ehsan_varghaee@aut.ac.ir احسان ورقائی - ریاضیات

۱۰۱)

$$(4+\sqrt{7})^{-1} = \frac{1}{4+\sqrt{7}} \times \frac{4-\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}} = \frac{4-\sqrt{7}}{16-7} = \frac{4-\sqrt{7}}{9}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{9}}} \times \sqrt{\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{7}}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{7}}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{2}\,\sqrt{\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\ \underbrace{\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{7}}} \times \sqrt{\sqrt{4+\sqrt{7}}}}_{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}$$

۱۰۲)

$$a_5 = 8,\quad a_{10} = 5 \Rightarrow d = \frac{a_{10}-a_5}{10-5} = \frac{5-8}{5} = \frac{-3}{5}$$

$$a_5 = 8 = a_1 + 4d = a_1 + 4\times -\frac{3}{5} = a_1 - \frac{12}{5} = 8$$

$$a_1 = \frac{52}{5} \Rightarrow a_{16} = \frac{52}{5} + 15\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{52-45}{5} = \frac{7}{5}$$

$$= 1{,}4$$

۱۰۳)

$$y = ax^2 + (3 + 2a)x$$

یکی از ریشه‌ها صفر، ریشه‌ی دوم حتماً باید مثبت باشد و $a > 0$

$$y = x(ax + 3 + 2a)$$

بنابراین ریشه‌ی مثبت $a > 0 \Rightarrow 3 + 2a > 0$ نمی‌تواند داشته باشد. هیچ مقدار a

۱۰۴)

$$\frac{4 - 2x}{3x + 1} \geq 0$$

		$-1/3$		2	
$4-2x$	+		+	0	−
$3x+1$	−	0	+		+

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x \leq 2 \Rightarrow -1 < 3x \leq 6$$

$[3x]$ هفت مقدار مختلف

۱۰۵) f و g ثابت لذا $a = 0$ و $3b - 3 = 0$ و $b = 1$

$$f + g = 5 \Rightarrow b + c = 5 \Rightarrow 4 = c$$

$$bc = 4$$

۱۰۶)

$$f(x) = 4x - x^2$$

$$f_{\text{جدید}} = 4(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

برخورد $f_{\text{جدید}}$ و f :

$$-x^2 + 4 = 4x - x^2$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{و} \quad f(1) = 3 \Rightarrow \text{فاصله با مبدا} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

۱۰۷)

$$\frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\frac{(3-\sqrt{x-1})\sqrt{x+1} - (3+\sqrt{x-1})\sqrt{x+1}}{(3+\sqrt{x-1})(3-\sqrt{x-1})} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{\cancel{3\sqrt{x+1}} - \sqrt{x^2-1} - \cancel{3\sqrt{x+1}} - \sqrt{x^2-1}}{9-x+1} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{4(x^2-1)}{(10-x)^2} = x-1$$

$$\Rightarrow \frac{4(x+1)}{(10-x)^2} = 1 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 = 4x+1$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 99 = 0$$

۱۰۸) جای سوال و داده‌های داده شده عوض

$y = x^3 - x + 1$

$\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) \in f^{-1}, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \in f$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{8}{8} = \frac{5}{8}$

در هر ۴ گزینه صدق می‌کند.

۱۰۹) $f(x) = 2x \;,\; g\big(f(x)\big) = 5x^2 + 11$

$f(x) = u \;,\; g(u) = \frac{5}{4} u^2 + 11$

$\Rightarrow g(x) = \frac{5}{4} x^2 + 11 \Rightarrow g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11$

به ازای ۷ min برابر (۱۱)

۱۰۷) $3x^2 - ax + 4 = 0$

$\frac{\beta}{\alpha} = 3 \;,\; \alpha\beta = \frac{4}{3}$

اطلاعات مسئله

$\alpha + \beta = \frac{a}{3}$

$\beta = 3\alpha \Rightarrow 3\alpha^2 = \alpha\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow \alpha = \pm\frac{2}{3} \;,\; \beta = \pm\frac{6}{3}$

$3(\alpha + \beta) = a \Rightarrow a = 8 \;\text{یا}\; a = -8$

فقط گزینه (۴)

۱۱۱) $f(x) = (-9+k^2)x^3 + \gamma$ اکیداً نزولی

$$\Rightarrow f'(x) = 3(-9+k^2)x^2 < 0$$

$$\Rightarrow -9+k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9$$

$$\Rightarrow -3 < k < 3$$

$$\Rightarrow k = -2, -1, 0, 1, 2$$

بنابراین مجموع صفر

۱۱۲) $$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{1-m}{2+m}$$

$$\frac{1-m}{2+m} = \frac{1-m}{2+m} = \frac{1-z}{1+z}, \quad z = \tan x$$

$$\Rightarrow 1+z-m-\cancel{mz} = 2-2z+m-\cancel{mz}$$

$$\Rightarrow 2-2z+m+m-z-1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m-3z+1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3z-1}{2}$$

$$-1 < z < 1 \Rightarrow -2 < m < 1 \Rightarrow m \in (-2, 1)$$

113)

$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

114)

$$\begin{aligned} \max &= c + a = 5 \\ \min &= c - a = 1 \end{aligned} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

115)

$$8\cos x = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 8\cos^3 x = 1 \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1}{2}}$$ ← در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب

116)

$$\log_{2^3} 18 = \frac{1}{3}\log_2 18 = \frac{1}{3}\left(\log_2 2 + 2\log_2 3\right) = m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(1 + 2\log_2 3\right) = m \Rightarrow 1 + 2\log_2 3 = 3m$$

$$\Rightarrow \log_2 3 = \frac{3m-1}{2} \quad , \quad \log_4 12 = \frac{1}{2}\log_2 12 = \frac{1}{2}\left(2\log_2 2 + \log_2 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3m-1}{2}\right) = \frac{3m+3}{4}$$

$$f(x) = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad (117$$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f^{-1}(-1) = -1 \qquad a,b = ?$$

$$(-1,-1) \in f^{-1}$$
$$(-1,-1) \in f$$

$$f(0) = a + b = 0$$

$$f(-1) = a + 2b = -1$$

$$a - b = 1 - (-1) = 2$$

$$b = -1 \quad , \quad a = 1$$

(118

$$1,1,1,1,1,1,1,1,0 \Longrightarrow \sigma^2 = \frac{8}{9}$$

$$\Longrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(119

$$\bar{X}' = \bar{X} + 2 \qquad \bar{X}' - Q_2' = \bar{X} - Q_2 = 0$$

$$Q_2' = Q_2 + 2$$

(120

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^2]} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \overset{Hop}{=} \lim_{x \to 2} \frac{2x}{3x^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۱۳۱)

$$\lim_{x\to ۱^+} ۴-[x]=۳ \;,\; \lim_{x\to ۱^+} g(x)=۲$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|} \Rightarrow ax^۲+bx+c=a(x-۱)^۲$$

$$\sqrt{ax^۲+bx+c}=\sqrt{a}\,|x-۱| \Rightarrow \sqrt{a}=۲ \;,\; a=۴$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) \sim \frac{\sqrt{a}\,x}{x}=\sqrt{a}=۲$$

۱۳۲)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}}\right)^۳=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۳=\frac{۱}{۲۷}$$

۱۳۳)

$$۴y-۳x=n \Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x+\frac{n}{۴}$$

$$y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳} \Rightarrow y'=\frac{(۲x+m)(x+۳)-(۱)(x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲}$$

$$f'(۱)=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{(۲+m)(۴)-(۱+m+۱)}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow ۸+۴m-m-۲=۱۲ \Rightarrow ۶+۳m=۱۲ \Rightarrow m=۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}+\frac{n}{۴}=\frac{۱+۲\times۱+۱}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۴}+\frac{n}{۴}=۱ \Rightarrow \frac{n}{۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow n=۱$$

$$m+n=۳$$

۱۲۴) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f(0) = 4 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

با توجه به نمودار در $x = 0$ max داریم لذا طول نقطه‌ی min برابر $\overset{\alpha}{\frac{-2a}{3}}$

$\left(\alpha + \beta = \frac{-2a}{3} \quad \alpha = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{2a}{3}\right)$ توضیح اضافی

مختصات اکسترمم در معادله صدق می‌کند.

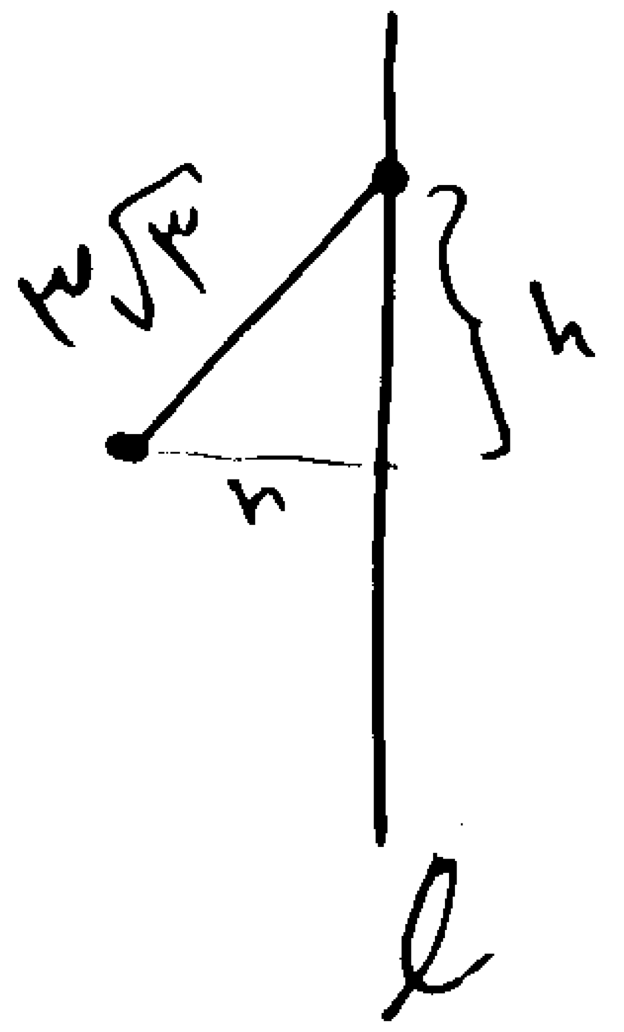
$$0 = \left(-\frac{2a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 + 4$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{27}a^3 + \frac{4}{9}a^3 = -4$$

$$\Rightarrow a^3 = \frac{-4}{\frac{-8}{27} + \frac{4}{9}} = \frac{-4/1}{4/27} = -27 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2a}{3} = -\frac{2}{3} \times -3 = \boxed{+2}$$ طول نقطه‌ی min

۱۲۵)



$$h^2 + r^2 = 27$$

$$V_{max} = \frac{1}{3}(r^2\pi)h$$

$$\Rightarrow r^2 = 27 - h^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\pi(27 - h^2)h$$

$$f = 27h - h^3 \Rightarrow f' = 27 - 3h^2 = 0$$

$$\Rightarrow 27 = 3h^2 \Rightarrow h = 3$$

۱۲۶) کل حالات

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{3!}\ \cancel{4!}} = 35$$

زیست نباشد و ریاضی باشد $= \binom{5}{3} = 10$

زیست باشد و فیزیک باشد $= \binom{5}{2} = 10$

$$35 - 10 - 10 = 35 - 20 = 15$$

۱۲۷)

$A =$ ابتلا $\quad P(A) = 0/08$

$B =$ بهبودی $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

A و B مستقل هستند

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

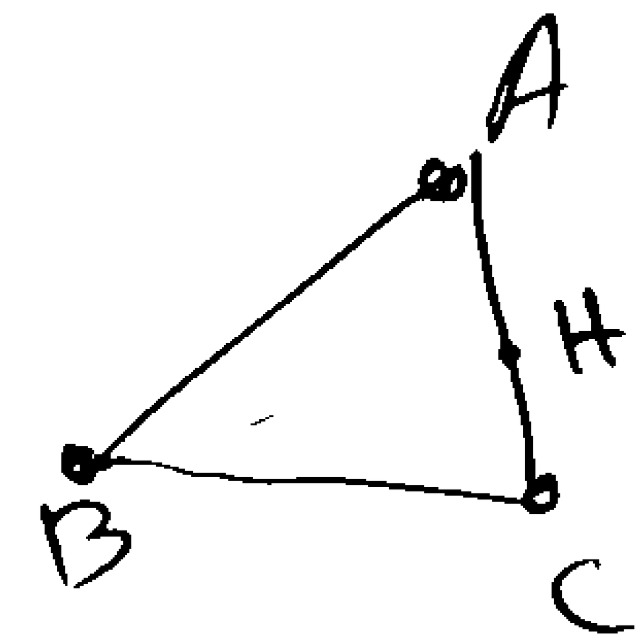
$$\left(\frac{8}{100} \times \frac{1}{2}\right) \times 100 = 4\ \%$$

(۱۲۸

$AB: y+2x=7$

$AC: 4y-3x=7$

$BC: 2y-7x=-19$



B تلاقی AB و BC

$$\begin{cases} y+2x=7 \\ 2y-7x=-19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2y-4x=-14 \\ 2y-7x=-19 \end{cases} \Rightarrow -11x=-33$$

$x=3$, $y=\cancel{4}1$

$x=3, y=1$

۱۲۹) چون شرط‌هایی روی مثلث ثابت است بدون کم شدن از کلیت می‌توان مثلث را مثلث متساوی الاضلاع در نظر گرفت

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BCE}}}{S_{BDE}} = \frac{12}{5} = 2.4$$

۱۳۰) $c=12$, $2b=18$

$a^2=c^2+a^2 \Rightarrow a^2=144+81 \Rightarrow a^2=225$

$\Rightarrow a=15$, $e=\frac{c}{a}=\frac{12}{15}=\frac{\cancel{12}4}{5}=\frac{8}{10}$