

سوال ۱۰۱ گزینه ۲

$$(4 + \sqrt{7})^{-1} = \frac{1}{4 + \sqrt{7}} \times \frac{4 - \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}} = \frac{4 - \sqrt{7}}{9} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{18} = \frac{(1 - \sqrt{7})^2}{18}$$

$$\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt{7}} = \sqrt[4]{\frac{(1 - \sqrt{7})^2}{18}} \sqrt{1 + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{\sqrt{7} - 1} \sqrt{1 + \sqrt{7}}}{\sqrt[4]{18}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{18}} = \frac{\sqrt[4]{6^2}}{\sqrt[4]{18}} = \sqrt[4]{2}$$

سوال ۱۰۲ گزینه ۴

$$a_n = an + b \rightarrow \begin{cases} a_5 = 5a + b = 8 \\ a_{10} = 10a + b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -0.6 \\ b = 11 \end{cases} \rightarrow a_{16} = 16a + b = -9.6 + 11 = 1.4$$

سوال ۱۰۳ گزینه ۱

$$a > 0$$

$$\Delta \leq 0 \rightarrow (3 + 2a)^2 - 4a \leq 0 \rightarrow 4a^2 + 8a + 9 \leq 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(4)(9) = -80 < 0$$

هیچ مقدار a

سوال ۱۰۴ گزینه ۴

$$\frac{4 - 2x}{3x + 1} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac{1}{3} < x \leq 2 \rightarrow -1 < 3x \leq 6 \rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

سوال ۱۰۵ گزینه ۳

$$f(x) = b - 3ax \rightarrow -3a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow f(x) = b$$

$$g(x) = c - (3b - 3)x \rightarrow -(3b - 3) = 0 \rightarrow b = 1 \rightarrow g(x) = c$$

$$f + g = 5 = b + c \rightarrow c = 5 - b = 5 - 1 = 4 \rightarrow bc = 1 \times 4 = 4$$

گزینه ۴

سوال ۱۰۶

$$f(x+2) = 4(x+2) - (x+2)^2 = 4 - x^2$$

$$f(x) = f(x+2) \rightarrow 4x - x^2 = 4 - x^2 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1 \rightarrow f(1) = 3$$

$$d = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

گزینه ۳

سوال ۱۰۷

$$P = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} \rightarrow (3\alpha)(\alpha) = \frac{4}{3} \rightarrow 3\alpha^2 = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow 3\alpha = 2 \rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{8}{3} = \frac{a}{3} \rightarrow a = 8 \\ \alpha = -\frac{2}{3} \rightarrow 3\alpha = -2 \rightarrow S = \frac{-b}{a} = -\frac{8}{3} = \frac{a}{3} \rightarrow a = -8 \end{cases} \rightarrow 8 - (-8) = 16$$

گزینه ۲

سوال ۱۰۸

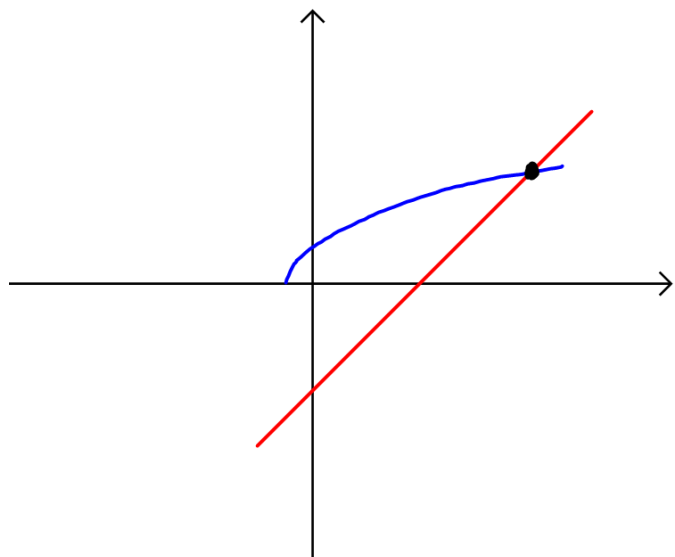
$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\rightarrow \frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1}+3)(3-\sqrt{x-1})} = \sqrt{x-1} \rightarrow \frac{-2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{10-x} = \sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{x \neq 1} \frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1$$

$$\rightarrow 2\sqrt{x+1} = x - 10$$

یک ریشه مثبت



گزینه ۲

سوال ۱۰۹

$$y = x^3 - x + 1 \xrightarrow{\text{وارون}} x = y^3 - y + 1$$

فقط گزینه ۲ در تابع وارون صدق می‌کند.

گزینه ۴

سوال ۱۱۰

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = 5x^2 + 11$$

$$\xrightarrow{2x=t \rightarrow x=\frac{t}{2}} g(t) = 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 11 = \frac{5}{4}t^2 + 11 \xrightarrow{t=x-7} g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11$$

$$x_{\min} = 7, \quad y_{\min} = 11$$

گزینه ۱

سوال ۱۱۱

$$f'(x) = 3(-9 + k^2)x^2 < 0 \rightarrow -9 + k^2 < 0 \rightarrow k^2 < 9 \rightarrow -3 < k < 3 \rightarrow k = 0, \pm 1, \pm 2$$

گزینه ۱

سوال ۱۱۲

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < +\infty$$

$$\rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < m < 1$$

گزینه ۳

سوال ۱۱۳

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \xrightarrow{\div \cos^2 x} 2 \tan^2 x + 1 = \frac{4}{3} \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 2 \tan^2 x + 1 = \frac{4}{3} (1 + \tan^2 x)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 6 \tan^2 x + 3 = 4 + 4 \tan^2 x \rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳

سوال ۱۱۴

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = 5 \\ y_{min} = -|a| + c = 1 \end{cases} \rightarrow c = 3$$

گزینه ۴

سوال ۱۱۵

$$8 \cos x - \tan^2 x = 1 \rightarrow 8 \cos x = 1 + \tan^2 x \rightarrow 8 \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

گزینه ۱

سوال ۱۱۶

$$\log_8 18 = \log_{2^3} 18 = \frac{1}{3} \log_2 (3^2 \times 2) = \frac{1}{3} (2 \log_2 3 + 1) = m \rightarrow 2 \log_2 3 + 1 = 3m$$

$$\rightarrow \log_2 3 = \frac{3m - 1}{2}$$

$$\log_4 12 = \log_{2^2} 12 = \frac{1}{2} \log_2 (2^2 \times 3) = \frac{1}{2} (\log_2 3 + 2) = \frac{1}{2} \left(\frac{3m - 1}{2} + 2 \right) = \frac{3(m + 1)}{4}$$

گزینه ۳

سوال ۱۱۷

$$f(0) = 0 \rightarrow a + b \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 0 \rightarrow a + b = 0$$

$$f^{-1}(-1) = -1 \rightarrow f(-1) = -1 \rightarrow a + b \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = -1 \rightarrow a + 2b = -1$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow a - b = 2$$

گزینه ۴

سوال ۱۱۸

چون مجموع اختلافات داده‌ها از میانگین باید صفر باشد، واضح است که اختلاف چهار داده از میانگین برابر 1 و اختلاف چهار داده نیز -1 است.

$$\sigma^2 = \frac{4(1)^2 + 4(-1)^2 + 0}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow \sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

گزینه ۱

سوال ۱۱۹

چون داده‌ها اعداد حسابی هستند، میانگین و میانه باهم برابر است. با افزودن ۲ واحد به تمام داده‌ها باز هم این قاعده برقرار است، بنابراین اختلاف میانه و میانگین صفر است.

گزینه ۲

سوال ۱۲۰

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{3x^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳

سوال ۱۲۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = 6 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} 3g(x) = 6 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - 1|} = 2$$

چون مخرج کسر به ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود اما جواب حد یک عدد شده است، بنابراین باید صورت کسر نیز صفر شود.

$$ax^2 + bx + c = a(x - 1)^2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{a(x - 1)^2}}{|x - 1|} = 2 \rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x - 1|}{|x - 1|} = 2$$

گزینه ۱

سوال ۱۲۲

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

گزینه ۴

سوال ۱۲۳

$$y(1) = \frac{m+2}{4}$$

$$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+1)}{(x+3)^2} \rightarrow y'(1) = \frac{4m+8-m-2}{16} = \frac{3m+6}{16}$$

$$4y - 3x = n \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \rightarrow y'(1) = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3m+6}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow 3m+6 = 12 \rightarrow m = 2$$

$$y(1) = 1 \rightarrow y - 1 = \frac{3}{4}(x-1) \rightarrow 4y - 3x = 1 \rightarrow n = 1 \rightarrow m + n = 3$$

گزینه ۲

سوال ۱۲۴

$$f(0) = 4 \rightarrow c = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow b = 0$$

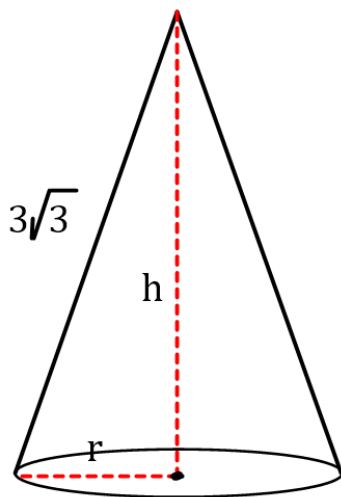
$$x_{min} = \beta$$

$$f'(\beta) = 0 \rightarrow 3\beta^2 + 2a\beta = 0 \rightarrow \beta(3\beta + 2a) = 0 \rightarrow \begin{cases} \beta = 0 & \text{غقق} \\ \beta = -\frac{2a}{3} \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{2a}{3}\right) = 0 \rightarrow -\frac{8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \rightarrow \frac{4a^3}{27} = -4 \rightarrow a^3 = -27 \rightarrow a = -3 \rightarrow \beta = 2$$

گزینه ۲

سوال ۱۲۵



$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2 \rightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(27 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(27h - h^3)$$

$$\rightarrow V' = \frac{1}{3}\pi(27 - 3h^2) = 0 \rightarrow 27 - 3h^2 = 0$$

$$\rightarrow 3h^2 = 27 \rightarrow h^2 = 9 \rightarrow h = 3$$

گزینه ۳

سوال ۱۲۶

واضح است که ریاضی و فیزیک نمی‌توانند هم‌زمان انتخاب شوند. بنابراین برای ریاضی و فیزیک یکی از حالات زیر ممکن است اتفاق بیفتد.

الف) فقط ریاضی انتخاب شود. در این حالت فیزیک انتخاب نمی‌شود، اما زیست حتماً انتخاب می‌شود. از بین ۴ کتاب دیگر ۲ کتاب انتخاب می‌شود.

$$\binom{4}{2} = 6$$

ب) فقط فیزیک انتخاب شود. در این حالت ریاضی و زیست انتخاب نمی‌شوند. از بین ۴ کتاب دیگر ۳ کتاب انتخاب می‌شود.

$$\binom{4}{3} = 4$$

ج) ریاضی و فیزیک انتخاب نشوند. در این حالت شرط خاصی برای زیست وجود ندارد، می‌تواند انتخاب شود یا نشود.

$$\binom{5}{4} = 5$$

$$6 + 4 + 5 = 15$$

گزینه ۴

سوال ۱۲۷

$$P(\text{ابتلا}) = 0.08$$

$$P(\text{ابتلا} | \text{بهبود}) = 0.5$$

$$P(\text{ابتلا} \cap \text{بهبود}) = P(\text{ابتلا} | \text{بهبود}) P(\text{بهبود}) = 0.5 \times 0.08 = 0.04 \quad 0.04 \times 100 = 4\%$$

گزینه ۱

سوال ۱۲۸

$$\begin{cases} AB: & y + 2x = 7 \\ BC: & 2y - 7x = -19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow B(3,1)$$

$$BH = \frac{|4(1) - 3(3) - 17|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{22}{5} = 4.4$$

گزینه ۴

سوال ۱۲۹

$$DE \parallel BC \rightarrow h_{BDE} = h_{BCE}$$

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{BC}{DE} = \frac{12}{5} = 2.4$$

گزینه ۲

سوال ۱۳۰

$$\begin{cases} c = 12 \\ 2b = 18 \rightarrow b = 9 \end{cases} \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = 15$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = 0.8$$

$$\rightarrow y = 24$$