

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

۱۰۱- حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{7}}$ ، کدام است ؟۲ $\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

 $\sqrt[4]{2}$ (۲)

۱ (۱)

روش اول :

$$\sqrt{1+\sqrt{7}} = \sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{1+7+2\sqrt{7}} = \sqrt[4]{8+2\sqrt{7}} = \sqrt[4]{2(4+\sqrt{7})}$$

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}}}$$

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}}} \times \sqrt[4]{2(4+\sqrt{7})} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}} \times 2(4+\sqrt{7})} = \sqrt[4]{2}$$

روش دوم :

$$\sqrt{1+\sqrt{7}} = \sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{1+7+2\sqrt{7}} = \sqrt[4]{8+2\sqrt{7}}$$

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}} \times \frac{4-\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}} = \sqrt[4]{\frac{4-\sqrt{7}}{16-7}} = \sqrt[4]{\frac{4-\sqrt{7}}{9}}$$

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\frac{4-\sqrt{7}}{9}} \times \sqrt[4]{8+2\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\frac{4-\sqrt{7}}{9} \times (8+2\sqrt{7})}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{4-\sqrt{7}}{9} \times 2(4+\sqrt{7})} = \sqrt[4]{\frac{2(16-7)}{9}} = \sqrt[4]{\frac{2(9)}{9}} = \sqrt[4]{2}$$

۱۰۲- اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند ، جمله شانزدهم کدام است ؟

۱/۴ (۴)

۲/۴ (۳)

۹/۶ (۲)

۱۱/۶ (۱)

$$t_8 = 8 \quad t_{10} = 5 \quad \rightarrow d = \frac{t_{10} - t_8}{10 - 8} = \frac{5 - 8}{2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$t_{16} = t_{10} + 6d \rightarrow t_{16} = 5 + 6\left(-\frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{36}{2} = 5 - 18 = -13 \rightarrow t_{16} = -13$$

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

۱۰۳ - به ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3+2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی گذرد؟(۱) هیچ مقدار a (۲) تمام مقادیر a (۳) ۱ (۴) ۲

$$y = ax^2 + (3+2a)x \longrightarrow (I) \Delta > 0 \quad (II) a > 0 \quad (III) S > 0$$

$$y = 0 \longrightarrow ax^2 + (3+2a)x = 0 \longrightarrow x(ax + 3 + 2a) = 0 \xrightarrow{x=0} ax + 3 + 2a = 0$$

$$ax = -3 - 2a \longrightarrow x = \frac{-3 - 2a}{a} \longrightarrow \frac{-3 - 2a}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} -3 - 2a > 0 \longrightarrow -2a > 3$$

$$a < -\frac{3}{2} \longrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

۱۰۴ - اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \longrightarrow -\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6 \longrightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

۱۰۵ - دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند، اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

(۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) ۶

$$f(x) = b - 3ax \longrightarrow 3a = 0 \longrightarrow a = 0 \longrightarrow f(x) = b$$

$$g(x) = c - (3b - 3)x \longrightarrow 3b - 3 = 0 \longrightarrow b = 1 \longrightarrow g(x) = c$$

$$f + g = 5 \longrightarrow b + c = 5 \longrightarrow 1 + c = 5 \longrightarrow c = 4 \quad bc = 4$$

۱۰۶ - نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم، فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{10}$

$$f(x) = 4x - x^2 \longrightarrow f(x) = -(x^2 - 4x) \longrightarrow f(x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4 \xrightarrow{x \rightarrow x+2} g(x) = -(x+2-2)^2 + 4 \longrightarrow g(x) = -x^2 + 4$$

$$\begin{cases} f(x) = 4x - x^2 \\ g(x) = -x^2 + 4 \end{cases} \longrightarrow 4x - x^2 = -x^2 + 4 \longrightarrow x = 1 \longrightarrow y = 3 \longrightarrow A(1, 3)$$

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

۱۰۷ - به ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است، اختلاف این دو مقدار a کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

روش اول:

نکته: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، یک ریشه k برابر ریشه دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \rightarrow \frac{(-a)^2}{3(4)} = \frac{(3+1)^2}{3} \rightarrow \frac{a^2}{12} = \frac{16}{3} \rightarrow a^2 = 64 \rightarrow a = \pm 8$$

$$d = |-8 - 8| = 16$$

روش دوم:

$$3x^2 - ax + 4 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta=3\alpha}$$

$$(I) \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow \alpha + 3\alpha = -\frac{-a}{3} \rightarrow 4\alpha = \frac{a}{3}$$

$$(II) \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \rightarrow \alpha \times 3\alpha = \frac{4}{3} \rightarrow 3\alpha^2 = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$4\alpha = \frac{a}{3} \rightarrow 4\left(\pm \frac{2}{3}\right) = \frac{a}{3} \rightarrow \frac{a}{3} = \pm \frac{8}{3} \rightarrow a = \pm 8 \rightarrow d = |-8 - 8| = 16$$

۱۰۸ - معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ ، چند ریشه مثبت دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$(\sqrt{x-1}+3)(3-\sqrt{x-1}) = (3)^2 - (\sqrt{x-1})^2 = 9 - x + 1 = 10 - x$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \times \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x-1})}{(x-1)} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \longrightarrow (\sqrt{x+1}) \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{1}{3-\sqrt{x-1}} \right) = \sqrt{x-1}$$

$$(\sqrt{x+1}) \left(\frac{\cancel{3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} - \cancel{3}}{10-x} \right) = \sqrt{x-1} \longrightarrow (\sqrt{x+1}) \left(\frac{-2\sqrt{x-1}}{10-x} \right) = \sqrt{x-1}$$

$$-2\sqrt{x+1} = 10-x \longrightarrow (2\sqrt{x+1})^2 = (x-10)^2 \longrightarrow 4(x+1) = x^2 - 20x + 100$$

$$x^2 - 24x + 96 = 0 \longrightarrow \Delta' = b'^2 - ac \xrightarrow{b'=\frac{b}{2}} \Delta' = (-12)^2 - (1)(96) = 144 - 96 = 48 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{12 + \sqrt{48}}{1} = 12 + \sqrt{16 \times 3} = 12 + 4\sqrt{3} \longrightarrow \text{قابل قبول}$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{12 - \sqrt{48}}{1} = 12 - \sqrt{16 \times 3} = 12 - 4\sqrt{3} \longrightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

۱۰۹- وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می کند ؟

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8}\right) \quad (4) \quad (1, 2) \quad (3) \quad \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) \quad (2) \quad (-1, -2) \quad (1)$$

$$\text{if } (a, b) \in f \longleftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

نکته :

$$y = f(x) = x^3 - x + 1$$

$$(-1, -2) \in f^{-1} \longrightarrow (-2, -1) \in f \longrightarrow f(-2) = -1$$

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -8 + 2 + 1 = -5 \longrightarrow -5 \neq -1$$

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) \in f^{-1} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \in f \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-4+8}{8} = \frac{5}{8}$$

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

۱۱۰- اگر $gof(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ چقدر است؟

۳ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴)

$$gof(x) = 5x^2 + 11 \longrightarrow g(f(x)) = 5x^2 + 11 \xrightarrow{f(x)=2x} g(2x) = 5x^2 + 11 \xrightarrow{\substack{2x=t \\ x=\frac{t}{2}}} g\left(\frac{t}{2}\right) = 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 11$$

$$g(t) = 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 11 \longrightarrow g(t) = \frac{5t^2}{4} + 11 \longrightarrow g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11 \longrightarrow \min = 11$$

۱۱۱- تابع $f(x) = (-9+k^2)x^2 + 5$ ، اکیداً نزولی است، مجموع مقادیر صحیح k ، چقدر است؟

۶ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) (۱) صفر

$$f(x) = (-9+k^2)x^2 + 5 \longrightarrow -9+k^2 < 0 \longrightarrow k^2 < 9 \longrightarrow |k| = 3 \longrightarrow -3 < k < 3$$

$$k = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$$

۱۱۲- اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-m}{2+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m ، کدام است؟

(-۱, ۲) (۴) (-۱, ۲] (۳) (-۲, ۱] (۲) (-۲, ۱) (۱)

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \longrightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \longrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(I)} \tan x > 0$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \longrightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0 \longrightarrow -2 < m < 1 \longrightarrow m \in (-2, 1)$$

۱۱۳- اگر $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)
 $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

روش اول:

$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \xrightarrow{\div \cos^2 x} 2\tan^2 x + 1 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$2\tan^2 x + 1 = \frac{4}{3}(1 + \tan^2 x) \xrightarrow{\times 3} 6\tan^2 x + 3 = 4(1 + \tan^2 x)$$

$$6\tan^2 x + 3 = 4 + 4\tan^2 x \longrightarrow 2\tan^2 x = 1 \longrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

بسمه تعالی

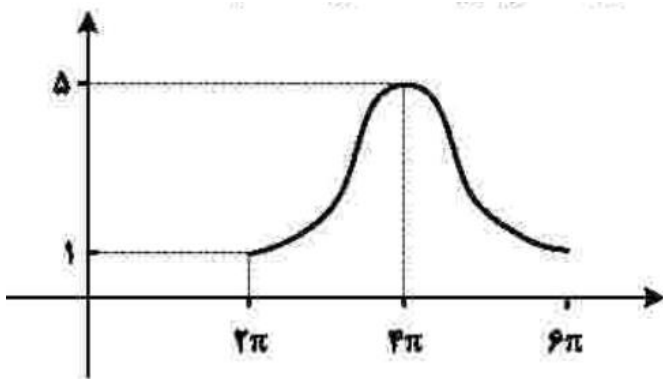
پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

روش دوم:

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \rightarrow 2 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \frac{4}{3} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{3} \rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

۱۱۴- شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب، نشان می دهد، مقدار c کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۱

نکته: در تابع $y = a \cos bx + c$ ، مقدار c برابر است با میانگین حسابی بین \max و \min .

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c \\ \min &= -|a| + c \end{aligned} \quad 2c = \max + \min \rightarrow c = \frac{\max + \min}{2}$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

روش دوم:

$$y = a \cos bx + c$$

$$(I) \quad T = |6\pi - 2\pi| = 4\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$(II) \quad (4\pi, 5) \rightarrow 5 = a \cos \frac{1}{2}(4\pi) + c \rightarrow 5 = a \cos 2\pi + c \rightarrow a + c = 5$$

$$(III) \quad (2\pi, 1) \rightarrow 1 = a \cos \frac{1}{2}(2\pi) + c \rightarrow 1 = a \cos \pi + c \rightarrow -a + c = 1$$

$$\begin{cases} a + c = 5 \\ -a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 2c = 6 \rightarrow c = 3$$

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

۱۱۵ - تعداد جواب های معادله مثلثاتی $\lambda \cos x - \tan^2 x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است ؟

۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

$$\lambda \cos x - \tan^2 x = 1 \longrightarrow \lambda \cos x = 1 + \tan^2 x \longrightarrow \lambda \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow \lambda \cos^3 x = 1$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

۱۱۶ - اگر $\log_8 18 = m$ باشد ، حاصل $\log_4 12$ ، کدام است ؟
 $\frac{3m-1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}(m-1)$ (۳) $\frac{3m+1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}(m+1)$ (۱)

$$\log_8 18 = m \longrightarrow \frac{\log 18}{\log 8} = m \longrightarrow \frac{\log 9 \times 2}{3 \log 2} = m \longrightarrow \frac{2 \log 3 + \log 2}{3 \log 2} = m$$

$$\frac{2 \log 3}{3 \log 2} + \frac{1}{3} = m \longrightarrow \frac{2}{3} \log_2 3 = m - \frac{1}{3} \longrightarrow \log_2 3 = \frac{3}{2} \left(\frac{3m-1}{3} \right) \longrightarrow \log_2 3 = \frac{3m-1}{2}$$

$$\log_4 12 = \frac{\log 12}{\log 4} = \frac{\log 4 \times 3}{2 \log 2} = \frac{\log 4 + \log 3}{2 \log 2} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{2 \log 2} = 1 + \frac{1}{2} \log_2 3 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3m-1}{2} \right)$$

$$= 1 + \frac{3m-1}{4} = \frac{4+3m-1}{4} = \frac{3+3m}{4} = \frac{3(1+m)}{4} = \frac{3}{4}(m+1)$$

۱۱۷ - تابع $f(x) = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^x$ از مبدأ مختصات عبور می کند . اگر $f^{-1}(-1) = -1$ باشد ، حاصل $a - b$ چقدر است ؟

۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) صفر (۱)

$$f(x) = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$(I) (0, 0) \longrightarrow a + b\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \longrightarrow a + b = 0 \longrightarrow a = -b$$

$$(II) f^{-1}(-1) = -1 \longrightarrow (-1, -1) \in f^{-1} \longrightarrow (-1, -1) \in f$$

$$a + b\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1 \longrightarrow a + 2b = -1 \longrightarrow -b + 2b = -1 \longrightarrow b = -1 \longrightarrow a = 1$$

$$a - b = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

۱۱۸ - داده آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت داده آماری، از میانگین برابر +۱ یا -۱ و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است، انحراف معیار این داده ها، کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{8}{9} \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۱۱۹ - داده های جمع آوری شده در یک مطالعه آماری، اعداد طبیعی متوالی هستند، اگر به همه داده ها ۲ واحد بیافزاییم، اختلاف میانه و میانگین داده های جدید، چقدر است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

چون داده ها تشکیل دنباله حسابی می دهند لذا میانگین و میانه داده ها با هم برابر هستند و اگر به دو واحد اضافه شود، باز هم تشکیل دنباله حسابی می دهند پس تفاضل میانگین و میانه برابر صفر است.

۱۲۰ - حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{3x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x \rightarrow 2^+ \rightarrow x > 2 \rightarrow x^3 > 8 \rightarrow [x^3] = 8$$

۱۲۱ - اگر $g(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x-1|}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x]).g(x) = 6$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x]).g(x) = 6 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (3).g(x) = 6 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

$$x \rightarrow 1^+ \longrightarrow x > 1 \longrightarrow [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x-1|} = 2 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = 2 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4(x^2 - 2x + 1)}}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + 4}}{x-1} = 2 \longrightarrow a = 4, b = -8, c = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

۱۲۲ - اگر $f(x) = x \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{5x+9}} \right)^3$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

$$\frac{3}{14} \quad (4)$$

$$\frac{2}{7} \quad (3)$$

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{27} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$f'(x) = 1 \times \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{5x+9}} \right)^3 \longrightarrow f'(0) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} \right)^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

۱۲۳ - معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$ در نقطه ای به طول واحد بر نمودار، به صورت $4y - 3x = n$

است، مقدار $m + n$ چقدر است؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1+m+1}{1+3} = \frac{m+2}{4} \rightarrow A\left(1, \frac{m+2}{4}\right)$$

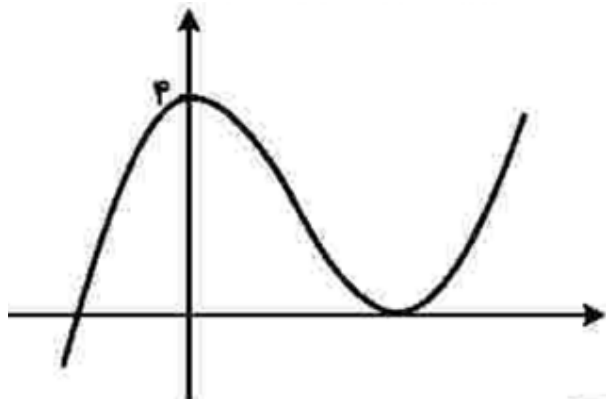
$$4y - 3x = n \rightarrow 4y = 3x + n \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \rightarrow m = f'(1) = \frac{3}{4}$$

$$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - 1(x^2+mx+1)}{(x+3)^2} \rightarrow f'(1) = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{(2+m)(4) - 1(2+m)}{(1+3)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(2+m)(4-1)}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{(2+m)(\cancel{3})}{\cancel{16}_4} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \rightarrow m = 2 \rightarrow A(1, 1)$$

$$4y = 3x + n \xrightarrow{A(1,1)} 4 = 3 + n \rightarrow n = 1 \quad m + n = 2 + 1 = 3$$

۱۲۴ - نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) ۳

خواص نقاط اکسترمم نسبی:

۱ - مختصات این نقاط، در ضابطهٔ تابع صدق می کند.

۲ - مشتق اول تابع به ازای طول این نقاط، برابر صفر است.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \max = \begin{vmatrix} \circ \\ \text{f} \end{vmatrix} \quad \min = \begin{vmatrix} \alpha \\ \circ \end{vmatrix}$$

$$\max = \begin{vmatrix} \circ \\ \text{f} \end{vmatrix} \longrightarrow \text{(I)} \quad f(\circ) = \text{f} \longrightarrow c = \text{f}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \longrightarrow \text{(II)} \quad f'(\circ) = \circ \longrightarrow b = \circ \quad f(x) = x^3 + ax^2 + \text{f}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \xrightarrow{y'=0} 3x^2 + 2ax = \circ \longrightarrow x(3x + 2a) = \circ \longrightarrow \begin{cases} x = \circ \\ x = -\frac{2a}{3} \end{cases}$$

$$\min = \begin{vmatrix} -\frac{2a}{3} \\ \circ \end{vmatrix} \longrightarrow \left(-\frac{2a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 + \text{f} = \circ \longrightarrow \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + \text{f} = \circ$$

$$\frac{-8a^3 + 12a^3}{27} + \text{f} = \circ \longrightarrow \frac{4a^3}{27} = -\text{f} \longrightarrow a^3 = -27 \longrightarrow a = -3 \longrightarrow \min = \begin{vmatrix} 2 \\ \circ \end{vmatrix}$$

۱۲۵ - از بین مخروط های حاصل از دوران کامل پاره خط AB با اندازه $3\sqrt{3}$ حول خط L به دست می آیند ، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم ، کدام است ؟ (فقط نقطه A روی خط L است)

$$\sqrt{3} \quad (4) \quad 2\sqrt{3} \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

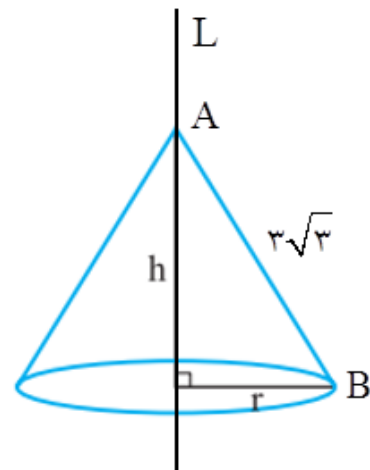
$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2 \longrightarrow r^2 + h^2 = 27 \longrightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h \longrightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi (27 - h^2) \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi (27h - h^3)$$

$$V' = \frac{1}{3} \times \pi (27 - 3h^2) \xrightarrow{V'=0} 27 - 3h^2 = \circ$$

$$h^2 = 9 \longrightarrow h = 3$$



پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

۱۲۶ - ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزو آنهاست، در اختیار داریم. به چند طریق می توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود، و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟

۱۶ (۴)

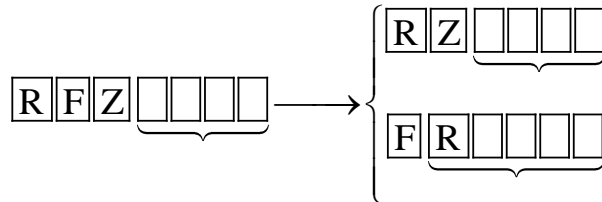
۱۵ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

$$\binom{1}{1} \binom{1}{1} \binom{4}{2} + \binom{1}{1} \binom{5}{3} = 6 + 10 = 16$$

R Z F



۱۲۷ - احتمال شیوع یک بیماری در جامعه ای برابر $8/10$ و احتمال بهبود یافتن فرد مبتلا به این بیماری برابر $5/10$ است، احتمال این که فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۴/۱۰ (۲)

۲/۱۰ (۱)

$$P(A) = 8/10$$

$$P(B|A) = 5/10$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \longrightarrow P(A \cap B) = 8/10 \times 5/10 = 4/10$$

$$P(A \cap B) = 4/10 \times 100 = 4$$

۱۲۸ - سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$ و $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند، طول ارتفاع BH، کدام است؟

۱ (۴)

۲/۵ (۳)

۳ (۲)

۴/۴ (۱)

$$-2 \times \begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2y - 4x = -14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} -4x - 7x = -14 - 19 \\ -11x = -33 \longrightarrow x = 3 \end{matrix}$$

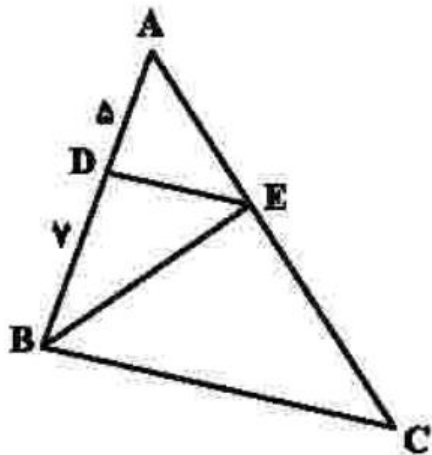
$$\longrightarrow y + 6 = 7 \longrightarrow y = 1 \longrightarrow B(3, 1)$$

$$B(3, 1)$$

$$AC: -3x + 4y - 17 = 0$$

$$d = BH = \frac{|-3(3) + 4(1) - 17|}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-9 + 4 - 17|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{22}{5} = \frac{44}{10} = 4/4$$

۱۲۹ - در مثلث ABC ، ضلع BC موازی ضلع DE است ، مساحت مثلث BCE چند برابر مساحت مثلث BDE است ؟



(۱) ۱/۵

(۲) ۱/۷

(۳) ۲/۱

(۴) ۲/۴

چون دو مثلث دارای ارتفاع یکسان هستند پس نسبت مساحت ها برابر است با نسبت قاعده ها .

$$DE \parallel BC \longrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{\frac{1}{2} \times h \times BC}{\frac{1}{2} \times \frac{h}{2} \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{12}{5} = 2/4$$

۱۳۰ - نقطه $(-12, 0)$ یکی از کانون های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است . اگر مبدأ مختصات ، مرکز بیضی باشد ، خروج از مرکز بیضی ، چقدر است ؟

(۴) ۱/۸

(۳) ۱/۴

(۲) ۰/۸

(۱) ۰/۶

$$F'(-12, 0) \longrightarrow FF' = 2c \longrightarrow OF = OF' = c = 12$$

$$O(0, 0)$$

$$BB' = 2b = 18 \longrightarrow b = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow a^2 = 81 + 144 = 225 \longrightarrow a = 15$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0/8$$

بسمه تعالی

پاسخنامه درس ریاضی گروه آزمایشی علوم تجربی داخل کشور سال ۱۴۰۱

(سید علی موسوی ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)

دبیر ریاضی آموزش و پرورش ناحیه ۴ مشهد مقدس