

حل

$$\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\sqrt{۱+\sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}}\sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۷})^{۲}} = \sqrt[۴]{\frac{(۱+\sqrt{۷})^{۲}}{۴+\sqrt{۷}}}$$

$$= \sqrt[۴]{\frac{۸+۲\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}\times\frac{۴-\sqrt{۷}}{۴-\sqrt{۷}}} = \sqrt[۴]{\frac{۳۲-۱۴}{۱۶-۷}} = \sqrt[۴]{\frac{۱۸}{۲}} = \boxed{\sqrt[۴]{۲}}$$

۲) **تست:** اگر ۸ و ۵ به‌ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱۱٫۶   ۲) ۹٫۶   ۳) ۲٫۴   ۴) ۱٫۴

حل

$$\begin{cases} t_{۵}=۸ \Longrightarrow t_{۱}+۴d=۸ \\ t_{۱۰}=۵ \Longrightarrow t_{۱}+۹d=۵ \end{cases} \Longrightarrow -۵d=۳ \Longrightarrow d=-\frac{۳}{۵}$$

$$\boxed{t_{۱۶}=t_{۱۰}+۶d=۵+۶(-\tfrac{۳}{۵})=\frac{۷}{۵}=۱٫۴}$$

۳) **تست:** **به‌ازای چند مقدار a، سهمی** $y = ax^{۲} + (۳ + ۲a)x$ **از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) هیچ مقدار a ۲) تمام مقدار a ۳) ۱ ۴) ۲

حل چون عرض از مبداء سهمی صفر است پس برای اینکه از ناحیه سوم محورهای مختصات نگذرد باید $a > ۰$. از طرفی علاوه بر صفر یک ریشه مثبت دارد پس داریم:

$$S > ۰ \Longrightarrow -\frac{۳ + ۲a}{a} > ۰ \Longrightarrow -(۳ + ۲a) > ۰ \Longrightarrow ۳ + ۲a < ۰ \Longrightarrow ۲a < -۳ \Longrightarrow \boxed{a < -\frac{۳}{۲}}$$

که با $\boxed{a > ۰}$ اشتراک ندارد و هیچ مقدار a وجود دارد.

۴) **تست:** **اگر** $\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰$ **باشد، مجموعه مقادیر** $[۳x]$ **چند عضو دارد؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

حل

$$\begin{cases} ۴ - ۲x = ۰ \Longrightarrow x = ۲ \\ ۳x + ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Longrightarrow -\frac{۱}{۳} < x \leq ۲ \Longrightarrow -۱ < ۳x \leq ۶$$

$$\boxed{[۳x] = -۱, ۰, ۱, ..., ۶}$$

۵) **تست:** **دو تابع** $f(x) = b - ۳ax$ **و** $g(x) = c - (۳b - ۳)x$ **ثابت هستند. اگر** $f + g = ۵$ **باشد. حاصل** bc **چقدر است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۶

حل

$$\begin{cases} -۳a = ۰ \Longrightarrow a = ۰ \\ ۳b - ۳ = ۰ \Longrightarrow b = ۱ \\ f + g = ۵ \Longrightarrow b + c = ۵ \Longrightarrow c = ۴ \end{cases} \Longrightarrow \boxed{bc = ۱ \times ۴ = ۴}$$

۶) **تست:** **نمودار تابع با ضابطه** $f(x) = ۴x - x^{۲}$ **را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبداء مختصات کدام است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

حل

$$f(x) = -(-۴x + x^{۲} + ۴) + ۴ = -(x - ۲)^{۲} + ۴ \Longrightarrow g(x) = -x^{۲} + ۴$$
$$\Longrightarrow ۴x - x^{۲} = -x^{۲} + ۴ \Longrightarrow ۴x = ۴ \Longrightarrow x = ۱ \Longrightarrow y(۱) = f(۱) = ۳$$

فاصله نقطه برخورد $A(۱, ۳)$، از مبداء مختصات $O(۰, ۰)$ برابر است با: $\boxed{|OA| = \sqrt{۱^{۲} + ۳^{۲}} = \sqrt{۱۰}}$

۷) **تست:** **به‌ازای دو مقدار a، یک ریشه معادله** $۳x^{۲} - ax + ۴ = ۰$**، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

$\boxed{\text{حل}}$ فرض کنید α و β دو ریشه معادله بوده و $\beta = ۳\alpha$ پس

$$P = ۴ \Longrightarrow P = \alpha\beta = ۳\alpha^۲ = \frac{۴}{۳} \Longrightarrow \alpha^۲ = \frac{۴}{۹} \Longrightarrow \alpha = \pm\frac{۲}{۳}$$

$$S = \alpha + \beta = ۴\alpha = \pm\frac{۸}{۳}, S = \frac{a}{۳} \Longrightarrow \frac{a}{۳} = \pm\frac{۸}{۳} \Longrightarrow a = \pm ۸$$

بنابراین اختلاف این دو مقدار a برابر $\boxed{۸ - (-۸) = ۱۶}$ است.

۸) **تست: معادله** $\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}} = \frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}} - \frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}+۳}$ **چند ریشه مثبت دارد؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$\boxed{\text{حل}}$

$$\frac{\sqrt{x+۱}(۳-\sqrt{x-۱}) - \sqrt{x-۱}(۳+\sqrt{x-۱})}{(۳+\sqrt{x-۱})(۳-\sqrt{x-۱})} = \sqrt{x-۱}$$

$$\frac{-\sqrt{x+۱}\sqrt{x-۱} - \sqrt{x+۱}\sqrt{x-۱}}{۳^۲ - (x-۱)} = \sqrt{x-۱} \Longrightarrow \frac{-۲\sqrt{x+۱}\sqrt{x-۱}}{۱۰-x} = \sqrt{x-۱}$$

حال چون $x \neq ۱$ پس داریم:

$$\frac{۲\sqrt{x+۱}}{x-۱۰} = ۱ \Longrightarrow ۲\sqrt{x+۱} = x - ۱۰ \Longrightarrow ۲(x+۱) = (x-۱۰)^۲ = x^۲ - ۲۰x + ۱۰۰$$
$$\Longrightarrow x^۲ - ۲۴x + ۹۶ = ۰ \Longrightarrow x = ۱۲ \pm \sqrt{۴۸} = ۱۲ \pm ۴\sqrt{۳}$$

بنابراین فقط یک ریشه مثبت به‌صورت $\boxed{x = ۱۲ + ۴\sqrt{۳}}$ دارد.

۹) **تست: وارون تابع** $y = x^۳ - x + ۱$ **از کدام نقطه عبور می‌کند؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $(-۱, -۲)$ ۲) $(\frac{۵}{۸}, \frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱, ۲)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱۱}{۸})$

$\boxed{\text{حل}}$ چون با جایگذاری $x = \frac{۱}{۲}$ در تابع داده شده به $y = \frac{۵}{۸}$ می‌رسیم پس تابع از نقطه $(\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۸})$ عبور کرده و درنتیجه وارون آن از نقطه $\boxed{(\frac{۵}{۸}, \frac{۱}{۲})}$ عبور می‌کند.

۱۰) **تست: اگر** $gof(x) = ۵x^۲ + ۱۱$ **و** $f(x) = ۲x$ **باشد، کمترین مقدار** $g(x-۷)$ **چقدر است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

$\boxed{\text{حل}}$

$$g(f(x)) = ۵x^۲ + ۱۱ \Longrightarrow g(۲x) = ۵\frac{(۲x)^۲}{۴} + ۱۱ \Longrightarrow \boxed{g(x) = \frac{۵}{۴}x^۲ + ۱۱}$$

پس $g(x-۷) = \frac{۵}{۴}(x-۷)^۲ + ۱۱$ که کمترین مقدار آن برابر $\boxed{۱۱}$ است.

۱۱) **تست: تابع** $f(x) = (-۹ + k^۲)x^۳ + ۵$ **اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح** k**، چقدر است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ٦

$\boxed{\text{حل}}$ باید ضریب $x^۳$ منفی باشد پس $-۹+k^۲<۰ \Longrightarrow k^۲<۹ \Longrightarrow -۳<k<۳$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح k برابر است با: $\boxed{-۲-۱+۰+۱+۲=۰}$

۱۲) **تست: اگر** $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ و $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-m}{۲+m}$ **باشد، مجموعه مقادیر** m **کدام است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۲,۱]$ ۳) $(-۱,۲]$ ۴) $(-۱,۲)$

$\boxed{\text{حل}}$

$$-\frac{\pi}{۴}<-x<\frac{\pi}{۴} \Longrightarrow ۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \tan(\tfrac{\pi}{۴}-x)>۰ \Longrightarrow \frac{۱-m}{۲+m}>۰ \Longrightarrow \boxed{-۲<m<۱}$$

روش دوم با رد گزینه: $m=۱$ مقدار صفر می‌دهد که در بازه داده شده اتفاق نمی‌افتد. پس گزینه (۲) رد می‌شود.

$m=۲$ و $۱/۵$ مقدار منفی می‌دهد که در بازه داده شده اتفاق نمی‌افتد. پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۱۳) **تست: اگر** $۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}$ **باشد، حاصل** $\tan^۲x$ **کدام است؟** $(x\neq ۰)$ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$\sin^۲x+\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳} \Longrightarrow \sin^۲x+۱=\frac{۴}{۳} \Longrightarrow \sin^۲x=\frac{۱}{۳}$$
$$\Longrightarrow \cos^۲x=۱-\sin^۲x=\frac{۲}{۳} \Longrightarrow \tan^۲x=\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\boxed{\frac{۱}{۲}}$$

روش دوم: طرفین تساوی را بر $\cos^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۲\tan^۲x+۱=\frac{۴}{۳}(۱+\tan^۲x) \Longrightarrow ٦\tan^۲x+۳=۴+۴\tan^۲x$$
$$\Longrightarrow ۲\tan^۲x=۱ \Longrightarrow \boxed{\tan^۲x=\frac{۱}{۲}}$$

۱۴) **تست: شکل زیر، نمودار تابع** $y=c+a\cos bx$ **را در یک دوره تناوب، نشان می‌دهد. مقدار** c **کدام است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

$\boxed{\text{حل}}$ $\boxed{c=\frac{y_{\max}+y_{\min}}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=۳}$

۱۵) تست: تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\text{۸}\cos x - \tan^{\text{۲}} x = \text{۱}$ در بازه $[\text{۰}, \text{۲}\pi]$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۲

$\boxed{\text{حل}}$

$$\text{۸}\cos x = \text{۱} + \tan^{\text{۲}} x \Longrightarrow \text{۸}\cos x = \frac{\text{۱}}{\cos^{\text{۲}} x} \Longrightarrow \text{۸}\cos^{\text{۳}} x = \text{۱} \Longrightarrow \cos^{\text{۳}} x = \frac{\text{۱}}{\text{۸}}$$
$$\Longrightarrow \cos x = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \Longrightarrow x = \text{۲}k\pi \pm \frac{\pi}{\text{۳}},\ k \in \mathbb{Z}$$

در بازه $[\text{۰}, \text{۲}\pi]$ فقط دو جواب $\boxed{x = \frac{\pi}{\text{۳}}}$ و $\boxed{x = \text{۲}\pi - \frac{\pi}{\text{۳}}}$ را دارد.

۱۶) تست: اگر $\log_{\text{۸}} \text{۱۸} = m$ باشد، حاصل $\log_{\text{۴}} \text{۱۲}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\text{۳}}{\text{۴}}(m+\text{۱})$ ۲) $\frac{\text{۳}m+\text{۱}}{\text{۴}}$ ۳) $\frac{\text{۳}}{\text{۴}}(m-\text{۱})$ ۴) $\frac{\text{۳}m-\text{۱}}{\text{۴}}$

$\boxed{\text{حل}}$

$$\log_{\text{۸}} \text{۱۸} = \log_{\text{۲}^{\text{۳}}}(\text{۲} \times \text{۳}^{\text{۲}}) = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\log_{\text{۲}} \text{۲} + \text{۲}\log_{\text{۲}} \text{۳}) = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\text{۱} + \text{۲}\log_{\text{۲}} \text{۳}) = m$$
$$\Longrightarrow \text{۱} + \text{۲}\log_{\text{۲}} \text{۳} = \text{۳}m \Longrightarrow \text{۲}\log_{\text{۲}} \text{۳} = \text{۳}m - \text{۱} \Longrightarrow \boxed{\log_{\text{۲}} \text{۳} = \frac{\text{۳}m-\text{۱}}{\text{۲}}}$$

$$\begin{aligned}\log_{\text{۴}} \text{۱۲} &= \log_{\text{۲}^{\text{۲}}}(\text{۲}^{\text{۲}} \times \text{۳}) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۲}\log_{\text{۲}} \text{۲} + \log_{\text{۲}} \text{۳}) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۲} + \log_{\text{۲}} \text{۳}) \\ &= \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \frac{\text{۳}m-\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{\text{۴}+\text{۳}m-\text{۱}}{\text{۴}} = \boxed{\frac{\text{۳}m+\text{۳}}{\text{۴}} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}(m+\text{۱})}\end{aligned}$$

۱۷) تست: تابع $f(x) = a + b\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^x$ از مبداء مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-\text{۱}}(-\text{۱}) = -\text{۱}$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

$\boxed{\text{حل}}$

$$\begin{cases} x = \text{۰} \Longrightarrow y = \text{۰} \Longrightarrow f(\text{۰}) = a + b\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^{\text{۰}} = \text{۰} \Longrightarrow a + b = \text{۰} \\ x = -\text{۱} \Longrightarrow y = -\text{۱} \Longrightarrow f(-\text{۱}) = a + b\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^{-\text{۱}} = -\text{۱} \Longrightarrow a + \text{۲}b = -\text{۱} \end{cases}$$

با کم کردن دو معادله اخیر داریم:

$$-b = \text{۱} \Longrightarrow b = -\text{۱} \Longrightarrow a = \text{۱} \Longrightarrow \boxed{a - b = \text{۱} - (-\text{۱}) = \text{۲}}$$

۱۸) **تست:** ۹ داده آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت داده آماری، از میانگین برابر ۱+ یا ۱− و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌های جدید چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

$\boxed{\text{حل}}$ برای $i = ۱, ۲, ..., ۸$ داریم:

$$x_i - \overline{x} = ۱ \text{ یا } -۱ \Longrightarrow (x_i - \overline{x})^۲ = ۱$$
$$\Longrightarrow \sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \overline{x})^۲ + ... + (x_۸ - \overline{x})^۲ + (x_۹ - \overline{x})^۲}{۹} = \frac{۱ + ... + ۱ + ۰}{۹} = \frac{۸}{۹} \Longrightarrow \boxed{\sigma = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}$$

۱۹) **تست:** داده‌های جمع آوری شده در یک مطالعه آماری اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر به همه داده‌ها ۲ واحد بیافزاییم اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

$\boxed{\text{حل}}$ میانه و میانگین هر تعداد اعداد طبیعی متوالی باهم برابر هستند و افزودن ۲ واحد به داده‌ها باعث می‌شود به میانه و میانگین آنها نیز ۲ واحد اضافه می‌شود بنابراین اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید صفر خواهد بود.

۲۰) **تست:** حاصل $\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - [x^۳]}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

$\boxed{\text{حل}}$ در همسایگی راست عدد ۲ داریم: $[x^۳] = ۸$ پس

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - [x^۳]} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸} \overset{Hop}{=} \lim_{x \to ۲^+} \frac{۲x}{۳x^۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۲}{۳x} = \boxed{\frac{۱}{۳}}$$

۲۱) **تست:** اگر $g(x) = \frac{\sqrt{ax^۲ + bx + c}}{|x - ۱|}$ و $\lim_{x \to ۱^+} (۴ - [x])g(x) = ٦$ باشد، حاصل $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲−

$\boxed{\text{حل}}$

$$\lim_{x \to ۱^+} (۴ - [x])g(x) = ٦ \Longrightarrow \lim_{x \to ۱^+} ۳g(x) = ٦ \Longrightarrow \lim_{x \to ۱^+} g(x) = ۲ \qquad (۱)$$

حال برای اینکه این اتفاق بیفتد باید صورت تابع g عامل $x - ۱$ را داشته باشد پس در ر همسایگی راست عدد ۱ داریم:

$$g(x) = \frac{\sqrt{a(x - ۱)^۲}}{|x - ۱|} = \sqrt{a} \xrightarrow{(۱)} g(x) = ۲ \Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = ۲}$$

۲۲) تست: اگر $f(x)=x\left(\sqrt{\dfrac{۲x+۱}{۵x+۹}}\right)^{۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $\dfrac{۱}{۲۷}$ ۲) $\dfrac{۱}{۹}$ ۳) $\dfrac{۲}{۷}$ ۴) $\dfrac{۳}{۱۴}$

حل چون برای $x\neq ۰$ داریم: $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\sqrt{\dfrac{۲x+۱}{۵x+۹}}\right)^{۳}$ پس

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}}\right)^{۳}=\left(\sqrt{\frac{۱}{۹}}\right)^{۳}=\boxed{\frac{۱}{۲۷}}$$

۲۳) تست: معادله خط مماس بر نمودار $y=\dfrac{x^{۲}+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به‌طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $۴y-۳x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

حل

$$۴y=۳x+n\Longrightarrow y=\frac{۳}{۴}x+\frac{n}{۴}\Longrightarrow \text{شیب معادله خط مماس}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow y'(۱)=\frac{۳}{۴}$$

$$y'=\frac{(۲x+m)(x+۳)-(x^{۲}+mx+۱)}{(x+۳)^{۲}}\Longrightarrow y'(۱)=\frac{(۲+m)(۱+۳)-(۱^{۲}+m+۱)}{(۱+۳)^{۲}}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۸+۴m-۲-m}{۱۶}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow\frac{٦+۳m}{۴}=۳\Longrightarrow ٦+۳m=۱۲\Longrightarrow ۳m=٦\Longrightarrow\boxed{m=۲}$$

و با قرار دادن $x_{۰}=۱$ در $y=\dfrac{x^{۲}+۲x+۱}{x+۳}$ به $y_{۰}=۱$ می‌رسیم:

$$y-۱=\frac{۳}{۴}(x-۱)\Longrightarrow ۴y-۴=۳x-۳\Longrightarrow ۴y+۳x=۱\Longrightarrow\boxed{n=۱}$$

بنابراین $\boxed{m+n=۲+۱=۳}$.

۲۴) تست: نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ به‌صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) ۳

حل $f(۰)=۴\Longrightarrow c=۴$

مشتق تابع f در نقطه ماکزیمم نسبی $x=۰$ برابر صفر است پس

$$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b=۰,\ f'(۰)=۰\Longrightarrow b=۰$$

نقاط بحرانی تابع f: $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+۴\Longrightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۲ax=۰\Longrightarrow x=۰$ یا $x=-\frac{۲}{۳}a$

$$f(-\tfrac{۲}{۳}a)=۰\Longrightarrow(-\tfrac{۲}{۳}a)^{۳}+a(-\tfrac{۲}{۳}a)^{۲}+۴=۰\Longrightarrow-\frac{۸}{۲۷}a^{۳}+\frac{۴}{۹}a^{۳}+۴=۰$$
$$\Longrightarrow\frac{۴}{۲۷}a^{۳}=-۴\Longrightarrow a^{۳}=-۲۷\Longrightarrow a=-۳$$

بنابراین $\boxed{x = -\frac{۲}{۳}a = ۲}$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.

۲۵) تست: از بین مخروط‌های حاصل از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازه $۳\sqrt{۳}$ حول خط L به‌دست می‌آیند. ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطه A روی خط L واقع است.) (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

$\boxed{\text{حل}}$ فرض کنید ارتفاع و شعاع قاعده مخروط به‌ترتیب h و r باشند پس

$$h^{۲} + r^{۲} = (۳\sqrt{۳})^{۲} \Longrightarrow r^{۲} = ۲۷ - h^{۲} \Longrightarrow V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷ - h^{۲})h = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷h - h^{۳})$$

$$V' = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷ - ۳h^{۲}) = ۰ \Longrightarrow \boxed{h = ۳}$$

۲۶) تست: ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزو آنهاست، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

$\boxed{\text{حل}}$ حالت اول: کتب ریاضی و زیست انتخاب شود ولی فیزیک انتخاب نشود یعنی ۲ کتاب هم از ۴ کتاب دیگر انتخاب شود: $\binom{۱}{۱}\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۲} = ۶$

حالت دوم: کتاب فیزیک انتخاب شود ولی ریاضی و زیست انتخاب نشود یعنی ۳ کتاب هم از ۴ کتاب دیگر انتخاب شود: $\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۳} = ۴$

حالت سوم: کتاب زیست انتخاب شود ولی ریاضی و فیزیک انتخاب نشود یعنی ۳ کتاب هم از ۴ کتاب دیگر انتخاب شود: $\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۳} = ۴$

حالت چهارم: هیچ کدام از کتب ریاضی، فیزیک و زیست انتخاب نشود یعنی ۴ کتاب هم از ۴ کتاب دیگر انتخاب شود: $\binom{۴}{۴} = ۴$

بنابراین در کل داریم: $\boxed{۶ + ۴ + ۴ + ۱ = ۱۵}$

۲۷) تست: احتمال شیوع یک بیماری در جامعه‌ای برابر ۰/۰۸ و احتمال بهبود یافتن فرد مبتلا به این بیماری برابر ۰/۵ است. احتمال این‌که فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۲ ۴) ۴

حل $۰/۰۴ = ۰/۵ \times ۰/۰۸$ که برابر $\boxed{۴}$ درصد است.

۲۸) **تست: سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB : y + ۲x = ۷$ ،$AC : ۴y - ۳x = ۱۷$ و $BC : ۲y - ۷x = -۱۹$ هستند، طول ارتفاع BH، کدام است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $۴/۴$ ۲) ۳ ۳) $۲/۵$ ۴) ۱

حل ابتدا محل برخورد $AB : y + ۲x = ۷$ و $BC : ۲y - ۷x = -۱۹$ را به‌عنوان $\boxed{B(۳, ۱)}$ می‌یابیم.
بنابراین طول ارتفاع BH همان فاصله نقطه $B(۳, ۱)$ از خط $AC : -۳x + ۴y - ۱۷ = ۰$ است:

$$\boxed{BH = \frac{|-۳(۳) + ۴(۱) - ۱۷|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{|-۹ + ۴ - ۱۷|}{۵} = \frac{۲۲}{۵} = ۴/۴}$$

۲۹) **تست: در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $۱/۵$ ۲) $۱/۷$ ۳) $۲/۱$ ۴) $۲/۴$

حل طبق تعمیم قضیه تالس داریم:
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{۵}{۱۲}$$
حال چون $DE||BC$ پس ارتفاع وارد بر قاعده‌های DE, BC در دو مثلث BCE و BDE باهم برابرند
بنابراین نسبت مساحت آنها با نسبت قاعده‌های آنها باهم برابر است یعنی

$$\boxed{\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴}$$

۳۰) **تست: نقطه $(-۱۲, ۰)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبداء مختصات مرکز بیضی باشد. خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $۰/۶$ ۲) $۰/۸$ ۳) $۱/۴$ ۴) $۱/۸$

حل

$$c = ۱۲, ۲b = ۱۸ \Longrightarrow b = ۹ \Longrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۹^۲ + ۱۲^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵$$
$$\Longrightarrow a = ۱۵ \Longrightarrow \boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸}$$

آرزوی موفقیت برای شما عزیزان دارم.