سؤال ۱۰۱ گزینه‌ی ۲

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}} \times \frac{4-\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}} = \sqrt[4]{\frac{4-\sqrt{7}}{9}}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{7}} = \sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{8+2\sqrt{7}}$$

$$\frac{\text{اول}}{\text{دوم}} \rightarrow \sqrt[4]{\frac{18}{9}} = \sqrt[4]{2}$$

سوال ۱۰۲ گزینه‌ی ۴

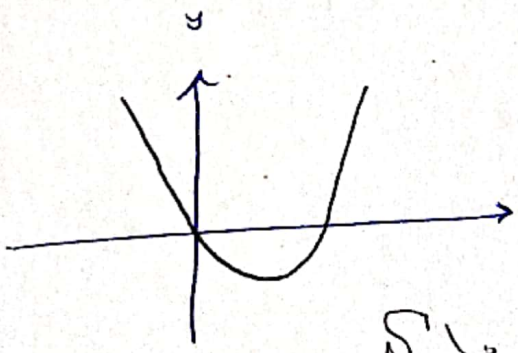
$$\begin{cases} a_5 = 8 \\ a_{10} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + 4d = 8 \\ a_1 + 9d = 5 \end{array} \quad \text{تفریق}$$

$$5d = -3 \Rightarrow d = -\frac{3}{5}$$

$$a = 8 + 12/5 = 52/5$$

$$a_{16} = a_1 + 15d = \frac{52}{5} + \frac{15 \times (-3)}{5} = \frac{7}{5} = 1/4$$

سؤال ۱۰۳ گزینه‌ی ۲



$$y = ax^2 + (3+2a)x$$

دهانه رو به بالا $a > 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow -b/a \Rightarrow b < 0$$

$$\Rightarrow 3 + 2a < 0$$

$$a < -3/2 \Rightarrow a > 0 \text{ یا } a < -3/2$$

هیچ اشتراکی ندارد

سؤال ۴، ۱
تمرینی ۴

$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ $\begin{cases} 4-2x=0 \Rightarrow x=2 \\ 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$4-2x$		+		+	0	−	
$3x+1$		−	0	+		+	
		−	∄	+	0	−	

$\Rightarrow x \in (-\frac{1}{3}, 2]$

$3x \in (-1, 6] \Rightarrow$

$[3x] \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 8 عضو دارد

سؤال ۵، ۱
تمرینی ۳

$f(x) = b - 3ax$ (ax: عنصر) $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = b$

$g(x) = c - (3b-3)x \xrightarrow{\text{ثابت}} 3b-3=0 \Rightarrow b=1$

$f+g=5 \xrightarrow[\text{ثابت}]{g, f} b+c=5 \Rightarrow 1+c=5 \Rightarrow c=4$

$b.c = 4 \times 1 = 4$

سؤال ۶، ۱
تمرینی ۴

$f(x) \xrightarrow{\text{رسم منحنی } [-1, 2]} y = 4(x+2) - (x+2)^2$

$y = 4x + 8 - x^2 - 4x - 4$

$4 - x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow 4 = 4x \xrightarrow{\div 4} x = 1$

$y = 4(1+2) - (1+2)^2 = 12 - 9 = 3 \Rightarrow y = 3$

$A(x, y) \Rightarrow (1, 3)$

$OA = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

سؤال ۱۰۷
گزینه ۳

$3x^2 - ax + 4 = 0$ $\quad \beta = 3\alpha$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $= \alpha\beta = \alpha \times 3\alpha = 3\alpha^2$

مجموع ریشه‌ها $= \alpha + \beta = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$

$P = c/a = 4/3$ & $S = -b/a = 9/3$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\Rightarrow 3\alpha^2 = 4/3 \Rightarrow \alpha^2 = 4/9 \Rightarrow \alpha = \pm 2/3$

مجموع ریشه‌ها $\Rightarrow 4\alpha = 9/3 \Rightarrow$

$\alpha = 2/3 \Rightarrow 8/3 = 9/3 \Rightarrow a = 8$

$\alpha = -2/3 \Rightarrow -8/3 = 9/3 \Rightarrow a = -8$

اختلاف مقادیر $a = 8 - (-8) = 16$ ✓

سؤال ۱۰۸
گزینه 3

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{9-(x-1)} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

$\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}$

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$ طرفین وسطین

$$-2(x-1)(\sqrt{x+1}) = (x-1)(10-x)$$

طرفین بر $x-1$ تقسیم

$$2\sqrt{x+1} = x - 10$$

$$4x + 4 = x^2 - 20x + 100$$

مرتب کردن $\Longrightarrow x^2 - 24x + 96 = 0$ $\quad \Delta > 0$

ساده‌سازی

معادله ۲ ریشه مثبت دارد
چون S و P هر دو مثبت هستند

سوال ۱۰۹ — گزینه ۲

۱) $f^{-1}(-1) = -2 \Rightarrow f(-2) = -1$ ✗

۲) $f^{-1}(\frac{9}{8}) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$ ✓

۳) $f^{-1}(1) = 2 \Rightarrow f(2) = 1$ ✗

۴) $f^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{11}{8} \Rightarrow f(-\frac{11}{8}) = -\frac{1}{2}$ ✗

سوال ۱۱۰ — گزینه ۴

$f(x) = 2x \Rightarrow 2x = M \Rightarrow x = \frac{M}{2}$

$g(f(x)) = 5x^2 + 11 \Rightarrow g(M) = 5\frac{M^2}{4} + 11$

$\Rightarrow g(x-7) = \frac{5(x-7)^2}{4} + 11$

$g(x-7) = \frac{5(x^2 - 14x + 49) + 44}{4}$

$= \frac{5x^2 - 70x + 289}{4}$

کمینه

$x = \frac{70}{10} = 7 \Rightarrow g(7-7) = \frac{5(7)^2 - 70(7) + 289}{4} = \frac{44}{4} = 11$

سوال ۱۱۱ — گزینه ۱

تابع زوجی نزولی اکیداً با ضریب x^3 (منفی) باشد

$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < k$

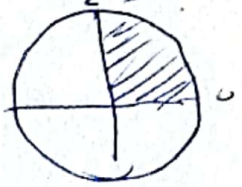
$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow$ مجموع = صفر ✓

سوال ۱۱۲

گزینه ۱

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$



بنابراین

$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0$

$\boxed{-2 < m < 1}$

	-2		1	
ω	$+$	$+$	0	$-$
r	$-$	0	$+$	$+$
	$-$	$+$		$-$

ω

سوال ۱۱۳

گزینه ۳

$2\sin^2 x + \cos^2 x = 4/3$

$\Rightarrow \sin^2 x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = 4/3$

$\sin^2 x + 1 = 4/3 \Rightarrow \sin^2 x = 1/3$

$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$m^2 + 1 = 3$

$m^2 = 2 \Rightarrow m = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow \tan x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan^2 x = 1/2$ ✓

سوال 114
تشریحی 3

$Max = 5 \Rightarrow |a| + c = 5$

$-|a| + c = 1$ جمع

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$ ✓

سوال 115
تشریحی 4

$8\cos x - \tan^2 x = 1$

$\Rightarrow 8\cos x = 1 + \tan^2 x \approx \frac{1}{\cos^2 x}$

$8\cos^3 x = 1 \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{8} \xrightarrow{\sqrt[3]{}} \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $[0, 2\pi]$ $x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}$

سوال 114
تشریحی 1

$\log_8^{18} = m \Rightarrow m = \frac{\log_4^{18}}{\log_4^8} = \frac{\log_4^{2\times 9}}{\log_{2^2}^{2^3}}$

$= \frac{\log_4^9 + \log_4^2}{\frac{3}{2}\log_2^2} = \frac{\log_4^9 + \log_{2^2}^2}{3/2} = \frac{\log_{2^2}^{3^2} + \frac{1}{2}\log_2^2}{3/2}$

$\frac{\log_2^3 + \frac{1}{2}}{3/2} = m \Rightarrow \log_2^3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}m \Rightarrow \log_2^3 = \frac{3}{2}m - 1$ *

$\log_4^{12} = \log_4^{4\times 3} = \log_4^4 + \log_4^3 = 1 + \log_{2^2}^3 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}\log_2^3$

* $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m - 1\right) + 1 = \frac{3}{4}m - \frac{1}{4} + 1$

$= \frac{3}{4}m + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(m+1)$ ☰

سؤال ۱۱۷
گزینه‌ی ۳

$(0,0) \Rightarrow 0 = a + b(1/2)^0 \Rightarrow a + b = 0$

$(-1,-1) \in f^{-1}$ $\quad -1 = a + b(1/2)^{-1} \Rightarrow a + 2b = -1$

$x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-b=0 \\ a+2b=-1 \end{cases}$ حل

$\boxed{b=-1}$

$-a-(-1)=0 \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$a-b = 1-(-1) = 2$ ✓

سؤال ۱۱۸
گزینه‌ی ۴

$\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{8(\pm 1)^2 + 0}{9} = 8/9$

$\sigma = \sqrt{8/9} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

سؤال ۱۱۹
گزینه‌ی ۱

$\text{میانه}_{new} = \text{میانه}_{old} + 2$

$\bar{x}_{new} = \bar{x}_{old} + 2$

اختلاف با رصد صفر

سؤال ۱۲۰
گزینه‌ی ۲

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x^3-8} \overset{\%}{=} \overset{Hop}{=} \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x}{3x^2} \Rightarrow \alpha/12 = 1/3$

$[(+2)^{+3}] = [8^+] = 8$

سوال ۱۴۱
سنجش ۳

$\lim_{x\to 1^+} (4-[x])g(x) = 6 \Rightarrow (4-1)^3 g(1^+) = 6$

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{a+b+c}}{(x-1)} = \frac{0}{0}$

$\sqrt{a(x-1)^2} = \sqrt{a}\,|x-1|$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{a}\,|x-1|}{|x-1|} = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Longrightarrow a = 4$

$4(x-1)^2 = 4x^2 - 8x + 4$

$a \quad b \quad c$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|} = \frac{\sqrt{9}x}{x} = 2$

سوال ۱۴۲
سنجش ۱

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3}{x}$

$= \left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^3 = \frac{1}{27}$

سوال ۱۳۵ تشریحی ۴

$m = 3/4$

$y'(1) = 3/4 \Rightarrow y' = \dfrac{(2x+m)(x+3) - (1)(x^2+mx+2)}{(x+3)^2}$

$y'(1) = \dfrac{(2+m)4 - (3+m)}{16} = 3/4$

طرفین را ضرب

$\dfrac{8+4m-3+m}{16} = 3/4 \Longrightarrow 16m + 32 - 12 - 4m = 48$

$12m = 29 \Rightarrow m = 2$

$y(1) = \dfrac{2+m}{4} \xrightarrow{m=2} \dfrac{2+2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \Rightarrow y(1) = 1$

$(1,1) \rightarrow y - 3x = n \Rightarrow 4(1) - 3(1) = n \Rightarrow \boxed{n = 1}$

$m + n = 2 + 1 = 3$ ✓

سوال ۱۳۶ تشریحی ۵

$y(0) = 4 \rightarrow c = 4$

$y'(0) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow b = 0$

$y'(\alpha) = 0 \rightarrow y' = 3\alpha^2 + 2a\alpha = 0 \Rightarrow \alpha(3\alpha + 2a) = 0$

$\alpha \neq 0 \Longrightarrow 3\alpha + 2a = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}a$

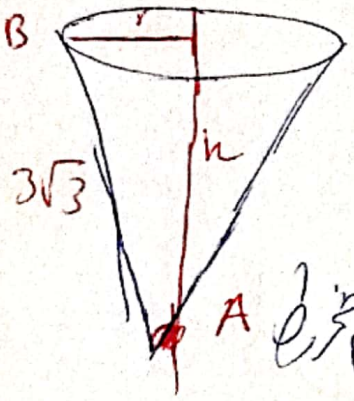
$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(-\frac{2}{3}a) = 0$

$\dfrac{-8a^3}{27} + \dfrac{4a^3}{9} + 4 = 0 \Rightarrow \dfrac{4a^3}{27} = -4$

$a^3 = -27 \Rightarrow \boxed{a = -3}$

$\alpha = \dfrac{-2a}{3} = \dfrac{-2(-3)}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ ☒

سؤال ۱۲۵
گزینه ی ۲



$$(3\sqrt{3})^2 = r^2 + h^2$$

$$r^2 = 27 - h^2 \quad (1)$$

حجم مخروط $= \frac{1}{3}\pi r^2 h \overset{\pi \simeq 3}{=\!=} r^2 h \quad (1)$

$$(27 - h^2)h = 27h - h^3$$

$$(27h - h^3)' \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{-27}{-3}$$

$$h^2 = 9 \Rightarrow h = \pm 3 \Rightarrow \boxed{h = +3}$$

سؤال ۱۲۶
گزینه ی ۴

مجموعه زیرمجموعه‌های 1 2 3 4 $\Rightarrow$ 7 تا

$$\text{زیست} + \binom{4}{3} = 4$$

$$\text{زیست و ریاضی} + \binom{4}{2} = 6$$

$$\text{ریاضی} + \binom{4}{3} = 4$$

1 2 3 4 یعنی همه انتخاب می‌شوند $\Rightarrow \binom{4}{4} = 1$

مجموع: $4 + 6 + 4 + 1 = 15$ ✓

سؤال ۱۲۷
گزینه ی ۴

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0/8 = \frac{P(A \cap B)}{0/5} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/4$$ ✓

سؤال ۱۱۸
گزینه ۱

$$AB \begin{cases} y+2x=7 \\ BC \end{cases} \begin{cases} 2y-7x=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ y=\frac{7x-19}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابر}} x=3,\ y=1$$

$$4y-3x-17=0$$

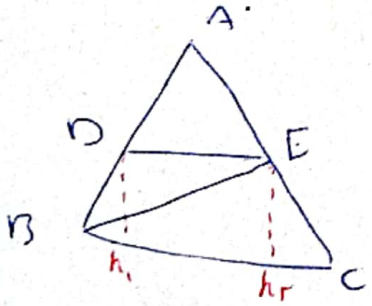
AC خط، B نقطه $(3,1)$

$$\Rightarrow d=\frac{|4(1)-3(3)-17|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\frac{22}{5}=\frac{44}{10}=4,4$$

سؤال ۱۱۹
گزینه ۴

تالس: $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{DE}{BC}=\frac{5}{12}$

نسبت مساحت‌ها $\Rightarrow \frac{S_{BEC}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{1}{2}\times BC\times h_1}{\frac{1}{2}\times DE\times h_2}=\frac{12}{5}=2,4$



سوال ۱۳۰
گزینه ۲

قطر کوتاه $2b = 18 \Rightarrow b = 9$

$c = 12$

کانونها $\begin{cases} (c,0) \\ (0,-c) \end{cases}$

$a^2 = b^2 + c^2 = 9^2 + 12^2$

$a^2 = 225$

$a = 15$

$e = c/a = 12/15 = 4/5 = 0.8$